

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Г.А. СИКОРСКАЯ, Г.Н. ЛОКТИОНОВА

ПРАКТИКУМ ПО АЛГЕБРЕ И
ГЕОМЕТРИИ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов транспортного факультета

Оренбург 2008

УДК 51 (075.8)

ББК 22.1я73

С35

Рецензенты

кандидат физико-математических наук, доцент Герасименко С.А.

кандидат физико-математических наук, доцент Зубова И.К.

С 35 Сикорская Г.А.
Практикум по алгебре и геометрии: учебное пособие для
студентов транспортного факультета / Г.А. Сикорская,
Г.Н. Локтионова. Оренбург: ГОУ ОГУ, 2008. - 354 с.
ISBN

«Практикум по алгебре и геометрии» предназначен для проведения практических занятий по курсу алгебры и геометрии

Практикум состоит из краткого обзора теории, подробного изложения решения задач и задач для самостоятельного решения.

«Практикум по алгебре и геометрии» предназначен для студентов дневной формы обучения специальностей 190601 – Автомобили и автомобильное хозяйство, 190603 – Сервис транспортных и технологических машин и оборудования (по отраслям), 190702 – Организация и безопасность движения, 200503 – Стандартизация и сертификация, 220501 – Управление качеством.

Поскольку объем материала, определяемый стандартом, на специальностях факультета несколько различен, то задачи, предлагаемые студентам на практических занятиях и в качестве домашней работы, определяются преподавателем избирательно для каждой отдельной взятой специальности (а может быть и группы студентов).

В практикуме же предлагается спектр заданий, достаточный для реализации образовательного процесса любой из специальностей транспортного факультета.

С¹⁶⁰²⁰¹⁰⁰⁰⁰

ISBN

ББК 22.1я73

©Сикорская Г.А., 2008

Локтионова Г.Н., 2008

©ГОУ ОГУ, 2008

Содержание

Предисловие.....	4
1 Множества и операции над ними	5
1.1 Задачи для самостоятельного решения.....	14
2 Комплексные числа.....	17
2.1 Задачи для самостоятельного решения.....	37
3 Многочлены одной переменной.....	41
3.1 Задачи для самостоятельного решения.....	56
4 Матрицы. Определители.....	59
4.1 Задачи для самостоятельного решения	95
5 Системы линейных уравнений.....	99
5.1 Задачи для самостоятельного решения.....	123
6 Векторная алгебра.....	126
6.1 Задачи для самостоятельного решения	154
7 Аналитическая геометрия на плоскости.....	157
7.1 Задачи для самостоятельного решения.....	198
8 Аналитическая геометрия в пространстве.....	201
8.1 Задачи для самостоятельного решения.....	236
9 Линейное пространство. Линейное подпространство.....	241
9.1 Задачи для самостоятельного решения.....	267
10 Евклидово и унитарное пространство	269
10.1 Задачи для самостоятельного решения	283
11 Линейные операторы	285
11.1 Задачи для самостоятельного решения.....	307
12 Квадратичные формы	312
12.1 Задачи для самостоятельного решения	330
13 Геометрические объекты дифференциальной геометрии	333
13.1 Задачи для самостоятельного решения	350
Список использованных источников.....	353

Предисловие

Уважаемые студенты транспортного факультета, для успешного изучения курса алгебры и геометрии Вам предоставляется «практикум» по этому разделу математики.

Данный практикум разработан на основе лекций по курсу алгебры и геометрии автора Сикорской Г.А.

Учебный материал подаваемый в той же последовательности, что и в лекциях, содержит очень краткое, на уровне формул и основных определений, освещение теоретического материала определенного раздела и подробные решения постепенно усложняющихся задач.

В заключении изучения каждой темы авторы практикума предлагают Вам задачи для самостоятельного решения. Это те задачи, которые в процессе обучения будут задаваться Вам в качестве домашней подготовки к практическим занятиям. Все задания, для удобства, тут же снабжены ответами.

Надеемся, что предлагаемое пособие поможет Вам, нашим студентам, успешно справиться с освоением курса алгебры и геометрии.

Поскольку предлагаемое пособие выпускается впервые, то мы, авторы, искренне надеемся на Ваше участие в улучшении пособия и будем благодарны за любые пожелания и замечания.

С уважением, Сикорская Г.А.,
Локтионова Г.Н.

1 Множества и операции над ними

Понятие множества не определяется, а лишь иллюстрируется примерами. Например, можно говорить о множестве яблок в мешке, множестве натуральных чисел, множестве квадратов на плоскости и т. д. Множество считается заданным, если о каждом элементе можно однозначно сказать, принадлежит он этому множеству или нет. Обычно множества обозначают прописными латинскими буквами, а их элементы — строчными буквами. Если элемент x принадлежит множеству X , то пишут $x \in X$, в противном случае: $x \notin X$.

Например, если X — множество русских слов из словаря В. И. Даля, то «семья» $\in X$, а «sieben» $\notin X$, $8 \notin X$;

если N — множество натуральных чисел, то $4 \in N$, $0,3 \notin N$, $\sqrt{2} \notin N$, Сириус $\notin N$.

Два множества называются **равными**, если они состоят из одних и тех же элементов. Например, множество равносторонних треугольников равно множеству равноугольных треугольников, а множество параллелограммов — множеству четырехугольников, имеющих центр симметрии. Если множества X и Y равны, то пишут $X=Y$.

Множество, не содержащее ни одного элемента (например, множество пятилетних гроссмейстеров по шахматам или множество натуральных корней уравнения $4x^2 - 1 = 0$), называют **пустым множеством**. Его обозначают $\emptyset$.

Множество яблок в мешке, рыб в океане, видов живых существ **конечны** — количество их элементов можно выразить натуральным числом. Множества натуральных чисел, ромбов на плоскости, шаров в пространстве **бесконечны**. Конечное множество можно задать *списком* его элементов. Два списка элементов одного и того же множества X могут отличаться друг от друга лишь порядком элементов. Например, $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2\}$ — списки одного и того же множества, т.е. $\{1, 2, 3\} = \{3, 1, 2\}$.

В дальнейшем мы будем обозначать число элементов конечного множества X через $n(X)$, а множество X , содержащее n элементов, будем называть **n -элементным множеством**.

Задача 1.1 Определить размерность множества простых чисел, меньших двадцати.

Решение. Пусть X — множество простых чисел, меньших, чем 20. Оно состоит из восьми чисел: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 и 19. Поэтому $n(X) = 8$, а X является восьмиэлементным множеством.

Если элементы конечного множества как-либо перенумерованы, мы будем говорить, что это множество **упорядочено**. Одно и то же множество можно упорядочивать различными способами. Например, множество учащихся в классе можно упорядочить по росту (как по возрастанию, так и по убыванию), по весу, в алфавитном порядке фамилий и т. д.

Бесконечное множество нельзя задать списком. Его задают обычно **характеристическим свойством**, т. е. свойством, которым обладают все элементы множества и не обладают элементы, не принадлежащие этому множеству. Множество, заданное характеристическим свойством $P(x)$,

обозначают $\{x|P(x)\}$. Например, запись $\{x|x^2 - 7x + 12 = 0\}$ обозначает множество корней уравнения $x^2 - 7x + 12 = 0$ (т. е. множество $\{3, 4\}$), а запись $\{\Delta ABC|AB = AC = BC\}$ - множество равносторонних треугольников.

Если каждый элемент множества X является в то же время элементом множества Y , то говорят, что X – *часть* или, иначе, *подмножество* множества Y . В этом случае пишут: $X \subset Y$. Например, множество квадратов является подмножеством множества ромбов, а множество ромбов – подмножеством множества параллелограммов. Множество натуральных чисел, делящихся на 10, является подмножеством множества четных натуральных чисел.

Очевидно, что если $X \subset Y$ и $Y \subset Z$, то $X \subset Z$. Если $X \subset Y$ и $Y \subset X$, то $X = Y$. Далее, для любого множества X верны включения $\emptyset \subset X$ и $X \subset X$.

Пересечением множеств X и Y называется множество $X \cap Y$, состоящее из элементов, которые принадлежат как X , так и Y .

Например, множество квадратов является пересечением множества прямоугольников с множеством ромбов, а множество правильных шестиугольников – пересечением множества шестиугольников с множеством правильных многоугольников.

Объединением множеств X и Y называют множество $X \cup Y$, состоящее из элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств X, Y .

Например, множество треугольников является объединением множеств косоугольных и прямоугольных треугольников.

Аналогично определяются операции пересечения и объединения над любыми совокупностями множеств.

Разностью множеств X и Y называется множество $X \setminus Y$, состоящее из всех элементов множества X , не принадлежащих множеству Y . Если $Y \subset X$, то разность $X \setminus Y$ называют **дополнением** множества Y в множестве X и обозначают $\overline{Y}_x$.

Например, разностью множества четных чисел и множества чисел, кратных 3, является множество четных чисел, не делящихся на 6. Оно является объединением множества четных чисел, дающих при делении на 6 остаток 2, и множества четных чисел, дающих при делении на 6 остаток 4. Дополнением к множеству квадратов в множестве ромбов является множество ромбов с хотя бы одним острым углом. А дополнением того же множества квадратов в множестве прямоугольников является множество прямоугольников с неравными соседними сторонами.

На рисунке 1, а), б), в) изображены схематически операции над множествами X и Y . Такие изображения множеств и операций над ними называют *диаграммами Эйлера - Венна*.

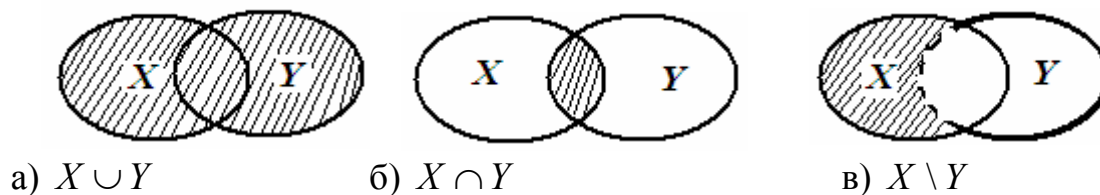


Рисунок 1

Задача 1.2 Пусть множества A, B, C и D соответственно заданы списками $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$, $D = \{2, 3, 4, 5, 6\}$.

Задайте списком множества

- а) $(A \setminus C) \cup (B \setminus D)$, б) $(A \cup B) \cap (C \setminus D)$, в) $C \setminus A \cup B \cap D$,
г) $(D \cup A) \setminus (B \cap C)$.

Решение.

а) Задание выполняем по действиям:

1) Находим $A \setminus C$, т.е. выписываем все элементы A без элементов множества C , получаем $A \setminus C = \{5, 6, 7\}$.

2) Теперь найдем $B \setminus D$, (т.е. B без D), $B \setminus D = \{7, 8, 9\}$.

3) В заключении складываем множества $(A \setminus C)$ и $(B \setminus D)$, т.е. составляем множество из всех элементов, входящих в оба множества.

Получим,

$$(A \setminus C) \cup (B \setminus D) = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

$$\text{б) } (A \cup B) \cap (C \setminus D).$$

Аналогично, предыдущему имеем:

$$1) A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}.$$

$$2) C \setminus D = \{-3, -2, -1, 0, 1\}.$$

$$3) (A \cup B) \cap (C \setminus D) = \{0, 1\}.$$

$$\text{в) } C \setminus A \cup B \cap D$$

Выполняем последовательно все необходимые действия

$$1) C \setminus A = \{-3, -2, -1\} = K_1.$$

$$2) K_1 \cup B = \{-3, -2, -1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\} = K_2.$$

3) Теперь полученное K_2 умножим на D , т.е. составим список *общих* элементов этих множеств:

$$K_2 \cap D = \{3, 4, 5, 6\}.$$

$$\text{Итак, } C \setminus A \cup B \cap D = \{3, 4, 5, 6\}.$$

$$\text{г) } (D \cup A) \setminus (B \cap C).$$

Аналогично выполненным заданиям, «работаем» по действиям

$$1) D \cup A - \text{все элементы, входящие во множество } D \text{ и } A.$$

$$D \cup A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} = K_1.$$

$$2) B \cap C - \text{«общее» множеств } B \text{ и } C.$$

$$B \cap C = \{3, 4\} = K_2.$$

3) $(D \cup A) \setminus (B \cap C) = K_1 \setminus K_2$, т.е. составляем список элементов множества K_1 , которые в свою очередь *не являются* элементами множества K_2 (т.е. K_1 , без K_2), имеем

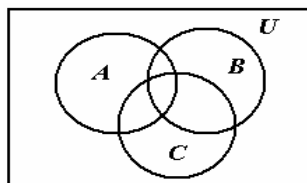
$$K_1 \setminus K_2 = \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}.$$

$$\text{Ответ. а) } (A \setminus C) \cup (B \setminus D) = \{5, 6, 7, 8, 9\}; \text{ б) } (A \cup B) \cap (C \setminus D) = \{0, 1\};$$

$$\text{в) } C \setminus A \cup B \cap D = \{3, 4, 5, 6\}; \text{ г) } (D \cup A) \setminus (B \cap C) = \{0, 1, 2, 5, 6, 7\}.$$

Теперь рассмотрим задания выполнения действий над множествами с помощью кругов Эйлера – Венна.

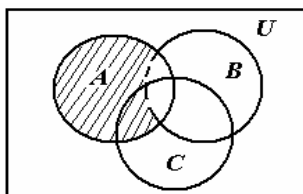
Задача 1.3 Пусть множества A , B и C расположены в универсальном множестве U следующим образом (круги Эйлера-Венна).



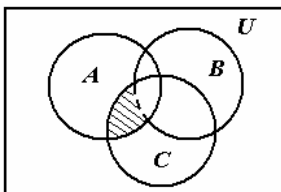
а) Определить множество $A \setminus B \cap C$.

Решение. Разобьем наше задание на два этапа. Сначала находим, (и соответственно, заштриховываем на рисунке) $A \setminus B$, а затем этот результат умножим на C .

1) $A \setminus B$



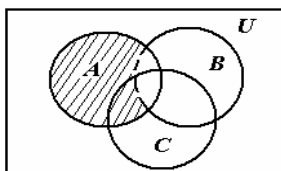
2) $(A \setminus B) \cap C$.



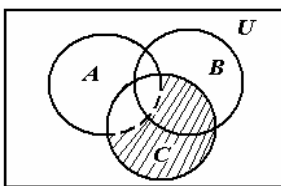
б) Определить множество $(A \setminus B) \cup (C \setminus A)$.

Решение.

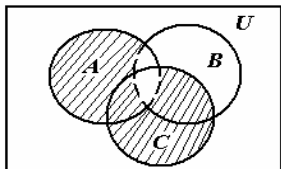
1) $A \setminus B$



2) $C \setminus A$



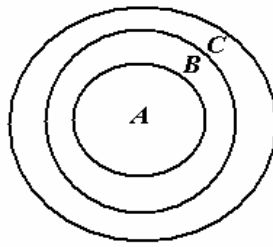
3) $(A \setminus B) \cup (C \setminus A)$



Задача 1.4 Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества A , B , C , если:

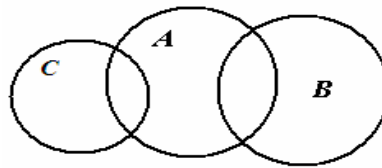
а) $A \subset B$ и $B \subset C$.

Решение. A - подмножество B , т.е. A полностью вложено в B , но $B \subset C$, т.е. B вложено в C . Таким образом, получаем

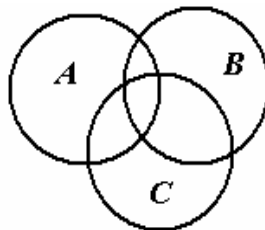


б) $A \cap B \neq \emptyset, A \cap C \neq \emptyset$.

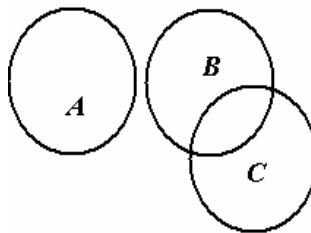
Решение. Располагаем множества A, B и A, C так, чтобы их пересечение было не пусто, т.е., чтобы они имели общие элементы, например, так



Поскольку же в условии задания, ничего не сказано о пересечении множеств B и C , то результат может быть и таким



в) $A \cap B = \emptyset, A \cap C = \emptyset, B \cap C \neq \emptyset$.



Т.е. множества A и B , A и C не пересекаются, а множества B и C пересекаются (имеют общие элементы).

Алгебра множеств

Операции над множествами обладают свойствами, которые отчасти напоминают свойства действий над числами, а отчасти отличны от этих свойств. Именно:

I. Для любых множеств X и Y выполняются равенства

1) $X \cup Y = Y \cup X$ и 1') $X \cap Y = Y \cap X$

(аналог тождеств $x + y = y + x$ и $xy = yx$).

II. Для любых трех множеств X, Y, Z выполняются равенства

$$2) (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) \text{ и } 2') (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$$

(аналог тождеств $(x + y) + z = x + (y + z)$ и $(xy)z = x(yz)$), а также равенства:

$$3) (X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$$

и $3') (X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$

(из этих равенств одно можно считать аналогом тождества $(x + y)z = xz + yz$, но второе тождество не имеет аналога в обычной алгебре).

В случае, когда все рассматриваемые множества являются частями одного и того же универсального множества U , результаты выполнения операций пересечения и объединения снова дают подмножество из того же множества. Дополнение к любой части множества U снова является частью того же множества. При фиксированном универсальном множестве дополнение к X обозначают $\bar{X}$, опуская индекс U . Отметим следующие свойства операции дополнения:

III. Для любого множества $X \subset U$ имеет место равенство

$$4) \overline{(\bar{X})} = X.$$

IV. Выполняются равенства

$$5) \bar{\emptyset} = U \text{ и } 5') \bar{U} = \emptyset.$$

V. Для любых двух множеств X и Y из U имеем:

$$6) \overline{(X \cap Y)} = \bar{X} \cup \bar{Y} \text{ и } 6') \overline{(X \cup Y)} = \bar{X} \cap \bar{Y}.$$

В качестве примера доказательства тождеств продемонстрируем доказательство тождества

$$\overline{(X \cap Y)} = \bar{X} \cup \bar{Y}.$$

Пусть $a \in (X \cap Y)$ - это означает, что $a \notin X \cap Y$, т.е. $a \notin X$ или $a \notin Y$.

Таким образом $a \in \bar{X}$ или $a \in \bar{Y}$, что равносильно $a \in \bar{X} \cup \bar{Y}$.

Значит,

$$\overline{(X \cap Y)} = \bar{X} \cup \bar{Y}.$$

Отметим, что если $X \subset Y$, то $X \cap Y = X$, $X \cup Y = Y$. В частности, поскольку для любого множества X справедливо $\emptyset \subset X$ и $X \subset X$, то всегда верны равенства $\emptyset \cap X = \emptyset$, $\emptyset \cup X = X$, $X \cap X = X$, $X \cup X = X$.

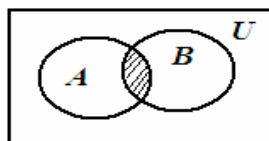
Так же как с помощью правил обычной алгебры преобразуют алгебраические выражения, в которых буквы принимают числовые значения, с помощью алгебры множеств преобразуют выражения, в которых буквы обозначают множества, причем буквы соединены друг с другом знаками $\cap$, $\cup$, $\setminus$, а к некоторым буквам применена операция дополнения (в универсальном множестве U). При этом стремятся привести такое выражение к нормальному виду, а именно к виду объединения, пересечения некоторых из данных множеств и дополнений к другим данным множествам.

Задача 1.5 Пусть A и B – подмножества универсального множества U , имеющие не пустое пересечение. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера – Венна следующие множества и укажите среди них равные:

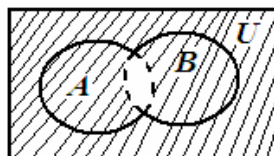
- а) $\overline{(A \cap B)}$; б) $A \cap \overline{B}$; в) $\overline{A} \cap \overline{B}$;
 г) $\overline{(A \cup B)}$; д) $A \cup \overline{B}$; е) $\overline{A} \cup \overline{B}$.

Решение.

а) $\overline{(A \cap B)}$. Сначала найдем $A \cap B$:

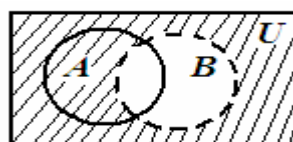


Теперь заштрихуем дополнение этого множества до U :



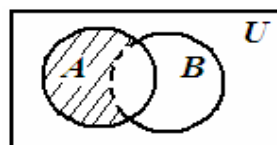
б) $A \cap \overline{B}$

Выполним отдельно $\overline{B}$:

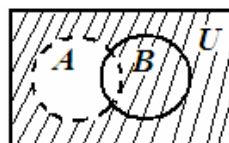


Теперь множество A пересеем (находим общую часть) с заштрихованным, получим:

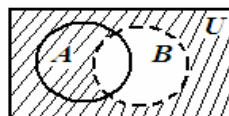
$A \cap \overline{B} \longrightarrow$



в) $\overline{A} \cap \overline{B}$
 $\overline{A} \longrightarrow$

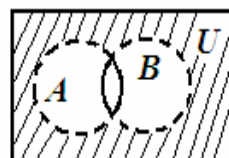


$\overline{B} \longrightarrow$



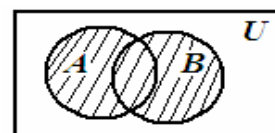
Теперь находим пересечение множеств $\overline{A}$ и $\overline{B}$:

$\overline{A} \cap \overline{B} \longrightarrow$

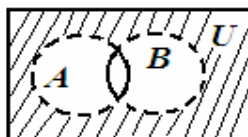


г) $\overline{(A \cup B)}$.

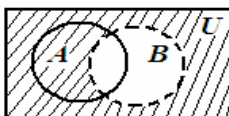
Найдем для начала $A \cup B$:



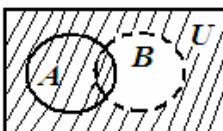
Теперь дополнение к $A \cup B$:



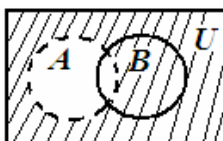
$$\text{д) } \frac{A \cup \bar{B}}{\bar{B}} \longrightarrow$$



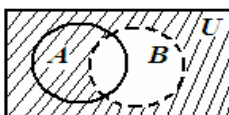
$$A \cup \bar{B} \longrightarrow$$



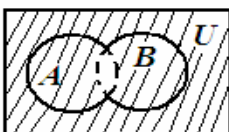
$$\text{е) } \frac{\bar{A} \cup \bar{B}}{\bar{A}} \longrightarrow$$



$$\bar{B} \longrightarrow$$



$$\bar{A} \cup \bar{B} \longrightarrow$$



Сравнив полученные результаты заданий а) – е), получаем, что равными между собой являются множества в) и г), т.е. $\bar{A} \cap \bar{B} = \overline{(A \cup B)}$ и множества а), е), т.е. $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$.

Задача 1.6 Обозначим множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ через $A \Delta B$ (симметрическая разность множеств A и B). Докажите, что:

а) $A \Delta B = B \Delta A$.

Решение. Рассмотрим исходное равенство:

а') $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (B \setminus A) \cup (A \setminus B)$.

В соответствии со свойством I: $X \cup Y = Y \cup X$ мы можем утверждать верность равенства **а')**.

б) $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

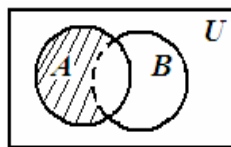
Решение. Распишем левую часть равенства, имеем:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Для доказательства этого равенства воспользовались кругами Эйлера-Венна. Выполним иллюстрацию отдельно левой и правой частей и сравним результаты:

левая часть $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

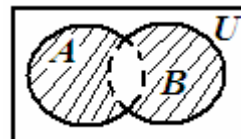
1) $A \setminus B \longrightarrow$



2) $B \setminus A \longrightarrow$

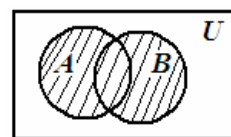


3) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \longrightarrow$

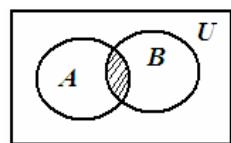


правая часть $(A \cup B) \setminus (A \cap B)$:

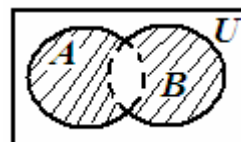
1) $A \cup B \longrightarrow$



2) $A \cap B \longrightarrow$



3) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) \longrightarrow$



Поскольку результаты левой и правой частей совпадают, то исходное равенство доказано, т.е.

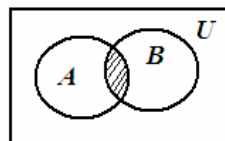
$$A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Задача 1.7 Упростите выражение $(\overline{A \cup B}) \cap (A \cup B)$.

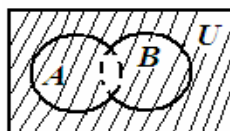
Решение. Для упрощения заданного выражения используем алгебру множеств. Согласно равенству 6) из V: $\overline{(X \cap Y)} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ (см. стр. 10), наше выражение принимает вид: $(\overline{A \cup B}) \cap (A \cup B)$.

Теперь используем круги Эйлера-Венна.

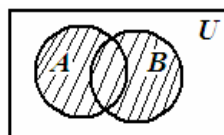
$A \cap B \longrightarrow$



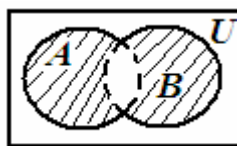
$\overline{(A \cap B)} \longrightarrow$



$$A \cup B \longrightarrow$$



$$\overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B) \longrightarrow$$



Используя результат предыдущего примера заключаем, что это не что иное как $A \Delta B$. Таким образом, $\overline{(A \cap B)} \cap (A \cup B) = A \Delta B$.

1.1 Задачи для самостоятельного решения

1.8 Верно ли, что:

а) $\{1, 2\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

б) $\{1, 2\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

в) $\{1, 3\} \in \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$;

г) $\{1, 3\} \subset \{\{1, 2, 3\}, \{1, 3\}, 1, 2\}$.

1.9 Даны множества $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, $B = \{0, 1, 2, 3\}$, $C = \{-3, -2, -1, 0\}$, $D = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

Задайте списками множества:

а) $A \cup B \cup C \cup D$;

б) $A \cap B \cap C \cap D$;

в) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$;

г) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$;

д) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$;

е) $(B \cap C) \setminus A$;

ж) $(D \setminus C) \cap (A \cup B)$.

Ответ. а) $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$;

б) $\{\emptyset\}$;

в) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$;

г) $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

д) $\{0, 4, 5, 6, 7\}$;

е) $\{0\}$;

ж) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

1.10 Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна множества A , B , C , если:

а) $A \subset B$ и $B \subset C$;

б) $A \subset C$ и $B \subset C$ и $A \setminus B = \emptyset$;

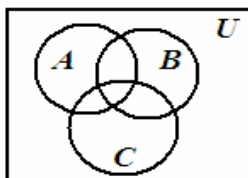
в) $A \subset C$ и $B \subset C$ и $C = A \cup B$;

г) $A \subset C$ и $B \subset C$ и $A \cap B \neq \emptyset$;

д) $A \cap B \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap B \cap C \neq \emptyset$;

е) $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$.

1.11 Пусть множества A , B , C изображены с помощью кругов Эйлера-Венна следующим образом



Заштрихуйте множество:

а) $A \setminus B$;

в) $(A \setminus C) \cap (B \setminus A)$;

д) $B \setminus A \cap C$;

ж) $B \cap C \setminus (A \cap B)$;

и) $B \setminus (\overline{C} \cup A)$;

л) $\overline{A} \setminus B \cap \overline{C} \setminus A$;

н) $A \cup (\overline{B \setminus A}) \cap C$;

п) $A \setminus (\overline{C \cap A}) \setminus (B \cup \overline{C})$.

б) $A \cup B \setminus C$;

г) $A \cap B \setminus (C \cup A)$;

е) $A \setminus B \setminus C$;

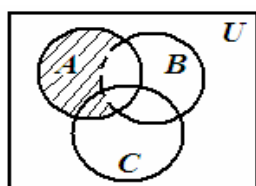
з) $C \cap A \setminus \overline{B}$;

к) $\overline{B} \setminus C \cup \overline{A} \setminus B$;

м) $\overline{(B \cap A)} \cup (B \setminus C)$;

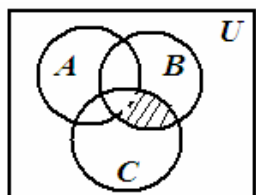
о) $(C \setminus \overline{A}) \cup C \cap (\overline{B \setminus A})$;

Ответ. а)

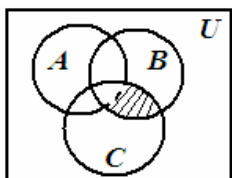


в) пустое множество;

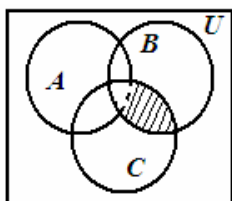
д)



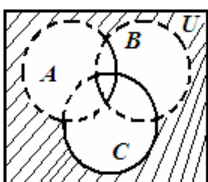
ж)



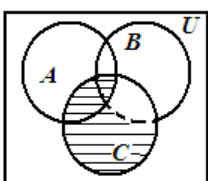
и)



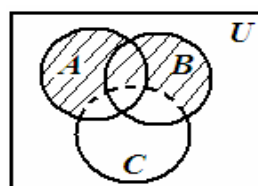
л)



н)

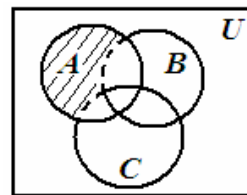


б)

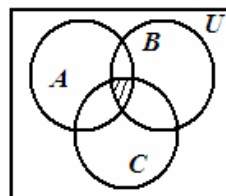


г) пустое множество;

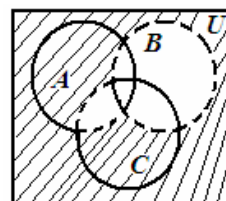
е)



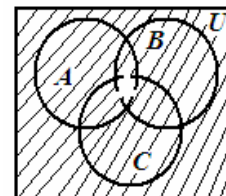
з)



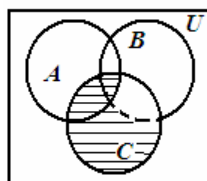
к)

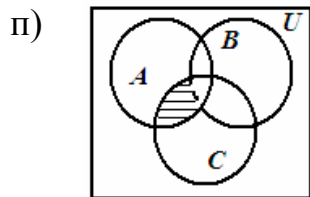


м)



о)





1.12 Докажите, что для любых множеств верны следующие соотношения:

а) $A = (A \setminus B) \cup (A \cap B)$;

б) $(A \setminus B) \cap (A \cap B) = \emptyset$;

в) $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$;

г) $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$;

д) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;

е) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;

ж) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C) = (A \setminus C) \setminus B = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;

з) $A \cup (B \setminus C) \supset (A \cup B) \setminus C$;

и) $(A \setminus B) \cup C \supset (A \cup C) \setminus B$.

Ответ. в) Указание. Воспользуйтесь диаграммами Эйлера-Венна.

1.13 Пусть A , B и C - подмножества универсального множества U . Докажите, что:

а) $A \setminus B = A \cap B'$;

б) $(A \setminus B)' = A' \cup (A \cap B)$;

в) $A' \cup (B \cup C)' = (A \cap B)' \cap (A \cap C)'$.

Ответ. Указание. Покажите, что если некоторый элемент принадлежит левой части (правой) части, то он принадлежит и правой (левой) части.

1.14 Обозначим множество $(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ через $A \Delta B$ (симметрическая разность множеств A и B). Докажите, что:

а) $(A \Delta B) \Delta B = A$;

б) $A \Delta \emptyset = A$;

в) $A \Delta A = \emptyset$;

г) $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$;

д) $A \cup B = (A \Delta B) \Delta (A \cap B)$;

е) $(B \setminus A) \Delta (C \setminus A) = (A \cup B) \Delta (A \cup C)$.

Ответ. Указание. Воспользуйтесь определением симметрической разности и указанием к задаче 1.6

2 Комплексные числа

Комплексным числом называется выражение вида $x + iy$, в котором x и y - действительные числа, а i - **мнимая единица**, такая что $i^2 = -1$. При этом верно, что:

1) $x + 0i = x$, $0 + yi = yi$.

$x + 0i$ - действительные числа, а $0 + yi$ - *чисто мнимые*.

2) $x + yi = x_1 + y_1i$ тогда и только тогда, когда $x = x_1$ и $y = y_1$;

3) $(x + yi) + (x_1 + y_1i) = (x + x_1) + (y + y_1)i$;

4) $(x + yi)(x_1 + y_1i) = (xx_1 - yy_1) + (xy_1 + x_1y)i$.

Поскольку $i^2 = -1$, по определению, то

$i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$ и т.д. (*)

Действия над комплексными числами

Сложение, вычитание, умножение и возведение в степень комплексных чисел можно выполнять по правилам этих действий над многочленами с заменой степеней числа i по формулам (*).

Деление комплексных чисел и извлечение корня из комплексного числа определяются как действия обратные умножению и возведению в степень.

Задача 2.1 Вычислить значение i^{747} , i^{3950} , i^{2492} , i^{1581} .

Решение. 1) Представим степени в виде $n = 4k + l$, т.е. $747 = 4 \cdot 186 + 3$.

Таким образом, имеем

$$i^{747} = i^{4 \cdot 186 + 3} = (i^4)^{186} \cdot i^3,$$

но так как $i^4 = 1$, а $i^3 = -i$, то окончательно получим

$$i^{747} = -i.$$

2) Рассуждаем аналогично предыдущему:

$$i^{3950} = i^{4 \cdot 987 + 2} = (i^4)^{987} \cdot i^2 = 1 \cdot (-1) = -1.$$

3) $i^{2492} = i^{4 \cdot 623} = (i^4)^{623} = 1.$

4) $i^{1581} = i^{4 \cdot 395 + 1} = (i^4)^{395} \cdot i^1 = i.$

Задача 2.2 Пусть $z_1 = i$, $z_2 = 2 - i$, $z_3 = -3i$, $z_4 = 1 + i$.

Найти значение $\frac{\overline{z_1 + z_2}}{z_3 \cdot z_4}$.

Решение. Комплексное число, отличающееся от данного только знаком мнимой части называется **сопряженным** данному. Так, сопряженным числу $z_2 = 2 - i$, будет число $\overline{z_2} = 2 + i$. Выполним задачу по действиям:

$$\begin{aligned}
1) \quad z_1 + \overline{z_2} &= i + 2 + i = 2 + 2i. \\
2) \quad z_3 \cdot z_4 &= -3i \cdot (1 + i) = -3i + 3 = 3 - 3i. \\
3) \quad \frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4} &= \frac{2 + 2i}{3 - 3i}.
\end{aligned}$$

Для того чтобы выполнить операцию деления, необходимо и числитель и знаменатель имеющейся дроби умножить на комплексное число, сопряженное знаменателю и далее произвести необходимые упрощения.

Итак, имеем

$$\frac{2 + 2i}{3 - 3i} = \frac{(2 + 2i)(3 + 3i)}{(3 - 3i)(3 + 3i)} = \frac{6 + 6i + 6i - 6}{9 + 9} = \frac{12i}{18} = \frac{2}{3}i.$$

Таким образом, значением выражения $\frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4}$ при заданных z_1, z_2, z_3 и z_4

является чисто мнимое число $\frac{2}{3}i$.

$$\text{Ответ. } \frac{z_1 + \overline{z_2}}{z_3 \cdot z_4} = \frac{2}{3}i.$$

Задача 2.3 Даны комплексные числа $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 + i$.

Найти $z = \frac{z_1 + z_1 z_2 + z_2^2}{z_1 + z_3}$.

Решение. Последовательно вычисляем:

$$\begin{aligned}
1) \quad z_1 + z_3 &= (2 + 3i) + (1 + i) = 3 + 4i, \\
2) \quad z_1 z_2 &= (2 + 3i)(3 - 4i) = (6 + 12) + i(9 - 8) = 18 + i, \\
3) \quad z_2^2 &= (3 - 4i)^2 = 9 - 24i - 16 = -7 - 24i, \\
4) \quad z_1 + z_1 z_2 + z_2^2 &= 2 + 3i + 18 + i - 7 - 24i = 13 - 20i.
\end{aligned}$$

Тогда

$$z = \frac{13 - 20i}{3 + 4i} = \frac{(13 - 20i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{(39 - 80) + i(-60 - 52)}{25} = -\frac{41}{25} - i\frac{112}{25}.$$

$$\text{Ответ. } -\frac{41}{25} - i\frac{112}{25}.$$

Квадратный корень из комплексного числа

Квадратный корень из комплексного числа $x + yi$ есть такое комплексное число $u + vi$, квадрат которого равен исходному.

Пусть $\sqrt{x + yi} = u + vi$, тогда u и v вычисляются следующим образом (см. лекции):

$$u = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \left(u^2 = \pm \frac{1}{2} \left(x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right);$$

$$v = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}, \left(v^2 = \pm \frac{1}{2} \left(-x + \sqrt{x^2 + y^2} \right) \right)$$

Знаки u и v выбираются согласно равенству $2uv = y$.

Задача 2.4 Вычислить $\sqrt{5-12i}$.

Решение. Найдем сначала значение $\sqrt{x^2 + y^2}$, затем воспользуемся формулами для u и v , имеем,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13,$$

$$u^2 = \frac{1}{2}(5 + 13) = \frac{1}{2} \cdot 18 = 9,$$

$$v^2 = \frac{1}{2}(-5 + 13) = \frac{1}{2} \cdot 8 = 4.$$

Таким образом, $u = \pm 3$, $v = \pm 2$.

Т.к. $y = -12 < 0$, то знаки u и v берем разными. Таким образом, $\sqrt{5-12i} = \pm(3-2i)$.

Ответ. $\sqrt{5-12i} = \pm(3-2i)$.

Задача 2.5 Вычислить $\sqrt{z}$, если $z = 21 - 20i$.

Решение. В данном случае $x = 21$, $y = -20$, таким образом, $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{441 + 400} = 29$.

$$\text{Поэтому } u^2 = \frac{1}{2}(21 + 29) = 25,$$

$$v^2 = \frac{1}{2}(-21 + 29) = 4.$$

Таким образом, $u = \pm 5$, $v = \pm 2$. Поскольку $y = -20 < 0$, то знаки u и v различные.

Итак, получим следующие два значения квадратного корня из z

$$\sqrt{z} = \sqrt{21 - 20i} = \pm(5 - 2i).$$

Ответ. $\pm(5 - 2i)$.

Задача 2.6 Решить уравнение $x^2 - (2 + i)x + (-1 + 7i) = 0$.

Решение. В множестве комплексных чисел корень n -й степени из комплексного числа имеет n значений. Поэтому формула для корней квадратного уравнения $az^2 + bz + c = 0$, где a, b, c - комплексные числа (в том числе действительные), число $a \neq 0$, имеет вид

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a},$$

перед корнем квадратным из дискриминанта уравнения в числителе берем только знак «+».

Таким образом, получаем

$$x_{1,2} = \frac{(2+i) + \sqrt{(2+i)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1+7i)}}{2 \cdot 1} = \frac{2+i + \sqrt{4+4i-1+4-28i}}{2} = \\ = \frac{2+i + \sqrt{7-24i}}{2}.$$

Вычислим $\sqrt{7-24i}$.

Продemonстрируем иной, чем в предыдущем примере, способ нахождения квадратного корня из комплексного числа.

Пусть $\sqrt{7-24i} = z + iy$, где z и y действительные числа, тогда по определению корня

$$(z + iy)^2 = 7 - 24i \quad \text{или} \quad (z^2 - y^2) + 2zyi = 7 - 24i.$$

Согласно условию равенства комплексных чисел получаем:

$$\begin{cases} z^2 - y^2 = 7, \\ 2zy = -24, \end{cases} \quad \begin{cases} \left(-\frac{12}{y}\right)^2 - y^2 = 7, \\ z = -\frac{12}{y}. \end{cases}$$

Решим первое уравнение

$$\frac{144}{y^2} - y^2 = 7,$$

$$y^4 + 7y^2 - 144 = 0.$$

Обозначим $y^2 = t \geq 0$.

$$t^2 + 7t - 144 = 0.$$

$$D = 49 + 576 = 625.$$

$$t_1 = \frac{-7-25}{2} = -16; \quad t_2 = \frac{-7+25}{2} = 9.$$

$t_1 = -16$ - не удовлетворяет условию $t \geq 0$.

Значит, $y^2 = 9$; $y = \pm 3$, тогда $\begin{cases} z = -4, \\ y = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} z = 4, \\ y = -3. \end{cases}$

$$\text{Следовательно: } x_1 = \frac{2+i + (-4+3i)}{2} = \frac{-2+4i}{2} = -1+2i,$$

$$x_2 = \frac{2+i + 4-3i}{2} = \frac{6-2i}{2} = 3-i.$$

Ответ. $x_1 = -1+2i$; $x_2 = 3-i$.

Тригонометрическая форма комплексного числа.

Комплексное число $x + yi$ определяется парой действительных чисел (x, y) и поэтому изображается точкой $M(x, y)$ плоскости или ее радиус-вектором $r = \overline{OM}$. Длина этого вектора $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ называется **модулем** комплексного числа, а его угол φ , образованный радиус-вектором точки M и осью Ox называется **аргументом** комплексного числа (r и φ называются *полярными координатами точки M*).

$$x + yi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi) \quad (2.1)$$

- **тригонометрическая** форма записи комплексного числа, при этом

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}. \quad (2.2)$$

Угол φ определяется неоднозначно. Чаще всего используется наименьший положительный из всех φ . Такой аргумент называется **главным**.

Задача 2.7 Найти полярные координаты точки $M(\sqrt{3}; -1)$.

Решение. Используя формулы (2.2), имеем

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = 2,$$

$$\cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \sin \varphi = -\frac{1}{2}.$$

По заданным значениям $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ находим, что $\varphi = -\frac{\pi}{6}$ (можно было

воспользоваться формулой $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}$).

Значит, полярные координаты точки M равны $\left(2; -\frac{\pi}{6} \right)$.

Ответ. $M \left(2; -\frac{\pi}{6} \right)$.

Задача 2.8 Найти декартовы координаты точки M , если ее полярные координаты равны 4 и $-\frac{\pi}{4}$.

Решение. По формулам $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, имеем

$$x = 4 \cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) = 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},$$

$$y = 4 \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2\sqrt{2}.$$

Таким образом, точка M в полярной системе координат имеет координаты $\left(4; -\frac{\pi}{4}\right)$, а в декартовой – $(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

Ответ. $M(2\sqrt{2}; -2\sqrt{2})$.

Иногда отыскание полярных координат точки легче делать по чертежу, чем по формулам, например:

Задача 2.9 Найти полярные координаты точки $M(-1; 1)$.

Решение. Из рисунка 2 сразу видим, что

$$r = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \frac{3}{4}\pi.$$

Таким образом, координаты заданной точки в полярной системе координат $-\left(\sqrt{2}; \frac{3}{4}\pi\right)$ (рисунок 2).

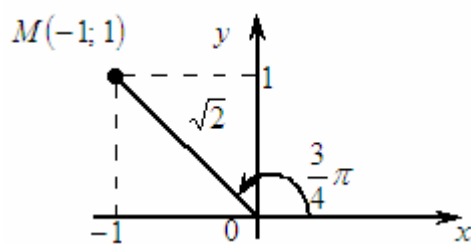


Рисунок 2

Задача 2.10 Представить числа $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - \sqrt{3}i$ в тригонометрической форме.

Решение. а) $z_1 = 1 + i$ ($z = x + iy$)

$$x = 1, \quad y = 1 \Rightarrow r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2},$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Следовательно, } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

б) В данном случае $x = 1$, $y = -\sqrt{3}$, следовательно,

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2,$$

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \operatorname{arctg} \frac{-\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Найдем главный аргумент $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Таким образом,
 $z_2 = 2\left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}\right)$ (можно было обойтись и аргументом $-\frac{\pi}{3}$).

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме:

$$r(\cos \varphi + i \sin \varphi) r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = (rr_1) [\cos(\varphi + \varphi_1) + i \sin(\varphi + \varphi_1)], \quad (2.3)$$

$$\frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)} = \left(\frac{r}{r_1}\right) [\cos(\varphi - \varphi_1) + i \sin(\varphi - \varphi_1)], \quad (2.4)$$

$$[r(\cos \varphi + i \sin \varphi)]^n = r^n [\cos n\varphi + i \sin n\varphi] - \text{формула Муавра} \quad (2.5)$$

Часто используется частный случай формулы Муавра при $r = 1$:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi. \quad (2.5')$$

$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (2.6)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots, (n-1)$.

Задача 2.11 Даны два комплексных числа $z_1 = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$,

$$z_2 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}.$$

Найти $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^3 , $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение.

$$1) z_1 \cdot z_2 = 2 \cdot 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Следовательно, } z_1 \cdot z_2 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right).$$

$$2) \frac{z_1}{z_2} = \frac{2}{1} \left(\cos \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right).$$

$$3) z_1^3 = 2^3 \cdot \left(\cos \left(3 \cdot \frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(3 \cdot \frac{\pi}{3} \right) \right),$$

$$z_1^3 = 8(\cos \pi + i \sin \pi).$$

$$4) \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right) \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$, $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$;

при $k = 1$, $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$;

при $k = 2$, $\sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{1} \left(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12} \right)$.

Задача 2.12 Найти все значения $\sqrt[4]{\sqrt{3} + 3i}$.

Решение. Вначале представим число $z = \sqrt{3} + 3i$ в тригонометрической форме. В данном случае $x = \sqrt{3}$, $y = 3$, таким образом $r = \sqrt{3 + 9} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{3}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$. Следовательно, $z = 2\sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$. Используя

формулу (2.6), имеем: $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{2\sqrt{3}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{4} \right), \quad k = 0, 1, 2, 3.$

Запишем все значения $\sqrt[4]{z}$.

При $k = 0$, $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$;

при $k = 1$, $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{4} \right) = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12} \right)$;

при $k = 2$, $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right)$;

при $k = 3$, $\sqrt[4]{z} = \sqrt[8]{12} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right)$.

Следующие задачи на вычисление корня n -й степени, предлагаем читателю решить самостоятельно, мы же ограничимся лишь схематичной записью решения.

Задача 2.13 $z = \sqrt[3]{2 \left(\cos \frac{3}{4} \pi + i \sin \frac{3}{4} \pi \right)} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{3}{4} \pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{3}{4} \pi + 2\pi k}{3} \right);$

$$k = 0, z = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$$

$$k = 1, z = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right);$$

$$k = 2, z = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{19\pi}{12} + i \sin \frac{19\pi}{12} \right).$$

Задача 2.14 $z = \sqrt{i} = \sqrt{\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}} = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2\pi k}{2};$

$$k = 0, z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$k = 1, z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} = -z_1.$$

Задача 2.15 $z = \sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{8(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right);$

$$k = 0, z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 1 + i\sqrt{3};$$

$$k = 1, z = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2;$$

$$k = 2, z = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Применение формулы Муавра к преобразованию тригонометрических выражений

Частный случай формулы Муавра при $r = 1$, $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$, оказывается удобным средством для преобразования некоторых выражений, содержащих тригонометрические функции. Рассмотрим несколько примеров.

Задача 2.16 Выразить $\cos^3 \varphi$ и $\sin^3 \varphi$ линейно через косинус и синус кратного аргумента (т.е. через косинус и синус аргумента $n\varphi$, в данном случае 3φ).

Решение. Для начала запишем формулу куба суммы:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3,$$

которая верна как для действительных, так и для комплексных чисел.

Далее, пусть задано комплексное число

$$z = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Возведем это число, используя формулу Муавра, в куб. Имеем

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Левую часть полученной формулы раскрываем как куб суммы, правую оставим без изменения:

$$\cos^3 \varphi + 3\cos \varphi (i \sin \varphi)^2 + 3\cos^2 \varphi (i \sin \varphi) + (i \sin \varphi)^3 = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Упростим левую часть ($i^2 = -1$, $i^3 = -i$):

$$\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi + 3\cos^2 \varphi \sin \varphi \cdot i - \sin^3 \varphi \cdot i = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Число в левой части запишем как комплексное (правую не трогаем)

$$(\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi) + (3\cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi)i = \cos 3\varphi + i \sin 3\varphi.$$

Поскольку два комплексных числа равны тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части соответственно, имеем

$$\cos 3\varphi = \cos^3 \varphi - 3\cos \varphi \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 3\varphi = 3\cos^2 \varphi \sin \varphi - \sin^3 \varphi.$$

Итак, мы выразили $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через косинус и синус кратного аргумента, т.е. получили верные тригонометрические формулы косинуса и синуса тройного угла.

Вообще, для получения формул $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$, при $n \geq 4$ пользуются *биномом Ньютона*. Коэффициенты формул бинома Ньютона удобнее всего находить при помощи *треугольника Паскаля*:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & 1 & & & \\ & & & & 1 & & 1 & \\ & & & 1 & & 2 & & 1 \\ & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 \\ & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\ & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & & \\ & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & & \end{array}$$

.....

Нетрудно заметить, что элементы последующей строчки равны сумме двух соседних элементов предыдущей, а каждая строка, есть коэффициенты для соответственно

$$(a+b)^0, (a+b)^1, (a+b)^2, (a+b)^3, \dots$$

Например, коэффициентами для $(a+b)^5$, т.е. для формулы

$$(a+b)^5 = c_0 a^5 + c_1 a^4 b + c_2 a^3 b^2 + c_3 a^2 b^3 + c_4 a b^4 + c_5 b^5$$

будут:

$$c_0 = 1, c_1 = 5, c_2 = 10, c_3 = 10, c_4 = 5, c_5 = 1.$$

Используя формулу бинома Ньютона при $n = 5$ решим следующую задачу.

Задача 2.17 Выразить $\operatorname{tg} 5\varphi$ через $\operatorname{tg} \varphi$.

Решение. Используем формулу Муавра при $n = 5$:

$$\cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = (\cos \varphi + i \sin \varphi)^5.$$

Используя формулы бинома Ньютона, получим

$$\begin{aligned} \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi = & \cos^5 \varphi + 5i \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi - \\ & - 10i \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi + i \sin^5 \varphi. \end{aligned}$$

(Напомним, что $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$, $i^5 = i$). Теперь приравнявая действительные и мнимые части комплексных чисел в левой и правой частях равенства, получим (смотри задачу 2.16):

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi,$$

$$\sin 5\varphi = 5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi.$$

Так как $\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{\sin 5\varphi}{\cos 5\varphi}$, то

$$\operatorname{tg} 5\varphi = \frac{5 \cos^4 \varphi \sin \varphi - 10 \cos^2 \varphi \sin^3 \varphi + \sin^5 \varphi}{\cos^5 \varphi - 10 \cos^3 \varphi \sin^2 \varphi + 5 \cos \varphi \sin^4 \varphi} = \frac{5 \operatorname{tg} \varphi - 10 \operatorname{tg}^3 \varphi + \operatorname{tg}^5 \varphi}{1 - 10 \operatorname{tg}^2 \varphi + 5 \operatorname{tg}^4 \varphi}.$$

(Мы поделили числитель и знаменатель на $\cos^5 \varphi$.)

Ясно, что подобным образом можно выражать любые тригонометрические функции кратного аргумента через тригонометрические функции исходного.

Можно предположить несколько другое решение нахождения $\sin^5 \varphi$.

Задача 2.18 Выразить $\sin^5 \varphi$ линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.

Решение. Положим $z = \cos \varphi + i \sin \varphi$, тогда $z^{-1} = \cos \varphi - i \sin \varphi$. Тогда $z^k = \cos k\varphi + i \sin k\varphi$, $z^{-k} = \cos k\varphi - i \sin k\varphi$. Из этих равенств находим

$$\cos \varphi = \frac{z + z^{-1}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \quad \cos k\varphi = \frac{z^k + z^{-k}}{2}, \quad \sin k\varphi = \frac{z^k - z^{-k}}{2i}. \quad (2.7)$$

Воспользуемся этими формулами для решения задачи 2.17:

$$\begin{aligned} \sin^5 \varphi &= \left(\frac{z - z^{-1}}{2i} \right)^5 = \frac{z^5 - 5z^3 + 10z - 10z^{-1} + 5z^{-3} - z^{-5}}{32i} = \\ &= \frac{(z^5 - z^{-5}) - 5(z^3 - z^{-3}) + 10(z - z^{-1})}{32i} = \frac{2i \sin 5\varphi - 10i \sin 3\varphi + 20i \sin \varphi}{32i} = \\ &= \frac{\sin 5\varphi - 5 \sin 3\varphi + 10 \sin \varphi}{16}. \end{aligned}$$

Аналогично, любое выражение вида $\cos^k \varphi \sin^m \varphi$ можно представить линейно через тригонометрические функции кратных аргументов.

Задача 2.19 Преобразовать сумму $B = \sin \varphi + \sin 2\varphi + \dots + \sin n\varphi$.

Решение. Введем в рассмотрение другую сумму $A = \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$ и запишем $A + Bi = (\cos \varphi + i \sin \varphi) + (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi) + \dots + (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$. Мы пришли к сумме геометрической прогрессии. Для дальнейших преобразований полезно ввести обозначение $z = \cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}$. Тогда

$$A + Bi = z^2 + z^4 + \dots + z^{2n} = \frac{z^{2n+2} - z^2}{z^2 - 1}.$$

Вынесем теперь в числителе и знаменателе такие степени z , чтобы в скобках оставались разности степеней с противоположными показателями (для возможности этого мы ввели сокращенное обозначение для $\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2}$, а не для $\cos \varphi + i \sin \varphi$, что, казалось бы, естественнее):

$$\begin{aligned} A + Bi &= \frac{z^{n+2}(z^n - z^{-n})}{z(z - z^{-1})} = \frac{z^{n+1}(z^n - z^{-n})}{z(z - z^{-1})} = \\ &= \frac{\left(\cos \frac{n+1}{2}\varphi + i \sin \frac{n+1}{2}\varphi\right) 2i \sin \frac{n\varphi}{2}}{2i \sin \frac{\varphi}{2}} = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left(\cos \frac{n+1}{2}\varphi + i \sin \frac{n+1}{2}\varphi\right), \end{aligned}$$

откуда

$$B = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \sin \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

В качестве «бесплатного приложения» мы получили сумму

$$A = \frac{\sin \frac{n\varphi}{2} \cos \frac{(n+1)\varphi}{2}}{\sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Аналогичным образом могут быть преобразованы суммы вида $a_1 \cos b_1 + a_2 \cos b_2 + \dots + a_n \cos b_n$ и $a_1 \sin b_1 + a_2 \sin b_2 + \dots + a_n \sin b_n$, если аргументы $b_1, b_2, \dots, b_n$ тригонометрических функций образуют арифметическую прогрессию, а коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ - геометрическую. Разумеется, рассмотренные примеры не исчерпывают возможности применений формулы Муавра по части преобразования тригонометрических выражений.

Формула Эйлера, комплексное число в показательной форме

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (2.8)$$

Всякое комплексное число $z = x + iy$ может быть представлено как в тригонометрической форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi),$$

так и в **показательной** форме:

$$z = re^{i\varphi}. \quad (2.9)$$

Если

$$z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}, z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}, \text{ то}$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \quad (2.10)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \quad (2.11)$$

$$z^n = r^n e^{in\varphi}. \quad (2.12)$$

Формула (2.12), так же как и формулы (2.5), (2.5') называется формулой Муавра.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} e^{i(\varphi + 2\pi k)/n} \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (2.13)$$

(Под $\sqrt[n]{r}$ понимается арифметический корень.)

Задача 2.20 Вычислить $(1+i)^{12}$.

Решение. Эту задачу мы можем решить не переходя к другой записи комплексного числа, ведь мы уже умеем находить значение корня квадратного из комплексного числа, записанного в алгебраической форме (смотри задачи 2.4 и 2.5). Однако, на этом примере мы еще раз потренируемся с тригонометрической формой, а также научимся «работать» с показательной формой комплексного числа. Итак, представим число $z = 1 + i$ в тригонометрической и показательной формах.

Используя формулы (2.1), (2.2) и (2.9), имеем,

$$r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, \quad \cos \varphi = 1/\sqrt{2}, \quad \sin \varphi = 1/\sqrt{2}, \quad \varphi = \pi/4,$$

$$z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{4} i}.$$

Тогда, по формуле Муавра, имеем

$$\begin{aligned} z^{12} &= (\sqrt{2})^{12} \left(\cos \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(12 \cdot \frac{\pi}{4} \right) \right) = \sqrt{2^{12}} e^{3\pi i} = \\ &= 64 \cdot (\cos 3\pi + i \sin 3\pi) = -64. \end{aligned}$$

Ответ. $(1+i)^{12} = -64$.

Задача 2.21 Найти корни уравнения $z^6 + 1 = 0$.

Решение. Данное уравнение можно переписать так: $z^6 = -1$ или $z = \sqrt[6]{-1}$.

Число -1 в тригонометрической форме имеет вид:

$$-1 = 1 \cdot (\cos \pi + i \sin \pi).$$

С учетом формул (2.6), (2.13), корни исходного уравнения:

$$z_k = \sqrt[6]{-1} = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi + 2k\pi}{6} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{6} \right) = e^{\frac{\pi + 2k\pi}{6}i},$$

где $k = \overline{0, 5}$. Придавая k последовательно значения $0, 1, \dots, 5$, находим все шесть возможных корней данного уравнения $z^6 + 1 = 0$:

$$z_0 = \cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{\pi}{6}i},$$

$$z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i = e^{\frac{\pi}{2}i},$$

$$z_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = e^{\frac{5\pi}{6}i},$$

$$z_3 = \cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{\frac{7\pi}{6}i} = e^{-\frac{5\pi}{6}i},$$

$$z_4 = \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} = -i = e^{\frac{3\pi}{2}i} = e^{-\frac{\pi}{2}i},$$

$$z_5 = \cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i = e^{\frac{11\pi}{6}i} = e^{-\frac{\pi}{6}i}.$$

Корни из единицы

Как и для всякого отличного от нуля комплексного числа, для числа 1 существует ровно n значений корня n -й степени. Так как $1 = \cos 0 + i \sin 0$, то для корней n -й степени из 1 имеет место формула

$$\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \text{ при } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Первообразные корни n -й степени из 1

Корень n -й степени из 1 называется **первообразным** или **принадлежащим показателю n** , если он не является корнем из 1 с меньшим чем n натуральным показателем.

Число $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ есть первообразный корень n -й степени из 1 в том и только в том случае, если k и n взаимно просты.

Число $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n}$ является первообразным корнем из 1 степени $n_1 = \frac{n}{d}$, где $d = \text{НОД}(k, n)$.

Свойства корней из 1.

1⁰ Произведение двух корней n из 1 есть корень степени n из 1.

2⁰ Число, обратное корню степени n из 1, есть корень степени n из 1.

3⁰ Пусть ε - любой первообразный корень степени n из 1. Тогда всякий корень степени n из 1 получается из ε возведением в некоторую степень с натуральным показателем.

4⁰ Все значения $\sqrt[n]{z}$ ($z \neq 0$) получаются из одного значения посредством умножения на все корни степени n из 1.

Алгебраическое вычисление некоторых корней из 1

При малых показателях корни из 1 легко вычисляются. Ясно, что квадратные корни из 1 суть ± 1 . Корни 4-й степени равны, очевидно, $+1, -1, i, -i$.

Задача 2.22 Вычислить все значения корня кубического из единицы.

Решение. Для вычисления корней 3-й степени из 1 рассмотрим уравнение $x^3 - 1 = 0$.

Разложение левой части на множители дает

$$(x-1)(x^2+x+1)=0.$$

Приравнивание к нулю первого множителя дает $x=1$. Второй множитель порождает корни $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, являющиеся первообразными кубическими корнями

из 1. Сравнение с формулой $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{3} + i \sin \frac{2k\pi}{3}$ показывает, что

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 120^\circ + i \sin 120^\circ.$$

Сравнение компонент дает хорошо известные из тригонометрии формулы

$$\cos 120^\circ = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}, \quad \sin 120^\circ = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 2.23 Найти все первообразные корни шестой степени из единицы.

Решение. Разложение на множители многочлена

$$x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$$

показывает, что первообразные корни степени 6 из 1 суть корни $\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$ уравнения

$$x^2 - x + 1 = 0,$$

т.к. приравнивание к нулю других множителей дает не первообразных корней.

Задача 2.24 Найти первообразные корни пятой степени из единицы. Вычислить $\cos 72^\circ$.

Решение. Рассмотрим $n=5$. Уравнение

$$x^5 - 1 = 0$$

приводится после разложения на множители к уравнению

$$(x-1)(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) = 0.$$

Первообразные корни являются корнями уравнения

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0.$$

Оно равносильно уравнению

$$x^2 + x^{-2} + x + x^{-1} + 1 = 0.$$

Положив

$$x + x^{-1} = z$$

и заметив, что

$$x^2 + 2 + x^{-2} = z^2,$$

мы получим следующее уравнение относительно z :

$$z^2 + z - 1 = 0,$$

откуда

$$z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}; \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Корни из 1 находятся из уравнений

$$x^2 - z_1 x + 1 = 0 \text{ и } x^2 - z_2 x + 1 = 0,$$

откуда

$$x = \frac{z_1 \pm i\sqrt{4 - z_1^2}}{2} \text{ и } x = \frac{z_2 \pm i\sqrt{4 - z_2^2}}{2}.$$

Подставив вместо z_1 и z_2 их значения, получим

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, & x_2 &= \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}, \\ x_3 &= -\frac{\sqrt{5}-1}{4} + i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}, & x_4 &= -\frac{\sqrt{5}-1}{4} - i\frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4}. \end{aligned}$$

Сопоставление с формулой $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{5} + i \sin \frac{2k\pi}{5} = \cos k \cdot 72^\circ + i \sin k \cdot 72^\circ$

дает сравнительно мало известную формулу $\cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

$$\text{Ответ. } \cos 72^\circ = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

Задача 2.25 Найти произведение всех корней n -й степени из единицы.

Решение. Воспользуемся формулой Муавра:

$$1 \times \varepsilon \times \varepsilon^2 \times \dots \times \varepsilon^{n-1} = \varepsilon^{1+2+\dots+n-1} = \varepsilon^{n(n-1)/2} = \cos \pi(n-1) + i \sin \pi(n-1) =$$

$$= \cos \pi(n-1) = (-1)^{n-1}.$$

При помощи корней n -й степени из единицы можно выразить все корни n -й степени из комплексного числа z через один из таких корней — x :

$$\sqrt[n]{z} = \{x, x\varepsilon, x\varepsilon^2, \dots, x\varepsilon^{n-1}\}.$$

Разберем следующую несложную задачу.

Задача 2.26 Найти все комплексные числа, сопряженные к своей n -й степени.

Решение. Аналитически это условие выглядит следующим образом:

$$\bar{z} = z^n.$$

Возьмем модуль от обеих частей:

$$|z| = |\bar{z}| = |z^n| = |z|^n.$$

Отсюда вытекает, что

$$|z| = 0 \text{ или } |z| = 1.$$

Первый случай дает решение $z = 0$.

Пусть $|z| = 1$.

По условию имеет место равенство: $\arg(\bar{z}) = \arg(z^n)$. Однако

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z), \quad \arg(z^n) = n \arg(z) + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Поэтому выполняются равенства:

$$(n+1)\arg(z) = 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Значит, получается еще множество из $(n+1)$ решения — $\sqrt[n+1]{1}$. Всего эта задача имеет $(n+2)$ решения.

Вторую часть решения можно оформить по-другому. Умножим исходное равенство на z :

$$z\bar{z} = z^{n+1}.$$

Однако

$$z\bar{z} = |z|^2 = 1.$$

Другие задачи на комплексные числа

Задача 2.27 Решить систему:

$$\begin{cases} x + \frac{2x+y}{x^2+y^2} = -3, \\ y + \frac{x-2y}{x^2+y^2} = 1. \end{cases}$$

Решение. Это достаточно сложная система легко решается при помощи комплексных чисел. В самом деле, умножим левую и правую части второго уравнения на мнимую единицу и сложим их, соответственно, с левой и правой частями первого уравнения:

$$x + yi + \frac{(2+i)(x-yi)}{x^2+y^2} = -3 + i.$$

Положим $z = x + yi$. Получим уравнение:

$$z + \frac{2+i}{z} = -3 + i.$$

Умножив его на z , получим квадратное уравнение:

$$z^2 + (3 - i)z + 2 + i = 0.$$

Дискриминант имеет вид:

$$D = (3 - i)^2 - 4(2 + i) = -10i.$$

Корни из дискриминанта имеют вид:

$$\sqrt{-10i} = \{\pm \sqrt{5}(-1 + i)\}.$$

Множество решений системы:

$$\left\{ -1/2(3 + \sqrt{5}), 1/2(1 + \sqrt{5}), 1/2(-3 + \sqrt{5}), 1/2(1 - \sqrt{5}) \right\}.$$

В заключении рассмотрим решение задачи, связанной с нахождением области, которой принадлежит некоторая точка, изображающая комплексное число $z = x + yi$, удовлетворяющая заданному условию.

Задача 2.28 Найти и построить на комплексной плоскости (z) область, которой принадлежат точки $z = x + iy$, удовлетворяющие заданному условию

а) $|z - z_1| < 4$, где $z_1 = 3 - 5i$.

Решение. Подставим в заданное неравенство $|z - z_1| < 4$ числа $z = x + iy$ и $z_1 = 3 - 5i$, имеем:

$$|x + iy - 3 + 5i| < 4,$$

$$|(x - 3) + i(5 + y)| < 4,$$

под знаком модуля – комплексное число, но модуль комплексного числа $w = a + ib$ есть $|w| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Таким образом, получаем

$$\sqrt{(x - 3)^2 + (5 + y)^2} < 4,$$

или

Так как обе части неравенства – положительны, имеем право возведения в квадрат:

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 < 4^2,$$

поскольку $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ есть уравнение окружности с центром в точке (a, b) и радиусом R , то полученное неравенство представляет из себя внутренность круга радиуса $R = 4$ с центром в точке $(3; -5)$, то есть точки, изображающей комплексное число $z_1 = 3 - 5i$.

б)
$$\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3}{4}\pi; \end{cases}$$

Решение. Первое условие $|z| - 1 \leq 0$, т.е. $|x + iy| \leq 1$ означает

$$\sqrt{x^2 + y^2} \leq 1,$$

$$x^2 + y^2 \leq 1.$$

Таким образом, этому неравенству удовлетворяют точки, расположенные внутри и на границе круга, с центром в $(0; 0)$ и радиусом $R = 1$.

Второе условие означает, что среди этих точек необходимо выбрать те, которые заключены между лучами $\varphi = \frac{\pi}{4}$ и $\varphi = \frac{3\pi}{4}$.

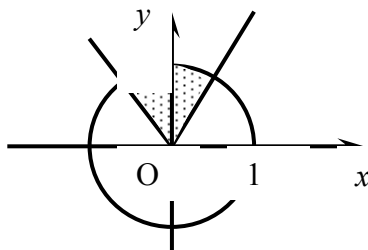


Рисунок 3

$$\text{в) } \begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение. Рассмотрим каждое из условий заданной системы и изобразим его на рисунке. Затем совместим все три полученных результата и получим искомый ответ.

Итак, первое условие системы $|z - i| < 1$, означает следующее:

$$\begin{aligned} |x + iy - i| &< 1, \\ |x + i(y - 1)| &< 1, \\ \sqrt{x^2 + (y - 1)^2} &< 1, \\ x^2 + (y - 1)^2 &< 1. \end{aligned}$$

Мы уже знаем, что этому неравенству удовлетворяют точки, расположенные внутри круга с центром в точке $(0; 1)$ и радиусом $R = 1$. Причем поскольку неравенство строгое, граница круга решению не принадлежит.

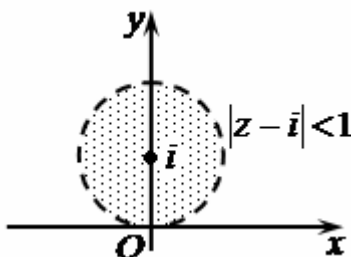


Рисунок 4

Второе условие $\arg z \geq \frac{\pi}{4}$ зарисуем сразу.

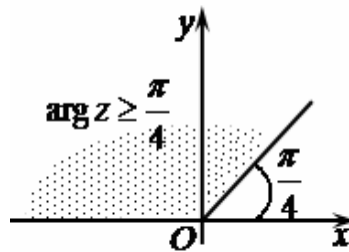


Рисунок 5

Третье условие $\arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}$.

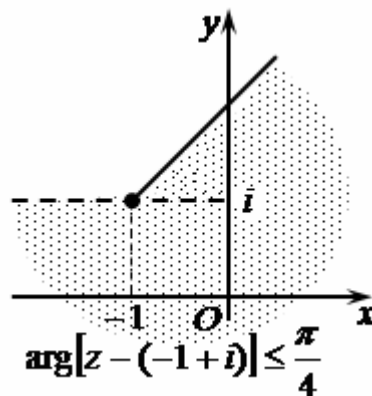


Рисунок 6

Теперь совместим все три рисунка и находим пересечение трех полученных областей.

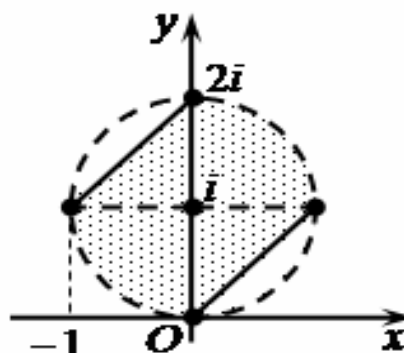


Рисунок 7

2.1 Задачи для самостоятельного решения

2.29 Вычислить i^{2092} , i^{1318} , i^{7581} , i^{10727} .

Ответ. 1 ; -1 ; i ; $-i$.

2.30 Вычислить: а) $(1+2i)^3 - \frac{4i}{4-3i}$; б) $i^3 + i^{13} + i^{23} + \dots + i^{53}$;

в) $i \cdot i^2 \cdot i^3 \cdot i^4 \cdot \dots \cdot i^{100}$; г) $i^4 + i^{14} + i^{24} + i^{34} + \dots + i^{84}$.

Ответ. а) $\frac{-66i-263}{25}$; б) 0 ; в) -1 ; г) 1 .

2.31 Пусть $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 3i - 5$, вычислить: 1) $z_1 + z_2$, 2) $z_1 - z_2$, 3) $z_1 \cdot z_2$,

4) $\frac{z_1}{z_2}$.

Ответ. 1) $-2 + 5i$, 2) $8 - i$, 3) $-21 - i$, 4) $-\frac{9}{34} - \frac{19}{34}i$.

2.32 Найти значения выражений:

а) $(2+5i) + (1-7i)$; б) $(3-9i) - (7+i)$;

в) $(1+2i)(3-i)$; г) $\frac{23+i}{3+i}$;

д) $\frac{(5+i)(3+5i)}{2i}$; е) $\frac{(1+3i)(8-i)}{(2+i)^2}$;

ж) $(2+i)^3 + (2-i)^3$; з) $(3+i)^3 - (3-i)^5$.

Ответ. а) $3 - 2i$;

б) $-4 - 10i$;

в) $5 + 5i$;

г) $7 - 2i$;

д) $14 - 5i$;

е) $5 + i$;

ж) 4 ;

з) $28 + 340i$.

2.33 Найти значение выражения $(z_1 + 2z_2)z_3$, если $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = 3 + 2i$, $z_3 = 5 - 2i$.

Ответ. $54 + 19i$.

2.34 Найти значение выражения $(z_1^2 + z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -1 + 2i$, $z_3 = 8 + 12i$.

Ответ. $2 + 2i$.

2.35 Найти значение выражения $z_1(z_2 + z_3)/z_2$, если $z_1 = 4 + 5i$, $z_2 = 1 + i$, $z_3 = 7 - 9i$.

Ответ. $40 - 32i$.

2.36 Даны комплексные числа $z_1 = 3 + 5i$, $z_2 = 3 - 4i$, $z_3 = 1 - 2i$. Найти число $z = ((z_1 + z_3)z_2)/z_3$.

Ответ. $\frac{38}{5} + \frac{41}{5}i$.

2.37 Найти значение выражения $z_1 + z_2 z_3 / z_2$, если $z_1 = 4 + 8i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = 9 + 13i$.

Ответ. $7 + 19i$.

2.38 Решить уравнения:

а) $z^2 = i$;

б) $z^2 = 3 - 4i$;

в) $z^2 = 5 - 12i$;

г) $z^2 - (1 + i)z + 6 + 3i = 0$;

д) $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$;

е) $z^2 - 4z + 8 = 0$;

ж) $z^4 + 9z^2 + 20 = 0$;

з) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$;

и) $z^2 + (5 - 2i)z + 5(1 - i) = 0$;

к) $z^3 - 1 = 0$;

л) $(z + 1)^4 - 16 = 0$;

м) $|z| + z = 2 + i$;

н) $z^3 + 1 = 0$.

Ответ. а) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$;

б) $\pm (2 - i)$;

в) $\pm (3 - 2i)$;

г) $z_1 = 1 - 2i$, $z_2 = 3i$;

д) $z_1 = 5 - 2i$, $z_2 = 2i$;

е) $2 \pm 2i$;

ж) $\pm 2i$; $\pm \sqrt{5}i$;

з) $z_{1,2} = \pm 1$, $z_{3,4} = \pm i$, $z_{5,6} = \pm 2$, $z_{7,8} = \pm 2i$;

и) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

к) $z_1 = 1$, $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

л) $z_1 = 1$, $z_2 = -3$, $z_3 = 2i - 1$, $z_4 = -1 - 2i$;

м) $z = \frac{3}{4} + i$;

$$\text{н)} -1; \frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.39 Представить комплексное число в тригонометрической форме:

- а) 5; б) i ; в) -2 ;
 г) $-3i$; д) $1+i$; е) $1-i$;
 ж) $1+i\sqrt{3}$; з) $-1+i\sqrt{3}$; и) $-1-i\sqrt{3}$;
 к) $1+\frac{\sqrt{3}}{3}i$; л) $\cos \alpha - i \sin \alpha$; м) $\sin \alpha + i \cos \alpha$.

- Ответ. а) $5(\cos 0 + i \sin 0)$; б) $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$;
 в) $2(\cos \pi + i \sin \pi)$; г) $3\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$;
 д) $\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)$; е) $\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$;
 ж) $2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$; з) $2\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right)$;
 и) $2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$; к) $\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6}\right)$;
 л) $\cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha)$; м) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

2.40 Вычислить

- а) $\left(\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}\right)\right)^4$; б) $\left(3\left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5}\right)\right)^3$.

Ответ. а) -4 ; б) $27\left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5}\right)$.

2.41 Используя формулу Муавра выведите тригонометрические формулы $\sin 2\alpha$, $\cos 2\alpha$, $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$, $\sin 4\alpha$, $\cos 4\alpha$.

2.42 Вычислить: а) $\sqrt[3]{1}$; б) $\sqrt[4]{-4}$.

Ответ. а) $\left\{1; -\frac{1}{2} \pm i \frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$; б) $\{1 \pm i, -1 \pm i\}$.

2.43 Найти корни уравнения $z^8 - 1 = 0$.

Ответ. $z_0 = 1, \quad z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_2 = i, \quad z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_4 = -1,$
 $z_5 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad z_6 = i, \quad z_7 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i.$

2.44 Найти многочлен второй степени $f(z)$, если его коэффициент перед первой степенью z равен (-3) , $f(i) = 3 - 6i$, $f(2 - i) = 9 + 4i$.

Ответ. $f(z) = (1 + 2i)z^2 - 3z + 4 - i.$

2.45 Найти решение системы уравнений

а) $\begin{cases} (2 + i)x + (2 - i)y = 6, \\ (3 + 2i)x + (3 - 2i)y = 8. \end{cases}$ б) $\begin{cases} (3 - i)x + (4 + 2i)y = 2 + 6i, \\ (4 + 2i)x + (3 + 3i)y = 5 + 4i. \end{cases}$

Ответ. а) $y = 2 - i, \quad x = 2 + i;$ б) $x = 1 + i, \quad y = i.$

2.46 Найти и построить на комплексной плоскости (z) области, которым принадлежат точки $z = x + iy$ удовлетворяющие указанным условиям.

а) $|z + z_1| > 6$, где $z_1 = 1 - i$;

б) $1 < |z - i| < 3$;

в) $0 < |z + i| < 1$;

г) $|z - i| = |z + 2|.$

Ответ. а) внешность круга радиусом $R = 6$ с центром в точке $(-1; 1)$.

б) кольцо между окружностями с центром в точке $z = i$, радиусы которых $r_1 = 1, \quad r_2 = 3$;

в) внутренность круга радиусом $R = 1$ с выколотым центром в точке $(0; -1)$;

г) серединный перпендикуляр к отрезку, соединяющему точки $M_1(0; 1)$ и $M_2(-2; 0)$.

2.47 Представить в показательной форме следующие комплексные числа:

а) $z = -\sqrt{12} - 2i$; б) $z = -\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}.$

Ответ. а) $4e^{\frac{7\pi}{6}i}$; б) $e^{\frac{6\pi}{7}i}.$

2.48 Найти все значения корня $\sqrt[5]{-1 - i}.$

Ответ. $\sqrt[10]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5}k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{5}k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

2.49 Найти все значения корня $\sqrt[6]{1+i\sqrt{3}}$.

Ответ. $\sqrt[6]{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\pi}{3} k \right) \right), \quad k = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$

3 Многочлены одной переменной

Многочлен $P_n(x)$ относительно переменной x вида:

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \dots + a_1 x + a_0, \quad (3.1)$$

где $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ - действительные числа и $a_n \neq 0$, называется **многочленом**, расположенным по убывающим степеням x , или многочленом, представленным в **каноническом** (стандартном) **виде**.

Числа $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ называются его коэффициентами, одночлен $a_n x^n$ - его **старшим членом**, а число n - **степенью многочлена**.

Многочлен со старшим коэффициентом, равным 1, называется **приведенным** многочленом.

Если у многочлена, представленного в каноническом виде, отсутствует некоторая степень x , то коэффициент соответствующего одночлена равен нулю. Например, многочлен $4x^3 - 3x + 2$ есть многочлен третьей степени, записанный в каноническом виде, у которого коэффициент при x^2 равен нулю.

Два многочлена, **тождественно равны**, если равны их степени и равны коэффициенты при одинаковых степенях x . Например, многочлен $x^3 + 2x^2 + 1$ тождественно равен многочлену $ax^3 + bx^2 + 1$, если $a = 1$, $b = 2$.

Корни многочлена

Если вместо переменной x в многочлен $P_n(x)$ подставить действительное число c , то в результате получится число, $P_n(c)$, которое называют **значением многочлена $P_n(x)$ при $x = c$** .

Число c называют **корнем многочлена $P_n(x)$** , если $P_n(c) = 0$.

Например, 2 - корень многочлена $P_2(x) = x^2 - x - 2$, так как $P_2(2) = 4 - 2 - 2 = 0$.

Для нахождения корней многочлена необходимо знать следующую теорему.

Теорема 1 Если многочлен $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами имеет рациональные корни, то их следует искать среди чисел $\frac{m}{k}$, где m - целый делитель a_0 , а k - натуральный делитель a_n .

Задача 3.1 Найти корни многочлена $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

Решение. Сначала найдем делители свободного члена 6:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$.

Поскольку заданный многочлен является приведенным, то согласно

теореме 1 рациональные корни данного многочлена следует искать среди делителей свободного члена.

Последовательно, подставив вместо переменного перечисленные делители, получим, что

$$P_3(1) = 1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 = 0,$$

$$P_3(-1) = (-1)^3 - 2 \cdot (-1)^2 - 5 \cdot (-1) + 6 = 8 \neq 0.$$

Дальнейшие вычисления предлагаем читателю выполнить самостоятельно, мы же коротко отметим, что

$$P_3(2) \neq 0, \quad P_3(3) = 0, \quad P_3(6) \neq 0,$$

$$P_3(-2) = 0, \quad P_3(-3) \neq 0, \quad P_3(-6) \neq 0.$$

Таким образом, многочлен $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ имеет три корня $x = 1$, $x = -2$ и $x = 3$.

Ответ. $x = 1$, $x = -2$, $x = 3$ - корни многочлена.

Действия над многочленами

Сложение многочленов

При сложении двух многочленов, достаточно произвести операцию приведения подобных членов.

Задача 3.2 Найти сумму многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5, \text{ а } Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x.$$

Решение.

$$\begin{aligned} P(x) + Q(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 5) + (4x^3 - 2x^2 + 3x) = (2x^3 + 4x^3) + (3x^2 - 2x^2) + 3x - 5 = \\ &= 6x^3 - x^2 + 3x - 5. \end{aligned}$$

Вычитание многочленов

Для нахождения разности многочленов $P(x)$ и $Q(x)$ необходимо к многочлену $P(x)$ прибавить многочлен, противоположный многочлену $Q(x)$.

Задача 3.3 Найти разность многочленов $P(x)$ и $Q(x)$, если

$$P(x) = 2x^3 + 3x^2 - 5, \text{ а } Q(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x.$$

Решение.

$$\begin{aligned} P(x) - Q(x) &= (2x^3 + 3x^2 - 5) - (4x^3 - 2x^2 + 3x) = (2x^3 - 4x^3) + (3x^2 + 2x^2) - 3x - 5 = \\ &= -2x^3 + 5x^2 - 3x - 5. \end{aligned}$$

Умножение многочленов

Чтобы умножить многочлен на многочлен, достаточно каждый член одного многочлена умножить на каждый член другого, полученные произведения сложить.

Задача 3.4 Найти произведение многочленов $f(x) = 2 - 7x^2 - 3x^6$ и $g(x) = 4 - 2x^2 + 3x^6$.

Решение.

$f(x) \cdot g(x) = (2 - 7x^2 - 3x^6) \cdot (4 - 2x^2 + 3x^6) = 8 - 4x^2 + 6x^6 + 28x^2 - 14x^4 + 21x^8 - 12x^6 + 6x^8 - 9x^{12} = -9x^{12} + 27x^8 - 6x^6 - 14x^4 - 4x^2 + 8$ - многочлен 12-й степени.

Деление многочленов

Деление многочленов выполнимо, если степень многочлена-делимого не меньше степени многочлена-делителя.

Любой многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $T_m(x)$ ($m \leq n$) либо с остатком, либо нацело. (Напомним, индексы при многочлене означают его степень. Например, $P_n(x)$ - многочлен n -й степени.)

Деление многочлена с остатком

Разделить с остатком многочлен $P_n(x)$ на многочлен $T_m(x)$ ($m \leq n$) это значит найти многочлены $Q_l(x)$ и $R_k(x)$ такие, что справедливо тождественное равенство

$$P_n(x) = T_m(x) \cdot Q_l(x) + R_k(x),$$

где $0 \leq k < m$. При этом многочлен $Q_l(x)$ называется частным, а многочлен $R_k(x)$ - остатком.

Заметим, что если многочлен $P_n(x)$ делится с остатком на многочлен $T_m(x)$, то существует единственная пара многочленов $Q_l(x)$ и $R_k(x)$ таких, что $P_n(x) = T_m(x) \cdot Q_l(x) + R_k(x)$, причем $l = n - m$, $0 \leq k < m$.

Рассмотрим деление многочлена «углом».

Задача 3.5 Разделить многочлен $3x^3 + 5x + 1$ на многочлен $x^2 - x + 2$.

Решение.

$$\begin{array}{r|l} 3x^3 + 5x + 1 & x^2 - x + 2 \\ \hline 3x^3 - 3x^2 + 6x & 3x + 3 \\ \hline -3x^2 - x + 1 & \\ \hline 3x^2 - 3x + 6 & \\ \hline 2x - 5 & \end{array}$$

Т.о. многочлен $3x + 3$ есть частное, а многочлен $2x - 5$ - остаток от деления многочлена $3x^3 + 5x + 1$ на многочлен $x^2 - x + 2$.

Ответ. $3x^3 + 5x + 1 = (x^2 - x + 2)(3x + 3) + 2x - 5$.

Деление многочлена на двучлен

При делении многочлена $P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ на двучлен $(x - a)$ получится многочлен вида $P_{n-1}(x) = b_{n-1} x^{n-1} + b_{n-2} x^{n-2} + \dots + b_1 x + b_0$ и остаток r . Для нахождения коэффициентов $b_{n-1}, b_{n-2}, \dots, b_1, b_0$ и остатка r можно воспользоваться **схемой Горнера**:

		a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_{n-1}	a_n
		+	+	+	$\dots$	+	+	
		cb_0	cb_1	cb_2	$\dots$	cb_{n-2}	cb_{n-1}	
c	b_0	b_1	b_2	b_3	$\dots$	b_{n-1}	r	

В этой схеме, начиная с коэффициента b_1 , каждое число третьей строки получается из предыдущего числа этой строки умножением на число c и прибавлением к полученному результату соответствующего числа первой строки, стоящего над искомым числом.

Задача 3.6 Разделить $f(x) = 2x^5 - x^4 - 3x^3 + x - 3$ на $x - 3$.

Решение. Составим таблицу, в которой над чертой расположены коэффициенты многочлена $f(x)$, под чертой – соответствующие коэффициенты частного и остаток, последовательно вычисляемые, а слева сбоку – значение c в данном примере:

	2	-1	-3	0	1	-3
3	2	$3 \cdot 2 - 1 = 5$	$3 \cdot 5 - 3 = 12$	$3 \cdot 12 + 0 = 36$	$3 \cdot 36 + 1 = 109$	$3 \cdot 109 - 3 = 324$

Таким образом, искомое частное будет

$$q(x) = 2x^4 + 5x^3 + 12x^2 + 36x + 109,$$

а остаток $r = f(3) = 324$.

Задача 3.7 Используя схему Горнера, разделить многочлен $x^5 - 2x^3 + 3x^2 - x$ на $x + 1$.

Решение. Запишем делимое в каноническом виде, то есть в виде

$$x^5 + 0 \cdot x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x$$

Применяя схему Горнера, имеем

	1	0	-2	3	-1	0
		+	+	+	+	+
		-1	1	1	-4	5
-1	1	-1	-1	4	-5	5

Итак, получим частное $Q_4(x) = x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 5$, остаток $R = 5$.

Ответ. $2x^2 - 3x^3 - x + x^5 + 1 = (x + 1)(x^4 - x^3 - x^2 + 4x - 5) + 5$.

Задача 3.8 Разделить $f(x) = x^4 - 8x^3 + x^2 + 4x - 9$ на двучлен $x + 1$.

Решение. Многочлен $f(x)$ задан в каноническом виде. Следовательно, используя коэффициенты 1, -8, 1, 4, -9 и значение $c = -1$ (поскольку $x - c = x + 1$), заполним схему Горнера

	1	-8	1	4	-9
		+	+	+	+
		-1	9	-10	6
-1	1	-9	10	-6	-3

Поэтому частное будет имеет вид

$$q(x) = x^3 - 9x^2 + 10x - 6,$$

а остаток $r = f(-1) = -3$.

Эти примеры показывают, что *метод Горнера может быть использован также для быстрого вычисления значения многочлена при данном значении неизвестного.*

При решении задач на отыскание остатка от деления многочлена на двучлен полезно использовать следующее:

1. *Теорема Безу*

Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на двучлен $(x - c)$ равен значению многочлена при $x = c$, то есть $R = P_n(c)$.

2. *Следствие теоремы Безу*

При делении многочлена $P_n(x)$ на двучлен вида $ax + b$ получается **остаток**, равный значению этого многочлена при $x = -\frac{b}{a}$, то есть $R = P_n\left(-\frac{b}{a}\right)$.

Задача 3.9 Найти остаток от деления многочлена

$$P_3(x) = 2x^3 - x^2 + 4x - 1 \text{ на двучлен } 2x - 1.$$

Решение. Согласно вышесказанному утверждению, имеем

$$R = P_3\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 1.$$

Ответ. $R = 1$.

Деление многочлена нацело

Если при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $Q(x)$ остаток равен нулю, то говорят, что $P(x)$ *делится нацело на $Q(x)$* ($P(x) : Q(x)$).

Для решения задач на делимость многочленов единого алгоритма не существует. Каждая задача требует своего индивидуального подхода. При решении таких задач используют понятие и свойства делимости многочленов, деление многочленов с остатком. При этом полезно помнить, что свободный член многочлена получается при $x = 0$, а сумма

коэффициентов многочлена – при $x=1$. Часто также при решении задач на делимость используются следующие следствия теоремы Безу.

Следствия теоремы Безу:

1. Многочлен $P_n(x)$ делиться на $x-a$ тогда и только тогда, когда число a является корнем многочлена $P_n(x)$ (то есть $P(a)=0$);

2. Многочлен $x^n - a^n$ делиться на $x-a$ при любом натуральном n ,
причем $\frac{x^n - a^n}{x-a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + x^{n-3}a^2 + \dots + x^2a^{n-3} + xa^{n-2} + a^{n-1}$;

3. Многочлен $x^{2n} - a^{2n}$ делиться на $x+a$ при любом натуральном n ,
причем $\frac{x^{2n} - a^{2n}}{x+a} = x^{2n-1} - x^{2n-2}a + x^{2n-3}a^2 + \dots - x^2a^{2n-3} + xa^{2n-2} - a^{2n-1}$;

4. Многочлен $x^{2n+1} + a^{2n+1}$ делиться на $x+a$ при любом натуральном n ,
причем $\frac{x^{2n+1} + a^{2n+1}}{x+a} = x^{2n} - x^{2n-1}a + x^{2n-2}a^2 - \dots + x^2a^{2n-2} - xa^{2n-1} + a^{2n}$.

Задача 3.10 Указать двучлен, на который делится нацело многочлен $P_4(x) = x^4 + 4x^3 + 5x + 8$.

а) $x+2$; б) $x+1$?

Решение. а) Так как $P_4(-2) \neq 0$, то данный многочлен на $x+2$ нацело не делится;

б) так как $P_4(-1) = 0$, то данный многочлен делится нацело на $x+1$.

Ответ. $x+1$.

Задача 3.11 Разделить многочлен $P_5(x) = x^5 - 32$ на $x-2$.

Решение. Так как $P_5(x) = x^5 - 2^5$, то по следствию 2 многочлен $P_5(x)$ делится нацело на $x-2$, причем

$$\frac{x^5 - 32}{x-2} = x^4 + x^3 \cdot 2^1 + x^2 \cdot 2^2 + x \cdot 2^3 + 2^4 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16.$$

Ответ. $x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$.

Задача 3.12 Разделить многочлен $P_{10}(x) = x^{10} + 1$ на $x^2 + 1$.

Решение. Положим $x^2 = u$; тогда имеем многочлен $P(u) = u^5 + 1$. По 4 следствию теоремы Безу этот многочлен делим на $u+1$, причем $\frac{u^5 + 1}{u+1} = u^4 - u^3 + u^2 - u + 1$.

Отсюда следует, что

$$\frac{x^{10} + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x^2)^5 + 1}{x^2 + 1} = (x^2)^4 - (x^2)^3 + (x^2)^2 - x^2 + 1 = x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1.$$

Ответ. $x^8 - x^6 + x^4 - x^2 + 1$.

Задача 3.13 Доказать, что при любом натуральном n число $25^n - 2^{2n} + 2^n + 1$ делится нацело на число 3.

Решение. Перепишем заданное число в виде $5^{2n} - 2^{2n} + 2^n + 1$.

Согласно следствию 2, при любом натуральном n число $5^{2n} - 2^{2n}$ делится на число $5 - 2 = 3$ и число $2^n + 1$ делится на число $2 + 1 = 3$. Таким образом, число $5^{2n} - 2^{2n} + 2^n + 1$ делится нацело на 3 как сумма чисел $5^{2n} - 2^{2n}$ и $2^n + 1$, каждое из которых делится на 3.

Задача 3.14 Найти остаток от деления многочлена $x^{1982} - 2x^{1983} + 1$ на $x^2 - 1$.

Решение. $f(x) = x^{1982} - 2x^{1983} + 1$, $\varphi(x) = x^2 - 1$.

$f(x) = \varphi(x)q(x) + r(x)$, где $\text{ст } r(x) < \text{ст } \varphi(x)$ (сокращение: ст - степень).

Остаток $r(x)$ - многочлен не выше первой степени.

Обозначим $r(x) = ax + b$.

Тогда $f(x) = (x^2 - 1)q(x) + (ax + b)$.

Если $x = 1$, то $f(1) = 0$, $\varphi(1) = 0$, $a + b = 0$.

Если $x = -1$, то $f(-1) = 4$, $\varphi(-1) = 0$, $-a + b = 4$.

Таким образом, получим систему:

$$\begin{cases} a + b = 0, \\ -a + b = 4, \end{cases}$$

откуда находим: $a = -2$, $b = 2$.

Следовательно, $r(x) = -2x + 2$.

Ответ. $r(x) = -2x + 2$.

На практике мы часто сталкиваемся с задачами разложения многочленов на множители. В этих случаях пользуются либо методом группировки, либо применяют формулы сокращенного умножения, либо находят при помощи следствия теоремы Безу корень многочлена и производят деление многочлена на двучлен, в результате которого получится многочлен степени на единицу меньше данного и процесс продолжают вновь. Продемонстрируем сказанное на следующем примере.

Задача 3.15 Разложить многочлены на множители

а) $P_6(x) = 3x^6 + 12x^4 - 96x^2$;

б) $P_4(x) = x^4 + 5x^3 - 6x^2$;

в) $P_7(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$;

г) $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$.

Решение. Задания а) и б) удобно выполнить, используя метод группировки. Действительно,

$$\text{а) } P_6(x) = 3x^6 + 12x^4 - 96x^2 = 3x^2(x^4 + 4x^2 - 32) = 3x^2(x^4 - 4x^2 + 8x^2 - 32) = \\ = 3x^2(x^2(x^2 - 4) + 8(x^2 - 4)) = 3x^2(x^2 - 4)(x^2 + 8) = 3x^2(x - 2)(x + 2)(x^2 + 8);$$

$$\text{б) } P_5(x) = x^5 + 5x^3 - 6x^2 = x^2(x^3 + 5x - 6) = x^2(x^3 - x^2 + x^2 - x + 6x - 6) = \\ = x^2(x^2(x - 1) + x(x - 1) + 6(x - 1)) = x^2(x - 1)(x^2 + x + 6);$$

в) Это задание выполним, применяя формулы сокращенного умножения.

$$P_7(x) = x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = x^6(x + 1) + x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1) = \\ = (x + 1)(x^6 + x^4 + x^2 + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^4 + 1) = (x + 1)(x^2 + 1)(x + 2x^2 + 1 - 2x^2) = \\ = (x + 1)(x^2 + 1)((x^2 + 1)^2 - (\sqrt{2}x)^2) = (x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1).$$

Т. к. дискриминанты квадратных трехчленов $x^2 - \sqrt{2}x + 1$ и $x^2 + \sqrt{2}x + 1$ меньше нуля, то эти трехчлены на линейные множители на множестве действительных чисел не разлагаются;

г) Многочлен $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1$ разложим на множители используя теорему Безу и её следствия.

Делителями свободного члена являются числа $-1; 1$.

Проверим $P_4(-1) \neq 0$, $P_4(1) = 0$. Следовательно, заключаем, что многочлен $P_4(x)$ делится нацело на $x - 1$. Имеем

$$\begin{array}{r} x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 \quad |x-1 \\ \underline{x^4 - x^3} \\ x^3 - x^2 + x - 1 \\ \underline{-x^3 + 2x^2} \\ -x^3 + x^2 \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ x^2 - 2x \\ \underline{x^2 - 3x} \\ -x + 1 \\ \underline{-x + 1} \\ 0 \end{array}$$

Далее, рассматриваем многочлен $P_3(x) = x^3 - x^2 + x - 1$. Имеем $P_3(1) = 0$, тогда

$$\begin{array}{r} x^3 - x^2 + x - 1 \quad |x-1 \\ \underline{x^3 - x^2} \\ x - 1 \\ \underline{x - 1} \\ 0 \end{array}$$

Осталось разложить многочлен $P_2(x) = x^2 + 1$. Но он действительных корней не имеет.

Итак, мы получили следующее:

$$x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = (x^2 + 1)(x - 1)^2.$$

Заметим, однако, что разложить данный многочлен проще было бы, наверное, применив формулы сокращенного умножения:

$$\begin{aligned} P_4(x) &= x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1 = x^4 + 2x^2 + 1 - 2x(x^2 + 1) = (x^2 + 1)^2 - 2x(x^2 + 1) = \\ &= (x^2 + 1)(x^2 - 2x + 1) = (x^2 + 1)(x - 1)^2. \end{aligned}$$

Задача 3.16 Найти корни многочлена $P(x) = x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5$.

Решение. Поскольку коэффициенты данного многочлена – целые числа, то попробуем найти хотя бы один целый корень.

Используем следствие из теоремы Безу. Делителями свободного члена являются числа 1, -1, 5, -5. Найдем значения многочлена $P_4(x)$ в этих точках:

$$P_4(1) = 1 + 2 - 2 - 6 + 5 = 0,$$

$$P_4(-1) = 1 - 2 - 2 + 6 + 5 = 8 \neq 0,$$

$$P_4(5) = 625 + 250 - 50 - 30 + 5 = 800 \neq 0,$$

$$P_4(-5) = 625 - 250 - 50 + 30 + 5 = 360 \neq 0.$$

Многочлен $P_4(x)$ имеет целый корень $x_1 = 1$, а числа 5, -5, -1 не являются его корнями.

Согласно теореме Безу, можно утверждать, что найдется многочлен $P_3(x)$ такой, что

$$P_4(x) = (x - 1)P_3(x),$$

где $P_3(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ – некоторый многочлен третьей степени.

Разделим многочлен $P_4(x)$ на двучлен $(x - 1)$ имеем:

$$x^4 + 2x^3 - 2x^2 - 6x + 5 = (x - 1)(x^3 + 3x^2 + x - 5).$$

Теперь надо найти корни многочлена $P_3(x)$

$$P_3(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5.$$

Делители его свободного члена есть числа 1, -1, 5, -5. Нет необходимости искать значения многочлена в точках -1, 5, -5, так как эти числа не являются корнями многочлена $P_4(x)$, а значит, и многочлена $P_3(x)$. Поэтому проверим только число 1. Имеем $P_3(x) = 1 + 3 + 1 - 5 = 0$; применяя метод деления многочленов уголком, имеем $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 4x + 5)$. Таким образом, исходный многочлен $P_4(x)$ запишем в виде $(x - 1)^2(x^2 + 4x + 5)$.

Поскольку дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + 4x + 5$ равен -4, то значит, многочлен $x^2 + 4x + 5$ действительных корней не имеет.

Итак, многочлен $P_4(x)$ имеет два совпадающих корня $x_1 = x_2 = 1$.

Ответ. 1.

Задача 3.17 Найти корни многочлена $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 2$.

Решение. Поскольку заданный многочлен приведенным не является, то согласно теореме 1 рациональные корни многочлена будем искать среди чисел $\frac{m}{k}$, где m - целый делитель свободного члена, а k - натуральный делитель старшего коэффициента.

Имеем

$$m: \pm 1, \pm 2,$$

$$k: 1, 2.$$

Составляем всевозможные дроби $\frac{m}{k}$

$$\frac{m}{k}: \frac{1}{1}; \frac{-1}{1}; \frac{2}{1}; \frac{-2}{1}; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}; \frac{2}{2}; \frac{-2}{2}.$$

Итак, получим шесть различных значений

$$\frac{m}{k}: 1; -1; 2; -2; \frac{1}{2}; \frac{-1}{2}.$$

Среди которых находим корни многочлена.

$$f(1) \neq 0, \quad f(-1) = 0, \quad f(2) \neq 0,$$

$$f(-2) = 0, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) \neq 0.$$

Таким образом, заключаем, что заданный многочлен имеет три действительных корня: $-2, -1, \frac{1}{2}$.

$$\text{Ответ. } -2, -1, \frac{1}{2}.$$

При делении многочлена на многочлен (не обязательно двучлен) используют тот же метод деления углом.

Задача 3.18 Произвести деление $P_5(x) : Q_3(x)$, если $P_5(x) = 3x^5 - 2x^2 + 1$, $Q_3(x) = x^3 + 2x$.

Решение.

$$\begin{array}{r} -3x^5 + 0x^4 + 0x^3 - 2x^2 + 0x + 1 \quad | \quad x^3 + 0x^2 + 2x + 0 \\ \underline{3x^5 + 0x^4 + 6x^3} \quad 3x^2 - 6 \\ -6x^3 - 2x^2 + 0x + 1 \\ \underline{-6x^3 + 0x^2 + 0x + 0} \\ -2x^2 + 1 \end{array}$$

Таким образом,

$$3x^5 - 2x^2 + 1 = (x^3 + 2x)(3x^2 - 6) + (-2x^2 + 1).$$

Свойства делимости многочленов

1⁰ Если многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$, а многочлен $Q_m(x)$ делится на многочлен $F_l(x)$, то многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $F_l(x)$.

2⁰ Если многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ делятся на многочлен $K_l(x)$, то многочлены $P_n(x) + Q_m(x)$ и $P_n(x) - Q_m(x)$ делятся на многочлен $K_l(x)$, а многочлен $P_n(x) \cdot Q_m(x)$ делится на многочлен $K_l^2(x)$.

3⁰ Если многочлен $P_n(x)$ делится на многочлен $Q_m(x)$, то произведение многочлена $P_n(x)$ на любой многочлен $K_l(x)$ также делится на многочлен $Q_m(x)$.

4⁰ Многочлены $P_n(x)$ и $Q_m(x)$ тогда и только тогда делятся друг на друга, когда $P_n(x) = CQ_m(x)$, где $C \neq 0$.

5⁰ Если многочлен $P_n(x) = Q_m(x) \cdot K_l(x)$ делится на двучлен $x - a$, то хотя бы один из многочленов $Q_m(x)$ или $K_l(x)$ делится на $x - a$.

Задача 3.19 Многочлен $P_3(x) = x^3 + ax^2 - x + b$ разложили на множители. Найти такие a и b , чтобы в разложении присутствовал многочлен $P_2(x) = x^2 - 1$.

Решение. Поскольку по условию задачи в разложении многочлена $P_3(x)$ есть многочлен $P_2(x)$, заключаем, что $P_3(x) : P_2(x)$. Но если многочлен $P_3(x)$ делится на $x^2 - 1$, то многочлен $P_3(x)$ должен делиться на $x - 1$ и $x + 1$. Поэтому $P_3(1) = 0$ и $P_3(-1) = 0$, откуда для нахождения a и b получим систему

$$\begin{cases} 0 = 1 + a - 1 + b, \\ 0 = -1 + a + 1 + b. \end{cases}$$

Отсюда $a = -b$.

Таким образом, заключаем, что в разложении многочлена $P_3(x)$ будет многочлен $x^2 - 1$ при всех $a = -b$.

Ответ. $a = -b$ при $a, b \in R$

Наибольший общий делитель многочленов

Многочлен $\varphi(x)$ называется **общим делителем** для заданных многочленов $f(x)$ и $g(x)$, если он является делителем для каждого из этих многочленов.

Очевидно, что к числу общих делителей многочленов $f(x)$ и $g(x)$ принадлежат все многочлены нулевой степени (т.е. числа).

Два многочлена $f(x)$ и $g(x)$ называются **взаимно простыми**, если они не имеют никаких общих делителей кроме многочленов нулевой степени.

Наибольшим общим делителем (коротко **НОД**) отличных от нуля многочленов $f(x)$ и $g(x)$ называется такой многочлен $d(x)$, который является их

общим делителем и, вместе с тем, сам делится на любой другой общий делитель этих многочленов.

Обозначение: $(f(x), g(x))$ - наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Для отыскания НОД удобно пользоваться *алгоритмом Евклида* (или *алгоритмом последовательного деления*).

Алгоритм Евклида

Суть алгоритма Евклида, с помощью которого находится $(f(x), g(x))$, состоит в последовательном делении сначала многочлена $f(x)$ на $g(x)$, затем многочлена $g(x)$ на полученный от первого деления остаток $r_1(x)$, затем $r_1(x)$ на полученный от второго деления остаток $r_2(x)$ и т.д. Поскольку степени остатков все время понижаются, то эта цепочка последовательных делений понятно остановится в тот момент, когда деление совершится нацело. Тот остаток $r_k(x)$, на который нацело разделится предыдущий $r_{k-1}(x)$, и будет наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 3.20 Найти наибольший общий делитель многочленов

$$f(x) = x^4 + 3x^3 - x^2 - 4x - 3, \quad g(x) = 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3.$$

Решение. Применяя алгоритм Евклида к многочленам с целыми коэффициентами, мы можем, чтобы избежать дробных коэффициентов, умножить делимое или сократить делитель на любое не равное нулю число, это возможно в процессе самого этого деления. Такое действие приводит, понятно, к искажению частного, но интересующие нас остатки будут приобретать лишь некоторый множитель нулевой степени, что, как мы знаем, при разыскании наибольшего общего делителя допускается.

Делим $f(x)$ на $g(x)$, предварительно умножив $f(x)$ на 3:

$$\begin{array}{r|l} 3x^4 + 9x^3 - 3x^2 - 12x - 9 & 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ 3x^4 + 10x^3 + 2x^2 - 3x & x + 1 \\ \hline -x^3 - 5x^2 - 9x - 9 & \end{array}$$

(умножаем на -3)

$$\begin{array}{r} 3x^3 + 15x^2 + 27x + 27 \\ 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 \\ \hline 5x^2 + 25x + 30. \end{array}$$

Таким образом, первый остаток, после сокращения на 5, будет $r_1(x) = x^2 + 5x + 6$. Делим на его многочлен $g(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 + 10x^2 + 2x - 3 & x^2 + 5x + 6 \\
 \underline{3x^3 + 15x^2 + 18x} & 3x - 5 \\
 -5x^2 - 16x - 3 & \\
 \underline{-5x^2 - 25x - 30} & \\
 9x + 27 &
 \end{array}$$

Вторым остатком, после сокращения на 9, будет, следовательно, $r_2(x) = x + 3$ Так как

$$r_1(x) = r_2(x)(x + 2),$$

то $r_2(x)$ будет тем последним остатком, на который нацело делится предшествующий остаток. Он будет, таким образом, искомым наибольшим общим делителем.

Ответ. $(f(x), g(x)) = x + 3$.

Задача 3.21 Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 1$ и $g(x) = x^2 + 2x - 3$.

Решение. Следуем строго по алгоритму Евклида

1) $f(x) : g(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^3 - 4x^2 + 4x - 1 & x^2 + 2x - 3 \\
 \underline{x^3 + 2x^2 - 3x} & x - 6 \\
 -6x^2 + 7x - 1 & \\
 \underline{-6x^2 - 12x + 18} & \\
 19x - 19 &
 \end{array}$$

Так как $f(x) = g(x) \cdot q(x) + r_1(x)$, т.е. $x^3 - 4x^2 + 4x - 1 = (x^2 + 2x - 3)(x - 6) + (19x - 19)$, следовательно, $r_1(x) = 19x - 19$.

2) $g(x) : r_1(x)$

$$\begin{array}{r|l}
 x^2 + 2x - 3 & 19x - 19 \\
 \underline{x^2 - x} & \frac{1}{19}x + \frac{3}{19} \\
 3x - 3 & \\
 \underline{3x - 3} & \\
 0 &
 \end{array}$$

т.е. получим, что

$$g(x) = r_1(x) \left(\frac{1}{19}x + \frac{3}{19} \right).$$

Следовательно, наибольшим общим делителем многочленов $f(x)$ и $g(x)$ служит двучлен $19x - 19$. На основании утверждения 3 наибольшим общим делителем многочлен $f(x)$ и $g(x)$ будем считать многочлен $(x - 1)$.

При решении задач на многочлены полезно использовать следующие утверждения:

- 1 любые два многочлена обладают наибольшим общим делителем;
- 2 если многочлены $f(x)$ и $g(x)$ имеют оба рациональные или действительные коэффициенты, то и коэффициенты их наибольшего общего делителя также будут рациональными или, соответственно, действительными;
- 3 наибольший общий делитель двух многочленов определен лишь с точностью до множителя нулевой степени.

Условимся, что старший коэффициент наибольшего общего делителя двух многочленов будет всегда считаться равным единице, а значит два многочлена тогда и только тогда взаимно просты, если их наибольший общий делитель равен единице.

Теорема Если $d(x)$ есть наибольший общий делитель многочленов $f(x)$ и $g(x)$, то можно найти такие многочлены $u(x)$ и $v(x)$, что

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = d(x). \quad (*)$$

Представление $(*)$ называется **представлением $d(x)$** (наибольшего общего делителя $f(x)$ и $g(x)$) в **линейной форме**.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ тогда и только тогда взаимно просты, если можно найти многочлены $u(x)$ и $v(x)$, удовлетворяющие равенству

$$f(x)u(x) + g(x)v(x) = 1.$$

Напомним теоремы о взаимно простых многочленах:

- 1 если многочлен $f(x)$ взаимно прост с каждым из многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, то он взаимно прост и с их произведением;
- 2 если произведение многочленов $f(x)$ и $g(x)$ делится на $\varphi(x)$, но $f(x)$ и $\varphi(x)$ взаимно просты, то $g(x)$ делится на $\varphi(x)$;
- 3 если многочлен $f(x)$ делится на каждый из многочленов $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, которые между собой взаимно просты, то $f(x)$ делится и на их произведение;
- 4 наибольший общий делитель многочленов $f_1(x), f_2(x), \dots, f_s(x)$ равен наибольшему общему делителю многочлена $f_s(x)$ и наибольшего общего делителя многочленов $f_1(x), f_2(x), \dots, f_{s-1}(x)$.

В заключении выполним задание на представление многочлена в линейной форме.

Задача 3.22 Найти наибольший общий делитель многочленов и представить его в линейной форме:

$$f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2,$$

$$g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1.$$

Решение. Применим к многочленам $f(x)$ и $g(x)$ алгоритм Евклида.

$$\begin{array}{r|l} f(x) = 2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2 & 2x^3 + x^2 - x - 1 = g(x) \\ 2x^4 + x^3 - x^2 - x & x + 1 = q_1(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2x^3 - 2x^2 - 4x + 2 \\ \hline 2x^3 + x^2 - x - 1 \\ \hline -3x^2 - 3x + 3 = r_1(x) \end{array}$$

т.е. $f(x) = g(x) \cdot q_1(x) + r_1(x)$.

$$\begin{array}{r|l} g(x) = 2x^3 + x^2 - x - 1 & -3x^2 - 3x + 3 = r_1(x) \\ 2x^3 + 2x^2 - 2x & -2/3x + 1/3 = q_2(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -x^2 + x - 1 \\ \hline -x^2 - x + 1 \\ \hline 2x - 2 = r_2(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} r_1(x) = -3x^2 - 3x + 3 & 2x - 2 = r_2(x) \\ -3x^2 + 3x & -3/2x - 3 = q_3(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -6x + 3 \\ \hline -6x + 6 \\ \hline -3 = r_3(x) \neq 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} r_2(x) = 2x - 2 & -3 = r_3(x) \\ 2x & -2/3x + 2/3 = q_4(x) \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2 \\ \hline -2 \\ \hline 0 \end{array}$$

Таким образом, $(f(x), g(x)) = d(x) = r_3(x) = -3$.

Запишем равенства алгоритма Евклида:

$$\begin{cases} f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), & \text{ст. } r_1(x) < \text{ст. } g(x) \\ g(x) = r_1(x)q_2(x) + r_2(x), & \text{ст. } r_1(x) < \text{ст. } r_2(x) \\ r_1(x) = r_2(x)q_3(x) + r_3(x) = d(x), & \text{ст. } r_3(x) < \text{ст. } r_2(x) \\ r_2(x) = r_3(x)q_4(x) + 0. \end{cases} \quad (**)$$

Учитывая равенства (**), выразим $d(x)$ в линейной форме:

$$\begin{aligned} d(x) &= r_1(x) - r_2(x)q_3(x) = r_1(x) - (g(x) - r_1(x)q_2(x))q_3(x) = \\ &= r_1(x)(1 + q_2(x)q_3(x)) + (-q_3(x))g(x) = (f(x) - g(x)q_1(x))(1 + q_2(x)q_3(x)) + \\ &+ (-q_3(x))g(x) = f(x)\underbrace{(1 + q_2(x)q_3(x))}_{u(x)} + g(x)\underbrace{(-q_1(x) - q_1(x)q_2(x)q_3(x) - q_3(x))}_{v(x)}. \end{aligned}$$

Находим многочлены $u(x)$ и $v(x)$:

$$\begin{aligned} u(x) &= 1 + q_2(x)q_3(x) = 1 + (-2x/3 + 1/3)(-3x/2 - 3) = \\ &= 1 + (x^2 - x/2 + 2x - 1) = 1 + (x^2 + 3x/2 - 1) = x^2 + 3x/2; \\ v(x) &= -q_1(x) + q_1(x)q_2(x)q_3(x) - q_3(x) = -(x+1) - \\ &-(x+1)(-2x/3 + 1/3)(-3x/2 - 3) - (-3x/2 - 3) = \\ &= -(x+1) - (-2x^2/3 - x/3 + 1/3)(-3x/2 - 3) - (-3x/2 - 3) = \\ &= -(x+1) - (x^3 + 5x^2/2 + x/2 - 1) - (-3x/2 - 3) = -x - 1 - x^3 - 5x^2/2 - x/2 + 1 + \\ &+ 3x/2 + 3 = -x^3 - 5x^2/2 + 3. \end{aligned}$$

Получили: $u(x) = x^2 + 3x/2$; $v(x) = -x^3 - 5x^2/2 + 3$.

Итак, имеем

$$-3 = (x^2 + 3x/2)f(x) + (-x^3 - 5x^2/2 + 3 + 3)g(x).$$

Проверка:

$$\begin{aligned} -3 &= (x^2 + 3x/2)(2x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 5x + 2) + \\ &+ (-x^3 - 5x^2/2 + 3 + 3)(2x^3 + x^2 - x - 1) = 2x^6 + 3x^5 - 3x^4 - 5x^3 + 2x^2 + 3x^5 + \\ &+ 9x^4/2 - 9x^3/2 - 15x^2/2 + 6x/2 + (-2x^6 - 5x^5 + 6x^3 - x^5 - 5x^4/2 + 3x^2 + x^4 + 5x^3/2 - \\ &- 3x + x^3 + 5x^2/2 - 3) = 2x^6 + 6x^5 + 3x^4/2 - 19x^3/2 - 11x^2/2 + 3x - 2x^6 - \\ &- 6x^5 - 3x^4/2 + 19x^3/2 + 11x^2/2 - 3x - 3 = -3. \end{aligned}$$

$$\text{Ответ. } -3 = f(x)(x^2 + 3x/2) + g(x)(-x^3 - 5x^2/2 + 3 + 3).$$

3.1 Задачи для самостоятельного решения

3.23 Найти сумму корней многочлена $P_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2$.

Ответ. 2.

3.24 Сколько иррациональных корней имеет многочлен $P_4(x) = x^4 - 5x^2 + 6$?

Ответ. 4.

3.25 Сумма рациональных корней многочлена

$P_4(x) = 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 3x - 2$, равна:

Ответ. $-\frac{1}{2}$.

3.26 Найти количество рациональных корней многочлена

$P_4(x) = x^4 + 15x^2 + 2x^3 + 14x + 24$.

Ответ. 4.

3.27 Найти рациональный корень многочлена $P_3(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$.

Ответ. 3.

3.28 Найти сумму общих корней многочленов $x^4 - x^2 + 6x - 9$ и $x^4 - x^3 - 2x^2 + 9x - 9$.

Ответ. -1.

3.29 Найти общие корни многочленов $x^4 - x^2 + 2x - 1$ и $x^4 + 3x^3 - 3x^2 - 6x + 4$.

Ответ. $\frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

3.30 Многочлен $Ax^3 + Bx^2 + Cx + 84$ с целыми коэффициентами имеет ровно два корня $x = -2$ и $x = 3$. Найдите C .

Ответ. 56.

3.31 Найти числа α , β и γ , если $x^3 + 6x^2 + \alpha x + \beta$ многочлен является кубом двучлена $x + \gamma$.

Ответ. 12; 8; 2.

3.32 Найти все целые корни многочлена $P_2(x) = n(n-1)x^2 + (2n-1)x + 2$ с натуральным параметром n .

Ответ. -2.

3.33 Найти наименьшее целое значение параметра n , при котором многочлен $P_2(x) = n(n+1)x^2 + (2n+1)x + 2$ имеет только натуральные корни.

Ответ. -1.

3.34 Найти остаток от деления многочлена $P_5(x) = x^5 - 4x + 3$ на многочлен $Q_2(x) = -x^2 + 2x + 3$.

Ответ. $57x + 63$.

3.35 При делении многочлена $6x^4 - x^3 - 2x^2 + 5x - 1$ на многочлен $2x^2 - x + 1$ в остатке получается многочлен первой степени. Найти значение остатка при $x = 1$.

Ответ. 3.

3.36 При делении многочлена $x^{100} - 2x^{51} + 1$ на многочлен $x^2 - 1$ в остатке получается многочлен первой степени. Найти значение остатка при $x = 5$.

Ответ. -8.

3.37 При каком значении λ многочлен $P_5(x) = x^5 + 2x^4 - 3x^3 + x^2 - \lambda x - 24$ разделится нацело на двучлен $(x + 2)$?

Ответ. -2.

3.38 Найти остаток от деления многочлена $x^3 + 6x^2 - 2x + 5$ на двучлен $(x - 3)$.

Ответ. 80.

3.39 При каких a остаток от деления $P_3(x) = x^3 + ax^2 - 2x - a - 3$ на $(x - 2)$ равен 1?

Ответ. 0.

3.40 Найдите все действительные корни многочлена $x^3 + 2ax^2 - 5x - a - 9$, если остатки от его деления на двучлены $(x - 2)$ и $(x + 1)$ равны.

Ответ. $-\sqrt{5}; -2; +\sqrt{5}$.

3.41 Найти наибольший общий делитель многочленов:

а) $P_3(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ и $Q_2(x) = x^2 - 3x + 3$;

б) $P_2(x) = x^2 - 1$ и $Q_3(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$;

в) $P_3(x) = x^3 + 3x^2 - 4$ и $Q_4(x) = x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 4x - 4$.

Ответ. а) $x - 1$; б) $x - 1$; в) $x^3 + 3x^2 - 4$.

3.42 Найти общий делитель многочленов и представить его в линейной форме.

1. $f(x) = x^4 + x^3 - 3x^2 - 6x - 3$, $g(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$.

2. $f(x) = x^3 - x^2 - 4x - 6$, $g(x) = x^3 + x^2 - 10x - 6$.

4 Матрицы. Определители

Матрица – таблица, заполненная некоторыми элементами. Мы рассматриваем только матрицы, элементами которой являются числа. $A, B, X, Y, \dots$ - обозначение матриц.

Размерность матрицы – количество ее строк и столбцов. Например, $A_{3 \times 2}$ - матрица, состоящая из 3 строк и двух столбцов.

$A_{1 \times n}$ - однострочная матрица.

$A_{n \times 1}$ - одностолбцовая матрица.

$A_{n \times n}$ - квадратная матрица.

$A_{n \times m}$, $n \neq m$ - прямоугольная матрица.

a_{ij} - элементы матрицы, индекс i указывает на номер строки, j - номер столбца.

Некоторые виды (типы) матриц

1 Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** относительно данной. Матрицу, транспонированную относительно матрицы A , обозначают через A^T :

$$\text{если } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Если A - матрица размеров $m \times n$, то матрица A^T имеет размеры $n \times m$. Операция нахождения матрицы, транспонированной к данной, называется **транспонированием** матрицы.

Матрица-строка – матрица, размером $(1 \times n)$, $A = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n)$, при транспонировании преобразуется в **матрицу-столбец**, $A^T = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$, матрицу размером $(n \times 1)$.

2 Нулевая матрица – матрица, все элементы которой нулевые. Для каждого размера $(m \times n)$ нулевая матрица одна. Нулевую матрицу часто обозначают просто O . Нулевая матрица играет роль нуля при сложении матриц.

3 Единичная матрица:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ и т.д.}$$

Понятие порядка имеет место только для квадратных матриц. Для каждого порядка – одна единичная матрица. Выше указаны единичные матрицы соответственно второго и третьего порядков. Единичная матрица играет роль единицы при умножении соответствующих квадратных матриц.

4 Диагональная матрица.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}, \Lambda = \text{diag}\{\lambda_1; \lambda_2; \lambda_3\} -$$

диагональная матрица третьего порядка. Диагональная матрица характеризуется тем, что все ее элементы вне главной диагонали – нулевые. E – частный случай диагональной.

5 Треугольные матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 9 & 1 & 0 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6 Симметрические матрицы характеризуются тем, что они не меняются при транспонировании, т.е. $A = A^T$. Симметрические матрицы могут быть только квадратными и характеризуются тем, что $a_{ij} = a_{ji}$, т.е. элементы, расположенные «симметрично» относительно главной диагонали совпадают.

Кососимметрические матрицы - $B^T = -B$, $b_{ij} = -b_{ji}$.

Например, A - симметрическая матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -7 \\ 0 & -7 & -5 \end{pmatrix}, A^T = A;$$

B - кососимметрическая

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B^T = -B.$$

7 Ортогональные матрицы характеризуются тем, что сумма квадратов элементов каждого столбца такой матрицы равна единице. Кроме того, сумма произведений соответствующих элементов разных столбцов равна нулю.

Матрицы

$$H = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, H_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} -$$

ортогональные матрицы соответственно второго и третьего порядков.

Линейные операции над матрицами

Складываются (вычитаются) только матрицы одинаковых размеров. Операция производится покомпонентно. При умножении матрицы на число все элементы матрицы умножаются на это число.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{pmatrix}.$$
$$\alpha \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{pmatrix}.$$

Линейные операции над матрицами обладают следующими свойствами:

$$1^0 \quad A + B = B + A.$$

$$5^0 \quad 1 \cdot A = A.$$

$$2^0 \quad (A + B) + C = A + (B + C).$$

$$6^0 \quad \alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A.$$

$$3^0 \quad A + O = A.$$

$$7^0 \quad \alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

$$4^0 \quad A + (-A) = O.$$

$$8^0 \quad (\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A,$$

где A, B, C - матрицы одних и тех же размеров; O - нулевая матрица; $(-A)$ - матрица, противоположная матрице A ; α, β - любые действительные числа.

Умножение матрицы на столбец

Матрицу можно умножить на столбец, если число элементов в столбце совпадает с числом элементов в строке матрицы (т.е. соответственно $(m \times n)$, $(n \times 1)$). Рассмотрим примеры:

$$1. \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A \cdot X = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 \\ a_{31} \cdot x_1 + a_{32} \cdot x_2 \end{pmatrix};$$
$$2. \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = B \cdot Y = \begin{pmatrix} b_{11} \cdot y_1 + b_{12} \cdot y_2 + b_{13} \cdot y_3 \\ b_{21} \cdot y_1 + b_{22} \cdot y_2 + b_{23} \cdot y_3 \\ b_{31} \cdot y_1 + b_{32} \cdot y_2 + b_{33} \cdot y_3 \end{pmatrix};$$

$$3. \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = (c_{11} \cdot y_1 + c_{12} \cdot y_2 + c_{13} \cdot y_3);$$

$$4. \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 7 + 5 \cdot (-4) \\ -3 \cdot 7 + 0 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ -21 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, в результате умножения матрицы размером $(m \times n)$ на столбец $(n \times 1)$ получается столбец длины m (т.е. $(m \times 1)$).

Умножение матрицы на матрицу

Не любые две матрицы можно перемножить. Это действие определяется для согласованных матриц. Матрица A называется *согласованной* с матрицей B , если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B : матрица A_{mn} согласована с матрицей B_{ns} («ширина» матрицы A равна «высоте» матрицы B).

При перемножении согласованных матриц размеров, соответственно $(m \times n)$ и $(n \times s)$ получается матрица размеров $(m \times s)$. Для того, чтобы перемножить согласованные матрицы нужно первую матрицу поочередно умножить на каждый из столбцов второй матрицы.

Например:

$$1. C \cdot D = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11}d_{11} + c_{12}d_{21} & c_{11}d_{12} + c_{12}d_{22} \\ c_{21}d_{11} + c_{22}d_{21} & c_{21}d_{12} + c_{22}d_{22} \end{pmatrix},$$

$D \cdot C$ - определено, но далеко не всегда $C \cdot D = D \cdot C$.

$$2. X \cdot Y = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = (21 - 5 + 0) = (16).$$

$$Y \cdot X = \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & -7 & 35 \\ 15 & -5 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$3. A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 7 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7 & 2 \cdot 0 + 3 \cdot (-1) \\ 0 \cdot 5 + 0 \cdot 7 & 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 7 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 31 & -3 \\ 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Произведение $B \cdot A$ - не определено.

Умножение матриц в общем случае некоммукативно, т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то матрицы A и B называются *перестановочными* или *коммутирующими*.

Квадратные матрицы одного порядка можно перемножать всегда, при этом получается квадратная матрица того же порядка.

Для квадратных матриц роль единицы играет единичная матрица E того же порядка, т.е. $A \cdot E = E \cdot A = A$, например:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц обладает следующими *свойствами* (если имеют смысл соответствующие действия):

$$1^0 (AB)C = A(BC).$$

$$2^0 \alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B).$$

$$3^0 (A+B)C = AC + BC.$$

$$4^0 C(A+B) = CA + CB.$$

$$5^0 (A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T.$$

Многочлены от матриц

Целой положительной степенью A^k ($k > 0$) квадратной матрицы A называется произведение k матриц, каждая из которых равна A , т.е. $A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{k \text{ раз}}$. Матрица A^k имеет тот же порядок, что и матрица A . Нулевой

степенью квадратной матрицы A ($A \neq 0$) называется единичная матрица того же порядка, что и A , т.е. $A^0 = E$. Первой степенью A^1 матрицы A называется сама матрица A , т.е. $A^1 = A$. Многочленом (или *полиномом*) степени k (k - целое число) от квадратной матрицы A называется выражение вида

$$P(A) = a_k A^k + a_{k-1} A^{k-1} + \dots + a_2 A^2 + a_1 A^1 + a_0 A^0,$$

где a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, k$) - любые числа, причем $a_k \neq 0$.

Из определения следует, что многочлен от матрицы можно получить, если в обычный многочлен

$$P(x) = a_k x^k + a_{k-1} x^{k-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x^1 + a_0,$$

вместо x подставить квадратную матрицу (и учесть, что $a_0 = a_0 x^0$).

Пусть дан многочлен $P(x)$, если $P(A) = O$, то матрица A называется *корнем многочлена* $P(x)$, а многочлен $P(x)$ - *аннулирующим многочленом* для матрицы A .

Комплексные матрицы

Матрица, элементами которой являются комплексные числа, называется комплексной матрицей. Над комплексными матрицами определяются действия, аналогичные действиям над действительными матрицами: сложение, вычитание, умножение матрицы на число, умножение матриц.

Если элементами матрицы Z являются комплексные числа

$$z_{kj} = x_{kj} + iy_{kj},$$

то ее можно представить в виде $Z = X + iY$, где матрицы X и Y составлены из элементов x_{kj} , y_{kj} соответственно; матрица X называется

действительной частью, матрица Y - мнимой частью матрицы Z . Две комплексные матрицы $Z_1 = X_1 + iY_1$, $Z_2 = X_2 + iY_2$ считаются равными тогда и только тогда, когда равны их действительные и мнимые части, т.е. $X_1 = X_2$, $Y_1 = Y_2$.

Матрица $\bar{Z}$, составленная из элементов $\bar{z}_{kj} = x_{kj} - iy_{kj}$, называется комплексно-сопряженной матрице Z , элементы которой – комплексные числа $x_{kj} + iy_{kj}$. Отметим, что

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2, \quad \overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1 \cdot \bar{Z}_2.$$

Задача 4.1 Найти сумму и разность матриц A и B

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & -4 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 7 \\ 8 & -11 \end{pmatrix}.$$

Решение. Поскольку матрицы A и B одинаковой размерности, то сложение и вычитание возможно.

$$A + B = \begin{pmatrix} -1 & 10 \\ 5 & 3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}, \quad A - B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -11 \\ -11 & -20 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.2 Умножить матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ на $\lambda = 2$.

$$\text{Решение. } \lambda A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.3 Найти произведение AB данных матриц третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Перемножим соответственные элементы первой строки матрицы A на элементы первого столбца матрицы B , и результаты сложим. Далее первая строчка A и второй столбец B , далее первая строчка A и третий столбец B . Получили первую строку AB . Затем аналогично поступаем со второй строкой

матрицы A и поочередно со всеми столбцами матрицы B и т. д.

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 \cdot 4 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 0 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \\ -2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & -2 \cdot 3 - 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & -2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 5 \\ 3 \cdot 4 - 2 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & 3 \cdot 3 - 2 \cdot 2 - 1 \cdot 3 & 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -3 \\ -9 & -2 & 5 \\ 5 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.4 Выполнить действия $(AB)C$ и $A(BC)$, если:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Решение. Имеем:

$$AB = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ 9 & 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad (AB)C = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

$$BC = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad A(BC) = \begin{pmatrix} -7 \\ 11 \\ -15 \end{pmatrix},$$

т.е. $(AB)C = A(BC)$.

Задача 4.5 Найти значение матричного многочлена $2A^2 + 3A + 5E$ при $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, если E – единичная матрица третьего порядка.

$$\text{Решение. } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 8 & 11 & 6 \\ 9 & 8 & 10 \end{pmatrix}, \quad 2A^2 = \begin{pmatrix} 20 & 12 & 10 \\ 16 & 22 & 12 \\ 18 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

$$3A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 6 \\ 3 & 9 & 3 \\ 12 & 3 & 3 \end{pmatrix}, \quad 5E = 5 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix},$$

$$2A^2 + 3A + 5E = \begin{pmatrix} 28 & 15 & 16 \\ 19 & 36 & 15 \\ 30 & 19 & 28 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.6 Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ является корнем

многочлена $P(x) = x^2 + x - 14$.

Решение. Подставив в данный многочлен вместо x матрицу A , получим

$$P(A) = A^2 + A - 14E = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} - 14 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & 4 \\ 3 & 16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & 0 \\ 0 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Следовательно, матрица A является корнем данного многочлена.

Определители

Определителем матрицы первого порядка $A = (a_{11})$, или *определителем первого порядка*, называется элемент a_{11} :

$$\det A = |A| = a_{11}.$$

Например, пусть $A = (3)$, тогда $\det A = 3$.

Определителем матрицы второго порядка $A = (a_{ij})$, или *определителем второго порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Произведения $a_{11}a_{22}$ и $a_{12}a_{21}$ называются *членами определителя* второго порядка. Например, пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, тогда

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 5 - 3 \cdot 1 = 7.$$

Рассмотрим квадратную матрицу третьего порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Определителем матрицы третьего порядка $A = (a_{ij})$, или, *определителем третьего порядка*, называется число, которое вычисляется по формуле:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Это число представляет собой алгебраическую сумму, состоящую из 6 слагаемых, или 6 членов определителя. В каждое слагаемое входит ровно по

одному элементу из каждой строки и каждого столбца матрицы. Знаки, с которыми члены определителя входят в эту формулу, легко запомнить, пользуясь схемой (рисунок 8), которая называется *правилом треугольника* или *правилом Сарруса*.

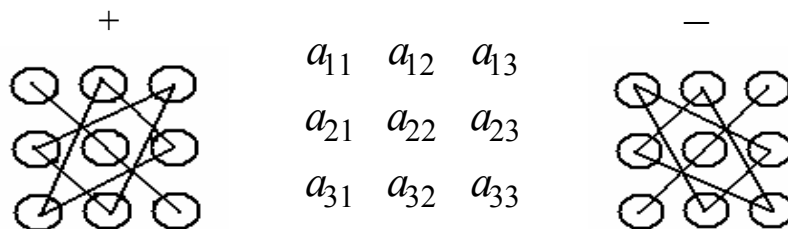


Рисунок 8

Определителем квадратной матрицы n -го порядка, или определителем n -го порядка, называется число, равное алгебраической сумме $n!$ членов, каждый из которых является произведением n элементов матрицы, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца, причем знак каждого члена определяется как $(-1)^{r(J)}$, где $r(J)$ - число инверсий в перестановке J из номеров столбцов элементов матрицы, если при этом номера строк записаны в порядке возрастания:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(J)} (-1)^{r(J)} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n},$$

где сумма берется по всем перестановкам J .

Пусть дана квадратная матрица A n -го порядка.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется определитель матрицы $(n-1)$ -го порядка, полученный из матрицы A вычеркиванием i -ой строки и j -го столбца.

Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{12} & \cdots & a_{13} \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n -го порядка имеет n^2 миноров $(n-1)$ -го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n -го порядка называется минор элемента a_{ij} , взятый со знаком $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, когда сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, когда $(i+j)$ - нечетное число.

Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Теорема Лапласа Пусть в определителе Δ n -го порядка произвольно выбраны k строк (или k столбцов), $1 \leq k \leq n-1$. Тогда сумма произведений всех миноров k -го порядка, расположенных в выбранных строках (столбцах), на их алгебраические дополнения равна определителю Δ .

Следствие теоремы Лапласа Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is}$$

(разложение по элементам i -ой строки; $i = 1; 2; \dots; n$);

$$\Delta = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj} = \sum_{s=1}^n a_{sj}A_{sj}$$

(разложение по элементам j -го столбца; $j = 1; 2; \dots; n$).

Следствие теоремы Лапласа позволяет свести вычисление определителей n -го порядка к вычислению определителей $(n-1)$ -го порядка.

Свойства определителей

1⁰ Если какая-либо строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то ее определитель равен 0.

2⁰ Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число λ , то ее определитель умножится на это число λ .

3⁰ При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется:
 $|A^T| = |A|$.

4⁰ При перестановке двух соседних строк (столбцов) матрицы ее определитель меняет знак на противоположный.

5⁰ Если квадратная матрица содержит две одинаковые строки (столбца), то ее определитель равен нулю.

6⁰ Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны, то ее определитель равен нулю.

7⁰ Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т.е.

$$\sum_{s=1}^n a_{is}A_{js} = 0, \text{ при } i \neq j.$$

8⁰ Определитель равен нулю, если какая-либо его строка (столбец) представляет собой линейную комбинацию каких-либо других его строк (столбцов).

9⁰ Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

10⁰ Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \dots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \dots, b_n$.

11⁰ Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B - матрицы n -го порядка.

Вычисление определителей второго и третьего порядков

Задача 4.7 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1) - 0 \cdot 1 = -2 - 0 = -2$.

Задача 4.8 Вычислить определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det B = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = -1$.

Задача 4.9 Вычислить определитель матрицы $C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение. $\det C = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 5 - 0 \cdot 3 \cdot 2 -$
 $- 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 + 0 + 12 - 40 - 0 - 1 = -25$.

Задача 4.10 Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot (-2) + 7 \cdot 1 \cdot (-1) + 3 \cdot 4 \cdot 2 - 3 \cdot 3 \cdot (-1) -$

$$- 7 \cdot 4 \cdot (-2) - 2 \cdot 1 \cdot 2 = -12 - 7 + 24 + 9 + 56 - 4 = 66.$$

Задача 4.11 Вычислить $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix}.$

Решение. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 3 \cdot 1 \cdot (-3) -$

$$- 2 \cdot 4 \cdot 1 = -12 + 12 + 1 - 2 + 9 - 8 = 0.$$

При вычислении этого определителя можно было не пользоваться правилом треугольника. Достаточно заметить, что первый столбец есть линейная комбинация второго и третьего, т.е. $S_1 = S_2 + S_3$.

Задача 4.12 Для заданной матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ найдите

а) M_{12} , A_{12} ;

б) M_{33} , A_{33} .

Решение. а) $M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$

$$= 3 \cdot (-1) \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 - (-1) \cdot 3 \cdot 3 = 3 - 1 + 1 + 9 = 12.$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -12.$$

б) $M_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 0 -$

$$- 1 \cdot 2 \cdot 0 - 2 \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 0 = 1 - 4 = -3.$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = -3.$$

Ответ. а) $M_{12} = 12$, $A_{12} = -12$; б) $M_{33} = -3$, $A_{33} = -3$.

Вычисление определителей n -го порядка

Разложение определителя по теореме Лапласа

Теорема Лапласа позволяет свести вычисление определителя порядка $n \geq 2$ к вычислению определителей более низких порядков. Этой теоремой удобно пользоваться тогда, когда в определителе имеются равные нулю миноры. В этом случае при вычислении определителя следует выделить в нем те k строк или столбцов, которые содержат наибольшее число миноров k -го порядка, равных нулю.

Методом разложения по теореме Лапласа удобно пользоваться при вычислении определителя *клеточной* («блочной») матрицы.

Задача 4.13 Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 25 & 17 & 0 & 1 & 0 \\ 17 & 8 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Выделив в определителе две первые строки и применив теорему Лапласа, получим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Задача 4.14 Вычислить определитель матрицы A , используя теорему Лапласа

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & 13 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 10 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{pmatrix}.$$

Решение. Нам необходимо вычислить определитель блочной матрицы, имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 15 & 13 & 4 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 7 & -8 & 2 & 4 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 10 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 13 & 14 \end{vmatrix}.$$

Второй из определителей этого произведения равен нулю, так как первая и третья строки пропорциональны, следовательно $\det A = 0$.

Ответ. $\det A = 0$.

Разложение определителя по элементам строки или столбца (следствие теоремы Лапласа)

Задача 4.15 Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix}$ разложением по

элементам первой строки.

Решение. Воспользуемся теоремой разложения определителя по элементам строки:

$$\Delta = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = \sum_{s=1}^n a_{is}A_{is}.$$

Для определителя третьего порядка формула разложения по элементам первой строки принимает вид

$$\Delta_3 = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}.$$

$$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & 8 \end{vmatrix} = 7 \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 8 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} + 5 \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 187.$$

Ответ. 187.

Задача 4.16 Вычислить определитель матрицы разложением по элементам второго столбца

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{pmatrix}, \text{ т.е. } \det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Применяя формулу разложения определителя четвертого порядка по элементам второго столбца, получаем

$$\Delta_4 = a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} + a_{42}A_{42}, \text{ получаем}$$

$$\begin{aligned}
\det A &= -1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + \\
&+ (-1) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 6 & 7 & 9 \end{vmatrix} + (-8) \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 15 \end{vmatrix} = \\
&= (1 \cdot 5 \cdot 9 + 3 \cdot 15 \cdot 6 + 4 \cdot 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 9 - 7 \cdot 15 \cdot 1) - \\
&- 2 \cdot (1 \cdot 5 \cdot 9 + 2 \cdot 15 \cdot 6 + 4 \cdot 7 \cdot 2 - 6 \cdot 5 \cdot 2 - 7 \cdot 15 \cdot 1 - 4 \cdot 2 \cdot 9) + \\
&+ (1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 2 \cdot 6 + 1 \cdot 7 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 9 - 7 \cdot 2 \cdot 1) - \\
&- 8(1 \cdot 3 \cdot 15 + 2 \cdot 2 \cdot 4 + 1 \cdot 5 \cdot 2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 - 1 \cdot 2 \cdot 15 - 5 \cdot 2 \cdot 1) = -49. \\
\text{Ответ. } \det A &= -49.
\end{aligned}$$

Задача 4.17 Вычислить определитель четвертого порядка разложением по элементам любой строки (столбца)

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Непосредственное разложение по элементам строк (или столбцов) приведет к вычислению четырех определителей третьего порядка, а вот при разложении по 3-й строке или 4-му столбцу нам придется вычислить не четыре, а три определителя третьего порядка. Более того, прежде чем вычислять целесообразнее будет преобразовать определитель так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в 0. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов:

$$\det A = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Теперь раскладываем этот определитель по элементам третьей строки:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью теоремы Лапласа, однако можно продолжить упрощение определителя. «Обнулим» в этом определителе элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элементы 3-го столбца определителя, предварительно

умножив на (-13) и на 4 , сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно, получим:

$$\det A = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая определитель по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем:

$$\det A = 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -40 & 18 \\ -88 & 36 \end{vmatrix} = (-1)(-8) \cdot 18 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = -144.$$

Ответ. $\det A = -144$.

Задача 4.18 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 10 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix}.$$

Решение. Сначала преобразуем исходный определитель, например, следующим образом:

первую строку, умноженную на минус единицу, прибавим ко второй строке. Затем первую строку, умноженную на минус два, прибавим к третьей строке. И наконец, первую строку, умноженную на минус единицу, прибавим к четвертой строке. Полученный определитель, у которого первый столбец будет иметь лишь один ненулевой элемент, разложим по этому столбцу. В результате придем к следующей цепочке равенств:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 10 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix}.$$

Последний определитель в этой цепочке можно уже вычислить непосредственно по формуле треугольников для определителей третьего порядка. Однако будет проще, если его сначала преобразовать, вычтя из второй строки первую, а затем разложить по второй строке. Тогда получим следующее продолжение цепочки равенств:

$$2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 4 \cdot (14 - 15) = -4.$$

Таким образом, заданный определитель равен -4 .

Предлагаем читателю воспользоваться образцом решения этой задачи и вычислить определитель задачи 4.16. Мы же для контроля даем вам схематичную запись решения:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & -3 & 7 \\ 6 & -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 7 \\ -2 & -7 & -3 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot 49 = -49.$$

Ответ. $\det A = -49$.

Задача 4.19 Вычислить определитель

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на a ; из 3-й строки 2-ю, умноженную на a ; из 4-й строки 3-ю, умноженную на a :

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a & d-a \\ 0 & b^2-ab & c^2-ac & d^2-ad \\ 0 & b^3-ab^2 & c^3-ac^2 & d^3-ad^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b & c & d \\ b^2 & c^2 & d^2 \end{vmatrix}.$$

Вычтем из 2-й строки 1-ю, умноженную на b ; из 3-й строки 2-ю, умноженную на b :

$$V = (b-a)(c-a)(d-a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & c-b & d-b \\ 0 & c^2-bc & d^2-db \end{vmatrix} =$$

$$= (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ c & d \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(d-a)(c-b)(d-b)(d-c).$$

Нетрудно видеть, что рассматриваемый определитель равен нулю тогда и только тогда, когда среди чисел a, b, c, d имеются равные.

Приведение определителя к треугольному виду

Задача 4.20 Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Для начала преобразуем матрицу к треугольному виду. Для этого прибавим ко 2-й и 3-й строкам матрицы первую строку, умноженную соответственно на -2 и -3 , а затем в полученной матрице к 3-й строке вторую, умноженную на -1 . Получили матрицу, эквивалентную исходной

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица треугольного вида.}$$

Так как определитель матрицы треугольного вида равен произведению диагональных элементов, то

$$\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1.$$

Ответ. $\det A = 1$.

Задача 4.21 Вычислить определитель $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 13 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix}$ посредством

преобразования его к треугольному виду.

Решение. Получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 9 & 13 & 7 \\ 6 & 3 & 7 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 3 & 5 & -3 \\ 0 & -6 & -5 & -13 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -17 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 5 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -18 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (-18) = -540. \end{aligned}$$

Ответ. $\Delta = -540$.

Задача 4.22 Вычислить определитель n -го порядка

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 0 & 5 & \dots & 5 \\ 5 & 5 & 0 & \dots & 5 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 5 & 5 & 5 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Решение. Вычитая 1-ю строку из всех остальных, получим

$$D_n = \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 & \dots & 5 \\ 0 & -5 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -5 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -5 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1} 5^n.$$

Таким образом, исходный определитель равен $(-1)^{n-1} \cdot 5^n$.

Метод опорного элемента

Задача 4.23 Методом опорного элемента вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. Воспользуемся формулой (4.38) (см. лекции), при $n=3$. В качестве опорного элемента возьмем, например, элемент a_{11} :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \frac{1}{a_{11}} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Тогда в нашем случае имеем:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \frac{1}{1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1.$$

Ответ. $\det A = 1$.

Задача 4.24 Методом опорного элемента вычислить определитель матрицы $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{pmatrix}$.

Решение. Опорным элементом удобнее всего брать левый верхний (хотя можно было бы взять любой). Применяя метод опорного элемента дважды, имеем

$$\begin{aligned} \det B &= \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 5 & 15 \\ 6 & -8 & 7 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \\ 4 & -1 \\ 6 & -8 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 7 \\ -2 & -5 & -3 \end{vmatrix} = \frac{1}{-1} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \\ -1 & 1 \\ -2 & -5 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 7 \\ -1 & 0 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & -7 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = -49. \end{aligned}$$

Ответ. $\det B = -49$.

Обратная матрица и методы ее нахождения

Матрица A^{-1} называется **обратной** по отношению к квадратной матрице A , если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Если определитель матрицы отличен от нуля ($\det A \neq 0$), то такая квадратная матрица называется *невырожденной*, или *неособенной*; в противном случае (при $\det A = 0$) – *вырожденной*, или *особенной*.

Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства:

$$1^0 \quad |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}; \quad 3^0 \quad (A^m)^{-1} = (A^{-1})^m; \quad 5^0 \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

$$2^0 \quad (A^{-1})^{-1} = A; \quad 4^0 \quad (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1};$$

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы) Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица невырожденная.

Нахождение обратной матрицы через алгебраические дополнения

Алгоритм:

1. Находим определитель исходной матрицы.

Если $\det A = 0$, то матрица – вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует.

Если $\det A \neq 0$, то матрица A - невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим алгебраические дополнения всех элементов матрицы $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{nn}$.

3. Вычисляем обратную матрицу по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

4. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} , исходя из ее определения $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (п.4 не обязателен).

Задача 4.25 Найти матрицу, обратную данной:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для начала вычислим определитель заданной матрицы

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 5 \neq 0.$$

Таким образом, матрица A - невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.

Теперь находим алгебраические дополнения:

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & A_{12} &= (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3, \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, & A_{21} &= (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3, \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1, & A_{23} &= (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -2, & A_{32} &= (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3. \end{aligned}$$

Воспользуемся формулой

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 & 3/5 & -2/5 \\ -3/5 & 1/5 & 1/5 \\ 1/5 & -2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Проверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам:

$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$ (рекомендуем в этом убедиться читателю самостоятельно).

Задача 4.26 Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}$. Выяснить, существует ли

обратная ей матрица A^{-1} , и если существует, то найти ее.

Решение. Определитель матрицы A

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 6 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 10 \neq 0.$$

Следовательно, данная матрица невырожденная, и A^{-1} существует. Согласно формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Найдем алгебраические дополнения A_{ij} элементов данной матрицы.

Получим:

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = -5; & A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 15; & A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 25; \\ A_{21} &= -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 7 & -3 \end{vmatrix} = 1; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 3; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 7 \end{vmatrix} = 9; \\ A_{31} &= -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} = 4; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -8; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -14. \end{aligned}$$

Тогда

$$A^{-1} = \frac{1}{10} \begin{pmatrix} -5 & 1 & 4 \\ 15 & 3 & -8 \\ 25 & 9 & -14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0,5 & 0,1 & 0,4 \\ 1,5 & 0,3 & -0,8 \\ 2,5 & 0,9 & -1,4 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.27 Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти обратную матрицу.

Решение.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 27 + 2 - 24 = 5 \neq 0.$$

$$\begin{aligned} A_{11} &= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9; & A_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; & A_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4; \\ A_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 1; & A_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} = 2; & A_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1; \\ A_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = -12; & A_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 1; & A_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 7. \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 9/5 & -2/5 & -4/5 \\ 1/5 & 2/5 & -1/5 \\ -12/5 & 1/5 & 7/5 \end{pmatrix}.$$

Нахождение обратной матрицы с помощью элементарных преобразований

Задача 4.28 С помощью элементарных преобразований найти матрицу A^{-1} , обратную матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем матрицы A и E рядом и отделим их друг от друга вертикальной чертой. Далее будем преобразовывать обе матрицы (и левую и правую) одновременно, таким образом, чтобы левая матрица приобрела вид единичной. Тогда та матрица, которая получится справа и будет обратной к заданной.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{S_1/2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} S_2+(-1)S_1 \\ S_2+S_1 \end{smallmatrix}} \\ & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} S_2+(-1)S_1 \\ S_2+S_1 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 1/2 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{S_3+(-2)S_2} \\ & \xrightarrow{S_3+(-2)S_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & -1/2 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-S_2/3} \\ & \xrightarrow{-S_2/3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{smallmatrix} S_1+(-2)S_3 \\ S_2+(-1)S_3 \end{smallmatrix}} \\ & \xrightarrow{\begin{smallmatrix} S_1+(-2)S_3 \\ S_2+(-1)S_3 \end{smallmatrix}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ 0 & 1 & 0 & -1/6 & 5/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/6 & 4/3 & 2/3 \\ -1/6 & 5/3 & 4/3 \\ 1/6 & -2/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.29 Используя метод элементарных преобразований найти

матрицу, обратную матрице A , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{aligned} (A|E) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-S_1+S_2 \\ -S_1+S_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-2)S_2+S_3} \\ &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-2)S_3+S_2 \\ (-1)S_3+S_1}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ &\xrightarrow{(-1)S_2+S_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Отсюда:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ -3 & 5 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.30 При каком значении λ матрица

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

не имеет обратной.

Решение. Матрица не имеет обратной, если $\det A = 0$. Таким образом получаем уравнение

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрываем определитель и решаем уравнение

$$4 - 2\lambda + 1 = 0,$$

$$-2\lambda = -3,$$

$$\lambda = \frac{3}{2}.$$

Следовательно, при $\lambda = \frac{3}{2}$ исходная матрица не имеет обратной.

Ответ. $\lambda = \frac{3}{2}$.

Решение матричных уравнений

Напомним читателю, что уравнение, все компоненты которого – матрицы, называется **матричным уравнением**. Решить матричное уравнение означает найти матрицу уравнения, элементы которой неизвестны, при подстановке которой в матричное уравнение получится верное равенство.

Задача 4.31 Найти матрицу X , удовлетворяющую уравнению

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Введем обозначения $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$. Тогда данное

уравнение можно записать в виде

$$AX = B.$$

Так как $\det A = 1$, то матрица A имеет обратную. Умножим обе части уравнения на матрицу A^{-1} слева:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

Так как $A^{-1}A = E$ (единичная матрица) и $EX = X$, то $X = A^{-1}B$.

Итак, для нахождения матрицы X нужно найти матрицу A^{-1} и умножить ее справа на матрицу B .

$$\text{Имеем } A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } X = \begin{pmatrix} -5 & -5 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.32 Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 3 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Аналогично предыдущему примеру, умножая обе части исходного уравнения на A^{-1} слева, имеем:

$$AX = B,$$

$$A^{-1}AX = A^{-1}B,$$

$$X = A^{-1}B.$$

Теперь, если A^{-1} - существует, заданное уравнение имеет решение, если не существует, то, соответственно, решений не будет.

Предлагаем читателю убедиться самостоятельно, что обратная матрица для A существует и имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -6 & 16 & -9 \\ -5 & 11 & -4 \end{pmatrix}.$$

Далее находим решение матричного уравнения

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -6 & 16 & -9 \\ -5 & 11 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/7 \\ 1/7 \\ 2/7 \end{pmatrix}.$$

Задача 4.33 Решить матричное уравнение $AXB + 3D = C$. Если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Решить матричное уравнение означает найти неизвестную матрицу X . Для начала решим уравнение в «буквах», т.е. в общем виде, имеем

$$AXB + 3D = C,$$

$$AXB = C - 3D,$$

$$A^{-1}AXB B^{-1} = A^{-1}(C - 3D)B^{-1},$$

$$X = A^{-1}(C - 3D)B^{-1}.$$

Теперь выполняем задание по действиям:

1) A^{-1} - ?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) C - 3D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

3) B^{-1} - ?

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 1/2 \end{array} \right) \\ \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$4) A^{-1} \cdot (C - 3D) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$5) A^{-1}(C - 3D)B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -10 & 1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -19 & 1 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Следовательно, искомая матрица } X = \begin{pmatrix} -19/2 & 1/2 \\ 7/2 & -1/2 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы. Базисный минор матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице A размера $m \times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k -го порядка, где $k \leq \min(m; n)$. Определители таких подматриц называются *минорами k -го порядка матрицы A* .

Например, из матрицы $A_{3 \times 4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы A называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы A обозначается $\text{rang} A$, или $r(A)$.

Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m \times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $r(A) \leq \min(m; n)$;

б) $r(A) = 0$ тогда и только тогда, когда все элементы матрицы равны нулю, т.е. $A = 0$;

в) для квадратной матрицы n -го порядка $r(A) = n$ тогда и только тогда, когда матрица A - невырожденная.

Теорема Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Элементарными преобразованиями матрицы называются следующие преобразования:

- 1) Отбрасывание нулевой строки (столбца).
- 2) Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
- 3) Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
- 4) Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.

5) Транспонирование матрицы.

Для рангов матриц справедливы следующие соотношения:

$$1) r(A + B) \leq r(A) + r(B), \quad 2) r(A + B) \geq |r(A) - r(B)|,$$

$$3) r(AB) \leq \min\{r(A); r(B)\}, \quad 4) r(A^T A) = r(A),$$

$$5) r(AB) = r(A), \text{ если } B - \text{квадратная матрица и } |B| \neq 0.$$

Теорема о ранге матрицы Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые линейно выражаются все остальные ее строки (столбцы).

Строки $s_1, s_2, \dots, s_m$ матрицы A называются *линейно зависимыми*, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке, т.е.

$$\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2 + \dots + \lambda_m s_m = 0,$$

где $0 = (0 \ 0 \ \dots \ 0)$.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Например, строки матрицы

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & -5 & 8 \end{pmatrix}$$

линейно зависимы, т.к. $2s_1 + s_2 = s_3$ или, что все равно, $2s_1 + s_2 - s_3 = 0$.

Если линейная комбинация строк равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т.е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то строки $s_1, s_2, \dots, s_m$ называются *линейно-независимыми*.

Базисным минором матрицы назовем отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу матрицы.

Для ненулевой матрицы существует базисный минор (вообще говоря, не единственный).

Пусть для данной матрицы выбран базисный минор. Строки и столбцы, на пересечении которых стоят элементы базисного минора, называются *базисными*.

Теорема (о базисном миноре)

1. Любая строка (столбец) матрицы является линейной комбинацией базисных строк (столбцов). 2. Базисные строки (столбцы) матрицы линейно-независимы.

Задача 4.34 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Решение. Вычеркнув из этой матрицы 2-ю строку, а затем 2, 3 и 4-й столбцы, получаем матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}$, эквивалентную заданной. Так как

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 1 \neq 0, \text{ то ранг данной матрицы равен 2.}$$

Задача 4.35 Определить ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение. Все миноры второго и третьего порядков данной матрицы равны нулю, так как элементы строк этих миноров пропорциональны. Миноры же первого порядка (сами элементы матрицы) отличны от нуля. Следовательно, ранг матрицы равен 1.

Задача 4.36 Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Сложим соответственно элементы 1-й и 3-й строк, а затем разделим на 4 элементы 1-й строки:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 8 & 12 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Из элементов 1-й строки вычтем соответствующие элементы 2-й строки, после чего вычеркнем 1-ю строку:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ранг последней матрицы равен 2, так как, например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \neq 0$.

Следовательно, и ранг исходной матрицы равен 2.

Задача 4.37 Вычислить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix}$.

Решение. Приведем матрицу A к ее эквивалентной, используя элементарные преобразования.

1 шаг. а) Переставив 1-й и 2-й столбцы, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

б) Вынесем множитель 2 из 1-й строки. Тогда

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix}.$$

в) Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

II шаг. Вычитая из 3-го столбца 2-й столбец, умноженный на 2, получим

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Итак один столбец обнулился, и поэтому (т.к. осталось всего два столбца)

$\text{rang} A \leq 2$ и т.к., например, минор $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, заключаем $\text{rang} A = 2$.

Ответ. $\text{rang} A = 2$.

Мы определили ранги предложенных матриц, преобразуя их в эквивалентные, используя элементарные преобразования матрицы, не меняющие ее ранга. Получив в результате матрицу с меньшим количеством строк (столбцов). Очевидно, ранг преобразованных матриц легко определяется.

Однако так действовать удобно, если заданная матрица небольшого порядка. Для матриц же любых порядков существует определенный алгоритм для нахождения ранга матрицы. Изучим три из них: метод нулей и единиц; метод, основанный на приведении матрицы к эквивалентной ей матрице треугольного (трапециевидного) типа; и метод окаймляющих миноров.

Метод единиц и нулей

С помощью элементарных преобразований любую матрицу можно привести к виду, когда каждая строка будет состоять только из нулей или из нулей и одной единицы. Тогда число оставшихся единиц и определит ранг исходной матрицы, так как полученная матрица будет эквивалентна исходной.

Задача 4.38 Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 6 & 3 & 4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Умножим третий столбец матрицы A на $1/2$. Далее, полученную первую строку умножим на 2 и вычтем ее из четвертой строки. Теперь третий столбец содержит три нуля и единицу (в первой строке). Легко делаем нули в первой строке на первой, второй, четвертой и пятой позициях. Имеем

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & -4 & -5 \\ -1 & -1 & 0 & -3 & -2 \\ 4 & 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Теперь четвертую строку последней матрицы складываем со второй и третьей, получая при этом еще два нуля во втором столбце, после чего делаем нули в четвертой строке всюду, кроме единицы на пересечении четвертой строки и второго столбца. В результате этих элементарных преобразований имеем:

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & -2 & -6 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Получили три единицы. Следовательно, $\text{rang } A = 3$.

За базисный минор можно взять, например, определитель третьего порядка, который находится на пересечении первой, третьей, четвертой строк и второго, третьего и четвертого столбцов (на пересечении этих строк и столбцов в последней матрице стоят единицы). Так как перестановка рядов матрицы не производилась, то один из базисных миноров матрицы A следующий:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -3 \\ 3 & 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Метод приведения определителя к треугольному виду

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так называемому *ступенчатому* виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \dots, r$; $r \leq k$.

Тогда ранг ступенчатой матрицы равен r , так как имеет минор r -го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{rr} \neq 0.$$

Задача 4.39 Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Если $a_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваемся того, что $a_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы, тогда матрица A будет выглядеть следующим образом

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Если $a_{11} \neq 0$, то умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $a_{21}/a_{11} = 0$, $-a_{31}/a_{11} = 2$, $-a_{41}/a_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Если в полученной матрице $a_{22} \neq 0$ (у нас $a_{22} = -1 \neq 0$), то умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно, на $-a_{32}/a_{22} = -3$, $-a_{42}/a_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца (кроме a_{12}, a_{22}) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например, $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и заданной в задаче матрицы равен 2.

Ответ. $\text{rang } A = 2$.

Коротко запишем решения еще двух задач.

Задача 4.40 Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 3 & -1 & 4 & -2 \\ 5 & 3 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{Решение. } A &\xrightarrow[S_3 + (-5)S_1]{S_2 + (-3)S_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \end{pmatrix} \xrightarrow{S_3 + (-1)S_2} \\ &\xrightarrow{S_3 + (-1)S_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -7 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Мы получили трапецевидную матрицу, ранг которой равен двум. Следовательно, ранг матрицы A также равен двум.

Ответ. $\text{rang } A = 2$.

Задача 4.41 Определить ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

$$\text{Решение. } A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Так как } \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 24 \neq 0, \text{ то ранг матрицы равен } 3.$$

Метод окаймляющих миноров

Минор M_{k+1} порядка $k+1$, содержащий в себе минор M_k , порядка k , называется минором окаймляющим минор M_k . Если у матрицы A существует минор $M_k \neq 0$, а все окаймляющие его миноры $M_{k+1} = 0$, то $\text{rang } A = k$.

Задача 4.42 Найти ранг матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 4 & 3 \\ 3 & -9 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\text{Решение. Имеем } M_2 = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 4 \end{vmatrix} \neq 0. \text{ Для } M_2 \text{ окаймляющими будут только}$$

два минора:

$$M_3 = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 2 & -6 & 4 \\ 3 & -9 & 3 \end{vmatrix}, \quad M_3 = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -6 & 4 & 3 \\ -9 & 3 & 2 \end{vmatrix},$$

каждый из которых равен нулю. Поэтому $\text{rang } A = 2$, а указанный минор M_2 может быть принят за базисный.

Ответ. $\text{rang } A = 2$.

Линейная независимость строк (столбцов), базисный минор матрицы

Задача 4.43 Даны два столбца

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что они линейно независимы и подобрать столбцы e_3 и e_4 такие, что столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 также линейно независимы.

Решение. Составим матрицу из столбцов e_1 и e_2 : $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ее ранг равен 2,

так как выделенный минор второго порядка отличен от нуля (он равен -1). По теореме о базисном миноре базисные столбцы e_1 и e_2 линейно независимы.

Выберем столбцы e_3 и e_4 так, чтобы матрица из столбцов e_1, e_2, e_3, e_4 имела определитель, отличный от нуля. Тогда ранг матрицы будет равен 4, и по теореме о базисном миноре столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 будут линейно независимы.

Возьмем, например, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Тогда $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$, и,

следовательно, столбцы e_1, e_2, e_3, e_4 линейно независимы.

Задача 4.44 Определить ранг матрицы и найти все ее базисные миноры

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Решение. В начале находим ранг матрицы. Имеем

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; r(A) = 2.$$

Базисными минорами являются все миноры второго порядка этой матрицы, отличные от нуля:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Задача 4.45 Найти базисный минор матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix}$.

Решение. Так как $\text{rang } A = 2$ (предлагаем читателю убедиться в этом самостоятельно), то базисный минор матрицы есть минор второго порядка матрицы A . Для нахождения базисного минора имеется два способа.

I способ. Возьмем наудачу какой-либо минор второго порядка матрицы A и вычислим его. Если он отличен от нуля, то получаем искомый базисный минор.

В данном примере естественно воспользоваться указанным способом. Однако в случае матрицы больших размеров и большого ранга этот способ случайного выбора минора матрицы может оказаться малопродуктивным. Тогда лучше воспользоваться другим способом.

II способ. Решение задачи 4.37 позволяет безошибочно указать базисный минор. Воспроизведем еще раз это решение:

$$A = \begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 2 \\ \Delta & -3 & -1 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & 6 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 2 \\ -3 & \Delta & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 1 \\ -3 & \Delta & -1 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 0 \\ -3 & \Delta & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 6 & 4 & 8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \bigcirc & 0 & 0 \\ -3 & \Delta & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим базисные столбцы и строки в последней матрице ($\bigcirc$ - 1-я строка и 1-й столбец, Δ - 2-я строка и 2-й столбец). Следим за отмеченными местами, проходя в обратном порядке все преобразования по вычислению ранга матрицы. Затем вычеркиваем в исходной матрице отмеченные строки и столбцы. На пересечении вычеркнутых столбцов и строк стоят элементы, образующие

квадратную матрицу, определитель которой и есть искомый базисный минор исходной матрицы, т.е.

$$M_{\delta} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}.$$

Задача 4.46 Найти ранг и базисный минор матрицы $A = \begin{pmatrix} 0 & -10 & 5 \\ -2 & 8 & -10 \\ 4 & -12 & 18 \end{pmatrix}$.

Решение. Матрица A имеет минор 2-го порядка, отличный от нуля, например, $M = \begin{vmatrix} 0 & -10 \\ -2 & 8 \end{vmatrix} = -20 \neq 0$, а $\det A = 0$. (Проверьте самостоятельно).

Следовательно $\text{rang } A = 2$, минор M является базисными.

Отметим, что в качестве базисного можно взять любой минор второго порядка матрицы, так как все они отличны от нуля.

Задача 4.47 Найти ранг и базисный минор матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -5 \\ -1 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & -9 & 4 & -2 \end{pmatrix}$.

Решение. I способ. У матрицы A имеется минор второго порядка, не равный нулю, например $M = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Поэтому $r \geq 2$, а из размеров матрицы A следует, что $r \leq 3$. Обозначим строки матрицы через S_1, S_2, S_3 и предположим, что $\text{rang } A = 2$. Тогда строки S_1, S_2, S_3 линейно зависимы, и поэтому $S_3 = a \cdot S_1 + b \cdot S_2$, где a и b - некоторые числа. Это матричное равенство эквивалентно четырем числовым равенствам. Напишем их для элементов первого и второго столбцов

$$-2 = a - b, \quad -9 = 0 \cdot a - 3 \cdot b.$$

Отсюда $a = 1, b = 3$.

Нетрудно проверить теперь, что действительно имеет место равенство $S_3 = S_1 + 3S_2$. Итак, строки S_1, S_2, S_3 матрицы A линейно зависимы, поэтому $\text{rang } A = 2$. Базисным минором является, например, указанный минор M .

II способ. Вычислим ранг матрицы A .

Умножим первый столбец матрицы на (-4) , а в другой раз на 5 и прибавим соответственно к третьему и четвертому столбцу. Получим матрицу

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 4 & -4 \\ -2 & -9 & 12 & -12 \end{pmatrix}.$$

Умножим теперь второй столбец матрицы C на $\frac{4}{3}$, а в другой раз на $-\frac{4}{3}$ и прибавим соответственно к третьему и четвертому столбцу. Это дает матрицу

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 0 \\ -2 & -9 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычеркивая нулевые столбцы матрицы D , получим матрицу

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \\ -2 & -9 \end{pmatrix},$$

ранг которой равен 2. Следовательно, и $\text{rang } A = 2$.

Базисным минором, понятно может служить любой минор матрицы B ,

например $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -3 \end{vmatrix}$.

4.1 Задачи для самостоятельного решения

4.48 Вычислить произведения матриц:

а) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 3 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -28 & 93 \\ 38 & -126 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 0 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} a\alpha + b\gamma & a\beta + b\delta \\ c\alpha + d\gamma & c\beta + d\delta \end{pmatrix};$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -5 \\ 3 & 10 & 0 \\ 2 & 1 & -7 \end{pmatrix};$

г) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$

4.49 Найти значения выражений:

а) $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}^3;$

б) $\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}^5;$

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}^3.$

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 13 & -14 \\ 21 & -22 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 304 & -61 \\ 305 & -62 \end{pmatrix};$

$$в) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 6 & \dots & \frac{n(n+1)}{2} \\ 0 & 1 & 3 & \dots & \frac{(n-1)n}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \dots & \frac{(n-2)(n-1)}{2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } n - \text{порядок данной}$$

матрицы.

4.50 Найти значение многочлена от матрицы:

$$а) f(A) = 3A^2 - 2A + 5, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$б) f(A) = A^3 - 7A^2 + 13A - 5, \quad A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ. а) } f(A) = \begin{pmatrix} 21 & -23 & 15 \\ -13 & 4 & 10 \\ -9 & 22 & 25 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.51 Найти обратные матрицы для следующих матриц:

$$а) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}; \quad в) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix};$$

$$г) \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \quad д) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad е) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ. а) } \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}; \quad б) \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix};$$

$$в) \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}; \quad г) \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix};$$

$$д) \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad е) \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.52 Решить матричные уравнения:

$$\text{а) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } X \cdot \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 16 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Ответ. а) } \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}; \quad \text{в) } \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

4.53 Вычислить определитель

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix};$$

$$\text{в) } \begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix};$$

$$\text{г) } \begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix};$$

$$\text{д) } \begin{vmatrix} a^2 + ab + b^2 & a^2 - ab + b^2 \\ a + b & a - b \end{vmatrix};$$

$$\text{е) } \begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix};$$

$$\text{ж) } \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix};$$

$$\text{з) } \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix};$$

$$\text{и) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix};$$

$$\text{к) } \begin{vmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{vmatrix}.$$

$$\text{Ответ. а) } 1;$$

$$\text{б) } -2;$$

$$\text{в) } 0;$$

$$\text{г) } 1;$$

$$\text{д) } -2b^3;$$

$$\text{е) } 1;$$

$$\text{ж) } 20;$$

$$\text{з) } -3;$$

$$\text{и) } 3abc - a^3 - b^3 - c^3;$$

$$\text{к) } a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

4.54 При каком условии справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 1 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \cos \alpha & \cos \beta \\ \cos \alpha & 0 & \cos \gamma \\ \cos \beta & \cos \gamma & 0 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

4.55 Разлагая по 3-й строке, вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & -2 & 3 & 2 \\ a & b & c & d \\ 3 & -1 & 4 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$\text{Ответ. } 8a + 15b + 12c - 19d.$$

4.56 Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} a & 3 & 0 & 5 \\ 0 & b & 0 & 2 \\ 1 & 2 & c & 3 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}.$$

Ответ. $abcd$.

4.57 Пользуясь теоремой Лапласа, вычислить определители:

а) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 2 & 6 & 7 & 3 \\ 2 & 7 & 5 & 3 & 4 & 1 \end{vmatrix};$

б) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 3 \\ 6 & 5 & 7 & 8 & 4 & 2 \\ 9 & 8 & 6 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & 5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$

Ответ. а) 90;

б) 8.

4.58 Вычислить ранг матрицы и укажите один из ее базисных миноров

а) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix};$

б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. а) 2; $\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix};$

б) 3; $\begin{vmatrix} 3 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 4 \\ 7 & 9 & 1 \end{vmatrix}.$

4.59 Найти значения λ , при которых матрица $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 4 \\ \lambda & 4 & 10 & 1 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ имеет

наименьший ранг.

Чему равен ранг при найденных λ и чему он равен при других значениях λ ?

Ответ. При $\lambda = 0$ ранг матрицы равен 2, при $\lambda \neq 0$ он равен 3.

4.60 Чему равен ранг матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$ при различных значениях

λ .

Ответ. При $\lambda = 3$ ранг равен 2, при $\lambda \neq 3$ ранг равен 3.

Задача 5.1 Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 3 \end{cases}$$

методом Гаусса.

Решение. Составим расширенную матрицу системы и посредством элементарных преобразований преобразуем ее к виду треугольной матрицы, главная диагональ которой занята единицами, т.е. к виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & \surd & \surd & \surd & \surd \\ 0 & 1 & \surd & \surd & \surd \\ 0 & 0 & 1 & \surd & \surd \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \surd \end{array} \right)$$

($\surd$ - элементы матрицы, полученные при преобразовании).

Процесс преобразования заключается в нашем стремлении элементарными преобразованиями строк матрицы «делать» нужные нам столбцы, сначала

первый $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, потом второй $\begin{pmatrix} \surd \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ и так далее.

Первый пример распишем подробно. Итак, мысленно первую строку умножаем на (-2) и складываем со второй строкой. Таким образом, получим эквивалентную матрицу с измененной *второй* строкой.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-2)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Теперь наша задача обнулить первый элемент третьей строки. Для этого мы мысленно умножаем первую строку на (-1) и складываем ее с третьей. Получим матрицу с «новой» третьей строкой

$$A \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\times(-1)} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Итак, мы добились необходимого – привели первый столбец к виду

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Теперь первую строку оставляем в покое, а вторую последовательно (мысленно) умножаем на необходимое число и складываем сначала с третьей

строкой, потом с четвертой, для того, чтобы привести второй столбец к виду

$$\begin{pmatrix} \vee \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & | & 5 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{+}]{\times 2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{+}]{\times (-2)} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 7 \end{pmatrix}.$$

Второй столбец готов, теперь третий приводим к виду

$$\begin{pmatrix} \vee \\ \vee \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & | & 7 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{+}]{\times (-1)} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & | & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow[\times \frac{1}{4}]{}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Итак, мы получили треугольную матрицу, главная диагональ которой занята единицами.

Дальше по этой матрице восстанавливаем уравнения системы, начиная с последней строки. Четвертая строка $(0 \ 0 \ 0 \ 1 \ | \ 2)$ соответствует уравнению

$$x_4 = 2.$$

Третья строка $(0 \ 0 \ 1 \ -1 \mid -1)$ - уравнению

$$x_3 - x_4 = -1,$$

откуда $x_3 = -1 + x_4$,

подставляем $x_4 = 2$, получим

$$x_3 = -1 + 2,$$

$$x_3 = 1.$$

Вторая строка $(0 \ 1 \ -1 \ -1 \mid -2)$ дает уравнение

$$x_2 - x_3 - x_4 = -2,$$

$$x_2 = -2 + x_3 + x_4,$$

$$x_2 = -2 + 1 + 2,$$

$$x_2 = 1.$$

Первая строка $(1 \ 1 \ 1 \ 1 \mid 5)$ обращается уравнением

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

$$x_1 = 5 - x_2 - x_3 - x_4,$$

$$x_1 = 5 - 1 - 1 - 2,$$

$$x_1 = 1.$$

Таким образом, исходная система имеет единственное решение $\{(1, 1, 1, 2)\}$, то есть система совместна и определена.

Ответ. $\{(1, 1, 1, 2)\}$.

Описание решения следующих примеров договоримся проводить короче. Для этого каждую из строк матрицы обозначим s_i (i - номер строки) и все проводимые операции будем фиксировать схематично, например запись $s_1 \leftrightarrow s_2$ означает «строку первую и вторую поменяем местами», а $2s_1 + s_3$ - «первую строку умножим на число 2 и сложим с третьей строкой». При этом полученную строку записываем на место второго слагаемого.

Задача 5.2 Решить систему методом Гаусса.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2; \\ 2x_1 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned}
 (A, B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{S_1 \leftrightarrow S_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\begin{array}{l} -3S_1 + S_2 \\ -2S_1 + S_3 \end{array}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & -5 \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{S_2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} \\
 &\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & -2 & 3 & -4 \end{array} \right) \xrightarrow{2S_2 + S_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{S_3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Восстанавливая уравнения системы, начиная с последней строчки, имеем $x_3 = \frac{1}{2}$, вторая строчка дает уравнение

$$x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{5}{2};$$

$$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}x_3;$$

$$x_2 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2};$$

$$x_2 = \frac{11}{4}.$$

Далее, используем первую строчку

$$x_1 + x_2 - x_3 = 2;$$

$$x_1 = 2 - x_2 + x_3;$$

$$x_1 = 2 - \frac{11}{4} + \frac{1}{2} \Rightarrow x_1 = -\frac{1}{4}.$$

Итак, система совместна и определена и имеет решение $\left\{ \left(-\frac{1}{4}; \frac{11}{4}; \frac{1}{2} \right) \right\}$.

Ответ. $\left\{ \left(-\frac{1}{4}; \frac{11}{4}; \frac{1}{2} \right) \right\}$.

Задача 5.3 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 + 5x_4 = -2, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = -3, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 3 & 3 & 9 & 5 & -2 \end{array} \right) \sim -\frac{1}{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$x_4 = -1.$$

$$x_3 = 2 + x_4 = 2 - 1 = 1.$$

$$x_2 = -x_3 - x_4 = -1 + 1 = 0.$$

$$x_1 = 1 - x_2 - 5x_3 - 2x_4 = 1 - 5 + 2 = -2.$$

Вывод: система совместна и определена.

Ответ. $\{(-2; 0; 1; -1)\}$.

Если в результате преобразований количество строк уменьшится т.е. получится, что число условий меньше числа переменных, то система совместна и неопределенна, т.е. имеет бесконечное множество решений.

Задача 5.4 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 8, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 10, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = -5. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & -1 & 2 & 4 & 10 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{(-2)s_1+s_2 \\ (-1)s_1+s_3}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2s_2+s_3 \\ -2s_2+s_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{(-1)s_3+s_4} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-(1)s_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$$x_3 - x_4 = -1.$$

Пусть $x_4 = c$, $c - const$, тогда

$$x_3 = -1 + x_4 = -1 + c.$$

$$x_2 - x_3 - x_4 = -2,$$

$$x_2 = x_3 + x_4 - 2 = -1 + c + c - 2 = -3 + 2c,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5,$$

$$x_1 = 5 - x_2 - x_3 - x_4,$$

$$x_1 = 5 + 3 - 2c + 1 - c - c,$$

$$x_1 = 9 - 4c.$$

Система совместна и неопределенна. Общее решение системы $\{(-4c + 9; 2c - 3; c - 1; c) \mid c - const\}$.

Укажем одно из частных решений, т.е. решение при конкретном c .

Например, при $c = 0$, имеем $\{(9; -3; -1; 0)\}$ - частное решение системы.

Ответ. $\{(-4c + 9; 2c - 3; c - 1; c) \mid c - const\}$ - общее решение системы.

Рассмотрим случай несовместной системы.

Задача 5.5 Решить систему линейных уравнений методом Гаусса

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 - x_3 - x_4 = -2, \\ -2x_2 + x_3 + 3x_4 = 5, \\ 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & -1 & -3 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{2s_2+s_3 \\ (-2)s_2+s_4}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{s_3+s_4, \\ (-1) \cdot s_3}} \\ &\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 8 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Последняя строка матрицы соответствует уравнению $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 8$, которое, очевидно, решения не имеет. Следовательно, и исходная система решений не имеет, т.е. система не совместна.

Ответ. $\emptyset$.

2 Решение СЛУ по формулам Крамера

Если A - матрица системы линейных уравнений квадратная и невырожденная, т.е. $\Delta = \det A \neq 0$, то такую систему линейных уравнений можно решить при помощи **формул Крамера**

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (i = \overline{1, n}),$$

где $\Delta = \det A$, а Δ_i - определители, которые получаются из Δ путем замены в нем i -го столбца столбцом свободных членов исходной системы.

Задача 5.6 Решить систему уравнений с помощью формул Крамера

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3, \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = -8, \\ 2x_2 + 7x_3 = 17. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель матрицы заданной системы

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \\ 0 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 56 - 18 + 20 + 21 = 79.$$

Последовательно заменив в Δ первый, второй и третий столбцы столбцом свободных членов, получим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & -3 \\ -8 & 4 & -5 \\ 17 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 395,$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 3 & -8 & -5 \\ 0 & 17 & 7 \end{vmatrix} = -158,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & -8 \\ 0 & 2 & 17 \end{vmatrix} = 237.$$

Таким образом, по формулам Крамера, имеем

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{395}{79} = 5,$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{158}{79} = -2,$$

$$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{237}{79} = 3.$$

Ответ. Система имеет единственное решение $\{(5; -2; 3)\}$.

Задача 5.7 Доказать, что система уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_3 = 5, \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \end{cases}$$

имеет единственное решение, и найти это решение.

Решение. Данная система уравнений является квадратной ($n = m = 3$).

Вычислим определитель Δ основной матрицы заданной системы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 6.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система уравнений имеет единственное решение.

Найдем его по формулам Крамера.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 5 & -1 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -1.$$

Итак, данная система имеет единственное решение $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Ответ. $\{(2; 1; -1)\}$.

Задача 5.8 Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y + 3z = 2, \\ 4x - y + 5z = 15, \\ 6x - 8y + 7z = 9. \end{cases}$$

Решение. Неизвестные здесь обозначаются буквами x, y, z , причем x является первой неизвестной, y - второй, z - третьей.

Составим определитель системы Δ и определители $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & -1 & 5 \\ 6 & -8 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 15 & -1 & 5 \\ 9 & -8 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 15 & 5 \\ 6 & 9 & 7 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 4 & -1 & 15 \\ 6 & -8 & 9 \end{vmatrix}.$$

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \text{ - формулы Крамера.}$$

$$\text{Таким образом: } x = \frac{-147}{-49} = 3, \quad y = \frac{-98}{-49} = 2, \quad z = \frac{-49}{-49} = 1.$$

Ответ. Система совместна и определена, ее решение $\{(3; 2; 1)\}$.

Задача 5.9 Найти y из системы уравнений, используя формулы Крамера

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 14, \\ y + 2z + 3t = 20, \\ z + 2t + 3x = 14, \\ t + 2x + 3y = 12. \end{cases}$$

Решение. Запишем систему в виде

$$\begin{cases} x + 2y + 3z + 0 \cdot t = 14, \\ 0 \cdot x + y + 2z + 3t = 20, \\ 3x + 0 \cdot y + z + 2t = 14, \\ 2x + 3y + z + t = 12. \end{cases}$$

Находим Δ , Δ_y :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & -8 & 2 \\ 2 & -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -6 & -8 & 2 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & -1 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 96.$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 14 & 3 & 0 \\ 0 & 20 & 2 & 3 \\ 3 & 14 & 1 & 2 \\ 2 & 12 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 1 & 7 & 3 & 0 \\ 0 & 10 & 2 & 3 \\ 3 & 7 & 1 & 2 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 10 & 2 & 3 \\ -14 & -8 & 2 \\ -8 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 192.$$

$$\text{Таким образом, } y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{192}{96} = 2.$$

Ответ. $y = 2$.

3 Матричный метод решения систем линейных уравнений

Для того, чтобы решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

матричным методом необходимо записать ее в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, задача решения системы сводится к задаче решения матричного уравнения $AX=B$. Напомним, что для того, чтобы решить это уравнение необходимо умножить обе части уравнения слева на A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B.$$

и так как $A^{-1}A=E$, получаем что решение матричного уравнения и соответственно исходной системы имеет вид

$$X = A^{-1}B.$$

Таким образом, вначале необходимо удостовериться, что матрица A невырожденная, т.е. что $\det A \neq 0$, и если это условие выполнено далее находим A^{-1} и выполняем произведение $A^{-1}B$.

Задача 5.10 Решить систему линейных уравнений матричным способом

$$\begin{cases} 2x + 3y + 2z = 9; \\ x + 2y - 3z = 14; \\ 3x + 4y + z = 16. \end{cases}$$

Решение. Перепишем систему в виде $AX=B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix}.$$

Тогда исходная система запишется следующим матричным уравнением $AX=B$, решение которого вид $X = A^{-1}B$.

Найдем A^{-1} . Имеем

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 28 - 30 - 4 = -6.$$

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 14, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{31} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -13,$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак,

$$X = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 14 & 5 & -13 \\ -10 & -4 & 8 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ 14 \\ 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 126 + 70 - 208 \\ -90 - 56 + 128 \\ -18 + 14 + 16 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -12 \\ -18 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система имеет решение $\{(2, 3, -2)\}$.

Ответ. $\{(2, 3, -2)\}$.

Задача 5.11 Решить систему уравнений матричным методом

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$$

Решение. Имеем

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \det A = -8.$$

Обратная матрица

$$A^{-1} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

$$X = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -2 \cdot 3 + 3(-1) - 7 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 + 1(-1) - 5 \cdot 1 \\ 4 \cdot 3 - 2(-1) - 6 \cdot 1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -16 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix},$$

т.е. $x = 2$, $y = 0$, $z = -1$ - решение данной системы.

Ответ. $\{(2; 0; -1)\}$.

Задача 5.12 Решить систему линейных уравнений средствами матричного исчисления.

$$\begin{cases} 5x_1 - x_2 + 2x_3 = 8, \\ x_2 - 5x_3 = -6, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B.$$

Решение. $\Delta = \det A = 26 \neq 0 \Rightarrow$ исходная система имеет единственное решение. Находим A^{-1}

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{13} & \frac{1}{26} & \frac{3}{26} \\ -\frac{5}{13} & -\frac{9}{26} & \frac{25}{26} \\ -\frac{1}{13} & -\frac{7}{26} & \frac{5}{26} \end{pmatrix},$$

Таким образом, $X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/13 & 1/26 & 3/26 \\ -5/13 & -9/26 & 25/26 \\ -1/13 & -7/26 & 5/26 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

Ответ. $\{(1; -1; 1)\}$

Исследование систем линейных уравнений

Метод Гаусса применим к решению любой системы линейных уравнений. Этот метод позволяет выяснить, совместна ли данная система; с его помощью находятся все решения совместной линейной системы.

Исследование систем линейных уравнений можно осуществлять с помощью других методов, основанных на следующих теоремах.

Пусть дана система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Рассмотрим основную матрицу A этой системы и ее расширенную матрицу $\tilde{A}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array} \right).$$

Теорема 1 (Кронекера-Капелли) Для совместности системы линейных уравнений необходимо и достаточно, чтобы ранг ее матрицы был равен рангу расширенной матрицы.

Теорема 2 Если ранг матрицы совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 3 Если ранг матрицы совместной системы меньше числа неизвестных, то множество ее решений является бесконечным.

Базисным минором матрицы называется отличный от нуля ее минор, порядок которого равен рангу этой матрицы. **Базисными неизвестными** совместной системы, ранг матрицы которой равен r , называются r неизвестных,

коэффициенты при которых образуют базисный минор. Остальные неизвестные называются *свободными*.

Из теорем следует, что решение системы линейных уравнений можно проводить следующим образом:

1. находят ранг r матрицы A системы и ранг $\tilde{r}$ расширенной матрицы $\tilde{A}$. Если $r \neq \tilde{r}$, то система несовместна.
2. если $r = \tilde{r}$, то выделяют базисный минор и базисные неизвестные. Исходную систему уравнений заменяют эквивалентной ей системой, состоящей из тех r уравнений, в которые вошли элементы базисного минора;
3. в случае, когда число базисных миноров неизвестных равно числу неизвестных системы, система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера. Если число базисных неизвестных меньше числа всех неизвестных, то из соответствующей системы находят выражения базисных неизвестных через свободные, используя, например, формулы Крамера. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, получают бесконечное множество решений исходной системы.

Задача 5.13 Методом Гаусса показать, что данная система имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух параметров, и найти эти решения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу системы $\tilde{A}$ и находим $\text{rang} A$ и $\text{rang} \tilde{A}$ с помощью элементарных преобразований строк:

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Следовательно, $\text{rang} A = \text{rang} \tilde{A} = 2 < n = 4$. Поэтому система совместна и неопределенна, т.е. имеет бесчисленное множество решений, зависящих от двух ($n - r = 4 - 2 = 2$) параметров.

Последней матрице, эквивалентной матрице $\tilde{A}$, соответствует система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 3, \end{cases}$$

Понятно, что эта система эквивалентна исходной. Теперь выбираем любой минор второго порядка, не равный нулю и считаем его базисным, например,

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$. Переменные, коэффициенты при которых составляют базисный минор – базисные неизвестные, остальные неизвестные – свободные. Поэтому в данном случае в качестве базисных неизвестных берем x_1 и x_2 , а x_3 и x_4 , принимаем за свободные неизвестные (параметры). Тогда из второго уравнения последней системы имеем $x_2 = 3 - x_3 - x_4$. Подставив выражение для x_2 в первое уравнение, находим

$$x_1 = 5 - 2(3 - x_3 - x_4) - x_3 - x_4 = -1 + 2x_3 + 2x_4.$$

Пусть $x_3 = a$, $x_4 = b$, таким образом, решение системы

$$\{(-1 + 2a + 2b; 3 - a - b; a; b), a, b - const\}.$$

За базисные неизвестные можно было бы принять также x_1 , x_3 , или x_1 , x_4 , или x_2 , x_3 , или x_2 , x_4 , но не x_3 , x_4 , так как определитель, составленный из коэффициентов при x_3 и x_4 равен нулю и следовательно базисным минором служить не может.

$$\text{Ответ. } \{(-1 + 2a + 2b; 3 - a - b; a; b), a, b - const\}.$$

Задача 5.14 Исследовать систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 + 9x_5 = 1, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 5x_5 = 2, \\ 2x_1 + 11x_2 + 12x_3 + 25x_4 + 22x_5 = 4. \end{cases}$$

Решение. Определим ранг матрицы и ранг расширенной матрицы системы, имеем

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 5 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 3 & 9 & 15 & 21 & 27 & 6 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 2 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim \\ &\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 1 \\ 2 & 11 & 12 & 25 & 22 & 4 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Очевидно $r(A) = 2$, $r(\tilde{A}) = 3$, т.е. $r(A) \neq r(\tilde{A})$, следовательно, система несовместна.

Задача 5.15 Исследовать систему уравнений и в случае ее совместности найти решение.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 10, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Решение.

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 3 & 2 & 1 & 10 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right).$$

$$A \sim \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Найдем определитель последней матрицы:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Следовательно, $r(A) = 3$. Ранг расширенной матрицы также равен 3, так как найденный определитель является минором матрицы $\tilde{A}$.

Итак, система совместна. Для ее решения возьмем, например, первое, третье и пятое уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 = 3. \end{cases}$$

Решим эту систему методом Гаусса

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -8 \\ 0 & -1 & -3 & -11 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & -1 & -3 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 14 \\ 0 & 1 & 2 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

$$x_3 = 3,$$

$$x_2 + 2x_3 = 8,$$

$$x_2 = 8 - 2x_3 = 8 - 2 \cdot 3 = 8 - 6 = 2,$$

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14,$$

$$x_1 = 14 - 2x_2 - 3x_3 = 14 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = 14 - 13 = 1.$$

Ответ. Система имеет единственное решение $\{(1; 2; 3)\}$.

Задача 5.16 Решить систему линейных уравнений, выяснив предварительно вопрос о совместности

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0; \\ 6x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 6 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 3 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21 \neq 0,$$

то ранг матрицы равен трем. Следовательно, исходная система имеет и ненулевые решения.

Заданная система эквивалентна системе

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как определитель, состоящий из коэффициентов при неизвестных x_1, x_2, x_3 , отличен от нуля, то считаем эти неизвестные базисными, а x_4 - свободным.

Перенеся свободный неизвестный в правую часть решаем систему трех уравнений с тремя неизвестными, используя правило Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -x_4; \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 2x_4; \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -3x_4. \end{cases}$$

Вычислим определители:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 21;$$

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} -x_4 & -1 & -3 \\ 2x_4 & 3 & 2 \\ -3x_4 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -31x_4,$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 2 & -x_4 & -3 \\ 1 & 2x_4 & 2 \\ 3 & -3x_4 & 2 \end{vmatrix} = 43x_4,$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -x_4 \\ 1 & 3 & 2x_4 \\ 3 & 2 & -3x_4 \end{vmatrix} = -28x_4.$$

Следовательно,

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{-31x_4}{21}; \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{43x_4}{21}; \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{-28x_4}{21} = \frac{-4x_4}{3}.$$

Пусть $x_4 = c$, тогда общее решение системы будет иметь вид $\left\{ \left(-\frac{31}{21}c; \frac{43}{21}c; -\frac{4}{3}c \right), c - const \right\}$. Запишем одно из решений системы. Например, при $c=1$, имеем $\left(-\frac{31}{21}; \frac{43}{21}; -\frac{4}{3} \right)$ - частное решение системы. Проверкой можно убедиться в верности найденного решения.

Задача 5.17 Является ли совместной система уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = 1? \end{cases}$$

Решение.

$$\text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{rang} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\text{rang } A = 2$.

Составим теперь расширенную матрицу $\tilde{A}$, добавив к матрице A столбец свободных членов данной системы, и снова вычеркнем третий и четвертый столбцы, что не изменяет ранга матрицы

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \end{array}\right).$$

Определитель этой матрицы отличен от нуля (он равен 8), поэтому ранг этой матрицы равен 3 и, следовательно, $\text{rang } \tilde{A} = 3$.

Таким образом, $\text{rang } A = 2 \neq 3 = \text{rang } \tilde{A}$, т.е. ранги основной и расширенной матриц не равны. Поэтому данная система уравнений несовместна.

Ответ. Система несовместна.

Задача 5.18 При каких значениях s система уравнений совместна

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 = c? \end{cases}$$

Решение. Основная матрицы A данной системы такая же, как в задаче 5.17. Как было установлено, $\text{rang } A = 2$. Составив расширенную матрицу и вычеркнув в ней третий и четвертый столбцы (как в задаче 5.17, это не изменяет ранга матрицы), получим матрицу

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & -3 & c \end{array} \right),$$

определитель которой равен $3c + 6$. Если $c \neq -2$, то этот определитель отличен от нуля, поэтому $\text{rang } \tilde{A} = 3 \neq \text{rang } A$, и, следовательно, данная система уравнений несовместна. Если же $c = -2$, то $\det \tilde{A} = 0$, а так как у матрицы $\tilde{A}$ есть миноры второго порядка, отличные от нуля, то $\text{rang } \tilde{A} = 2$. Итак, при $c = -2$ $\text{rang } A = \text{rang } \tilde{A}$ и, следовательно, данная система совместна.

Система однородных линейных уравнений. Фундаментальная система решений

Система линейных уравнений называется **однородной**, если свободный член в каждом уравнении равен нулю. Однородная система имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Система однородных линейных уравнений всегда совместна, так как

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \quad (5.3)$$

является ее решением системы (5.2).

Решение (5.3) называется *нулевым* или *тривиальным решением* системы (5.2). Кроме тривиального система однородных линейных уравнений, может иметь и другие решения (*нетривиальные*).

Из критерия совместности следует, что однородная система имеет лишь тривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен числу неизвестных ($r = n$). В частности, если число уравнений равно числу неизвестных ($m = n$), то необходимым и достаточным условием существования только тривиального решения является отличие определителя системы от нуля.

Если ранг матрицы системы однородных линейных уравнений меньше числа неизвестных, то множество решений системы бесконечно.

Если $C_1, C_2, \dots, C_k$ - вектор-решения системы линейных однородных уравнений, то любая их линейная комбинация является также вектор-решением этой системы.

Совокупность максимального числа линейно независимых вектор-решений системы однородных линейных уравнений называется **фундаментальной системой решений** этой системы.

Фундаментальная система решений (ФСР) однородной системы линейных уравнений содержит $n - r$ решений, где n - число неизвестных, r - ранг матрицы системы.

Задача 5.19 Дана однородная система линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Найти фундаментальную систему решений (ФСР) и общее решение этой системы.

Решение. Составим матрицу системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{} & -2 & 4 \\ 4 & \boxed{} & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix},$$

и определим ее ранг (самостоятельно), $\text{rang} A = 2$, поэтому $n - r = 5 - 2 = 3$. Значит, ФСР состоит из трех решений: $(X_p)_3$. Примем за базисный минор выделенный рамкой минор второго порядка. Последнее уравнение отбрасываем, а неизвестные x_1, x_4, x_5 считаем «свободными» и переносим их в правую часть уравнений, т.е. приходим к системе

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5. \end{cases} \quad (5.4)$$

Ищем первое базисное решение X_1 . Для этого положим $x_1 = 1, x_4 = x_5 = 0$. Тогда получим систему

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы этой системы является базисный минор. Значит, он отличен от нуля. Следовательно, последняя система имеет единственное

решение, которое можно найти, например, с помощью формул Крамера: $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. Таким образом,

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \text{первое базисное решение.}$$

Далее, полагая в системе (5.4) $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, находим $x_2 = 13$, $x_3 = 5$, т.е. вторым базисным решением является столбец

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Наконец, полагая $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_3 = -1$. Следовательно, третье базисное решение есть

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, ФСР получена. Заметим, что построенная таким образом ФСР называется *нормальной*.

Еще раз подчеркнем, что столбцы X_1, X_2, X_3 , образующие ФСР, линейно независимы, поскольку «свободные» неизвестные x_1, x_4, x_5 были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в матрице из этих столбцов отличен от нуля:

$$\begin{pmatrix} \boxed{} \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ \boxed{} \end{pmatrix}.$$

Теперь выпишем общее решение исходной системы линейных уравнений:

$$X = c_p X_p = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3, \quad p = 1, 2, 3,$$

или в координатах:

$$\begin{cases} x_1 = c_1, \\ x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3, \\ x_3 = 5c_2 - c_3, \\ x_4 = c_2, \\ x_5 = c_3. \end{cases}$$

Задача 5.20 Известно, что совокупность столбцов

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

является ФСР некоторой однородной системы линейных уравнений.

а) Из скольких уравнений может состоять эта система?

б) Привести пример такой системы, состоящей из трех уравнений.

Решение. а) Пусть n - число неизвестных системы, r - ранг ее матрицы.

Так как столбцы X_1 и X_2 имеют четыре строки, то $n = 4$. Число решений ФСР равно 2; значит, $n - r = 2$, т.е. $r = 2$. Следовательно, однородная система линейных уравнений должна содержать не менее двух уравнений и ранг ее матрицы равен 2.

б) Будем искать два линейных однородных уравнения, удовлетворяющие условию задачи. Третье уравнение системы можно составить как линейную комбинацию первых двух уравнений. Коэффициенты обоих искомых уравнений, обозначенные через y_1, y_2, y_3, y_4 , должны удовлетворять одной и той же однородной системе уравнений

$$\begin{cases} y_1 - y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 0, \\ 0 \cdot y_1 - y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 = 0. \end{cases}$$

Кроме того, искомая пара решений этой системы, т.е. оба набора коэффициентов, должна быть линейно независимой, поскольку ранг матрицы искомой системы равен 2. Найдем нормальную ФСР выписанной системы, считая свободными неизвестными y_3 и y_4 . Полагая $y_3 = 1, y_4 = 0$, имеем $y_1 = y_2 = 0$; полагая $y_3 = 0, y_4 = 1$, находим $y_1 = y_2 = 0$. Таким образом, получим ФСР:

$$Y_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad Y_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому однородная система двух линейных уравнений, для которой столбцы X_1, X_2 являются ФСР, имеет вид

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

В качестве третьего уравнения такой системы можно взять, например, сумму первых двух уравнений.

Итак, одним из возможных ответов является следующая система:

$$\begin{cases} 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 0, \\ 0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + x_3 + x_4 = 0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} x_3 = 0, \\ x_4 = 0, \\ x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Задача 5.21 Найти ФСР и общее решение системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 4x_5 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 + x_4 + 7x_5 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + 8x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Решение. Матрица системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & \boxed{} & -2 & 4 \\ 4 & \boxed{} & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

была рассмотрена в задаче 5.19, ее ранг равен 2. Поэтому размерность пространства решений данной системы равна $n - r = 5 - 2 = 3$ и ее ФСР состоит из трех решений. В матрице A возьмем в качестве базисного минора выделенный рамкой минор второго порядка. Третья строка матрицы A является линейной комбинацией базисных строк, поэтому последнее уравнение системы является следствием первых двух уравнений и его можно отбросить. В первых двух уравнениях члены, соответствующие базисному минору, оставляем в левой части, а неизвестные x_1, x_4, x_5 считаем «свободными» и переносим члены с этими неизвестными в правые части уравнений. В результате приходим к системе уравнений

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2x_1 + 2x_4 - 4x_5, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4x_1 - x_4 - 7x_5, \end{cases} \quad (5.6)$$

равносильной исходной системе, т.е. множество решений системы (5.6) совпадает с множеством решений исходной системы уравнений.

Найдем первое базисное решение X_1 . Для этого положим $x_1 = 1, x_4 = x_5 = 0$. Система (5.5) примет вид

$$\begin{cases} -x_2 + 3x_3 = -2, \\ -2x_2 + 5x_3 = -4. \end{cases}$$

Определителем матрицы полученной системы является базисный минор, отличный от нуля. Следовательно, эта система имеет единственное решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера: $x_2 = 2$, $x_3 = 0$. Таким

образом, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Полагая в системе (5.6) $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, $x_5 = 0$, аналогично

находим $x_2 = 13$, $x_3 = 5$, т.е. вторым базисным решением является столбец

$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Наконец, полагая $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, находим $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.

Следовательно, третье базисное решение есть $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Итак, ФСР, состоящая

из решений X_1, X_2, X_3 , построена. Отметим, что построенная, таким образом, ФСР называется *нормальной* ФСР. Подчеркнем, что столбцы X_1, X_2, X_3 , образующие нормальную ФСР, линейно-независимы, поскольку «свободные» неизвестные x_1, x_4, x_5 были выбраны так, что выделенный рамками минор третьего порядка в матрице из этих столбцов

$$\begin{pmatrix} \boxed{} \\ 2 & 13 & 1 \\ 0 & 5 & -1 \\ \boxed{} \end{pmatrix}$$

отличен от нуля, и поэтому ранг этой матрицы равен 3, т.е. равен числу столбцов матрицы.

Напишем теперь общее решение исходной системы уравнений:

$$X = c_1 X_1 + c_2 X_2 + c_3 X_3,$$

или, в координатах,

$$x_1 = c_1, \quad x_2 = 2c_1 + 13c_2 + c_3, \quad x_3 = 5c_2 - c_3, \quad x_4 = c_2, \quad x_5 = c_3,$$

где c_1, c_2, c_3 - произвольные постоянные.

5.1 Задачи для самостоятельного решения

5.22 Методом Гаусса решить системы линейных уравнений

$$\text{а) } \begin{cases} 2x - y + 3z = 9, \\ 3x - 5y = z = -4, \\ 4x - 7y = z = 5. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 4x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 8x_1 + 5x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x + y + 4z + 8t = -1, \\ x + 3y - 6z + 2t = 3, \\ 3x - 2y + 2z - 2t = 8, \\ 2x - y + 2z = 4. \end{cases}$$

Ответ. а) Система решений не имеет;

б) $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -1$;

в) $x = 2, y = -3, z = -\frac{3}{2}, t = \frac{1}{2}$.

5.23 Решить следующие системы линейных уравнений используя правило Крамера:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 = 12, \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 = 6. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 2x - y - 6z + 3t + 1 = 0, \\ 7x - 4y + 2z - 15t + 32 = 0, \\ x - 2y - 4z + 9t - 5 = 0, \\ x - y + 2z - 6t + 8 = 0. \end{cases}$$

Ответ. а) $x_1 = -2, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = -1$;

б) $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 1, x_4 = 0$;

в) $x = -3, y = 0, z = -\frac{1}{2}, t = \frac{2}{3}$.

5.24 Решить следующие системы линейных уравнений, применив в каждом случае наиболее подходящий прием:

$$\text{а) } \begin{cases} -x + y + z + t = a, \\ x - y + z + t = b, \\ x + y - z + t = c, \\ x + y + z - t = d. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} ax + by + cz + dt = p, \\ -bx + ay + dz - ct = q, \\ -cx - dy + az + bt = r, \\ -dx + cy - bz + at = s. \end{cases}$$

$$\text{Ответ. а) } x = \frac{1}{4}(-a + b + c + d), \quad y = \frac{1}{4}(a - b + c + d), \\ z = \frac{1}{4}(a + b - c + d), \quad t = \frac{1}{4}(a + b + c - d).$$

$$\text{б) } x = \frac{1}{A}(ap - bq - cr - ds), \quad y = \frac{1}{A}(bp + aq - dr + cs), \\ z = \frac{1}{A}(cp + dq + ar - bs), \quad t = \frac{1}{A}(dp - cq + br + as),$$

где $A = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$.

5.25 Исследовать систему линейных уравнений на совместность, найти общее решение и одно частное решение системы уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 4, \\ 9x_1 + 4x_2 + x_3 + 7x_4 = 2. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 + 7x_4 = 1, \\ 4x_1 - 6x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2, \\ 2x_1 - 3x_2 - 11x_3 - 15x_4 = 1. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases}$$

Ответ. а) например, общее решение $x_1 = \frac{x_3 - 9x_4 - 2}{11}$, $x_2 = \frac{-5x_3 + x_4 + 10}{11}$;

частное решение $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$;

б) например, общее решение: $x_3 = 22x_1 - 33x_2 - 11$, $x_4 = -16x_1 + 24x_2 + 8$; частное решение: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = x_4 = 0$.

в) например, общее решение: $x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2$, $x_4 = 1$; частное решение: $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$.

5.26 Найти общее решение и фундаментальную систему решений для систем уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0, \\ 4x_1 - 8x_2 + 17x_3 - 11x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\text{в) } \begin{cases} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0, \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0. \end{cases}$$

Ответ. а) Например, общее решение: $x_1 = 8x_3 - 7x_4$, $x_2 = -6x_3 + 5x_4$.

Фундаментальная система решение:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	-6	1	0
-7	5	0	1

б) общее решение: $x_3 = -\frac{5}{2}x_1 + 5x_2, \quad x_4 = \frac{7}{2}x_1 - 7x_2.$

Фундаментальная система решение:

x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{7}{2}$
0	1	5	7

в) система имеет только нулевое решение. Фундаментальной системы не существует.

5.27 Исследовать систему линейных уравнений на совместность и найти общее решение в зависимости от значения параметра λ :

$$\begin{aligned} \text{а) } & \begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 3, \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 1, \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 - 5x_4 = 9, \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 = \lambda. \end{cases} & \text{б) } & \begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \lambda x_4 = 1. \end{cases} \\ \text{в) } & \begin{cases} (1 + \lambda)x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + (1 + \lambda)x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + x_2 + (1 + \lambda)x_3 = 1. \end{cases} \end{aligned}$$

Ответ. а) Если $\lambda \neq 0$, то система несовместна; если $\lambda = 0$, то общее решение $x_1 = \frac{-5x_3 - 13x_4 - 3}{2}, x_2 = \frac{-7x_3 - 19x_4 - 7}{2}$; частное решение $x_1 = -\frac{3}{2}, x_2 = -\frac{7}{2}, x_3 = x_4 = 0$;

б) Если $\lambda(\lambda + 3) \neq 0$, то система имеет решение $X = \frac{1}{\lambda + 3}(1, 1, 1)$; если $\lambda = -3$, то система несовместна; если $\lambda = 0$, то общее решение $x_1 = 1 - x_2 - x_3 - x_4$, частное решение $x_1 = 1, x_2 = x_3 = x_4 = 0$;

в) Если $(\lambda - 1)(\lambda + 3) \neq 0$, то система имеет решение $X = \frac{1}{\lambda + 3}(1, 1, 1, 1)$; если $\lambda = -3$, то система несовместна; если $\lambda = 1$, то общее решение $x_1 = 1 - x_2 - x_3$, частное решение $x_1 = 1, x_2 = x_3 = 0$.

6 Векторная алгебра

Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами

Вектор это направленный отрезок, т.е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление. Если A - начало вектора, а B - его конец, то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\vec{a}$.

Вектор $\overline{BA}$ (у него начало в точке B , а конец в точке A) называется противоположным вектору $\overline{AB}$. Вектор противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Длиной или **модулем** вектора $\overline{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $|\overline{AB}|$.

Вектор, длина которого равна нулю, называется **нулевым** вектором и обозначается $\vec{0}$. Нулевой вектор направления не имеет.

Вектор, длина которого равна единице, называется **единичным** вектором и обозначается $\vec{e}$. Единичный вектор, направление которого совпадает с направлением вектора $\vec{a}$, называется **ортом** вектора $\vec{a}$ и обозначается $\vec{a}^0$.

Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **коллинеарными**, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых: обозначают $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются **равными** ($\vec{a} = \vec{b}$), если они коллинеарны, одинаково направлены и имеют одинаковые длины.

Три вектора в пространстве называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a} + \vec{b}$, который направлен из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ отложен из конца вектора $\vec{a}$.

Для геометрического представления суммы векторов используют правила «треугольника» и «параллелограмма», проиллюстрированные на рисунках 9 и 10 соответственно.

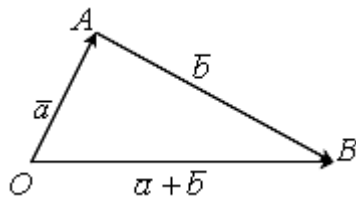


Рисунок 9

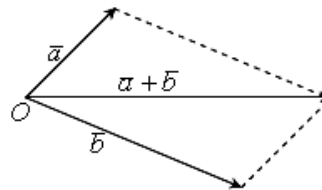


Рисунок 10

Аналогично определяется сумма трех и более векторов. Суммой конечного числа векторов будет вектор, направленный из начала первого в конец последнего вектора, при условии, что каждый последующий вектор отложен из конца предыдущего (правило «многоугольника»).

Свойства операции сложения векторов

1⁰ $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (коммутативность),

2⁰ $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (ассоциативность),

3⁰ $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$,

$$4^0 \quad \bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{o}.$$

Разностью двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{x} = \bar{a} - \bar{b}$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$, т.е.
 $\bar{a} - \bar{b} = \bar{x}$, если $\bar{b} + \bar{x} = \bar{a}$.

Чтобы построить разность $\bar{a} - \bar{b}$ двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, нужно отложить их из одной точки и вектор разности будет направлен из конца второго вектора (вычитаемого) в конец первого вектора (уменьшаемого) (рисунок 11).

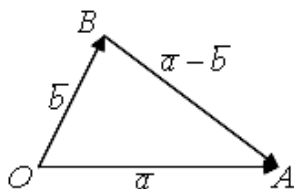


Рисунок 11

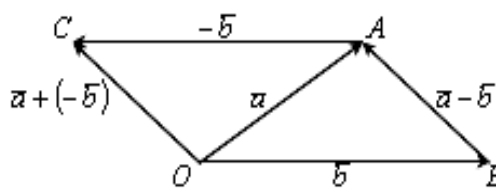


Рисунок 12

Отметим, что поскольку $\bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b})$, то разность $\bar{a} - \bar{b}$ равна сумме двух векторов $\bar{a}$ и $(-\bar{b})$, где $(-\bar{b})$ - вектор, противоположный вектору $\bar{b}$ (рисунок 12).

Произведением вектора $\bar{a} \neq \bar{0}$ **на число** $\alpha \neq 0$ называется вектор $\bar{b} = \alpha \bar{a}$, удовлетворяющий условиям:

$$1) \quad |\bar{b}| = |\alpha| \cdot |\bar{a}|,$$

$$2) \quad \bar{b} \uparrow \uparrow \bar{a}, \text{ если } \alpha > 0; \bar{b} \uparrow \downarrow \bar{a}, \text{ если } \alpha < 0.$$

Очевидно, что $\bar{b} = \bar{0}$, если $\alpha = 0$ или $\bar{a} = \bar{0}$.

Свойства умножения вектора на число

$$1^0 \quad \alpha(\beta \bar{a}) = (\alpha\beta)\bar{a} \quad (\alpha, \beta \in R),$$

$$2^0 \quad 1 \cdot \bar{a} = \bar{a},$$

$$3^0 \quad (\alpha + \beta)\bar{a} = \alpha\bar{a} + \beta\bar{a} \quad (\alpha, \beta \in R),$$

$$4^0 \quad \alpha(\bar{a} + \bar{b}) = \alpha\bar{a} + \alpha\bar{b} \quad (\alpha \in R).$$

Пусть даны векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ и действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Рассмотрим вектор $\bar{a} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n$, который назовем **линейной комбинацией векторов** $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$; действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ назовем **коэффициентами** линейной комбинации.

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существуют действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, из которых хотя бы одно отлично от нуля, такие, что линейная комбинация векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ с этими числами равна нулевому вектору, то есть:

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0} \quad (6.1)$$

Если соотношение (6.1) выполняется только при условии $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то система векторов называется **линейно независимой**.

Базисом системы векторов S называется любая максимально линейно независимая подсистема системы S .

Подсистема S' системы S называется **максимально линейно независимой подсистемой**, если она удовлетворяет двум условиям:

1 S' - линейно независима;

2 При добавлении к системе S' любого вектора системы S она становится линейно зависимой.

Координатами вектора $\vec{a}$ в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ называются коэффициенты разложения вектора по векторам базиса. Обозначение: $\vec{a}\{x, y, z\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$.

Свойства координат векторов

1⁰ Координаты суммы (разности) двух векторов, заданных своими координатами в некотором базисе, равны сумме (разности) соответствующих координат этих векторов, то есть если $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$ и $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$, то

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}.$$

2⁰ Координаты произведения вектора на действительное число равны произведению этого числа на соответствующие координаты вектора в некотором базисе, а именно, если $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$, то

$$\vec{b} = \alpha \vec{a} = \{\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}.$$

3⁰ Пусть даны векторы $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$ и $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}$ и пусть вектор $\vec{c} = \alpha \vec{a} + \beta \vec{b}$, тогда на основе предыдущих свойств нетрудно показать, что вектор $\vec{c}$ имеет следующие координаты $\vec{c}(\alpha a_1 + \beta b_1, \alpha a_2 + \beta b_2, \alpha a_3 + \beta b_3)$.

4⁰ Условие коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами в некотором базисе:

Пусть относительно базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ даны векторы $\vec{a}\{a_1, a_2, a_3\}$, $\vec{b}\{b_1, b_2, b_3\}$ и $\vec{a} \parallel \vec{b}$, тогда по необходимому и достаточному условию $\vec{b} = \alpha \vec{a}$ или в координатной форме:

$$\begin{cases} b_1 = \alpha a_1 \\ b_2 = \alpha a_2 \\ b_3 = \alpha a_3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad - \text{условие коллинеарности двух векторов в}$$

координатной форме.

Базис $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ трехмерного пространства называется **ортонормированным**, если выполняются два условия:

- 1) все векторы этого базиса единичные;
- 2) векторы базиса попарно ортогональны, то есть $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2, \vec{e}_2 \perp \vec{e}_3, \vec{e}_1 \perp \vec{e}_3$.

Ортонормированный базис в пространстве V_3 принято обозначать, с учетом порядка, буквами, $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$, в V_2 - соответственно $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ и в V_1 - $\{\vec{i}\}$.

Вектора $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ называют **ортами**.

Длина вектора, заданного своими координатами в ортонормированном базисе, равна квадратному корню из суммы квадратов его координат, то есть

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (6.2)$$

Задача 6.1 Даны векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (рисунок 13,а). Изобразить на рисунке линейную комбинацию $-2\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b} + 4\vec{c}$.

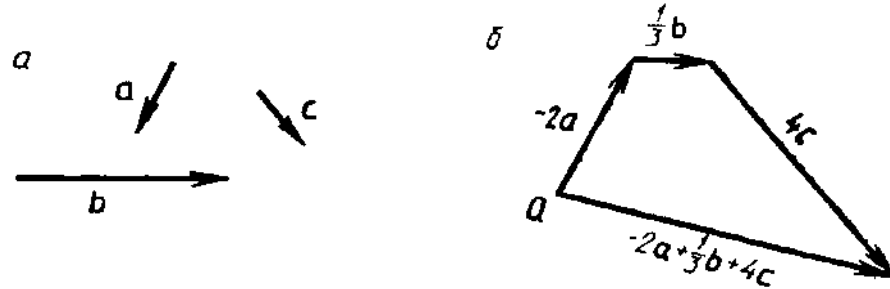


Рисунок 13

Решение. Выбираем на плоскости произвольную точку O и откладываем от нее вектор $-2\vec{a}$ (рисунок 13.б). Затем от конца вектора $-2\vec{a}$ откладываем вектор $\frac{1}{3}\vec{b}$ и, наконец, строим вектор $4\vec{c}$, выходящий из конца вектора $\frac{1}{3}\vec{b}$. Искомая линейная комбинация изображается вектором, замыкающим полученную ломаную, начало которого находится в точке O .

Задача 6.2 Даны векторы $\vec{a} = \{1, -2, 3\}$, $\vec{b} = \{2, 1, -4\}$. Найти векторы: $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$, $\vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$.

Решение. Для нахождения векторов $\vec{c}$, $\vec{d}$, $\vec{p}$ используем формулы

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \{a_1 \pm b_1, a_2 \pm b_2, a_3 \pm b_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}},$$

$$\vec{b} = \alpha \vec{a} = \{\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3\}_{\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}}.$$

В результате получаем

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \{1, -2, 3\} + \{2, 1, -4\} = \{(1+2), (-2+1), (3-4)\} = \{3, -1, -1\},$$

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \{1, -2, 3\} - \{2, 1, -4\} = \{(1-2), (-2-1), (3-(-4))\} = \{-1, -3, 7\}.$$

Найдем координаты векторов $3\vec{a}$, $2\vec{b}$:

$$3\vec{a} = \{3 \cdot 1, 3(-2), 3 \cdot 3\} = \{3, -6, 9\};$$

$$2\vec{b} = \{2 \cdot 2, 2 \cdot 1, 2(-4)\} = \{4, 2, -8\}.$$

$$\text{Тогда } \vec{p} = 3\vec{a} + 2\vec{b} = \{3, -6, 9\} + \{4, 2, -8\} = \{7, -4, 1\}.$$

$$\text{Ответ. } \vec{c} = \{3, -1, -1\}, \vec{d} = \{-1, -3, 7\}, \vec{p} = \{7, -4, 1\}.$$

Задача 6.3 Вычислить периметр треугольника ABC с вершинами $A(8, 0, 7)$, $B(10, 2, 8)$, $C(10, -2, 8)$.

Решение.

Периметр треугольника ABC вычисляется по формуле $P = AB + AC + BC$.

Найдем длины сторон треугольника по формуле

$$d = |A_1 A_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Подставляя координаты соответствующих точек в эту формулу, получим:

$$AB = \sqrt{(10-8)^2 + (2-0)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3;$$

$$BC = \sqrt{(10-10)^2 + (-2-2)^2 + (8-8)^2} = \sqrt{(-4)^2} = 4;$$

$$AC = \sqrt{(10-8)^2 + (-2-0)^2 + (8-7)^2} = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3.$$

Следовательно, периметр треугольника $P = 4 + 3 + 3 = 10$.

Ответ. $P=10$.

Задача 6.4 Коллинеарны ли векторы $\vec{p} = 4\vec{a} - 3\vec{b}$, $\vec{q} = 9\vec{b} - 12\vec{a}$, где $\vec{a} = \{-1, 2, 8\}$ и $\vec{b} = \{3, 7, -1\}$?

Решение. Векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число α такое, что $\vec{p} = \alpha\vec{q}$. Иными словами, векторы коллинеарны тогда, когда их координаты пропорциональны.

Находим координаты векторов $\vec{p}$ и $\vec{q}$ пользуясь тем, что при сложении векторов их координаты складываются, а при умножении на число координаты умножаются на это число:

$$\vec{p} = \{-13, -13, 35\}, \quad \vec{q} = \{39, 39, -105\}.$$

Так как

$$\frac{-13}{39} = \frac{-13}{39} = \frac{35}{-105},$$

координаты пропорциональны, следовательно, векторы $\vec{p}, \vec{q}$ коллинеарны.

Ответ. Векторы $\vec{p}, \vec{q}$ коллинеарны.

Задача 6.5 При каких значениях α и β векторы $\vec{a}, \vec{b}$ коллинеарны, если $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ и $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$?

Решение. Для того чтобы найти α, β , используем условие коллинеарности векторов

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \frac{-2}{\alpha} = \frac{3}{-6} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow -\frac{2}{\alpha} = -\frac{1}{2} = \frac{\beta}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{\alpha} = -\frac{1}{2}, \\ \frac{\beta}{2} = -\frac{1}{2}, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Ответ. $\alpha = 4, \beta = -1$.

Задача 6.6 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. При каком x векторы $\vec{c} = (x-1)\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{d} = (2+3x)\vec{a} - 2\vec{b}$ коллинеарны?

Решение. Вектор $\vec{c} = (x-1)\vec{a} + \vec{b}$ ненулевой (если бы $\vec{0} = \vec{c} = (x-1)\vec{a} + 1 \cdot \vec{b}$, то в силу неколлинеарности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имели бы место равенства $x-1=0$, $1=0$, т.е. получилось бы противоречие). Согласно признаку коллинеарности, вектора $\vec{d}$ и $\vec{c}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда существует число y

такое, что $\bar{d} = y\bar{c}$, т.е. $(2 + 3x)\bar{a} - 2\bar{b} = y(x - 1)\bar{a} + y\bar{b}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, поэтому равенство эквивалентно системе уравнений $2 + 3x = y(x - 1)$, $-2 = y$, т.е. системе $x = 0$, $y = -2$. Следовательно, векторы $\bar{c}$ и $\bar{d}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда $x = 0$, т.е. $\bar{c} = -\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{d} = 2(\bar{a} - \bar{b})$.

Ответ. $x = 0$.

Задача 6.7 Дан треугольник ABC . На прямых (AB) , (BC) , (CA) выбраны соответственно точки M , N , P так, что $\overline{AM} = \alpha \overline{AB}$, $\overline{BN} = \beta \overline{BC}$, $\overline{CP} = \gamma \overline{CA}$, где α , β , γ - действительные числа. При каком необходимом и достаточном условии векторы $\overline{CM}$, $\overline{AN}$ и $\overline{BP}$ образуют треугольник, т.е. $\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BP} = \vec{0}$?

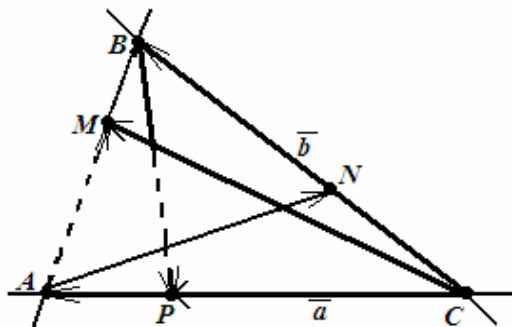
Решение. Пусть $\bar{a} = \overline{CM}$, $\bar{b} = \overline{CB}$ (рисунок 14, а), б)). Тогда $\overline{AB} = \bar{b} - \bar{a}$, $\overline{AM} = \alpha(\bar{b} - \bar{a})$, $\overline{CN} = (1 - \beta)\bar{b}$, $\overline{CP} = \gamma\bar{a}$. Следовательно,

$$\overline{CM} = \overline{CA} + \overline{AM} = (1 - \alpha)\bar{a} + \alpha\bar{b},$$

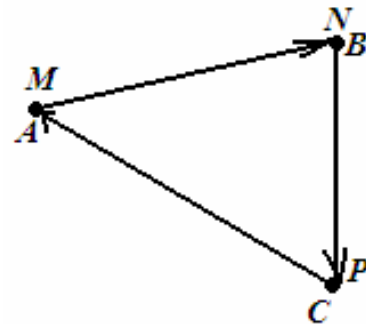
$$\overline{AN} = \overline{AC} + \overline{CN} = \bar{a} + (1 - \beta)\bar{b},$$

$$\overline{BP} = \overline{BC} + \overline{CP} = -\bar{b} + \gamma\bar{a},$$

поэтому $\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BP} = (\lambda - \alpha)\bar{a} + (\alpha - \beta)\bar{b}$. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ не коллинеарны, поэтому $\overline{CM} + \overline{AN} + \overline{BP} = \vec{0}$ тогда и только тогда, когда $\gamma - \alpha = 0$, $\alpha - \beta = 0$, т.е. когда $\alpha - \beta = \gamma$.



а)



б)

Рисунок 14

Ответ. $\alpha - \beta = \gamma$.

Задача 6.8 В параллелограмме $ABCD$ $\bar{a} = \overline{AB}$, $\bar{b} = \overline{AD}$, $\bar{c} = \overline{AC}$, E - середина стороны $[CD]$. Разложите векторы $\overline{BE}$ по базису $\{\bar{a}, \bar{c}\}$. Представьте тремя способами вектор $\overline{BE}$ в виде

$$\overline{BE} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}. \quad (*)$$

Решение. Так как мы имеем $\overline{BE} = \overline{BC} + \overline{CE} = \bar{b} - \frac{1}{2}\bar{a}$, $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, то $\overline{BE} = (\bar{c} - \bar{a}) - \frac{1}{2}\bar{a} = -\frac{3}{2}\bar{a} + \bar{c}$. Таким образом, вектор $\overline{BE}$ уже представлен двумя способами в виде (*): $\overline{BE} = -\frac{1}{2}\bar{a} + 1 \cdot \bar{b} + 0 \cdot \bar{c}$, $\overline{BE} = -\frac{3}{2}\bar{a} + 0 \cdot \bar{b} + 1 \cdot \bar{c}$. Если t - произвольное действительное число, то $t(\bar{a} + \bar{b} - \bar{c}) = \vec{0}$. Следовательно,

$\overline{BE} = \overline{BE} + \vec{0} = \left(-\frac{1}{2}\right)\vec{a} + \vec{b} + t(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}) = \left(t - \frac{1}{2}\right)\vec{a} + (1+t)\vec{b} - t\vec{c}$. При $t=0$ получаем первое представление, при $t=-1$ - второе. Взяв $t=1$, получаем третье представление: $\overline{BE} = \frac{1}{2}\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c}$.

Задача 6.9 В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ точка O - центр основания $ABCD$. Разложите вектор $\overline{SO}$ несколькими различными способами по векторам $\overline{SA}$, $\overline{SB}$, $\overline{SC}$, $\overline{SD}$.

Решение. Из рисунка 15 видно, что $\overline{SO} = \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SC})$, $\overline{SO} = \frac{1}{2}(\overline{SB} + \overline{SD})$. Складывая эти два различных разложения, получаем третье: $\overline{SO} = \frac{1}{4}(\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} + \overline{SD})$.

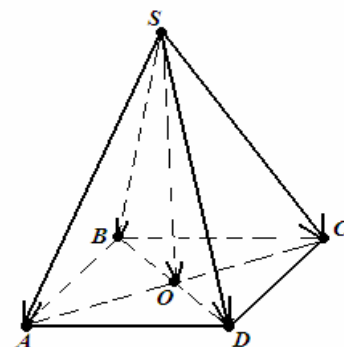


Рисунок 15

Ответ. $\overline{SO} = \frac{1}{2}(\overline{SA} + \overline{SC})$, $\overline{SO} = \frac{1}{2}(\overline{SB} + \overline{SD})$, $\overline{SO} = \frac{1}{4}(\overline{SA} + \overline{SB} + \overline{SC} + \overline{SD})$.

Задача 6.10 В тетраэдре $ABCD$ точки K и L - соответственно середины ребер $[AC]$ и $[BD]$, O - точка пересечения медиан грани ACD (рисунок 16). Разложите: а) вектор $\overline{BO}$ по базису $\{\overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}\}$; б) вектор $\overline{KL}$ по каждому из базисов $\{\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AD}\}$, $\{\overline{BO}, \overline{OD}, \overline{AC}\}$ и $\{\overline{DA}, \overline{BC}, \overline{BO}\}$.

Решение. а) Складывая равенства $\overline{BO} + \overline{OA} = \overline{BA}$, $\overline{BO} + \overline{OC} = \overline{BC}$, $\overline{BO} + \overline{OD} = \overline{BD}$ получаем $3\overline{BO} + (\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD}) = \overline{BA} + \overline{BC} + \overline{BD}$. На основании $\overline{OA} + \overline{OC} + \overline{OD} = \vec{0}$, получаем $\overline{BO} = \frac{1}{3}\overline{BA} + \frac{1}{3}\overline{BC} + \frac{1}{3}\overline{BD}$.

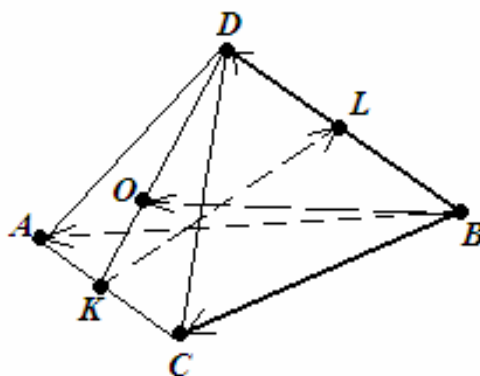


Рисунок 16

б) В данном случае $\overline{AL}$ - вектор медианы треугольника ADB . Поэтому $\overline{AL} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AB})$. Следовательно, $\overline{KL} = \overline{AL} - \overline{AK} = \frac{1}{2}(\overline{AD} + \overline{AB}) - \frac{1}{2}\overline{AC} = -\frac{1}{2}\overline{AC} +$

$+\frac{1}{2}\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AD}$. Приведем еще один способ разложения $\overline{KL}$ по базису $\{\overline{AC}, \overline{AB}, \overline{AD}\}$. На основании формулы для средней линии пространственного треугольника имеем $\overline{KL}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{AB})$, а так как $\overline{CB}=\overline{AB}-\overline{AC}$, то

$$\overline{KL}=-\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{AB}.$$

Вектор $\overline{KL}$ является вектором медианы треугольника KDB . Значит, $\overline{KL}=\frac{1}{2}(\overline{KD}+\overline{KB})$. Согласно свойству точки пересечения медиан, $\overline{KO}=\frac{1}{2}\overline{OD}$,

$$\overline{KD}=\frac{3}{2}\overline{OD}. \quad \text{Следовательно,} \quad \overline{KL}=\frac{1}{2}(\overline{KD}+\overline{KB})=\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\overline{OD}+(\overline{KO}+\overline{OB})\right)=$$

$$=\frac{1}{2}(2\overline{OD}+\overline{OB})=-\frac{1}{2}\overline{BO}+\overline{OD}+0\cdot\overline{AC}. \quad \text{Наконец, как отмечалось выше,}$$

$$\overline{KL}=\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{CB})=-\frac{1}{2}\overline{DA}-\frac{1}{2}\overline{BC}+0\cdot\overline{BO}.$$

Ответ. а) $\overline{BO}=\frac{1}{3}\overline{BA}+\frac{1}{3}\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{BD}$, б) $\overline{KL}=-\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{1}{2}\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{AB}$,

$$\overline{KL}=-\frac{1}{2}\overline{BO}+\overline{OD}, \quad \overline{KL}=-\frac{1}{2}\overline{DA}-\frac{1}{2}\overline{BC}.$$

Задача 6.11 В тетраэдре $ABCD$ точки K и L - соответственно середины ребер $[AC]$ и $[BD]$, O - точка пересечения медиан грани ACD (рисунок 16). Найдите: а) координаты точки O в системе координат $\{B, \overline{BA}, \overline{BC}, \overline{BD}\}$; б) координаты точки L в системе координат $\{A, \overline{BO}, \overline{OD}, \overline{AC}\}$.

Решение. а) Так как $\overline{BO}=\frac{1}{3}\overline{BA}+\frac{1}{3}\overline{BC}+\frac{1}{3}\overline{BD}$, то $O\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

б) Имеем: $\overline{AK}=\frac{1}{2}\overline{AC}$, $\overline{KD}=\frac{3}{2}\overline{OD}$, $\overline{DL}=-\frac{1}{2}\overline{BD}=-\frac{1}{2}(\overline{BO}+\overline{OD})$.

Следовательно, $\overline{AL}=\overline{AK}+\overline{KD}+\overline{DL}=\frac{1}{2}\overline{AC}+\frac{3}{2}\overline{OD}-\frac{1}{2}\overline{BO}-\frac{1}{2}\overline{OD}=$

$$=-\frac{1}{2}\overline{BO}+\overline{OD}+\frac{1}{2}\overline{AC}, \text{ т.е. } L\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right).$$

Ответ. а) $O\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$; б) $L\left(-\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2}\right)$.

Задача 6.12 Выяснить вопрос о линейной зависимости векторов $\vec{a}=\{1, -1, 2, 1\}$, $\vec{b}=\{1, -1, 1, 2\}$, $\vec{c}=\{1, -1, 4, -1\}$.

Решение. Составим векторное равенство $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$ и от него перейдем к покомпонентным равенствам. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 4\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет ненулевое решение $\alpha_1 = 3, \alpha_2 = -2, \alpha_3 = -1$.

Поэтому система векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно зависима, причем $3\bar{a} - 2\bar{b} - \bar{c} = \bar{0}$.

Ответ. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ линейно зависимы.

Задача 6.13 Является ли линейно зависимой система векторов

$$\bar{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}, \bar{b} = -\vec{i} - 3\vec{j}, \bar{c} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}?$$

Решение. $\bar{a} = \{2; 4; -1\}, \bar{b} = \{-1; -3; 0\}, \bar{c} = \{2; 2; 2\}$.

Составим линейную комбинацию этих векторов

$$\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c} = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Переходим от полученного матричного уравнения к системе линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ 4\alpha_1 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 - 2\alpha_3 = 0, \end{cases} \begin{cases} -4\alpha_3 - \alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ -8\alpha_3 - 3\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 = -2\alpha_3, \end{cases} \begin{cases} -\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0, \\ -3\alpha_2 - 6\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 = -2\alpha_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha_2 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = -2\alpha_3, \\ \alpha_1 = -2\alpha_3, \end{cases} \begin{cases} \alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = -2\alpha_3. \end{cases}$$

Пусть $\alpha_3 = p, p \neq 0, p \in R$, тогда $\alpha_1 = -2p, \alpha_2 = -2p, \alpha_3 = p$.

Таким образом, мы нашли совокупность чисел, отличных от нуля $(-2p; -2p; p)$, при которых линейная комбинация будет равна $\bar{0}$ (нулевому вектору), т.е. $\alpha_1 \bar{a} + \alpha_2 \bar{b} + \alpha_3 \bar{c} = \bar{0}$.

$$-2p\bar{a} - 2p\bar{b} + p\bar{c} = \bar{0} \quad / : p$$

$$-2\bar{a} - 2\bar{b} + \bar{c} = \bar{0}.$$

Мы доказали, что векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ - линейно зависимы.

Так как векторы линейно зависимы, то любой вектор можно выразить через остальные векторы.

$$\text{Например, } \underline{\bar{c} = 2\bar{a} + 2\bar{b}} \quad \text{или} \quad 2\bar{a} = \bar{c} - 2\bar{b} \Rightarrow \underline{\bar{a} = \frac{1}{2}\bar{c} - \bar{b}} \quad \text{или} \quad 2\bar{b} = \bar{c} - 2\bar{a} \Rightarrow$$

$$\underline{\bar{b} = \frac{1}{2}\bar{c} - \bar{a}}.$$

Ответ. Векторы $\bar{a}, \bar{b}$ и $\bar{c}$ - линейно зависимы.

Задача 6.14 Найти линейное выражение вектора $\vec{b} = \{1, -1, 4, -1\}$ через векторы $\vec{a} = \{1, -1, 2, 1\}$, $\vec{c} = \{1, -1, 1, 2\}$.

Решение. Составим векторное равенство $\vec{b} = \alpha_1 \vec{a} + \alpha_2 \vec{c}$ и от него перейдем к покомпонентным равенствам. Тогда получим систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1, \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -1, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 4, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 = -1. \end{cases}$$

Из этой системы находим $\alpha_1 = 3$, $\alpha_2 = -2$. Поэтому $\vec{b} = 3\vec{a} - 2\vec{c}$.

Ответ. $\vec{b} = 3\vec{a} - 2\vec{c}$.

Задача 6.15 Выяснить образуют ли базис векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$:
 $\vec{a}_1 = \{2, 1, -1\}$, $\vec{a}_2 = \{6, 2, 0\}$, $\vec{a}_3 = \{2, -4, 2\}$

Решение. Докажем, что вектора $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ линейно независимы.

Составим линейную комбинацию векторов и найдем числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$.

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0}.$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -6 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2\alpha_1 - 6\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0, \\ \alpha_1 + 2\alpha_2 - 4\alpha_3 = 0, \\ -\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0. \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -6 & 2 \\ 1 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 24 + 4 + 12 = 0.$$

$$\Delta_{\alpha_1} = 0, \Delta_{\alpha_2} = 0, \Delta_{\alpha_3} = 0.$$

Таким образом $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - бесчисленное множество решений, а следовательно, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ - линейно зависимы, т.е. векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ не могут образовывать базис.

Ответ. Векторы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ не образуют базис.

Задача 6.16 Доказать, что векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$ образуют базис и найти координаты вектора $\vec{x}$ в этом базисе, если $\vec{p} = \{1; 0; 1\}$, $\vec{q} = \{1; -2; 0\}$, $\vec{r} = \{0; 3; 1\}$, $\vec{x} = \{2; 7; 5\}$.

Решение. Докажем, что векторы $\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}$ образуют базис. Вычислим определитель, составленный из координат этих векторов.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{векторы } \bar{p}, \bar{q}, \bar{r} - \text{линейно независимы, значит,}$$

они образуют базис.

Найдем координаты вектора $\bar{x}$ в базисе $\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$. Разложим вектор $\bar{x}$ по векторам базиса $\{\bar{p}, \bar{q}, \bar{r}\}$, получим: $\bar{x} = \alpha\bar{p} + \beta\bar{q} + \gamma\bar{r}$ (*).

Найдем коэффициенты разложения, то есть α, β, γ , а они, в свою очередь, будут являться координатами вектора $\bar{x}$ в этом базисе (по определению).

Для этого разложим все векторы по векторам ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$: $\bar{x} = 2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k}$, $\bar{p} = \bar{i} + \bar{k}$, $\bar{q} = \bar{i} - 2\bar{j}$, $\bar{r} = 3\bar{j} + \bar{k}$.

Далее, подставим все разложения в равенство (*), имеем:

$$2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k} = x(\bar{i} + \bar{k}) + y(\bar{i} - 2\bar{j}) + z(3\bar{j} + \bar{k})$$

или

$$2\bar{i} + 7\bar{j} + 5\bar{k} = (x + y)\bar{i} + (-2y + 3z)\bar{j} + (x + z)\bar{k}.$$

Соберем коэффициенты при векторах $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ и получим систему трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -2\beta + 3\gamma = 7, \\ \alpha + \gamma = 5. \end{cases}$$

Решим систему методом Гаусса.

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 1 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-1)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & 7 \end{array} \right) \xrightarrow{\cdot(-2)} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right).$$

Таким образом, $r(A) = r(A^*) = 3$, следовательно, система совместна и $n = 3 = r$, значит, она имеет единственное решение.

Полученной расширенной матрице соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2, \\ -\beta + \gamma = 3, \\ \gamma = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 4, \\ \beta = -2, \\ \gamma = 1. \end{cases}$$

Подставим α, β, γ в равенство (*), получим:

$$\bar{x} = 4\bar{p} - 2\bar{q} + \bar{r} \Rightarrow \bar{x} = \{4, -2, 1\} \text{ в базисе } \bar{p}, \bar{q}, \bar{r}.$$

Ответ. $\bar{x} = 4\bar{p} - 2\bar{q} + \bar{r}$.

Скалярное произведение векторов и его свойства

Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. Обозначение: $\vec{a} \cdot \vec{b}$ или $(\vec{a}, \vec{b})$.

Итак, по определению

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi, \quad (6.3)$$

где $\varphi = \angle(\vec{a}, \vec{b})$.

Так как $|\vec{a}| \cos \varphi = n_{\vec{b}} \vec{a}$, а $|\vec{b}| \cos \varphi = n_{\vec{a}} \vec{b}$, то получаем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{b}| n_{\vec{b}} \vec{a} = |\vec{a}| n_{\vec{a}} \vec{b}, \quad (6.4)$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно произведению модуля одного из них, на проекцию другого на ось, сонаправленную с первым вектором.

Свойства скалярного произведения векторов

1⁰ $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ (коммутативность);

2⁰ $\lambda \vec{a} \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$ ($\lambda \in \mathbb{R}$);

3⁰ $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$ (дистрибутивность относительно сложения векторов).

4⁰ Скалярный квадрат вектора есть неотрицательное число, причем, скалярный квадрат вектора равен нулю тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой, то есть

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 \geq 0 \text{ и } \vec{a}^2 = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}.$$

Из свойства 4 следует, что

$$\vec{a}^2 = |\vec{a}| \cdot |\vec{a}| \cdot \cos 0 = |\vec{a}|^2 \Rightarrow \vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 \text{ или } |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}^2}.$$

5⁰ Скалярное произведение векторов $\vec{a} = \{a_1, a_2, a_3\}_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$ и $\vec{b} = \{b_1, b_2, b_3\}_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$, заданных в ортонормированном базисе, равно сумме произведений одноименных координат этих векторов, т.е.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3. \quad (6.5)$$

6⁰ Угол φ между ненулевыми векторами $\vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\}_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$ и $\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}_{\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}}$ вычисляется по формуле

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \text{ или } \cos \varphi = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2 + b_3^2}} \quad (6.6)$$

Задача 6.17 Найти скалярное произведение двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, для которых $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$ в каждом из следующих случаев:

$\varphi_1 = 60^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 120^\circ$, где φ - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. По формуле $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos(\angle(\vec{a}, \vec{b}))$ находим:

$$1) \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi_1 = 8 \cdot 5 \cos 60^\circ = 20;$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi_2 = 8 \cdot 5 \cos 90^\circ = 0; \\ 3) \quad \vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cos \varphi_3 = 8 \cdot 5 \cos 120^\circ = -20. \end{aligned}$$

Задача 6.18 Даны два вектора: $\vec{a} = \{1, -2, 2\}$, $\vec{b} = \{2, -2, -1\}$. Найти их скалярное произведение и угол между ними. Чему равно выражение $4\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 3\vec{b}^2$?

Решение. Подставляя в формулу (6.5) координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, находим

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 2 + (-2)(-2) + 2(-1) = 4.$$

Так как

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3 \text{ и } |\vec{b}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-1)^2} = 3,$$

то по формуле (6.6) получим

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{4}{3 \cdot 3} = \frac{4}{9}.$$

Поскольку $\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 3^2 = 9$ и $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 3^2 = 9$, то

$$4\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 3\vec{b}^2 = 4 \cdot 9 - 2 \cdot 4 + 3 \cdot 9 = 55.$$

Ответ. $\vec{a} \cdot \vec{b} = 4$; $4\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + 3\vec{b}^2 = 55$.

Задача 6.19 Проверить при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha \vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 3\vec{j} - \alpha \vec{k}$ перпендикулярны?

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю, т.е. $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Так как $\vec{a} = \{\alpha, -3, 2\}$, $\vec{b} = \{1, 3, -\alpha\}$, то используя формулу (6.5), получаем $\vec{a} \cdot \vec{b} = \alpha - 9 - 2\alpha = -9 - \alpha \Rightarrow -9 - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -9$.

Ответ. $\alpha = -9$.

Задача 6.20 Даны точки $A(-2, 4, -6)$, $B(0, 2, -4)$, $C(-6, 8, -10)$. Найти косинус угла между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Решение. Косинус угла φ между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ определяется формулой (6.6)

Чтобы вычислить длины векторов $|\overrightarrow{AB}|$ и $|\overrightarrow{AC}|$ и скалярное произведение $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$, находим координаты этих векторов:

$$\overrightarrow{AB} = \{2, -2, 2\}, \quad \overrightarrow{AC} = \{-4, 4, -4\}.$$

По формулам для длины вектора и скалярного произведения векторов имеем

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 2^2} = 2\sqrt{3}, \quad |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-4)^2 + 4^2 + (-4)^2} = 4\sqrt{3},$$

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 2 \cdot (-4) + (-2) \cdot 4 + 2 \cdot (-4) = -24.$$

Вычисляем $\cos \varphi$ по формуле (6.6):

$$\cos \varphi = \frac{-24}{2\sqrt{3} \cdot 4\sqrt{3}} = -1, \quad \varphi = \pi.$$

Ответ. $\varphi = \pi$.

Задача 6.21 Найти $(\bar{a}, \bar{b})$, если $\bar{a} = 2\bar{m} - 3\bar{n}$, $\bar{b} = \bar{m} + 2\bar{n}$, $|\bar{m}| = 2$, $|\bar{n}| = 3$, $(\bar{m}, \bar{n}) = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Используя свойства и определение скалярного произведения, получим

$$\begin{aligned} (\bar{a}, \bar{b}) &= (2\bar{m} - 3\bar{n}, \bar{m} + 2\bar{n}) = (2\bar{m}, \bar{m} + 2\bar{n}) + (-3\bar{n}, \bar{m} + 2\bar{n}) = 2(\bar{m}, \bar{m} + 2\bar{n}) - \\ &- 3(\bar{n}, \bar{m} + 2\bar{n}) = 2((\bar{m}, \bar{m}) + 2(\bar{m}, \bar{n})) - 3((\bar{n}, \bar{m}) + 2(\bar{n}, \bar{n})) = 2(\bar{m}, \bar{m}) + 4(\bar{m}, \bar{n}) - \\ &- 3(\bar{n}, \bar{m}) - 6(\bar{n}, \bar{n}) = 2|\bar{m}|^2 - 6|\bar{n}|^2 + |\bar{n}||\bar{m}|\cos(\bar{m}, \bar{n}) = 2 \cdot 2^2 - 6 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = \\ &= 8 - 54 + 3 = -43. \end{aligned}$$

Ответ. $(\bar{a}, \bar{b}) = -43$.

Задача 6.22 Дано: $|\bar{a}| = 3$, $|\bar{b}| = 2$, $(\bar{a}, \bar{b}) = 120^\circ$. Найдите длины векторов $\bar{p} = \bar{a} + 2\bar{b}$ и $\bar{q} = 2\bar{a} - \bar{b}$, их скалярное произведение и угол φ между ними.

Решение. Сначала найдем скалярное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}$, т.е. $(\bar{a}, \bar{b}) = 3 \cdot 2 \cdot \cos 120^\circ = -3$. Находим длины векторов $\bar{p}$ и $\bar{q}$, получаем $|\bar{p}|^2 = (\bar{p}, \bar{p}) = (\bar{a} + 2\bar{b}, \bar{a} + 2\bar{b}) = \bar{a}^2 + 4(\bar{a}, \bar{b}) + 4\bar{b}^2 = 9 + (-12) + 16 = 13$, т.е. $|\bar{p}| = \sqrt{13}$; $|\bar{q}|^2 = (\bar{q}, \bar{q}) = (2\bar{a} - \bar{b}, 2\bar{a} - \bar{b}) = 4\bar{a}^2 - 4(\bar{a}, \bar{b}) + \bar{b}^2 = 52$, т.е. $|\bar{q}| = 2\sqrt{13}$.

Используя свойства скалярного произведения находим

$$(\bar{p}, \bar{q}) = (\bar{a} + 2\bar{b}, 2\bar{a} - \bar{b}) = 2\bar{a}^2 + 3(\bar{a}, \bar{b}) - 2\bar{b}^2 = 18 + (-9) - 8 = 1.$$

По формуле (6.6) найдем угол между векторами $\bar{p}$ и $\bar{q}$

$$\cos \varphi = \frac{(\bar{p}, \bar{q})}{|\bar{p}| \cdot |\bar{q}|} = \frac{1}{\sqrt{13} \cdot 2\sqrt{13}} = \frac{1}{26}, \quad \varphi = \arccos \frac{1}{26}.$$

Ответ. $(\bar{p}, \bar{q}) = 1$, $\varphi = \arccos \frac{1}{26}$.

Задача 6.23 Даны векторы $\bar{a} = -\bar{m} + 6\bar{n}$, $\bar{b} = 3\bar{m} + 4\bar{n}$, где $|\bar{m}| = 2$; $|\bar{n}| = 5$; $(\bar{m}, \bar{n}) = 2\pi/3$.

Найти: а) $\bar{a} \cdot \bar{b}$; б) $pr_{\bar{b}}(4\bar{a} - 5\bar{b})$; в) $\cos(2\bar{b} - \bar{a}, 4\bar{b})$.

Решение. а) Вычисляем скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$

$$\begin{aligned} \bar{a} \cdot \bar{b} &= (-\bar{m} + 6\bar{n})(3\bar{m} + 4\bar{n}) = -3\bar{m}^2 + 14|\bar{m}||\bar{n}|\cos(\bar{m}, \bar{n}) + 24\bar{n}^2 = \\ &= -3 \cdot 2^2 + 14 \cdot 2 \cdot 5(-1/2) + 24 \cdot 5^2 = 518. \end{aligned}$$

б) Пусть $\bar{c} = 4\bar{a} - 5\bar{b} = -19\bar{m} + 4\bar{n}$. Тогда

$$np_{\bar{b}}\bar{c} = \frac{\bar{c} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|},$$

$$\bar{c} \cdot \bar{b} = (-19\bar{m} + 4\bar{n})(3\bar{m} + 4\bar{n}) = -57\bar{m}^2 - 64|\bar{m}||\bar{n}| \cos(\bar{m}, \bar{n}) + 16\bar{n}^2 = -148,$$

$$|\bar{b}| = \sqrt{\bar{b}^2} = \sqrt{(3\bar{m} + 4\bar{n})^2} = \sqrt{9\bar{m}^2 + 24|\bar{m}||\bar{n}| \cos(\bar{m}, \bar{n}) + 16\bar{n}^2} = \sqrt{316}.$$

Окончательно получаем

$$np_{\bar{b}}(4\bar{a} - 5\bar{b}) = -148 / \sqrt{316}.$$

в) Пусть $\bar{d} = 2\bar{b} - \bar{a} = 7\bar{m} + 2\bar{n}$, $\bar{e} = 4\bar{b} = 12\bar{m} + 16\bar{n}$. Тогда

$$\cos(\bar{d}, \bar{e}) = \frac{\bar{d} \cdot \bar{e}}{|\bar{d}| \cdot |\bar{e}|},$$

$$\bar{d} \cdot \bar{e} = (7\bar{m} + 2\bar{n})(12\bar{m} + 16\bar{n}) = 84\bar{m}^2 + 136|\bar{m}||\bar{n}| \cos(\bar{m}, \bar{n}) + 32\bar{n}^2 = 456,$$

$$|\bar{d}| = \sqrt{(7\bar{m} + 2\bar{n})^2} = \sqrt{49\bar{m}^2 + 28|\bar{m}||\bar{n}| \cos(\bar{m}, \bar{n}) + 4\bar{n}^2} = \sqrt{156},$$

$$|\bar{e}| = \sqrt{(12\bar{m} + 16\bar{n})^2} = \sqrt{144\bar{m}^2 + 384|\bar{m}||\bar{n}| \cos(\bar{m}, \bar{n}) + 256\bar{n}^2} = \sqrt{5056}.$$

В результате имеем:

$$\cos(2\bar{b} - \bar{a}, 4\bar{b}) = 456 / \sqrt{788736} \approx 0,5.$$

Ответ. а) $\bar{a} \cdot \bar{b} = 518$; б) $np_{\bar{b}}(4\bar{a} - 5\bar{b}) = -148 / \sqrt{316}$;

в) $\cos(2\bar{b} - \bar{a}, 4\bar{b}) \approx 0,5$.

Задача 6.24 Векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ удовлетворяют условию $\bar{a} + \bar{b} + 2\bar{c} = \bar{0}$. Вычислите величину $\mu = (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{b}, \bar{c}) + (\bar{c}, \bar{a})$, если $|\bar{a}| = 1$, $|\bar{b}| = 4$, $|\bar{c}| = 2$.

Решение. Так как $-\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}$, то $4 = \bar{c}^2 = (-\bar{c}, -\bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + \bar{c}^2 + 2(\bar{a}, \bar{b}) + 2(\bar{b}, \bar{c}) + 2(\bar{c}, \bar{a}) = 1 + 16 + 4 + 2\mu$. Таким образом, $\mu = -\frac{17}{2}$.

Ответ. $\mu = -\frac{17}{2}$.

Задача 6.25 Пусть $\bar{a}$ и $\bar{b}$ - единичные векторы. Вычислите $(3\bar{a} - 4\bar{b}, 2\bar{a} + 5\bar{b})$, если $|\bar{a} + \bar{b}| = \sqrt{3}$.

Решение. Так как $3 = |\bar{a} + \bar{b}|^2 = \bar{a}^2 + \bar{b}^2 + 2(\bar{a}, \bar{b}) = 1 + 1 + 2(\bar{a}, \bar{b})$, то отсюда следует, что $(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{1}{2}$.

Используя свойства скалярного умножения, получаем $(3\bar{a} - 4\bar{b}, 2\bar{a} + 5\bar{b}) = 6\bar{a}^2 - 20\bar{b}^2 + 7(\bar{a}, \bar{b}) = 6 - 20 + \frac{7}{2} = -\frac{21}{2}$.

Ответ. $(3\bar{a} - 4\bar{b}, 2\bar{a} + 5\bar{b}) = -\frac{21}{2}$.

Задача 6.26 В правильном тетраэдре $ABCD$ точки E и F - середины ребер соответственно $[AD]$ и $[CB]$. Докажите, что векторы $\overline{AD}$, $\overline{FE}$ и $\overline{CB}$ попарно ортогональны, причем $|\overline{FE}| = \frac{|\overline{AD}|}{\sqrt{2}}$.

Решение. Обозначим $\bar{a} = \overline{DA}$, $\bar{b} = \overline{DB}$, $\bar{c} = \overline{DC}$, $a = |\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}|$. Так как $\left(\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{b} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{a} \\ \bar{c} \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} \bar{b} \\ \bar{c} \end{smallmatrix}\right) = 60^\circ$, то $(\bar{a}, \bar{b}) = (\bar{a}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}) = \frac{1}{2}a^2$. Значит, $(\overline{AD}, \overline{CB}) = (-\bar{a}, \bar{b} - \bar{c}) = -(\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c}) = 0$, т.е. $\overline{AD} \perp \overline{CB}$. Далее, $\overline{FE} = \overline{FB} + \overline{BD} + \overline{DE} = \frac{1}{2}\overline{CB} - \overline{DB} + \frac{1}{2}\overline{DA} = \frac{1}{2}(\bar{b} - \bar{c}) - \bar{b} + \frac{1}{2}\bar{a} = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c})$. Поэтому

$$\begin{aligned} |\overline{FE}| &= \frac{1}{2}|\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}| = \frac{1}{2}\sqrt{(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}, \bar{a} - \bar{b} - \bar{c})} = \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - 2(\bar{a}, \bar{b}) - 2(\bar{a}, \bar{c}) + 2(\bar{b}, \bar{c})} = \frac{1}{2}\sqrt{3a^2 - 2(\bar{a}, \bar{b})} = \\ &= \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}|\overline{AD}|. \end{aligned}$$

Наконец, $(\overline{FE}, \overline{AD}) = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}, -\bar{a}) = \frac{1}{2}(-a^2 + (\bar{a}, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{c})) = 0$ и $(\overline{FE}, \overline{CB}) = \frac{1}{2}(\bar{a} - \bar{b} - \bar{c}, \bar{b} - \bar{c}) = \frac{1}{2}((\bar{a}, \bar{b}) - (\bar{a}, \bar{c}) - b^2 + c^2) = 0$, т.е. $\overline{FE} \perp \overline{AD}$ и $\overline{FE} \perp \overline{CB}$.

Задача 6.27 Даны прямоугольник $ABCD$ и точка M . Покажите, что:

а) $(\overline{MA}, \overline{MC}) = (\overline{MB}, \overline{MD})$; б) $|\overline{MA}|^2 + |\overline{MC}|^2 = |\overline{MB}|^2 + |\overline{MD}|^2$.

Решение. а) Пусть $\overline{AB} = \overline{DC} = \bar{a}$, $\overline{BC} = \overline{AD} = \bar{b}$, $\overline{AM} = x$. Тогда $(\bar{a}, \bar{b}) = 0$ и $(\overline{MA}, \overline{MC}) - (\overline{MB}, \overline{MD}) = (-x, -x + \bar{a} + \bar{b}) - (-x + \bar{a}, -x + \bar{b}) = x^2 - (x, \bar{a}) - (x, \bar{b}) - (x^2 - (x, \bar{x}) - (x, \bar{b}) + (\bar{a}, \bar{b})) = -(\bar{a}, \bar{b}) = 0$.

б) Учитывая а), имеем

$$\begin{aligned} |\overline{MA}|^2 + |\overline{MC}|^2 - |\overline{MB}|^2 - |\overline{MD}|^2 &= (|\overline{MA}|^2 - 2(\overline{MA}, \overline{MC}) + |\overline{MC}|^2) - \\ &- (|\overline{MB}|^2 - 2(\overline{MB}, \overline{MD}) + |\overline{MD}|^2) = \overline{AC}^2 - \overline{BD}^2 = (\bar{a} + \bar{b})^2 - (\bar{b} - \bar{a})^2 = 4(\bar{a}, \bar{b}) = 0. \end{aligned}$$

Задача 6.28 Вектор $\vec{c}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = \{12, -16, -15\}$ образует острый угол с осью OZ . Зная, что $|\vec{c}| = 150$, найти его координаты.

Решение. Пусть вектор $\vec{c}$ имеет координаты $\vec{c} = \{x, y, z\}$, $\vec{a} = \{12, -16, -15\}$.

Для решения задачи используем условие коллинеарности векторов $\vec{c}$, $\vec{a}$

$$\bar{c} \parallel \bar{a} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{-16} = \frac{z}{-15} \Rightarrow \frac{x}{12} = \frac{y}{-16} = \frac{z}{-15} = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 12t, \\ y = -16t, \\ z = -15t. \end{cases}$$

$$|\bar{c}| = 50 \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 150,$$

Подставим выражения x, y, z в последнее равенство

$$\sqrt{(12t)^2 + (-16t)^2 + (-15t)^2} = 150,$$

$$\sqrt{144t^2 + 256t^2 + 225t^2} = 150 \Rightarrow \sqrt{625t^2} = 150,$$

$$25|t| = 150 \Rightarrow |t| = 6.$$

Параметр t подставляем в формулу, где выражены x, y, z

$$\begin{cases} t_1 = 6, \\ t_2 = -6, \end{cases} \Rightarrow \bar{c}_1(72, -96, -80), \bar{c}_2(-72, 96, 80),$$

На оси OZ задан вектор $\bar{k}(0; 0; 1)$. Следовательно, мы можем найти углы между векторами $\bar{c}_1, \bar{k}$ и $\bar{c}_2, \bar{k}$, через скалярное произведение этих векторов

$$\cos\left(\widehat{\bar{c}_1, \bar{k}}\right) = -\frac{80}{150} = -\frac{8}{15} < 0 \Rightarrow \left(\widehat{\bar{c}_1, \bar{k}}\right) > 90^\circ,$$

$$\cos\left(\widehat{\bar{c}_2, \bar{k}}\right) = \frac{80}{150} = \frac{8}{15} > 0 \Rightarrow \left(\widehat{\bar{c}_2, \bar{k}}\right) < 90^\circ \Rightarrow \bar{c}(-72, 96, 80).$$

Ответ. Искомый вектор имеет координаты $\bar{c}_2(-72, 96, 80)$.

Задача 6.29 Сила $\bar{F} = \{2, -1, -4\}$ приложена к точке $M(1, -2, 3)$. Вычислить работу силы $\bar{F}$, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения M в положение $N(5, -6, 1)$.

Решение. В соответствии с определением работы и скалярного произведения получаем

$$A = \bar{F}\bar{s},$$

где A - работа; $\bar{F}$ - вектор действующей силы; $\bar{s}$ - вектор пути.

Найдем вектор $\bar{s} = \overline{MN}$.

$$\bar{s} = \{5 - 1, -6 - (-2), 1 - 3\} = \{4, -4, -2\}.$$

Тогда

$$A = \bar{F}\bar{s} = 2 \cdot 4 + (-1)(-4) + (-2)(-4) = 20 \text{ (ед. работы).}$$

Ответ. $A=20$ (ед. работы.)

Задача 6.30 Даны три вектора $\bar{a} = \{-2, 1, 4\}$, $\bar{b} = \{2, 1, 3\}$ и $\bar{c} = \{3, 2, -4\}$. Найти $\bar{d}$, удовлетворяющий условиям $\bar{d} \cdot \bar{a} = -6$; $\bar{d} \cdot \bar{b} = -10$; $\bar{d} \cdot \bar{c} = 20$.

Решение. Пусть вектор $\bar{d}$ имеет координаты $\bar{d} = \{x; y; z\}$.

Определим скалярные произведения

$$\vec{d} \cdot \vec{a} = -2x + y + 4z, \quad \vec{d} \cdot \vec{b} = 2x + y + 3z, \quad \vec{d} \cdot \vec{c} = 3x + 2y - 4z.$$

Так как $\vec{d} \cdot \vec{a} = -6$; $\vec{d} \cdot \vec{b} = -10$; $\vec{d} \cdot \vec{c} = 20$, то можно составить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} -2x + y + 4z = -6, \\ 2x + y + 3z = -10, \\ 3x + 2y - 4z = 20. \end{cases}$$

Решаем данную систему по правилу Крамера

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -4 \end{vmatrix} = (8 + 9 + 16) - (12 - 12 - 8) = 16 + 16 + 9 = 41.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} -6 & 1 & 4 \\ -10 & 1 & 3 \\ 20 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 4 - 84 = -80,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} -2 & -6 & 4 \\ 2 & -10 & 23 \\ 3 & 20 & -4 \end{vmatrix} = 26 + 192 = 218,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -6 \\ 2 & 1 & -10 \\ 3 & 2 & 20 \end{vmatrix} = -94 - 62 = -156.$$

$$x = -\frac{80}{41}; \quad y = \frac{218}{41}; \quad z = -\frac{156}{41}.$$

Ответ. Вектор $\vec{d}$ имеет координаты $\vec{d} = \left\{ -\frac{80}{41}, \frac{218}{41}, -\frac{156}{41} \right\}$.

Задача 6.31 По координатам точек $A(4, 6, 7)$, $B(-5, 2, 0)$, $C(4, -2, -3)$ найти:

а) модуль вектора $\vec{a} = 4\vec{CB} - \vec{AC}$; б) скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b} = \vec{AB}$;

в) проекцию вектора $\vec{c} = \vec{CB}$ на вектор $\vec{d} = \vec{AC}$.

Решение. а) Последовательно находим $\vec{CB} = \{-9, 4, 3\}$, $\vec{AC} = \{0, -8, -10\}$, тогда $\vec{a} = 4\vec{CB} - \vec{AC} = \{-36, 24, 22\}$.

Найдем длину вектора $\vec{a} = 4\vec{CB} - \vec{AC}$

$$|\vec{a}| = |4\vec{CB} - \vec{AC}| = \sqrt{(-36)^2 + 24^2 + 22^2} = \sqrt{2356};$$

б) Зная координаты векторов $\vec{a} = \{-36, 24, 22\}$, $\vec{b} = \vec{AB} = \{-9, -4, -7\}$, вычислим их скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (-36) \cdot (-9) + 24 \cdot (-4) + 22 \cdot (-7) = 74;$$

в) Так как

$$pr_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|},$$

Ранее мы нашли координаты векторов
 $\vec{c} = \overline{CB} = \{-9, 4, 3\}$, $\vec{d} = \overline{AC} = \{0, -8, -10\}$.

Находим скалярное произведение этих векторов и длину вектора $\vec{d}$

$$\vec{c} \cdot \vec{d} = 0 - 32 - 30 = -62; \quad |\vec{d}| = \sqrt{64 + 100} = \sqrt{164},$$

Найденные значения подставляем в формулу

$$np_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{\vec{c} \cdot \vec{d}}{|\vec{d}|} = \frac{-62}{\sqrt{164}}.$$

Ответ. а) $|\vec{a}| = \sqrt{2356}$; б) $\vec{a} \cdot \vec{b} = 74$; в) $np_{\vec{d}} \vec{c} = \frac{-62}{\sqrt{164}}.$

Векторное произведение двух неколлинеарных векторов и его свойства

Три некопланарных вектора $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ взятых в указанном порядке, образуют **правую тройку**, если из конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки. В противном случае - **тройка левая** (рисунок 17).

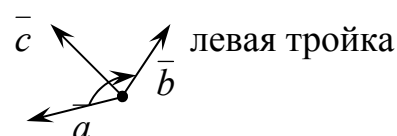
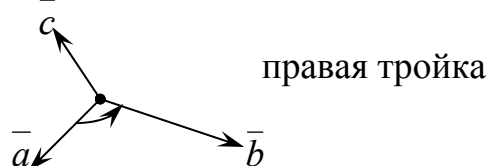


Рисунок 17

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, численно равный площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$; направленный перпендикулярно плоскости перемножаемых векторов и образующих с ними правую тройку (рисунок 18).

Векторное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$

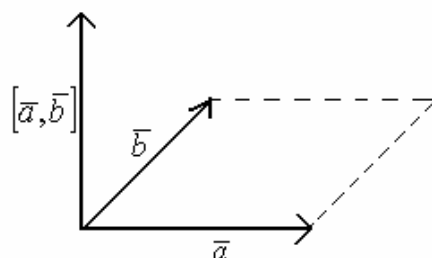


Рисунок 18

Свойства векторного произведения векторов

1⁰ Модуль векторного произведения двух векторов равен произведению длин этих векторов на синус угла между ними

$$|[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin(\angle(\vec{a}, \vec{b})).$$

2⁰ Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и

достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нуль-вектору, то есть

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \bar{0}.$$

3⁰ Векторное произведение двух неколлинеарных векторов антикоммутативно, то есть

$$[\bar{a}, \bar{b}] = -[\bar{b}, \bar{a}].$$

4⁰ Числовой множитель можно выносить за знак векторного произведения, то есть

$$[\lambda \bar{a}, \bar{b}] = \lambda [\bar{a}, \bar{b}] \quad (\lambda \in R) \text{ или } [\bar{a}, \alpha \bar{b}] = \alpha [\bar{a}, \bar{b}] \quad (\alpha \in R).$$

5⁰ Векторное произведение векторов дистрибутивно относительно операции сложения векторов, то есть

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}] = [\bar{a}, \bar{c}] + [\bar{b}, \bar{c}].$$

6⁰ Выражение векторного произведения через координаты.

Пусть даны два вектора $\bar{a} = a_1 \bar{i} + a_2 \bar{j} + a_3 \bar{k}$ и $\bar{b} = b_1 \bar{i} + b_2 \bar{j} + b_3 \bar{k}$.

Тогда векторное произведение данных векторов имеет вид

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \quad \text{или} \quad [\bar{a}, \bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right\}. \quad (6.7)$$

Задача 6.32 Найти длину вектора $[\bar{a}, \bar{b}]$, если $|\bar{a}| = 4$, $|\bar{b}| = 3$ в каждом из следующих случаев: $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 90^\circ$, $\varphi_3 = 120^\circ$, где φ - угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

Решение. По формуле $|\bar{a}, \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi$ находим модули векторных произведений:

- 1) $|\bar{a} \cdot \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi_1 = 4 \cdot 3 \sin 0^\circ = 0;$
- 2) $|\bar{a} \cdot \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi_2 = 4 \cdot 3 \sin 90^\circ = 12;$
- 3) $|\bar{a} \cdot \bar{b}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin \varphi_3 = 4 \cdot 3 \sin 120^\circ = 6\sqrt{3}.$

Задача 6.33 Упростить выражение $[(3\bar{a} - 2\bar{b}), (2\bar{a} + 5\bar{b})]$.

Решение. Пользуясь свойствами векторного произведения, получаем

$$\begin{aligned} [(3\bar{a} - 2\bar{b}), (2\bar{a} + 5\bar{b})] &= [3\bar{a}, 2\bar{a}] + [3\bar{a}, 5\bar{b}] + [(-2\bar{b}), 2\bar{a}] + [(-2\bar{b}), 5\bar{b}] = \\ &= 6[\bar{a}, \bar{a}] + 15[\bar{a}, \bar{b}] - 4[\bar{b}, \bar{a}] - 10[\bar{b}, \bar{b}] = 15[\bar{a}, \bar{b}] + 4[\bar{a}, \bar{b}] = 19[\bar{a}, \bar{b}]. \end{aligned}$$

Ответ. $[(3\bar{a} - 2\bar{b}), (2\bar{a} + 5\bar{b})] = 19[\bar{a}, \bar{b}]$

Задача 6.34 Даны векторы $\bar{a} = \{1, -2, 3\}$, $\bar{b} = \{2, 2, -1\}$. Найти их векторное произведение, синус угла между ними и площадь параллелограмма, построенного на этих векторах.

Решение.

Находим векторное произведение векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ по формуле (6.7)

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \right\} \text{ или } [\bar{a}, \bar{b}] = \{-4, 7, 6\}.$$

Далее, находим площадь параллелограмма по формуле $S = |[\bar{a}, \bar{b}]|$

$$S = |[\bar{a}, \bar{b}]| = \sqrt{(-4)^2 + 7^2 + 6^2} = \sqrt{101} \approx 10,05 \text{ (кв.ед.)}$$

С помощью формулы $\sin(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{|[\bar{a}, \bar{b}]|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|}$ определяем синус угла между

данными векторами

$$\sin(\bar{a}, \bar{b}) = \frac{|[\bar{a}, \bar{b}]|}{|\bar{a}| \cdot |\bar{b}|} = \frac{\sqrt{(-4)^2 + 7^2 + 6^2}}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 3^2} \cdot \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{101}}{\sqrt{14} \cdot 3} = 0,9.$$

Ответ. $[\bar{a}, \bar{b}] = (-4, 7, 6)$, $S = |[\bar{a}, \bar{b}]| \approx 10,05$ (кв.ед.), $\sin(\bar{a}, \bar{b}) = 0,9$.

Задача 6.35 Вычислить площадь треугольника с вершинами $A(-1, 0, 2)$, $B(1, -2, 5)$, $C(3, 0, -4)$.

Решение. Находим сначала координаты векторов $\bar{a} = AB$ и $\bar{b} = AC$:

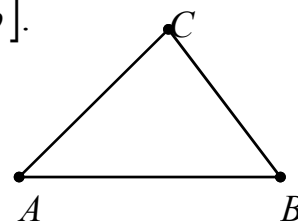
$$\bar{a} = \{2, -2, 3\}, \bar{b} = \{4, 0, -6\}.$$

Вычисляем координаты векторного произведения $[\bar{a}, \bar{b}]$.

Получаем

$$[\bar{a}, \bar{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -6 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -6 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

или $[\bar{a}, \bar{b}] = \{12, 24, 8\}$.



Площадь треугольника находится по формуле $S = \frac{1}{2} |[\bar{a}, \bar{b}]|$

$$S = \frac{1}{2} |[\bar{a}, \bar{b}]| = \frac{1}{2} \sqrt{12^2 + 24^2 + 8^2} = \frac{1}{2} \sqrt{784} = 14 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ. $S = 14$ (кв.ед.).

Задача 6.36 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $\bar{a} = 2\bar{p} + 3\bar{q}$, $\bar{b} = \bar{p} - 2\bar{q}$; $|\bar{p}| = 2$, $|\bar{q}| = 1$, $(\bar{p}, \bar{q}) = \frac{2\pi}{3}$.

Решение. Воспользуемся геометрическим смыслом модуля векторного произведения двух векторов, а именно: площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$, равна модулю их векторного произведения: $S_{\text{пар}} = |[\bar{a}, \bar{b}]|$.

Применив свойства векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, вычислим его

$$[\bar{a}, \bar{b}] = [2\bar{p} + 3\bar{q}, \bar{p} - 2\bar{q}] = 2[\bar{p}, \bar{p}] - 4[\bar{p}, \bar{q}] + 3[\bar{q}, \bar{p}] - 6[\bar{q}, \bar{q}] = 2 \cdot \vec{0} - 4[\bar{p}, \bar{q}] - 3[\bar{p}, \bar{q}] - 6 \cdot \vec{0} = -7[\bar{p}, \bar{q}]$$

Вычислим модуль векторного произведения векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, используя первое свойство векторного произведения, а именно, $|[\bar{a}, \bar{b}]| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin(\bar{a}, \bar{b})$.

Тогда,

$$S_{нар} = |[\bar{a}, \bar{b}]| = |-7[\bar{p}, \bar{q}]| = 7|[\bar{p}, \bar{q}]| = 7|\bar{p}| \cdot |\hat{\bar{q}}| \cdot \sin(\bar{p}, \bar{q}) = 7 \cdot 2 \cdot 1 \cdot \sin \frac{2\pi}{3} = 14 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}.$$

Ответ. $S_{нар} = 7\sqrt{3}$ (кв.ед.).

Задача 6.37 Даны векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Выразите векторы 1) $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}]$ и

2) $\left[\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}, \bar{b} - \frac{\bar{a}}{2}\right]$ через вектор $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$.

Решение. 1) Используем свойства векторного произведения и делаем замену $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$. В результате получаем

$$[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}] = [\bar{a}, \bar{a} - \bar{b}] + [\bar{b}, \bar{a} - \bar{b}] = [\bar{a}, \bar{a}] - [\bar{a}, \bar{b}] + [\bar{b}, \bar{a}] - [\bar{b}, \bar{b}] = 0 - [\bar{a}, \bar{b}] - [\bar{a}, \bar{b}] - 0 = -2\bar{c}.$$

2) Аналогично,
$$\left[\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}, \bar{b} - \frac{\bar{a}}{2}\right] = \frac{1}{2}[\bar{a}, \bar{b} - \frac{\bar{a}}{2}] + \frac{1}{2}\left[\bar{b}, \bar{b} - \frac{\bar{a}}{2}\right] = \frac{1}{2}[\bar{a}, \bar{b}] - \frac{1}{4}[\bar{a}, \bar{a}] + \frac{1}{2}[\bar{b}, \bar{b}] - \frac{1}{4}[\bar{b}, \bar{a}] = \frac{1}{2}\bar{c} - \frac{1}{2}(-\bar{c}) = \frac{3}{4}\bar{c}.$$

Ответ. 1) $[\bar{a} + \bar{b}, \bar{a} - \bar{b}] = -2\bar{c}$; 2) $\left[\frac{\bar{a} + \bar{b}}{2}, \bar{b} - \frac{\bar{a}}{2}\right] = \frac{3}{4}\bar{c}$.

Задача 6.38 Три ненулевых вектора $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ связаны соотношениями $\bar{a} = [\bar{b}, \bar{c}]$, $\bar{b} = [\bar{c}, \bar{a}]$, $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$. Найдите длины этих векторов и углы между ними.

Решение. Так как $\bar{a} = [\bar{b}, \bar{c}]$, то $\bar{a} \perp \bar{b}$ и $\bar{a} \perp \bar{c}$. Кроме того, $\bar{b} = [\bar{c}, \bar{a}]$, поэтому $\bar{b} \perp \bar{c}$. Значит, все три вектора попарно ортогональны. Далее,

$$|\bar{a}| = |\bar{b}||\bar{c}| \sin(\hat{\bar{a}, \bar{b}}) = |\bar{b}||\bar{c}|, \quad |\bar{b}| = |\bar{c}||\bar{a}|, \quad |\bar{c}| = |\bar{a}||\bar{b}|. \quad \text{Перемножая эти соотношения,}$$

получаем $|\bar{a}||\bar{b}||\bar{c}| = 1$. Учитывая, что $|\bar{b}||\bar{c}| = |\bar{a}|$, имеем $|\bar{a}|^2 = 1$, т.е. $|\bar{a}| = 1$.

Аналогично, $|\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$. Так как $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}]$, то $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ - правый ортонормированный базис.

Ответ. $|\bar{a}| = |\bar{b}| = |\bar{c}| = 1$, векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ ортогональны между собой.

Задача 6.39 Докажите, что площадь трапеции $ABCD$ ($(AD) \parallel (BC)$) равна $\frac{1+k}{2} |[\overline{AB}, \overline{AD}]|$, где $k = |\overline{BC}| : |\overline{AD}|$.

Решение. Пусть $\bar{a} = \overline{AD}$, $\bar{b} = \overline{AB}$.

Тогда $\overline{BC} = k\overline{AD} = k\bar{a}$, $\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{BC} = \bar{b} + k\bar{a}$, $\overline{BD} = \overline{AD} - \overline{AB} = \bar{a} - \bar{b}$ и

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} |[\overline{AC}, \overline{BD}]| = \frac{1}{2} |[\bar{b} + k\bar{a}, \bar{a} - \bar{b}]| = \frac{1}{2} |[\bar{b}, \bar{a}] - k[\bar{a}, \bar{b}]| = \frac{k+1}{2} |[\bar{a}, \bar{b}]|.$$

Смешанное произведение трех векторов и его свойства

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется число, обозначаемое $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ и равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$, то есть

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \bar{a} \cdot [\bar{b}, \bar{c}]. \quad (6.8)$$

Пусть относительно ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$ векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ имеют координаты $\bar{a} = \{a_1, a_2, a_3\}$, $\bar{b} = \{b_1, b_2, b_3\}$, $\bar{c} = \{c_1, c_2, c_3\}$.

Смешанное произведение трех векторов, заданных своими координатами в ортонормированном базисе, равно определителю третьего порядка, составленному из их координат, то есть

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (6.9)$$

Смешанное произведение векторов равно нулю $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$ тогда и только тогда, когда либо векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, либо хотя бы один вектор нулевой.

Следовательно, условие компланарности трех векторов в координатной форме имеет вид:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ компланарны} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Свойства смешанного произведения векторов

1⁰ Смешанное произведение векторов не изменяется при круговой перестановке векторов-сомножителей, то есть

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}).$$

2⁰ Смешанное произведение меняет знак на противоположный, если поменять местами любые два сомножителя, то есть

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}).$$

3⁰ Числовой множитель можно выносить за знак смешанного произведения, то есть

$$(\lambda \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \lambda (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) \quad (\lambda \in R).$$

4⁰ Смешанное произведение векторов дистрибутивно относительно сложения векторов, то есть

$$(\bar{a} + \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}) = (\bar{a}, \bar{c}, \bar{d}) + (\bar{b}, \bar{c}, \bar{d}).$$

5⁰ Геометрический смысл модуля смешанного произведения трех

некомпланарных векторов: модуль смешанного произведения трех некомпланарных векторов численно равен объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, отложенных от одной точки, как на ребрах, то есть

$$|(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})| = V_{\text{пар-да}}. \quad (6.10)$$

Таким образом,

$$V_{\text{призмы}} = \frac{1}{2} V_{\text{пар-да}} = \frac{1}{2} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|,$$

$$V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}} = \frac{1}{6} |(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})|.$$

Задача 6.40 Даны векторы $\bar{a} = 4\bar{i} + 4\bar{k}$, $\bar{b} = -\bar{i} + 3\bar{j} + 2\bar{k}$, $\bar{c} = 3\bar{i} + 5\bar{j}$.

Вычислите смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, 5\bar{c}$.

Решение. Сначала найдем вектор $5\bar{c} = 15\bar{i} + 25\bar{j}$.

Затем по формуле (6.9) находим смешанное произведение векторов $\bar{a}, \bar{b}, 5\bar{c}$

$$(\bar{a}, \bar{b}, 5\bar{c}) = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \\ 15 & 25 & 0 \end{vmatrix} = -100 - 180 - 200 = -480.$$

Ответ. $(\bar{a}, \bar{b}, 5\bar{c}) = -480$.

Задача 6.41 Компланарны ли векторы

$$\bar{a} = \{7, 4, 6\}, \bar{b} = \{2, 1, 1\}, \bar{c} = \{19, 11, 17\}?$$

Решение. Для того чтобы три вектора были компланарны (лежали в одной плоскости или в параллельных плоскостях), необходимо и достаточно, чтобы, их смешанное произведение было равно нулю.

Вычисляем смешанное произведение этих векторов:

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} 7 & 4 & 6 \\ 2 & 1 & 1 \\ 19 & 11 & 17 \end{vmatrix} = 0.$$

Если определитель в правой части этого равенства равен нулю, то векторы компланарны, если определитель не равен нулю, то векторы некомпланарны.

Так как определитель равен нулю, то заключаем, что векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

Ответ. Векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны.

Задача 6.42 Вычислить объем параллелепипеда с вершинами в точках $A_1(1, 3, 0)$, $A_2(4, -1, 2)$, $A_3(3, 0, 1)$, $A_4(-4, 3, 5)$.

Решение. В соответствии с геометрическим смыслом модуля смешанного произведения векторов имеем:

$$V_{\text{пар-да}} = |(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}, \overline{A_1 A_4})|.$$

Найдем координаты векторов $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_3}$, $\overline{A_1 A_4}$.

$$\overline{A_1 A_2} = \{4-1, -1-3, 2-0\} = \{3, -4, 2\},$$

$$\overline{A_1 A_3} = \{3-1, 0-3, 1-0\} = \{2, -3, 1\},$$

$$\overline{A_1 A_4} = \{-4-1, 3-3, 5-0\} = \{-5, 0, 5\}.$$

Вычисляем смешанное произведение векторов $\overline{A_1 A_2}$, $\overline{A_1 A_3}$, $\overline{A_1 A_4}$ по формуле (6.9).

$$(\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}, \overline{A_1 A_4}) = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 2 & -3 & 1 \\ -5 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -45 + 20 - 30 + 40 = -15.$$

Следовательно,

$$V_{\text{пар-да}} = |-15| = 15 \text{ (куб. ед.)}.$$

Ответ. $V_{\text{пар-да}} = 15 \text{ (куб. ед.)}.$

Задача 6.43 Даны вершины тетраэдра $A(0; 0; 2)$, $B(3; 0; 5)$, $C(1; 1; 0)$, $D(4; 1; 2)$. Найдите его объем.

Решение. Так как $V_{\text{тетраэдра}} = \frac{1}{6} V_{\text{пар-да}}$, то $V_{ABCD} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|$.

Находим координаты векторов

$$\overline{AB} = \{3, 0, 3\}, \overline{AC} = \{1, 1, -2\}, \overline{AD} = \{4, 1, 0\}.$$

Вычисляем смешанное произведение этих векторов

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -3. \text{ Следовательно, } V_{ABCD} = \frac{|-3|}{6} = \frac{1}{2}.$$

Ответ. $V_{ABCD} = \frac{1}{2}.$

Задача 6.44 Вершины пирамиды находятся в точках $A(2, 3, 4)$, $B(4, 7, 3)$, $C(1, 2, 2)$, $D(-2, 0, -1)$. Вычислить: а) площадь грани ABC ; б) площадь сечения, проходящего через середину ребер AB , AC , AD ; в) объем пирамиды $ABCD$ (рисунок 19).

Решение.

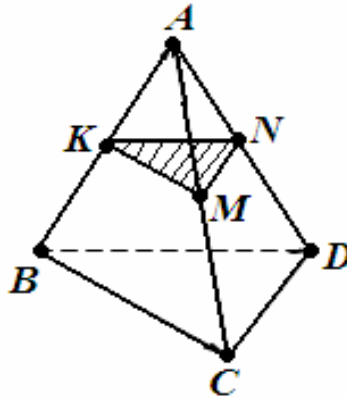


Рисунок 19

а) Известно, что $S_{ABC} = \frac{1}{2} |[\overline{AB}, \overline{AC}]|$. Находим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$:

$$\overline{AB} = \{2, 4, -1\}, \quad \overline{AC} = \{-1, -1, -2\}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$:

$$[\overline{AB}, \overline{AC}] = \left\{ \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \right\} \text{ или } [\overline{AB}, \overline{AC}] = \{-9, 5, 2\}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{9^2 + 5^2 + 2^2} = \frac{1}{2} \sqrt{110} \text{ (кв.ед.)}.$$

б) Середины ребер AB , AC , AD находятся в точках $K(3; 5; 3,5)$, $M(1,5; 2,5; 3)$, $N(0; 1,5; 1,5)$. В сечении имеем треугольник KMN .

Следовательно,

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} |[\overline{KM}, \overline{KN}]|.$$

Находим координаты векторов $\overline{KM}$, $\overline{KN}$:

$$\overline{KM} = \{-1,5; -2,5; -0,5\}, \quad \overline{KN} = \{-3; -3,5; -2\}.$$

Вычислим векторное произведение векторов $\overline{KM}$, $\overline{KN}$:

$$[\overline{KM}, \overline{KN}] = \left\{ \begin{vmatrix} -2,5 & -0,5 \\ -3,5 & -2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -1,5 & -0,5 \\ -3 & -2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1,5 & -2,5 \\ -3 & -3,5 \end{vmatrix} \right\} \text{ или } [\overline{KM}, \overline{KN}] = \{3,25; -1,5; -2,25\}.$$

Окончательно имеем:

$$S_{сеч} = \frac{1}{2} \sqrt{3,25^2 + 1,5^2 + 2,25^2} = \frac{1}{2} \sqrt{17,875} \text{ (кв.ед.)}.$$

в) Вычислим объем пирамиды по формуле

$$V_{\text{нир-ды}} = \frac{1}{6} V_{\text{нар-да}} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})|.$$

Для этого найдем координаты вектора $\overline{AD}$:

$$\overline{AD} = \{-4, -3, -5\}$$

Окончательно получаем

$$V_{\text{нир-ды}} = \frac{1}{6} |(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD})| = \frac{1}{6} \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \\ -4 & -3 & -5 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 11 = \frac{11}{6} \text{ (куб. ед.)}.$$

$$\text{Ответ. } S_{ABC} = \frac{1}{2} \sqrt{110} \text{ (кв.ед.)}, S_{\text{сеч}} = \frac{1}{2} \sqrt{17,875} \text{ (кв.ед.)}, V = \frac{11}{6} \text{ (куб. ед.)}.$$

Задача 6.45 Вычислить объем тетраэдра с вершинами $A_1(2,3,1)$, $A_2(4,1,-2)$, $A_3(6,3,7)$, $A_4(-5,-4,8)$ и его высоту, опущенную из вершины A_4 на грань $A_1A_2A_3$. (рисунок 20).

Решение.

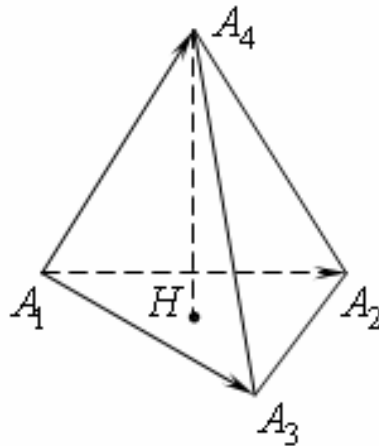


Рисунок 20

Из вершины A_1 проведем векторы

$$\overline{A_1A_2} = \{2, -2, -3\}, \overline{A_1A_3} = \{4, 0, 6\}, \overline{A_1A_4} = \{-7, -7, 7\}.$$

Вычислим смешанное произведение этих векторов по формуле (6.9)

$$(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4}) = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{vmatrix} = 2 \cdot 42 + 2 \cdot 70 + (-3) \cdot (-28) = 308.$$

Далее находим объем тетраэдра по формуле:

$$V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} |(\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}, \overline{A_1A_4})|,$$

$$\text{то есть } V_{\text{тетр}} = \frac{1}{6} \cdot 308 (\text{ед.длины})^3.$$

$$\text{С другой стороны } V_{\text{тетр}} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1A_2A_3} \cdot h, \text{ где } S_{\Delta A_1A_2A_3} = \frac{1}{2} |[\overline{A_1A_2}, \overline{A_1A_3}]|.$$

Отсюда получаем формулу нахождения высоты:

$$h = \frac{3V_{\text{тепл}}}{S_{\Delta A_1 A_2 A_3}} = \frac{\left| \overline{(A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4)} \right|}{\left| \overline{(A_1 A_2, A_1 A_3)} \right|}.$$

Вычислим координаты векторного произведения векторов $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}$

$$\left[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -12\vec{i} - 24\vec{j} + 8\vec{k} = \{-12, -24, 8\}$$

Находим модуль векторного произведения векторов $\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3}$

$$\left| \left[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3} \right] \right| = \sqrt{(-12)^2 + (-24)^2 + 8^2} = 28.$$

Затем вычисляем высоту h по формуле:

$$h = \frac{\left| \overline{(A_1 A_2, A_1 A_3, A_1 A_4)} \right|}{\left| \left[\overline{A_1 A_2}, \overline{A_1 A_3} \right] \right|} = \frac{308}{28} = 11 \text{ (ед.длины)}.$$

$$\text{Ответ. } V_m = \frac{154}{3} \text{ (ед.длины)}^3, \quad h = 11 \text{ (ед.длины)}.$$

Задача 6.46 Сила $\overline{F} = \{2, 3, -5\}$ приложена к точке $A(1, -2, 2)$.

Вычислить:

а) работу силы $\overline{F}$ в случае, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается из положения A в положение $B(1, 4, 0)$;

б) модуль момента $\overline{F}$ относительно точки B .

Решение. а) Так как $A = \overline{F} \cdot \overline{s}$, $\overline{s} = \overline{AB} = \{0, 6, -2\}$, то

$$\overline{F} \cdot \overline{AB} = 2 \cdot 0 + 3 \cdot 6 + (-5)(-2) = 28.$$

То есть $A = 28$;

б) Момент силы $\overline{M} = [\overline{BA}, \overline{F}]$, $\overline{BA} = \{0, -6, 2\}$

$$\left[\overline{BA}, \overline{F} \right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & -6 & 2 \\ 2 & 3 & -5 \end{vmatrix} = 24\vec{i} + 4\vec{j} + 12\vec{k}.$$

$$\text{Следовательно, } \left| \overline{M} \right| = \sqrt{24^2 + 4^2 + 12^2} = 4\sqrt{46}.$$

$$\text{Ответ. } A = 28, \quad \left| \overline{M} \right| = 4\sqrt{46}.$$

Задача 6.47 Доказать, что четыре точки $A(1, 2, -1)$, $B(0, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ лежат в одной плоскости.

Решение. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости, если три вектора $\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}$ - компланарны, а по признаку компланарности трех векторов их смешанное произведение трех векторов должно быть равно 0, т.е. $(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = 0$.

Находим координаты векторов $\overline{AB} = \{-1, -1, 6\}$, $\overline{AC} = \{-2, 0, 2\}$, $\overline{AD} = \{1, -1, 4\}$.

Вычисляем смешанное произведение этих векторов:

$$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AD}) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 12 - 2 - 2 - 8 = 12 - 12 = 0.$$

Так как смешанное произведение векторов равно нулю, то точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

Ответ. Точки A, B, C, D лежат в одной плоскости.

6.1 Задачи для самостоятельного решения

6.48 Найти длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \{3, -5, 8\}$, $\bar{b} = \{-1, 1, -4\}$.

Ответ. $|\bar{a} + \bar{b}| = 6, |\bar{a} - \bar{b}| = 14$.

6.49 Даны векторы $\bar{a} = \{4, -2, -4\}$, $\bar{b} = \{6, -3, 2\}$. Вычислить: $\bar{a} \cdot \bar{b}$; $\bar{a}^2$; $\bar{b}^2$; $(\bar{a} + \bar{b})^2$; $(\bar{a} - \bar{b})^2$.

Ответ. 22; 36; 49; 129.

6.50 Даны вершины треугольника ABC : $A(-1, -2, 4)$, $B(-4, -2, 0)$, $C(3, -2, 1)$. Вычислить внешний угол при вершине B .

Ответ. $3\pi / 4$.

6.51 При каком значении α векторы $\bar{a} = \alpha\bar{i} - 3\bar{j} + 2\bar{k}$ и $\bar{b} = \bar{i} + 2\bar{j} - \alpha\bar{k}$ взаимно перпендикулярны?

Ответ. $\alpha = -6$.

6.52 Найти координаты вектора $\bar{b}$, коллинеарного вектору $\bar{a} = \{2, 1, -1\}$, при условии $\bar{a} \cdot \bar{b} = 3$.

Ответ. $\bar{b} = \{1, 1/2, -1/2\}$.

6.53 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ взаимно перпендикулярны, $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 4$. Вычислить:
 $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[(\vec{a} + \vec{b}), (\vec{a} - \vec{b})]$, $[(3\vec{a} - \vec{b}), (\vec{a} - 2\vec{b})]$.

Ответ. 12; 24; 60.

6.54 Даны векторы $\vec{a} = (3, -1, -2)$, $\vec{b} = (1, 2, -1)$. Найти координаты векторов:
 $[\vec{a}, \vec{b}]$, $[(2\vec{a} + \vec{b}), \vec{b}]$, $[(2\vec{a} - \vec{b}), (2\vec{a} + \vec{b})]$.

Ответ. $\{5, 1, 7\}$; $\{10, 2, 14\}$; $\{20, 4, 28\}$.

6.55 Вычислить площадь треугольника ABC , если известно, что:
 $A(1, 2, 0)$, $B(3, 0, 3)$, $C(5, 2, 6)$.

Ответ. $2\sqrt{13}$.

6.56 Дан треугольник с вершинами $A(4, -14, 8)$, $B(2, -18, 12)$, $C(12, -8, 12)$.
Найти длину его высоты, опущенной из вершины C на сторону AB .

Ответ. $H = 10$.

6.57 Даны вершины пирамиды $A(2, 0, 4)$, $B(0, 3, 7)$, $C(0, 0, 6)$, $S(4, 3, 5)$.
Вычислить ее объем V и высоту H , опущенную на грань ACS .

Ответ. $V = 2$, $H = 2/\sqrt{3}$.

6.58 Лежат ли точки $A(1, 2, -1)$, $B(4, 1, 5)$, $C(-1, 2, 1)$, $D(2, 1, 3)$ в одной плоскости?

Ответ. Лежат.

6.59 Вершины пирамиды находятся в точках $A(3, 4, 5)$, $B(1, 2, 1)$, $C(-2, -3, 6)$, $D(3, -6, -3)$. Вычислить: а) площадь грани ABD ; б) площадь сечения, проходящего через середину ребра AB и две вершины пирамиды C, D ; в) объем пирамиды $ABCD$.

Ответ. а) $\sqrt{2114}$; б) $\sqrt{4426}/2$; в) 42.

6.60 Объем тетраэдра $V = 5$, три его вершины находятся в точках $A(2, 1, -1)$, $B(3, 0, 1)$, $C(2, -1, 3)$. Найти координаты четвертой вершины D , если известно, что она лежит на оси Oy .

Ответ. $D_1(0, 8, 0)$, $D_2(0, -7, 0)$.

6.61 Даны разложения векторов, служащих сторонами треугольника, по двум взаимно перпендикулярным ортам:

$AB = 5\bar{a} + 2\bar{b}$, $BC = 2\bar{a} - 4\bar{b}$, $CA = -7\bar{a} + 2\bar{b}$. Вычислить длины медианы AM и высоты AD треугольника ABC .

Ответ. $|AM| = 6$, $|AD| = 12\sqrt{5}/5$.

6.62 Даны четыре вектора $\bar{a} = \{1, 2, 3\}$, $\bar{b} = \{2, -2, 1\}$, $\bar{n} = \{4, 0, 3\}$, $\bar{d} = \{16, 10, 18\}$.

Найти вектор $\bar{x}$, являющийся проекцией вектора $\bar{d}$ на плоскость, определяемую векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, при направлении проектирования, параллельном вектору $\bar{c}$.

Ответ. $\bar{x} = \{-4, 10, 3\}$.

6.63 Три последовательные вершины трапеции находятся в точках $A(-3, -2, -1)$, $B(1, 2, 3)$, $C(9, 6, 4)$. Найти четвертую вершину D этой трапеции, точку M пересечения ее диагоналей и точку N пересечения боковых сторон, зная, что длина основания AD равна 15.

Ответ. $D(31/3, 14/3, 2/3)$; $M(9/2, 3, 17/8)$, $N(7, 8, 9)$.

6.64 Убедившись, векторы $\bar{a} = 7\bar{i} + 6\bar{j} - 6\bar{k}$ и $\bar{b} = 6\bar{i} + 2\bar{j} + 9\bar{k}$ можно рассматривать как ребра куба, найти его третье ребро.

Ответ. $\pm(6\bar{i} - 9\bar{j} - 2\bar{k})$.

6.65 Вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a} = \{0, -1, 1\}$ и $\bar{b} = \{1, 1, 1\}$.

Ответ. 6.

6.66 Даны два вектора $\bar{a} = \{8, 4, 1\}$ и $\bar{b} = \{2, -2, 1\}$. Найти вектор $\bar{c}$, компланарный векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$, перпендикулярный вектору $\bar{a}$, равный ему по длине и образующий с вектором $\bar{b}$ тупой угол.

Ответ. $\bar{c} = \{-5/\sqrt{2}, 11/\sqrt{2}, -4/\sqrt{2}\}$.

6.67 Компланарны ли следующие векторы?

а) $\bar{a} = \{2, 3, 1\}$, $\bar{b} = \{1, -1, 3\}$, $\bar{c} = \{-1, 9, -11\}$;

б) $\bar{a} = \{3, -2, 1\}$, $\bar{b} = \{2, 1, 2\}$, $\bar{c} = \{3, -1, -2\}$.

Ответ. а) компланарны; б) не компланарны.

7 Аналитическая геометрия на плоскости

Система координат на плоскости. Простейшие задачи

Совокупность точки O и базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ называется **аффинной системой координат на плоскости** (или аффинным репером), и обозначается $R(O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ или Ox (рисунок 21).

Точка O называется началом координат. Ось, проходящая через точку O и имеющая направление вектора $\bar{e}_1$, называется осью Ox или осью абсцисс.

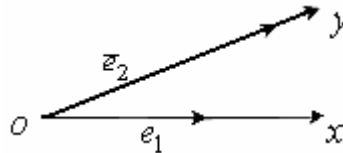


Рисунок 21

Ось, проходящая через точку O и имеющая направление вектора $\bar{e}_2$, называется осью Oy или осью ординат.

Координатами точки M относительно аффинного репера $R(O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ называются координаты радиус-вектора этой точки относительно базиса $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$. Пишут: $M(x, y)_R$.

Совокупность точки O и ортонормированного базиса $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ называется **прямоугольной декартовой системой координат на плоскости** (или **ортонормированным репером**). Обозначается $R(O; \bar{i}, \bar{j})$ (рисунок 22).

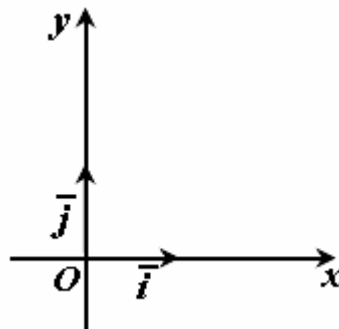


Рисунок 22

Простейшие задачи

1. Нахождение координат вектора, заданного координатами начала и конца

Пусть в пространстве заданы аффинный репер $R(O; \bar{e}_1, \bar{e}_2)$ и точки $A(x_1, y_1)_R$, $B(x_2, y_2)_R$.

Чтобы получить координаты вектора, нужно из координат его конца вычесть соответствующие координаты начала, то есть

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}_{\{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}}. \quad (7.1)$$

2. Задача о делении отрезка в заданном отношении

Координаты точки $M(x, y)_R$, делящей отрезок M_1M_2 , где $M_1(x_1, y_1)_R$, $M_2(x_2, y_2)_R$ в данном отношении $M_1M / MM_2 = \lambda$ (при $\lambda \neq 0$), определяются формулами

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \quad (7.2)$$

3. Координаты середины отрезка M_1M_2 вычисляются по формулам:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2}. \quad (7.3)$$

4. Расстояния между двумя точками $A(x_1, y_1)_R$ и $B(x_2, y_2)_R$:

$$\rho(A; B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \quad (7.4)$$

5. Площадь треугольника с вершинами $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ равна

$$S = \frac{1}{2} [(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)]. \quad (7.5)$$

Задача 7.1 Доказать, что треугольник с вершинами $A(-2, -1)$, $B(6, 1)$, $C(3, 4)$ - прямоугольный.

Решение. Зная стороны a, b, c треугольника, с помощью теоремы Пифагора можно установить, является ли данный треугольник прямоугольным ($a^2 + b^2 = c^2$), остроугольным ($a^2 + b^2 > c^2$), тупоугольным ($a^2 + b^2 < c^2$).

Пусть $AB = a$, $BC = b$, $AC = c$. Найдем длины сторон треугольника, пользуясь формулой (7.4). Вычислим вначале длину AB , подставляя в формулу (7.4) координаты точек A и B $x_1 = -2, y_1 = -1, x_2 = 6, y_2 = 1$:

$$AB = \sqrt{(6 - (-2))^2 + (1 - (-1))^2} = \sqrt{8^2 + 2^2} = \sqrt{68}.$$

Для вычисления AC подставим в формулу (7.4) значения $x_1 = -2, y_1 = -1, x_2 = 3, y_2 = 4$:

$$AC = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (4 - (-1))^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = \sqrt{50}.$$

Аналогично для 3-ей стороны $x_1 = 6, y_1 = 1, x_2 = 3, y_2 = 4$:

$$BC = \sqrt{(3 - 6)^2 + (4 - 1)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{18}.$$

Квадраты длин сторон будут соответственно равны:

$$AB^2 = 68, AC^2 = 50, BC^2 = 18,$$

откуда

$$AB^2 = AC^2 + BC^2.$$

Последнее равенство означает, что треугольник прямоугольный.

Ответ. Треугольник ABC прямоугольный.

Задача 7.2 Даны вершины $A(2,2)$, $B(6,5)$, $C(0,3)$ параллелограмма $ABCD$.
Найдем вершину D .

Решение. Пусть O - точка пересечения диагоналей параллелограмма. Так как O - середина отрезка AC , то по формулам

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}; y = \frac{y_1 + y_2}{2},$$

получим:

$$x = \frac{2+0}{2} = 1; y = \frac{2+3}{2} = \frac{5}{2}, \quad O\left(1, \frac{5}{2}\right).$$

С другой стороны, O - середина BD . Координаты точек B и O известны, координаты точки D определим по тем же формулам. Имеем:

$$1 = \frac{6+x}{2}; \quad \frac{5}{2} = \frac{5+y}{2},$$

откуда $x = -4$, $y = 0$. Следовательно, $D(-4, 0)$.

Ответ. $D(-4, 0)$.

Задача 7.3 Отрезок AB , где $A(3, -5)$, $B(5, -3)$, точками C и D разделен на три равные части. Найти координаты точек C и D .

Решение. По условию $AC/CB = 1/2$, $AD/DB = 2/1$.

Подставляя в формулы $x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$ значения

$x_1 = 3$, $y_1 = -5$, $x_2 = 5$, $y_2 = -3$, $\lambda = \frac{1}{2}$, получим координаты точки C :

$$x = \frac{3 + \frac{1}{2} \cdot 5}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{11}{3}; y = \frac{-5 + \frac{1}{2}(-3)}{1 + \frac{1}{2}} = -\frac{13}{3}.$$

Координаты точки D находятся с помощью тех же формул при $\lambda = 2$:

$$x = \frac{3 + 2 \cdot 5}{1 + 2} = \frac{13}{3}; y = \frac{-5 + 2(-3)}{1 + 2} = -\frac{11}{3}.$$

Следовательно, $C\left(\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}\right)$, $D\left(\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$.

Ответ. $C\left(\frac{11}{3}, -\frac{13}{3}\right)$, $D\left(\frac{13}{3}, -\frac{11}{3}\right)$.

Задача 7.4 Найдите две точки A и B , если известно, что точка $C(-5, 4)$ делит отрезок $[AB]$ в отношении 3:4, а точка $D(6, -5)$ - в отношении 2:3.

Решение. Пусть $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$. Тогда по формулам (7.2) имеем:

$$-5 = \frac{x_A + \left(\frac{3}{4}\right)x_B}{\frac{3}{4} + 1}, \quad 4 = \frac{y_A + \left(\frac{3}{4}\right)y_B}{\frac{3}{4} + 1}, \quad 6 = \frac{x_A + \left(\frac{2}{3}\right)x_B}{\frac{2}{3} + 1}, \quad -5 = \frac{y_A + \left(\frac{2}{3}\right)y_B}{\frac{2}{3} + 1}.$$

Решая полученную систему уравнений относительно x_A , x_B , y_A , y_B , найдем: $x_A = 160$, $x_B = -225$, $y_A = -131$, $y_B = 184$; $A(160, -131)$, $B(-225, 184)$.

Ответ. $A(160, -131)$, $B(-225, 184)$.

Прямая линия на плоскости

В декартовой системе координат Oxy на плоскости прямая может быть задана уравнением первой степени относительно x, y :

$$Ax + By + C = 0, \quad (7.6)$$

где A, B, C – некоторые действительные числа, и обратно, всякое уравнение такого вида определяет прямую.

Вектор $\vec{n} = \{A, B\}$ перпендикулярен к прямой $Ax + By + C = 0$ и называется *нормальным вектором*, а уравнение называется *общим уравнением прямой*.

Существуют и другие виды уравнений прямой на плоскости:

1) уравнение по точке $M_0(x_0, y_0)$ и угловому коэффициенту k

$$y - y_0 = k(x - x_0); \quad (7.7)$$

2) параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases} \quad (7.8)$$

где $\vec{s} = \{m, n\}$ – направляющий вектор прямой, а точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на прямой;

3) канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}; \quad (7.9)$$

4) уравнение прямой в «отрезках»

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1; \quad (7.10)$$

5) уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1)_R$, $M_2(x_2, y_2)_R$

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (7.11)$$

Взаимное расположение двух прямых на плоскости

1. Если прямые заданы общими уравнениями $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\cos \varphi = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|} = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}. \quad (7.12)$$

Условие перпендикулярности прямых имеет вид

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0, \quad (7.13)$$

а условие их параллельности

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}. \quad (7.14)$$

2. Если прямые заданы уравнениями вида $L_1: y = k_1x + b_1$ и $L_2: y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними находится по формуле

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}. \quad (7.15)$$

Для того чтобы прямые были параллельны, необходимо, чтобы выполнялось равенство $k_1 = k_2$, а для их перпендикулярности необходимо и достаточно, чтобы $k_2 = -\frac{1}{k_1}$.

Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (7.16)$$

Задача 7.5 Составим уравнение прямой, проходящей через точку $A(2, -1)$ и образующей с ось Ox угол 45° .

Решение. Так как $k = \operatorname{tg} 45^\circ = 1$, то, используя уравнение прямой с угловым коэффициентом $y - y_0 = k(x - x_0)$, получим $y - (-1) = 1(x - 2)$ или $x - y = 3$.

Ответ. $x - y = 3$.

Задача 7.6 Определить параметры b, k прямых: $2x + 5y - 10 = 0$ и $3y + 7 = 0$; $4x - 9y = 0$.

Решение. Разрешив первое уравнение относительно y , получим

$$y = -\frac{2}{5}x + \frac{10}{5} \text{ или } y = -\frac{2}{5}x + 2.$$

Сравнивая это уравнение с уравнением $y = kx + b$, находим $k_1 = -\frac{2}{5}$, $b_1 = 2$.

Разрешив два других уравнения относительно y , получим:

$$y = -\frac{7}{3}, \text{ откуда } k_2 = 0, b_2 = -\frac{7}{3};$$

$$y = \frac{4}{9}x, \text{ откуда } k_3 = \frac{4}{9}, b_3 = 0.$$

$$\text{Ответ. } k_1 = -\frac{2}{5}, b_1 = 2, k_2 = 0, b_2 = -\frac{7}{3}, k_3 = \frac{4}{9}, b_3 = 0.$$

Задача 7.7 Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $A(2, 4)$ перпендикулярно вектору $\vec{a} = \{2, 3\}$.

Решение. Используем общее уравнение прямой $\hat{A}(x - x_0) + \hat{A}(y - y_0) = 0$. Вектор $\vec{a} = \{2, 3\}$ является нормальным вектором прямой. Следовательно, уравнение прямой имеет вид

$$2(x - 2) + 3(y - 4) = 0,$$

$$2x - 4 + 3y - 12 = 0,$$

$$2x + 3y - 16 = 0.$$

$$\text{Ответ. } 2x + 3y - 16 = 0.$$

Задача 7.8 Составить уравнение прямой на плоскости, проходящей через точку $A(2, -8)$ параллельно вектору $\vec{a} = \{6, 7\}$.

Решение. Используем каноническое уравнение прямой (7.9). Вектор $\vec{a} = \{6, 7\}$ является для прямой направляющим вектором. Следовательно уравнение примет вид

$$\frac{x - 2}{6} = \frac{y + 8}{7}.$$

$$\text{Ответ. } \frac{x - 2}{6} = \frac{y + 8}{7}.$$

Задача 7.9 Найти длину высоты AR треугольника ABC , если $A(-2, 3)$, $B(3, -2)$, $C(5, 6)$.

Решение. Для нахождения углового коэффициента прямой BC используем формулу:

$$k_{BC} = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C}, \text{ то есть } k_{BC} = \frac{-2 - 6}{3 - 5} = 4.$$

$$\text{Так как } AR \perp BC, \text{ то } k_{AR} k_{BC} = -1, \text{ откуда } k_{AR} = -\frac{1}{k_{BC}} = -\frac{1}{4}.$$

Уравнение прямой AR , проходящей через точку $A(-2, 3)$ и имеющей угловой коэффициент $k_{AR} = -\frac{1}{4}$, находим по формуле $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y - 3 = -\frac{1}{4}(x + 2), \text{ или } x + 4y - 10 = 0,$$

а уравнение прямой BC – по двум точкам $B(3, -2)$, $C(5, 6)$, применяя формулу (7.11):

$$\frac{y - 6}{-2 - 6} = \frac{x - 5}{3 - 5}, \text{ или } 4x - y - 14 = 0.$$

Для того чтобы найти точку R пересечения прямых AR и BC , решаем систему:

$$\begin{cases} 4x - y - 14 = 0, \\ x + 4y - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{66}{17}, \\ y = \frac{26}{17}. \end{cases}$$

Длину высоты AR находим по формуле (7.5):

$$AR = \sqrt{\left(\frac{66}{17} + 2\right)^2 + \left(\frac{26}{17} - 3\right)^2} = \frac{25\sqrt{17}}{17}.$$

$$\text{Ответ. } AR = \frac{25\sqrt{17}}{17}.$$

Задача 7.10 Даны вершины треугольника: $A(1, 1)$, $B(10, 13)$, $C(13, 6)$. Составить уравнение биссектрисы угла A .

Решение. Пусть D - точка пересечения биссектрисы со стороной BC . Из свойств биссектрисы внутреннего угла треугольника следует, что $|BD| : |DC| = |AB| : |AC|$.

$$\text{Но } |AB| = \sqrt{(10 - 1)^2 + (13 - 1)^2} = 15, \quad |AC| = \sqrt{(13 - 1)^2 + (6 - 1)^2} = 13.$$

Следовательно,

$$\lambda = \frac{|BD|}{|DC|} = \frac{15}{13}.$$

Так как известно отношение, в котором точка D делит отрезок BC , то координаты точки D определяются по формулам

$$x = \frac{10 + \left(\frac{15}{13}\right) \cdot 13}{1 + \frac{15}{13}}, \quad y = \frac{13 + \left(\frac{15}{13}\right) \cdot 6}{1 + \frac{15}{13}},$$

$$\text{или } x = \frac{325}{28}, \quad y = \frac{259}{28}, \text{ т.е. } D\left(\frac{325}{28}, \frac{259}{28}\right).$$

Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через точки A и D :

$$\frac{y - 1}{\frac{259}{28} - 1} = \frac{x - 1}{\frac{325}{28} - 1}, \quad \text{т.е. } 7x - 9y + 2 = 0.$$

$$\text{Ответ. } 7x - 9y + 2 = 0.$$

Задача 7.11 Определить какие из следующих прямых параллельны и перпендикулярны:

1) $3x - 15y + 16 = 0$;

2) $3x + 15y - 8 = 0$;

3) $6x - 30y + 13 = 0$;

4) $30x + 6y + 7 = 0$.

Решение. Первая и третья прямые параллельны, так как выполняется условие (7.14). В самом деле: $A_1 = 3, B_1 = -15, A_2 = 6, B_2 = -30$,

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}, \quad \frac{B_1}{B_2} = \frac{-15}{-30} = \frac{1}{2}, \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

Третья и четвертая прямые перпендикулярны, ибо выполняется условие (7.13). Действительно,

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 6 \cdot 30 + (-30) \cdot 6 = 0.$$

Первая и четвертая прямые также перпендикулярны, так как

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 3 \cdot 30 + (-15) \cdot 6 = 0.$$

Ответ. Прямые 1) и 3) параллельны; прямые 3) и 4) перпендикулярны; прямые 1) и 4) перпендикулярны.

Задача 7.12 При каких значениях a прямые, заданные уравнениями $a^2x - 2(a+1)y + 5 = 0$ и $ax + (1-2a)y - 4 = 0$ окажутся параллельными?

Решение. Если прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны, следовательно,

$$\frac{a^2}{2a+2} = \frac{a}{2a-1},$$
$$a(2a^2 - 3a - 2) = 0.$$

Решив уравнение относительно a , получим корни: $a_1 = 0, a_2 = -0,5, a_3 = 2$.

При $a_1 = 0$ уравнение прямых будут следующими $y = 2,5, y = 4$;

при $a_2 = -0,5$ уравнения прямых $x - 4y + 20 = 0, x - 4y + 8 = 0$;

при $a_3 = 2$ уравнения прямых $4x - 6y + 5 = 0, 2x - 3y - 4 = 0$.

Ответ. $a_1 = 0, a_2 = -0,5, a_3 = 2$.

Задача 7.13 При каких значениях n прямые, заданные уравнениями $(n+1)x + (3-n)y + 16 = 0$ и $(n-3)x + (2n-3)y + 6 = 0$ окажутся перпендикулярными? Написать уравнения этих прямых.

Решение. Выразим угловые коэффициенты каждой из данных прямых:

$$k_1 = \frac{n+1}{n-3}, \quad k_2 = \frac{n-3}{3-2n}.$$

Прямые перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$, откуда $\frac{(n+1)(n-3)}{(n-3)(3-2n)} = -1 \Rightarrow (n-3)(4-n) = 0$. Следовательно, прямые перпендикулярны при $n = 3$, $n = 4$.

При $n = 3$ уравнения прямых будут следующими $x + 4 = 0$ и $y + 2 = 0$;

при $n = 4$ - $5x - y + 16 = 0$ и $x + 5y + 6 = 0$.

Ответ. При $n = 3$ - $x + 4 = 0$ и $y + 2 = 0$; при $n = 4$ - $5x - y + 16 = 0$ и $x + 5y + 6 = 0$.

Задача 7.14 При каких значениях a прямая $(a+2)x + (3-a)y + 23 = 0$ проходит через точку пересечения прямых $2x + 5y + 1 = 0$ и $x + 10y - 4 = 0$?

Решение. Определим точку пересечения прямых $2x + 5y + 1 = 0$ и $x + 10y - 4 = 0$.

Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 5y = -1, \\ x + 10y = 4. \end{cases}$$

В результате получим $x = -2$, $y = \frac{3}{5}$, следовательно, прямые пересекаются в точке $\left(-2, \frac{3}{5}\right)$.

Так как прямая $(a+2)x + (3-a)y + 23 = 0$ проходит через точку $\left(-2, \frac{3}{5}\right)$,

то

$$(a+2) \cdot (-2) + (3-a) \cdot \frac{3}{5} + 23 = 0,$$

$$-2a - 4 + \frac{9}{5} - \frac{3}{5}a + 23 = 0,$$

$$13a = 204, \text{ следовательно, } a = 8.$$

Ответ. $a = 8$.

Задача 7.15 Найти уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных $A(-4, 6)$, $B(3, 0)$.

Решение. Геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных, является перпендикуляр, проходящий через середину отрезка, соединяющего эти точки.

Найдем координаты середины отрезка AB :

$$x_0 = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}; \quad y_0 = 3.$$

$$\text{Угловой коэффициент прямой } AB \quad k = \frac{6-0}{-4-3} = -\frac{6}{7}.$$

Угловой коэффициент перпендикуляра к этой прямой $k_1 = \frac{7}{6}$.

Составим уравнение искомого геометрического места точек:

$$y - 3 = \frac{7}{6}(x + 0,5) \quad \text{или} \quad 14x - 12y + 43 = 0.$$

Ответ. $14x - 12y + 43 = 0$.

Задача 7.16 Вычислить площадь треугольника, стороны которого лежат на прямых, заданных уравнениями:

$$x - 3y + 11 = 0; \quad 5x + 2y - 13 = 0; \quad 9x + 7y - 3 = 0.$$

Решение. Искомую площадь вычислим по формуле (7.5). Для этого найдем координаты вершин треугольника.

Решая систему уравнений

$$\begin{cases} x - 3y + 11 = 0, \\ 5x + 2y - 13 = 0. \end{cases}$$

находим вершину $P(1,4)$.

Решая систему

$$\begin{cases} 9x + 7y - 3 = 0, \\ 5x + 2y - 13 = 0. \end{cases}$$

находим вторую вершину $Q(5,-6)$.

Наконец, из системы

$$\begin{cases} x - 3y + 11 = 0, \\ 9x + 7y - 3 = 0. \end{cases}$$

находим третью вершину $R(-2,3)$.

Подставляя координаты вершин треугольника в формулу для нахождения площади получаем

$$S = \frac{1}{2} [(5-1)(3-4) - (-2-1)(-6-4)] = 17 \text{ (кв.ед.)}.$$

Ответ. $S = 17$ (кв.ед.).

Задача 7.17 Найти угол между прямыми:

$$6x + 8y + 11 = 0; \quad 2x - 4y - 13 = 0.$$

Решение. Для нахождения угла между прямыми используем формулу (7.12). Подставляя значения $A_1 = 6$, $B_1 = 8$, $A_2 = 2$, $B_2 = -4$ в формулу, находим

$$\cos \varphi = \frac{6 \cdot 2 + 8 \cdot (-4)}{\sqrt{6^2 + 8^2} \sqrt{2^2 + (-4)^2}} = \frac{-20}{20\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right).$$

Ответ. $\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

Задача 7.18 Написать уравнение прямой l' , параллельной двум заданным прямым $l_1: x + 2y - 1 = 0$, $l_2: x + 2y + 2 = 0$ и проходящей посередине между ними.

Решение. Так как вектор $\vec{n} = \{1, 2\}$, нормальный вектор к заданным прямым l_1 и l_2 , является в то же время нормальным и к прямой l' , то достаточно найти какую-нибудь точку M' , лежащую посередине между l_1 и l_2 . Из уравнений для l_1 и l_2 находим любые две точки $M_1 \in l_1$ и $M_2 \in l_2$, например такие: $M_1(1, 0)$ и $M_2(-2, 0)$. Тогда точка $M'(-1/2, 0)$, делящая отрезок $\overline{M_1M_2}$ пополам, лежит посередине между l_1 и l_2 . Поэтому уравнение прямой имеет вид

$$l': \left(x + \frac{1}{2}\right) + 2(y - 0) = 0 \text{ или } l': x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$$

Ответ. $l': x + 2y + \frac{1}{2} = 0.$

Задача 7.19 Дан треугольник с вершинами $A(0, 5)$, $B(-3, 1)$, $C(-1, -2)$. Найти длину высоты, опущенной из точки C .

Решение. Задача сводится к определению расстояния от точки C до прямой AB . Напишем уравнение этой прямой. На основании уравнения

$$\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A} \text{ имеем}$$

$$\frac{x - 0}{-3 - 0} = \frac{y - 5}{1 - 5}, \quad \frac{x}{-3} = \frac{y - 5}{-4} \quad \text{или} \quad 4x - 3y + 15 = 0.$$

Расстояние от точки C до этой прямой вычисляется по формуле (7.16), т.е.

$$d = \left| \frac{4 \cdot (-1) - 3(-2) + 15}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} \right| = \frac{17}{5}.$$

Следовательно, длина высоты равна $17/5$.

Ответ. $d = 17/5$.

Задача 7.20 Определить расстояние между параллельными прямыми $3x + y - 3\sqrt{10} = 0$ и $6x + 2y + 5\sqrt{10} = 0$.

Решение. Задача сводится к определению расстояния от произвольной точки одной прямой до другой прямой. Полагая, например, в уравнении первой прямой $x = 0$, получаем $y = 3\sqrt{10}$. Таким образом, $M(0, 3\sqrt{10})$ - точка, лежащая на первой прямой. Определим расстояние точки M до второй прямой по формуле (7.16), получаем

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 2 \cdot 3\sqrt{10} + 5\sqrt{10}|}{\sqrt{36 + 4}} = \frac{11\sqrt{10}}{2\sqrt{10}} = 5,5.$$

Ответ. $d = 5,5$.

Задача 7.21 Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $x - y - 1 = 0$, $x + 2y - 2 = 0$ и точку $M(-1, 1)$, не находя точки пересечения данных прямых.

Решение. Уравнение пучка прямых, проходящих через точку пересечения данных прямых $Ax + By + C = 0$ и $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, записывается так

$$Ax + By + C + \lambda(A_1x + B_1y + C_1) = 0.$$

В нашем случае оно будет иметь вид

$$x - y - 1 + \lambda(x + 2y - 2) = 0.$$

Из этого пучка надо выделить прямую, проходящую через точку $M(-1, 1)$. Подставляя в последнее уравнение координаты точки M , получим $\lambda = -3$. Подставим λ в это же уравнение, будем иметь

$$x - y - 1 - 3(x + 2y - 2) = 0$$

Раскрывая скобки и делая приведение подобных членов, находим уравнение искомой прямой.

$$2x + 7y - 5 = 0.$$

Ответ. $2x + 7y - 5 = 0$.

Задача 7.22 Найти уравнение прямой, параллельной прямой $2x + 3y + 6 = 0$ и отсекающей от координатного угла треугольник, площадь которого равна 3 кв.ед.

Решение. Обозначим отрезки, отсекаемые искомой прямой на координатных осях Ox и Oy , соответственно a, b . Так как $S_{\Delta} = \frac{1}{2}ab$, то имеем

$$3 = \frac{1}{2}ab, \text{ или } ab = 6.$$

Уравнение семейства прямых, параллельных данной, запишется в виде $2x + 3y + C = 0$. Отрезки, отсекаемые этой прямой на осях координат, равны

$$a = -\frac{C}{2}, \quad b = -\frac{C}{3}.$$

Подставляя a, b в $ab = 6$, получим

$$\left(-\frac{C}{2}\right)\left(-\frac{C}{3}\right) = 6,$$

откуда

$$\frac{C^2}{6} = 6, \quad C^2 = 36, \quad C_1 = 6, \quad C_2 = -6.$$

Искомая прямая имеет уравнение $2x + 3y + 6 = 0$, или $2x + 3y - 6 = 0$.

Среди только что найденных прямых есть данная $2x + 3y + 6 = 0$. Таким образом, данная прямая удовлетворяет требованию задачи. Этому требованию удовлетворяет также и найденная прямая $2x + 3y - 6 = 0$.

Ответ. $2x + 3y + 6 = 0$, $2x + 3y - 6 = 0$.

Задача 7.23 Напишите уравнение медианы (AM) треугольника ABC : $A(-5, 4)$, $B(3, 1)$, $C(2, -5)$.

Решение. Используя свойство медианы треугольника, находим координаты точки M , делящей отрезок $[BC]$ пополам. Координаты точки M находим по формулам (7.3), следовательно, $x_M = \frac{x_B + x_C}{2} = \frac{5}{2}$, $y_M = \frac{y_B + y_C}{2} = -2$.

По формуле (7.11) уравнение (AM) имеет вид:

$$\frac{x - (-5)}{\frac{5}{2} - (-5)} = \frac{y - 4}{-2 - 4} \Leftrightarrow \frac{x + 5}{\frac{15}{2}} = \frac{y - 4}{-6} \Leftrightarrow 4x + 5y = 0.$$

Ответ. $4x + 5y = 0$.

Задача 7.24 Напишите уравнение прямой l , проходящей через точку $M(7, 4)$ и параллельной прямой L , заданной уравнением $3x - 2y + 4 = 0$.

Решение. Направляющий вектор $\vec{s} = \{a_x, a_y\}$ прямой L есть $\vec{s} = \{2, 3\}$. Так как $l \parallel L$, то $\vec{s}$ является и направляющим вектором прямой l . По формуле (7.9) уравнение прямой l таково:

$$\frac{x - 7}{2} = \frac{y - 4}{3} \Leftrightarrow 3x - 2y - 13 = 0.$$

Ответ. $3x - 2y - 13 = 0$.

Задача 7.25 Найдите координаты вершин $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$, $D(x_D, y_D)$ параллелограмма $ABCD$, если $C(-3, 1)$, $(AB): x + y - 3 = 0$, $(AD): y = 2$.

Решение. Точка A является общей точкой прямых (AB) и (AD) . Поэтому ее координаты (x_A, y_A) удовлетворяют системе уравнений $x_A + y_A - 3 = 0$, $y_A = 2$, решая которую, находим $x_A = 1$, $y_A = 2$. Направляющий вектор $\vec{s}$ прямой (AB) равен $\vec{s} = \{-1, 1\}$. Он является и направляющим вектором (CD) . Следовательно, уравнение (CD) имеет вид

$$\frac{x + 3}{-1} = \frac{y - 1}{1} \Leftrightarrow x + y + 2 = 0.$$

Можно аналогично найти, что $y = 1$ - уравнение прямой (BC) .

Координаты точек $B(x_B, y_B)$ и $D(x_D, y_D)$ удовлетворяют системам уравнений

$$\begin{cases} x_B + y_B - 3 = 0, \\ y_B = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} y_D = 2, \\ x_D + y_D + 2 = 0. \end{cases}$$

Решая эти системы, находим: $x_B = 2$, $y_B = 1$, $x_D = -4$, $y_D = 2$.

Ответ. $A(1, 2)$, $B(2, 1)$, $D(-4, 2)$.

Линии второго порядка

Окружностью радиуса R с центром в точке M_0 называется множество всех точек M плоскости, удовлетворяющих условию $M_0M = R$ (рисунок 23).

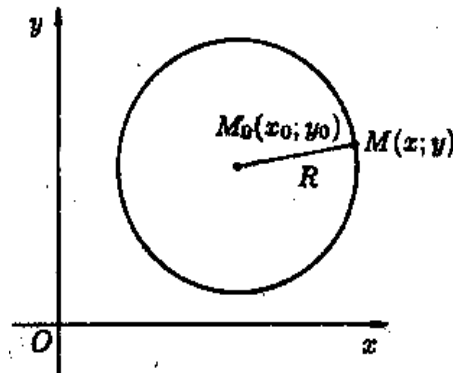


Рисунок 23

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \quad (7.17)$$

Уравнение (7.17) называется каноническим уравнением окружности.

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, большая, чем расстояние между фокусами (рисунок 24).

Каноническое уравнение эллипса имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7.18)$$

где $b^2 = a^2 - c^2$, a - большая полуось эллипса, b - малая полуось.

Отношение $\frac{c}{a}$ половины расстояния между фокусами к большой полуоси эллипса называется эксцентриситетом эллипса и обозначается буквой ε («эпсилон»):

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (7.19)$$

Фокальные радиусы точки, лежащей на эллипсе находятся по формулам $r_1 = a + \varepsilon x$ и $r_2 = a - \varepsilon x$. (7.20)

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* эллипса.

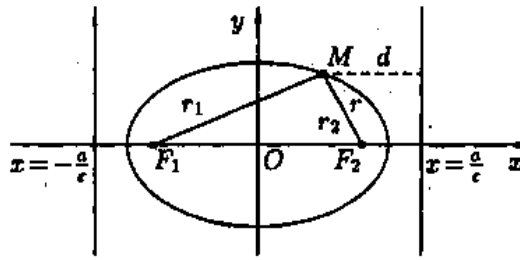


Рисунок 24

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух данных точек этой плоскости, называемых фокусами, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами (рисунок 25).

Каноническое уравнение гиперболы имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (7.21)$$

где $b^2 = c^2 - a^2$, a -действительная полуось гиперболы, b -мнимая полуось.

Гипербола (7.21) имеет две асимптоты:

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x. \quad (7.22)$$

Гипербола называется *равносторонней*, если ее полуоси равны ($a = b$), в этом случае ее уравнение имеет вид

$$x^2 - y^2 = a^2. \quad (7.23)$$

Эксцентриситетом гиперболы (7.21) называется отношение расстояния между фокусами к величине действительной оси гиперболы, обозначается ε :

$$\varepsilon = \frac{c}{a}. \quad (7.24)$$

Фокальные радиусы $r_1 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$ и $r_2 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$ для точек правой ветви гиперболы имеют вид $r_1 = \varepsilon x + a$, $r_2 = \varepsilon x - a$, а для левой — $r_1 = -(\varepsilon x + a)$, $r_2 = -(\varepsilon x - a)$.

Прямые $x = \pm \frac{a}{\varepsilon}$ называются *директрисами* гиперболы.

Гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ называются сопряженными.

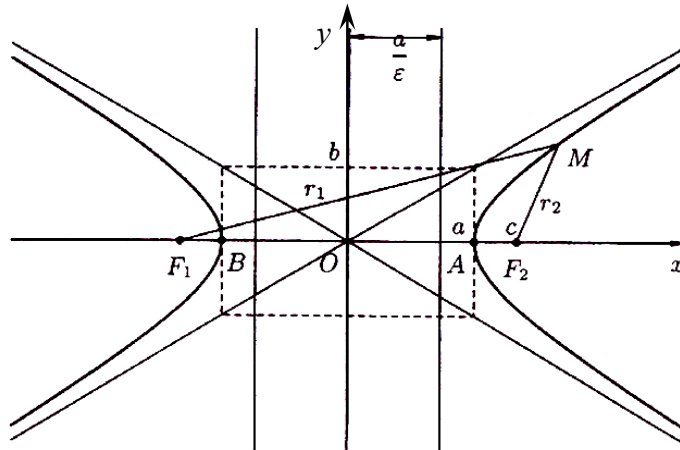


Рисунок 25

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых одинаково удалена от данной точки, называемой фокусом, и данной прямой, называемой директрисой (рисунок 26). Расстояние от фокуса F до директрисы называется параметром параболы и обозначается через p ($p > 0$).

Уравнение

$$y^2 = 2px \quad (7.25)$$

называется *каноническим уравнением параболы*

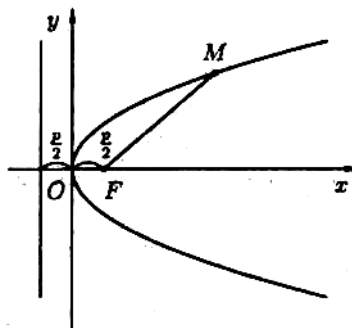


Рисунок 26

Кривыми второго порядка называется геометрическое место точек плоскости, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению, которое называют **общим уравнением кривой второго порядка на плоскости**.

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (7.26)$$

При соответствующем выборе прямоугольной декартовой системы координат в пространстве уравнение кривой второго порядка можно привести к одному из видов.

Одной из основных задач теории кривых второго порядка является упрощение общего уравнения (7.26) путем надлежащего подбора новой системы координат. Упрощение уравнения (7.26) приводится в два этапа.

а) Упрощение уравнения кривой путем поворота системы координат.

При повороте координатных осей:

$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases} \quad (7.27)$$

Они позволяют определить старые координаты x, y произвольной точки M через новые координаты x_1, y_1 этой же точки M , и наоборот.

б) Упрощение уравнения кривой путем переноса начала координат.

При параллельном переносе координатных осей:

$$\begin{cases} x = x_0 + x', \\ y = y_0 + y'. \end{cases} \quad (7.28)$$

Полученные формулы позволяют находить старые координаты x, y по известным новым x', y' и наоборот.

Задача 7.26 Найти координаты центра и длину диаметра окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 + 2x - 6y - 6 = 0$.

Решение. Приведем уравнение окружности к виду $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

В данном уравнении выделим полные квадраты, прибавляя и вычитая соответствующие числа. Получаем

$$x^2 + 2x + 1 - 1 + y^2 - 6y + 9 - 9 - 6 = 0;$$

$$(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 4^2.$$

Ответ. Координаты центра окружности $(-1, 3)$, $R = 4$; диаметр равен 8.

Задача 7.27 Написать уравнение окружности радиуса $R = 4$ с центром в начале координат. Лежат ли точки $A(4, 0)$, $B(2, 3)$ на этой окружности?

Решение. Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка данной окружности. По определению окружности имеем $OM = 4$.

Длина отрезка OM по формуле (7.4) равна

$$OM = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Следовательно, уравнение окружности имеет вид

$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4.$$

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим

$$x^2 + y^2 = 16.$$

Выясним, лежат ли на данной окружности указанные точки. Подставляя координаты точки A в уравнение окружности, получаем тождество

$$4^2 + 0^2 = 16.$$

Таким образом, точка A лежит на окружности.

Для точки B получается неравенство

$$2^2 + 3^2 < 16,$$

поэтому эта точка не принадлежит окружности.

Ответ. $x^2 + y^2 = 16$, точка A лежит на окружности, точка B не лежит на ней.

Задача 7.28 Найти точки пересечения окружности $x^2 + y^2 = 36$ с координатными осями.

Решение. Для любой точки, лежащей на оси Ox , ордината y равна нулю. Обратно, если $y = 0$, то точка лежит на оси Ox . Следовательно, ось Ox имеет уравнение $y = 0$. Аналогично можно показать, что уравнение оси Oy есть $x = 0$.

Чтобы получить точки пересечения данной окружности с осью Ox , необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y = 0. \end{cases}$$

Подставляя значение y в первое уравнение, получим $x^2 = 36$, откуда $x_1 = 6$, $x_2 = -6$. Таким образом, данная окружность пересекает ось Ox в двух точках: $M_1(6, 0)$, $M_2(-6, 0)$.

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ x = 0. \end{cases}$$

Получим $y_1 = 6$, $y_2 = -6$. Следовательно, точки $M_3(0, 6)$, $M_4(0, -6)$ являются точками пересечения окружности с осью Oy .

Ответ. $M_1(6, 0)$, $M_2(-6, 0)$, $M_3(0, 6)$, $M_4(0, -6)$.

Задача 7.29 Написать уравнения касательных к окружности $x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0$, проходящих через начало координат.

Решение. Уравнение касательных ищем в виде $y = kx$ ($b = 0$, так как прямая проходит через начало координат).

Касательная к окружности имеет с ней одну общую точку (две точки пересечения сливаются в одну). Чтобы найти точки пересечения прямой и окружности, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 8y + 2 = 0; \\ y = kx. \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получаем

$$(1 + k^2)x^2 + (4 - 8k)x + 2 = 0.$$

Это уравнение имеет два равных корня, когда дискриминант его равен нулю, т.е.

$$(4 - 8k)^2 - 8(1 + k^2) = 0 \quad \text{или} \quad 7k^2 - 8k + 1 = 0,$$

откуда $k_1 = 1$, $k_2 = \frac{1}{7}$. Следовательно, уравнения искомых касательных запишутся

в виде $y = x$, $y = \frac{1}{7}x$.

Ответ. $y = x$, $y = \frac{1}{7}x$.

Задача 7.30 Найти уравнение окружности, диаметром которой является хорда окружностей $x^2 + y^2 - 12x - 6y + 29 = 0$ и $x^2 + y^2 + 6y - 31 = 0$.

Решение. Найдем точки пересечения окружностей:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 12x - 6y = -29; \\ x^2 + y^2 + 6y = 31. \end{cases}$$

Вычитая из первого уравнения второе, получим $x + y = 5$ или $x = 5 - y$. Подставим значение x во второе уравнение и решим его: $(5 - y)^2 + y^2 + 6y - 31 = 0$; $y^2 - 2y - 3 = 0$; $y_1 = -1$; $y_2 = 3$. Точки пересечения окружностей $(6, -1)$ и $(2, 3)$. Центр искомой окружности находится в точке $(4, 1)$, радиус $R = \sqrt{8}$.

Следовательно, уравнение искомой окружности имеет вид $(x - 4)^2 + (y - 1)^2 = 8$ или $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$.

Ответ. $x^2 + y^2 - 8x - 2y + 9 = 0$.

Задача 7.31 Написать уравнение окружности, проходящей через точки $A(0, 3)$ и $B(8, -5)$, если известно, что центр окружности лежит на прямой $2x + 5y - 10 = 0$.

Решение. Пусть центр окружности находится в точке $M(x, y)$, лежащей на прямой $2x + 5y - 10 = 0$. По условию задачи $AM = BM$, т.е.

$$\sqrt{x^2 + (y - 3)^2} = \sqrt{(x - 8)^2 + (y + 5)^2},$$
$$x - y = 5.$$

Для нахождения центра окружности решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x - y = 5, \\ 2x + 5y = 10, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5, \\ y = 0. \end{cases}$$

Центр окружности находится в точке $(5, 0)$. Радиус окружности $r = AM = BM = \sqrt{34}$. Уравнение искомой окружности примет вид

$$(x - 5)^2 + y^2 = 34 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - 10x - 9 = 0.$$

Второй способ решения. Угловый коэффициент хорды AB равен -1 , угловый коэффициент диаметра, перпендикулярного к AB и проходящего через ее середину, равен 7 . Середина AB находится в точке $(4, -1)$. Уравнение указанного диаметра

$$y + 1 = x - 4 \quad \text{или} \quad x - y = 5,$$

а дальше поступаем так же, как описано выше.

Ответ. $x^2 + y^2 - 10x - 9 = 0$.

Задача 7.32 Найти уравнение окружности, центр которой расположен в точке $(-1, 3)$, касательной к прямой $5x - 2y - 18 = 0$.

Решение. Угловый коэффициент касательной $k_1 = 2,5$, угловый коэффициент радиуса, проведенного в точку касания $k_2 = -0,4$. Уравнение радиуса, проведенного в точку касания,

$$y - 3 = -0,4(x + 1) \quad \text{или} \quad 2x + 5y = 13.$$

Найдем точку касания, решив систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 13, \\ 5x - 2y = 18. \end{cases}$$

Точка касания $(4, 1)$.

Вычислим длину радиуса окружности:

$$r = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}.$$

Следовательно, уравнение окружности имеет вид

$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 29 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 + 2x - 6y - 19 = 0.$$

Ответ. $(x+1)^2 + (y-3)^2 = 29$.

Задача 7.33 Найти уравнение окружности, описанной около треугольника, вершины которого находятся в точках: $A(4, 5)$, $B(-2, 3)$, $C(6, -1)$.

Решение. Пусть центром окружности, описанной около треугольника, является точка $M(x, y)$. Так как $AM = BM = CM = R$, то

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-5)^2} = \sqrt{(x+2)^2 + (y-3)^2} = \sqrt{(x-6)^2 + (y+1)^2}.$$

Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} (x-4)^2 + (y-5)^2 = (x+2)^2 + (y-3)^2, \\ (x+2)^2 + (y-3)^2 = (x-6)^2 + (y+1)^2, \\ -8x + 16 - 10y + 25 = 4x + 4 - 6y + 9, \\ 4x + 4 - 6y + 9 = -12x + 36 + 2y + 1, \\ 3x + y = 7, \quad \begin{cases} x = 2, \\ 2x - y = 3, \end{cases} \\ 2x - y = 3, \quad \begin{cases} x = 2, \\ y = 1. \end{cases} \end{cases}$$

Центр окружности находится в точке $(2, 1)$.

Вычислим радиус:

$$R = AM = \sqrt{(2-4)^2 + (1-5)^2} = \sqrt{20}.$$

Уравнение искомой окружности примет вид

$$(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20 \quad \text{или} \quad x^2 + y^2 - 4x - 2y - 15 = 0.$$

Ответ. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 20$.

Задача 7.34 Найти уравнение окружности, проходящей через центры окружностей, заданных уравнениями: $x^2 + y^2 + 2x - 4y + 1 = 0$ и $x^2 + y^2 + 8x + 4y + 4 = 0$.

Решение. Найдём центры окружностей. Для этого приведем уравнения окружностей к каноническому виду (7.17)

$$x^2 + 2x + 1 + y^2 - 4y + 4 - 4 = 0;$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 = 4.$$

Центр данной окружности находится в точке $(-1, 2)$

$$x^2 + 8x + 16 - 16 + y^2 + 4y + 4 = 0;$$

$$(x + 4)^2 + (y + 2)^2 = 16.$$

Центр второй окружности находится в точке $(-4, -2)$.

Центр искомой окружности находится в точке $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$.

Радиус искомой окружности $r = \sqrt{(-1 + 2,5)^2 + 4} = 2,5$.

Уравнение искомой окружности $\left(x + \frac{5}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{25}{4}$ или $x^2 + y^2 + 5x = 0$.

Ответ. $x^2 + y^2 + 5x = 0$.

Задача 7.35 Найти полуоси, фокусы и эксцентриситет эллипса

$$4x^2 + 9y^2 = 16.$$

Решение. Разделив на 16 обе части уравнения, перейдем к каноническому уравнению эллипса (7.18)

$$\frac{x^2}{4} + \frac{9y^2}{16} = 1$$

или

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16/9} = 1.$$

Сравнивая это уравнение с каноническим, находим большую и малую полуоси:

$$a^2 = 4, b^2 = \frac{16}{9}, a = 2, b = \frac{4}{3}.$$

Вычислим координаты фокусов эллипса

$$c^2 = a^2 - b^2 = 4 - \frac{16}{9} = \frac{20}{9} \Rightarrow c = \frac{2\sqrt{5}}{3}.$$

Координаты фокусов $F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right), F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right)$.

По формуле (7.19) находим эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Ответ. $a = 2, b = \frac{4}{3}, F_1\left(-\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right), F_2\left(\frac{2\sqrt{5}}{3}, 0\right), \varepsilon = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

Задача 7.36 Эллипс с центром в начале координат проходит через точки $(\sqrt{2}, -\sqrt{3})$ и $\left(\frac{2\sqrt{6}}{3}, \sqrt{2}\right)$. Найти уравнение эллипса.

Решение. Пусть полуоси эллипса равны a и b . Так как данные точки лежат на эллипсе, то верна система уравнений:

$$\begin{cases} \frac{2}{a^2} + \frac{3}{b^2} = 1, \\ \frac{8}{3a^2} + \frac{2}{b^2} = 1, \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{a^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a^2 = 4.$$

Подставим значение $a^2 = 4$ в первое уравнение и найдем b^2 :

$$\frac{2}{4} + \frac{3}{b^2} = 1; \quad \frac{3}{b^2} = \frac{1}{2}; \quad b^2 = 6.$$

Уравнение эллипса имеет вид $3x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

Ответ. $3x^2 + 2y^2 - 12 = 0$.

Задача 7.37 В эллипсе $x^2 + 4y^2 = 36$ вычислить длину хорды, проходящей через фокус эллипса перпендикулярно к его большой оси.

Решение. Преобразуем уравнение эллипса к виду (7.18):

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

Отсюда имеем: $a = 3$, $b = 3$.

Вычислим координаты фокусов эллипса:

$$c = \sqrt{36 - 9} = 3\sqrt{3}.$$

Координаты фокусов $(\pm 3\sqrt{3}, 0)$.

Составим уравнение хорды эллипса, проходящей через фокус перпендикулярно к большой оси: $x = 3\sqrt{3}$.

Найдем координаты концов хорды, для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + 4y^2 = 36, \\ x = 3\sqrt{3}, \end{cases} \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2}.$$

Вычислим длину искомой хорды:

$$d = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3 \text{ (ед. масштаба).}$$

Ответ. Длина хорды равна 3.

Задача 7.38 Найти эксцентриситет, координаты фокусов и уравнения асимптот гиперболы $x^2 - 4y^2 = 16$. Построить эскиз гиперболы.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду (7.21) и выразим длины полуосей:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = 1; \quad a = 4, \quad b = 2;$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

Координаты фокусов гиперболы $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$.

Эксцентриситет гиперболы

$$\varepsilon = \frac{c}{a} = 0,5\sqrt{5} \approx 1,1.$$

Уравнения асимптот: $y = \pm 0,5x$.

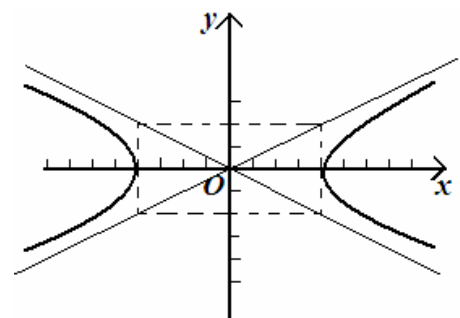


Рисунок 27

Эскиз гиперболы изображен на рисунке 27.

Ответ. $\varepsilon \approx 1,1$; $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$ - координаты фокусов; $y = \pm 0,5x$.

Задача 7.39 Составить уравнение гиперболы, эксцентриситет которой равен 1,25, имеющей общие фокусы с эллипсом $3x^2 + 8y^2 = 120$.

Решение. Приведем уравнение эллипса к виду (7.18):

$$\frac{x^2}{40} + \frac{y^2}{15} = 1.$$

Найдем c : $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{40 - 15} = 5$. Координаты фокусов эллипса, а следовательно, и гиперболы $(\pm 5, 0)$ Так как эксцентриситет гиперболы $\varepsilon = \frac{c}{a}$, то

$$\frac{5}{a} = \frac{5}{4}, \text{ откуда}$$

$a = 4$ (действительная полуось гиперболы),

$b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$ (мнимая полуось гиперболы).

Уравнение искомой гиперболы имеет вид $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ или $9x^2 - 16y^2 = 144$.

Ответ. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

Задача 7.40 Написать уравнения прямых, проходящих через точку $(-2, 6)$ параллельно асимптотам гиперболы $4x^2 - 9y^2 = 36$.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду (7.21) и найдем значения a и b (полуоси гиперболы):

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1,$$

отсюда $a = 3$, $b = 2$.

Уравнения асимптот гиперболы: $y = \pm \frac{2}{3}x$.

По условию параллельности прямых угловой коэффициент искомых прямых, проходящих через точку $(-2, 6)$, равен $\pm \frac{2}{3}$. Уравнения искомых прямых:

при $k = \frac{2}{3}$ $y - 6 = \frac{2}{3}(x + 2)$ или $2x - 3y + 22 = 0$;

при $k = -\frac{2}{3}$ $y - 6 = -\frac{2}{3}(x + 2)$ или $2x + 3y - 14 = 0$.

Ответ. $2x - 3y + 22 = 0$ и $2x + 3y - 14 = 0$.

Задача 7.41 Найти эксцентриситет гиперболы, если угол между ее асимптотами равен 60° .

Решение. Пусть k_1 и k_2 - угловые коэффициенты асимптот, причем известно, что $k_1 = -k_2$, а поэтому тангенс угла между асимптотами выразится так:

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \left| \frac{2k_1}{1 - k_1^2} \right| = \sqrt{3}.$$

После решения двух уравнений $2k_1 = \sqrt{3}(1 - k_1^2)$ и $2k_1 = \sqrt{3}(k_1^2 - 1)$ получим угловые коэффициенты асимптот:

$$\pm \frac{b}{a} = \pm \sqrt{3} \quad \text{и} \quad \pm \frac{b}{a} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Возведя в квадрат обе части уравнений, получим $b^2 = 3a^2$ или $a^2 = 3b^2$.

Найдем эксцентриситет гиперболы: $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$;

$$\varepsilon_1 = \frac{2a}{a} = 2 \quad \text{при } b^2 = 3a^2;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{2a}{a\sqrt{3}} \approx 1,2 \quad \text{при } a^2 = 3b^2.$$

Ответ. $\varepsilon_1 = 2$, $\varepsilon_2 \approx 1,2$.

Задача 7.42 Найти острый угол между асимптотами гиперболы $x^2 - 2y^2 = 2$.

Решение. Приведем уравнение гиперболы к каноническому виду и найдем длины полуосей:

$$\frac{x^2}{2} - y^2 = 1; \quad a = \sqrt{2}; \quad b = 1.$$

Уравнения асимптот гиперболы:

$$y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}x \quad \text{или} \quad y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}x.$$

Острый угол между асимптотами определим через тангенс:

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}}{1 - \frac{1}{2}} \right| = 2\sqrt{2} = 1,828; \quad \alpha = 61^\circ 20'.$$

Ответ. $\alpha = 61^\circ 20'$.

Задача 7.43 Найти уравнение параболы, вершина которой лежит в точке $(3, -1)$, а фокус – в точке $(5, -1)$.

Решение. Так как ординаты вершины и фокуса параболы одинаковы, то осью параболы служит прямая $y + 1 = 0$. Абсцисса фокуса больше абсциссы вершины параболы, а поэтому парабола своими ветвями обращена вправо.

Уравнение семейства парабол, вершина которых находится в точке $(3, -1)$ имеют вид

$$(y + 1)^2 = 2p(x - 3).$$

Определим p : $\frac{p}{2} = 5 - 3$; $\frac{p}{2}$ - расстояние между вершиной и фокусом параболы, $p = 2 \cdot 2 = 4$.

Следовательно, уравнение искомой параболы имеет вид

$$(y + 1)^2 = 8(x - 3) \quad \text{или} \quad y^2 + 2y - 8x + 25 = 0.$$

$$\text{Ответ. } y^2 + 2y - 8x + 25 = 0.$$

Задача 7.44 Парабола проходит через точку $(9, 4)$ и имеет вершину в точке $(-3, -2)$. Найти уравнение параболы, если ее ось параллельна оси Ox . Построить эскиз параболы.

Решение. Так как ось параболы параллельна оси Ox и вершина находится в точке $(-3, -2)$, то

$$(y + 2)^2 = 2p(x + 3).$$

Взято $+2p$, так как абсцисса точки $(9, 4)$ больше абсциссы вершина $(-3, -2)$, а поэтому парабола обращена ветвями вправо. Точка $(9, 4)$ принадлежит параболы, следовательно,

$$(4 + 2)^2 = 2p(9 + 3); \quad p = \frac{3}{2}.$$

Запишем уравнение искомой параболы

$$(y + 2)^2 = 2 \cdot \frac{3}{2}(x + 3)$$

или

$$y^2 + 4y - 3x - 5 = 0.$$

Для построения эскиза параболы найдем координаты точек пересечения параболы с координатными осями:

$$\text{с осью } Ox: 3x = -5; \quad x = -1\frac{2}{3}. \text{ Точка } \left(-1\frac{2}{3}; 0\right);$$

$$\text{с осью } Oy: y^2 + 4y - 5 = 0; \quad y_1 = -5; \quad y_2 = 1. \text{ Точки } (0, -5) \text{ и } (0, 1).$$

Эскиз параболы изображен на рисунке 28.

$$\text{Ответ. } y^2 + 4y - 3x - 5 = 0.$$

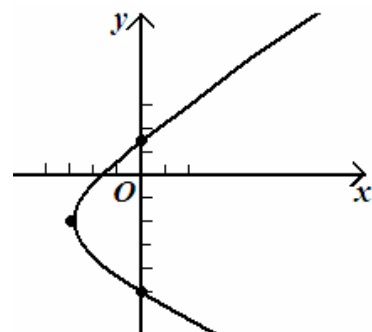


Рисунок 28

Задача 7.45 Вычислить длину хорды, проходящей через фокус параболы $x^2 = 8y$ и перпендикулярной к ее оси симметрии. Построить эскиз параболы.

Решение. Найдем координаты фокуса параболы. Так как $2p = 8$, то $p = 4$. Координаты фокуса $(0, 2)$. Осью параболы служит ось Oy , а поэтому уравнение хорды, проходящей через фокусы симметрии, есть $y - 2 = 0$.

Найдем координаты точек пересечения хорды и параболы для этого решим систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 8y, \\ y = 2, \end{cases} \quad x = \pm 4.$$

Координаты точек пересечения $(\pm 4; 2)$.

Длина хорды $d = 8$ ед. масштаба. Эскиз параболы можно построить по следующим точкам:

$(0, 0)$, $(\pm 2, 0,5)$ и $(\pm 4, 2)$.

Эскиз параболы дан на рисунке 29.

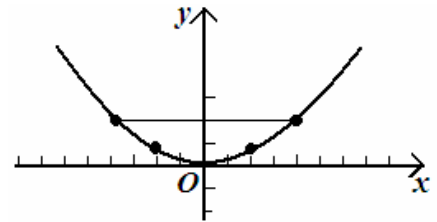


Рисунок 29

Ответ. $d = 8$.

Задача 7.46 Дана парабола $y^2 = 6x$. Через точку $N(4,1)$ провести такую хорду, которая делилась бы в этой точке пополам.

Решение. Уравнение искомой хорды запишем в виде $y - 1 = k(x - 4)$ или $y = k(x - 4) + 1$.

Для нахождения точек пересечения хорды с параболой необходимо решить систему

$$\begin{cases} y^2 = 6x, \\ y = k(x - 4) + 1. \end{cases}$$

Подставляя второе уравнение в первое, получим

$$k^2(x^2 - 8x + 16) + 2k(x - 4) + 1 = 6x$$

или

$$k^2 x^2 - 2(4k^2 - k + 3)x + 16k^2 - 8k + 1 = 0.$$

Это уравнение можно записать так:

$$x^2 - \frac{2(4k^2 - k + 3)}{k^2}x + \frac{16k^2 - 8k + 1}{k^2} = 0.$$

По теореме Виета для корней x_1, x_2 этого уравнения находим

$$x_1 + x_2 = \frac{2(4k^2 - k + 3)}{k^2}.$$

Так как $N(4,1)$ - середина хорды, то $\frac{x_1 + x_2}{2} = 4$.

Следовательно, $\frac{4k^2 - k + 3}{k^2} = 4$, откуда $k = 3$.

Таким образом, получаем следующее уравнение искомой хорды
 $y - 1 = 3(x - 4)$ или $3x - y - 11 = 0$.

Ответ. $3x - y - 11 = 0$.

Задача 7.47 Даны точка $A(1, 0)$ и прямая $x = 2$. В декартовых координатах составить уравнение линии, каждая точка $M(x, y)$ которой: а) в два раза ближе к точке A , чем к данной прямой; б) в два раза дальше от точки A , чем от данной прямой; в) равноудалена от точки A и прямой $x = 2$.

Решение.

а) По условию $2MA = MN$ (рисунок 30). Отсюда, так как $N(2, y)$, то

$$2\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2},$$

$$4(x^2 - 2x + 1 + y^2) = x^2 - 4x + 4,$$

$$3x^2 + 4y^2 - 4x = 0,$$

$$3(x^2 - (4/3)x + 4/9) + 4y^2 = 4/3,$$

$$3(x - 2/3)^2 + 4y^2 = 4/3,$$

$$\frac{(x - 2/3)^2}{4/9} + \frac{y^2}{1/3} = 1.$$

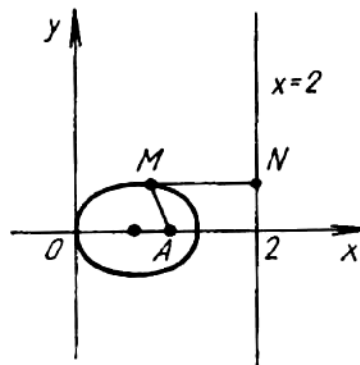


Рисунок 30

Следовательно, искомая линия – эллипс. Точка A совпадает с правым его фокусом, а прямая $x = 2$ – правая директриса;

б) По условию $MA = 2MN$ (рисунок 31). Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-2)^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = 4x^2 - 16x + 16,$$

$$3x^2 - y^2 - 14x + 15 = 0,$$

$$3(x^2 - (14/3)x + 49/9) - y^2 = 4/3,$$

$$3(x - 7/3)^2 - y^2 = 4/3,$$

$$\frac{(x - 7/3)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3} = 1.$$

Искомой линией является гипербола. Точка A совпадает с ее левым фокусом, а прямая $x = 2$ - левая директриса;

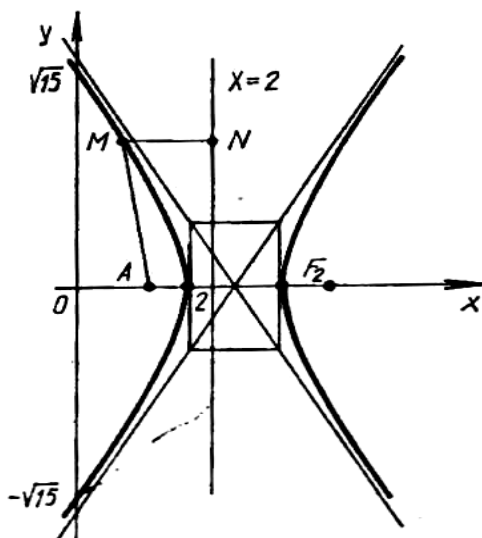


Рисунок 31

в) По условию $MA = MN$ (рисунок 12). Следовательно,

$$\sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-2)^2},$$

$$x^2 - 2x + 1 + y^2 = x^2 - 4x + 4,$$

$$y^2 = -2x + 3,$$

$$y^2 = -2(x - 3/2).$$

Получили уравнение параболы (рисунок 32). Точка A совпадает с фокусом, а прямая $x = 2$ - директриса.

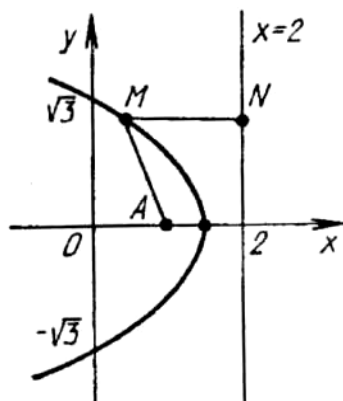


Рисунок 32

Ответ. $\frac{(x - 2/3)^2}{4/9} + \frac{y^2}{1/3} = 1$ - эллипс, $\frac{(x - 7/3)^2}{4/9} - \frac{y^2}{4/3} = 1$ - гипербола,
 $y^2 = -2(x - 3/2)$ - парабола.

Задача 7.48 Определить вид кривой на плоскости по уравнению

$$9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0.$$

Решение. В этом неполном уравнении второго порядка коэффициенты при квадратах переменных имеют одинаковый знак. Значит уравнение относится к эллиптическому типу. Выделяя полные квадраты по обоим переменным, преобразуем левую часть уравнения:

$$9(x^2 - 6x + 9) + 4(y^2 - 8y + 16) - 81 - 64 + 109 = 0,$$

$$9(x - 3)^2 + 4(y - 4)^2 - 36 = 0.$$

Разделим обе части уравнения на 36

$$\frac{(x - 3)^2}{4} + \frac{(y - 4)^2}{9} = 1.$$

Вводя новые координаты по формулам $x' = x - 3$, $y' = y - 4$, запишем уравнение в виде

$$\frac{x'^2}{4} + \frac{y'^2}{9} = 1.$$

Ответ. Это уравнение эллипса с полуосями $a = 2$, $b = 3$ и с центром в точке $O_1(3, 4)$.

Задача 7.49 Исследуем кривую второго порядка, заданную своим уравнением $9x^2 + 4y^2 - 18x + 16y - 11 = 0$.

Решение. В этом неполном уравнении второго порядка коэффициенты при квадратах переменных имеют одинаковый знак. Значит уравнение относится к эллиптическому типу. Выделяя полные квадраты по обоим переменным, получаем

$$9(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) - 11 = 0,$$

$$9(x - 1)^2 + 4(y + 2)^2 = 36,$$

$$\frac{(x - 1)^2}{2^2} + \frac{(y + 2)^2}{3^2} = 1.$$

Следовательно, после параллельного переноса системы координат $x' = x - 1$, $y' = y + 2$ получим уравнение

$$\frac{x'^2}{2^2} + \frac{y'^2}{3^2} = 1,$$

которое задает эллипс с полуосями $a = 2$, $b = 3$.

Так как $a < b$, то фокусы лежат на вертикальной оси

симметрии. Поэтому $c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{5}$, а

эксцентриситет $\varepsilon = c/b = \sqrt{5}/3$. Центр эллипса

находится в точке O' с координатами $(1, -2)$ (рисунок

33). Отметим, что полученное уравнение эллипса не является каноническим, для перехода в каноническую систему координат требуется дополнительный поворот

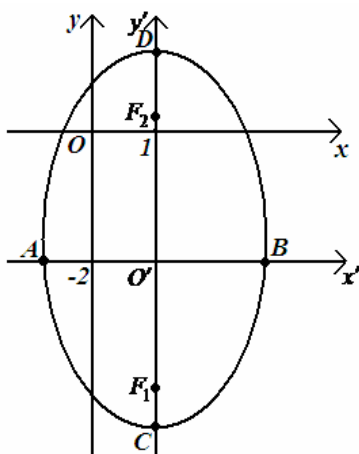


Рисунок 33

системы координат $O'x'y'$ на угол 90° .

Приведем остальные характеристики кривой:

Система координат	$O'x'y'$	Oxy
Координаты вершин	$A(-2, 0)$	$A(1-2, -2)$
	$B(2, 0)$	$B(1+2, -2)$
	$C(0, -3)$	$C(1, -2-3)$
	$D(0, 3)$	$D(1, -2+3)$
Координаты фокусов	$F_1(0, -\sqrt{5})$	$F_1(1, -2-\sqrt{5})$
	$F_2(0, \sqrt{5})$	$F_2(1, -2+\sqrt{5})$
Уравнения директрис	$y' = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$	$y + 2 = \pm \frac{9}{\sqrt{5}}$

Задача 7.50 Определить вид кривой и ее расположение на плоскости по уравнению $4x^2 - 9y^2 - 24x + 18y - 9 = 0$.

Решение. В неполном уравнении кривой второго порядка $4x^2 - 9y^2 - 24x + 18y - 9 = 0$ коэффициенты при квадратах переменных имеют противоположный знак. Поэтому уравнение относится к гиперболическому типу. Выделяя полные квадраты по обоим переменным, получаем

$$4(x^2 - 6x + 9 - 9) - 9(y^2 + 2y + 1 - 1) - 9 = 0,$$

$$4(x-3)^2 - 9(y-1)^2 = 36,$$

$$\frac{(x-3)^2}{3^2} - \frac{(y-1)^2}{2^2} = 1.$$

В канонических координатах $x' = x - 3$, $y' = y - 1$ уравнение имеет вид

$$\frac{x'^2}{3^2} - \frac{y'^2}{2^2} = 1.$$

Оно задает гиперболу с центром в точке $O'(3, 1)$, действительной полуосью $a = 3$, мнимой полуосью $b = 2$. При этом $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ (рисунок 34).

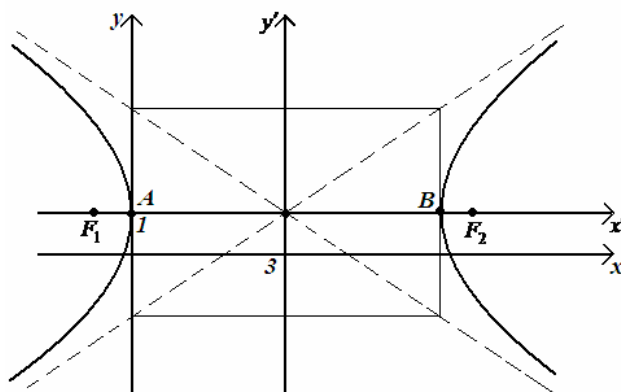


Рисунок 34

Приведем остальные характеристики по этой гиперболе:

Система координат	$O'x'y'$	Oxy
Координаты вершин	$A(-3, 0)$ $B(3, 0)$	$A(3 - 2, 1)$ $B(3 + 3, 1)$
Координаты фокусов	$F_1(-\sqrt{13}, 0)$ $F_2(\sqrt{13}, 0)$	$F_1(3 - \sqrt{13}, 1)$ $F_2(3 + \sqrt{13}, 1)$
Уравнения директрис	$x' = \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$	$x - 3 = \pm \frac{9}{\sqrt{13}}$
Уравнения асимптот	$y' = \pm \frac{2}{3}x'$	$y - 1 = \pm \frac{2(x - 3)}{3}$

Задача 7.51 Определить вид кривой и ее расположение на плоскости по уравнению $x^2 + 2x - 6y + 7 = 0$.

Решение. Неполное уравнение кривой второго порядка $x^2 + 2x - 6y + 7 = 0$ относится к параболическому типу, поскольку содержит только одно слагаемое с переменным в квадрате. Выделяя полный квадрат по x , получаем

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 6y + 7 = 0,$$

$$(x + 1)^2 = 6(y - 1).$$

В координатах $x' = x + 1$, $y' = y - 1$ уравнение имеет вид

$$(x')^2 = 2 \cdot 3y'.$$

Это парабола с вертикальной осью симметрии, для которой $p = 3$, а $\frac{p}{2} = 1,5$. Вершина параболы находится в точке $O'(-1, 1)$ (рисунок 35).

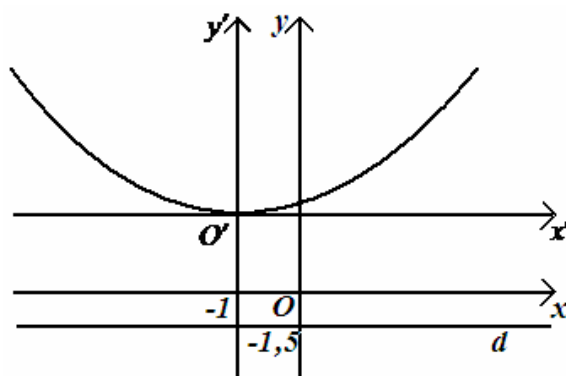


Рисунок 35

Укажем остальные характеристики кривой:

Система координат	$O'x'y'$	Oxy
Координаты фокусов	$F(0, 1,5)$	$F(-1, 1 + 1,5)$
Уравнения директрис	$x' = -1,5$	$x + 1 = -1,5$

Задача 7.52 Привести к каноническому виду уравнение кривой и нарисовать кривую $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$, и найти координаты центра в первоначальной системе координат.

Решение. Начнем с поворота осей. Целью этого преобразования, является уничтожение в преобразованном уравнении члена, содержащего произведение текущих координат.

Формулы преобразования координат поворотом осей без изменения начала координат имеют вид
$$\begin{cases} x = x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi, \\ y = x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi. \end{cases}$$

Подставляя эти значения x и y в заданное уравнение, будем иметь

$$5(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi)^2 + 4(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) \cdot (x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + 8(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi)^2 - 32(x_1 \cos \varphi - y_1 \sin \varphi) - 56(x_1 \sin \varphi + y_1 \cos \varphi) + 80 = 0.$$

Раскроем скобки и получим

$$\begin{aligned} &5x_1^2 \cos^2 \varphi - 10x_1 y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + 5y_1^2 \sin^2 \varphi + 4x_1^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi - \\ &- 4x_1 y_1 \sin^2 \varphi + 4x_1 y_1 \cos^2 \varphi - 4y_1^2 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + 8x_1^2 \sin^2 \varphi + \\ &+ 16x_1 y_1 \sin \varphi \cdot \cos \varphi + 8y_1^2 \cos^2 \varphi - 32x_1 \cos \varphi + 32y_1 \sin \varphi - 56x_1 \sin \varphi - \\ &- 56y_1 \cos \varphi + 80 = 0. \end{aligned}$$

Сделаем приведение подобных членов:

$$\begin{aligned} &(5\cos^2 \varphi + 4\sin \varphi \cdot \cos \varphi + 8\sin^2 \varphi)x_1^2 + (6\sin \varphi \cdot \cos \varphi - 4\sin^2 \varphi + 4\cos^2 \varphi)x_1 y_1 + \\ &+ (5\sin^2 \varphi - 4\sin \varphi \cdot \cos \varphi + 8\cos^2 \varphi)y_1^2 - (32\cos \varphi + 56\sin \varphi)x_1 - \\ &- (56\cos \varphi + 32\sin \varphi)y_1 + 80 = 0. \end{aligned} \quad (*)$$

Выберем теперь угол поворота φ так, чтобы коэффициент при $x_1 y_1$ обратился в нуль. Приравнявая этот коэффициент нулю, получаем уравнение для определения значения угла φ , при котором этот коэффициент обратится в нуль:

$$6\sin \varphi \cdot \cos \varphi - 4\sin^2 \varphi + 4\cos^2 \varphi = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $\cos^2 \varphi$ ($\cos \varphi \neq 0$, так как если $\cos \varphi = 0$, то $\sin \varphi = \pm 1$, и тогда это уравнение не имеет места, ибо получается, что $-4 = 0$. Это замечание следует помнить и при решении последующих задач). После упрощений получим

$$2\operatorname{tg}^2 \varphi - 3\operatorname{tg} \varphi - 2 = 0.$$

Отсюда получаем для тангенса угла φ поворота координатных осей такие значения: $\operatorname{tg} \varphi = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{4}$ или $(\operatorname{tg} \varphi)_1 = 2$ и $(\operatorname{tg} \varphi)_2 = -\frac{1}{2}$.

Эти два значения $\operatorname{tg} \varphi$ соответствуют двум взаимно-перпендикулярным направлениям, так как произведение этих тангенсов равно -1 . Из $(\operatorname{tg} \varphi)_1 = 2$ следует, что угол поворота φ может находиться в первой или третьей четвертях, а из $(\operatorname{tg} \varphi)_2 = -\frac{1}{2}$ следует, что угол поворота φ может находиться во второй или

четвертой четвертях. Условимся всегда брать для $\operatorname{tg} \varphi$ из двух возможных значений – положительное, а угол поворота φ – в первой четверти $\left(0 < \varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, из двух возможных значений тангенса берем $(\operatorname{tg} \varphi)_1 = 2$. Определим по известному $\operatorname{tg} \varphi$ величину $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$. Это нам нужно для того, чтобы определить коэффициенты при x_1^2 , y_1^2 , x_1 и y_1 в уравнении (*).

Так как у нас $\operatorname{tg} \varphi > 0$, а угол φ находится в первой четверти, то по известному $\operatorname{tg} \varphi$ функции $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ могут быть определены следующим образом: $\sin \varphi = +\frac{\operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$, $\cos \varphi = +\frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}$.

Из этого следует, что $\sin \varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}$,

$$\sin^2 \varphi = \frac{4}{5}, \quad \cos^2 \varphi = \frac{1}{5}, \quad \sin \varphi \cdot \cos \varphi = \frac{2}{5}.$$

При найденных значениях $\sin \varphi$ и $\cos \varphi$ коэффициент при x_1^2 равен 9, коэффициент при $x_1 y_1$ – нулю, коэффициент при y_1^2 равен 4, коэффициент при x_1 равен $-\frac{144}{\sqrt{5}}$, а коэффициент при y_1 равен $\frac{8}{\sqrt{5}}$. Подставляя эти значения в уравнение (*), получим

$$9\left(x_1^2 - \frac{16}{\sqrt{5}}x_1\right) + 4\left(y_1^2 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1\right) + 80 = 0.$$

Выделяя в скобках полные квадраты, имеем

$$9\left[\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{64}{5}\right] + 4\left[\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{1}{5}\right] + 80 = 0,$$

$$\text{откуда } 9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{576}{5} + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 - \frac{4}{5} + 80 = 0,$$

$$\text{или } 9\left(x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2 + 4\left(y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 36. \quad (**)$$

$$\text{Введем обозначения: } x_2 = x_1 - \frac{8}{\sqrt{5}};$$

$$y_2 = y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \text{из сравнения с формулами}$$

заключаем, что $x_0 = +\frac{8}{\sqrt{5}}$, $y_0 = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, а уравнение (**)

$$\text{перепишем так: } 9x_2^2 + 4y_2^2 = 36.$$

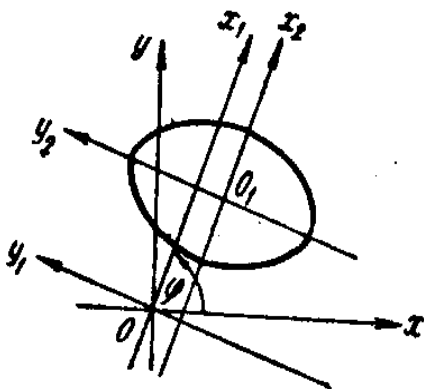


Рисунок 36

После деления обеих частей равенства на 36 получим данное уравнение в каноническом виде: $\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{9} = 1$.

Итак, данное уравнение определяет эллипс. Он вытянут вдоль оси O_1y_2 (рисунок 36).

Задача 7.53 Привести к каноническому виду уравнение

$$x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0.$$

Решение. Преобразуем уравнение с помощью формул поворота осей:

$$(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)^2 x_1^2 - 2(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha)(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) + \\ + (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)^2 - 10(x_1 \cos \alpha - y_1 \sin \alpha) - 6(x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha) + 25 = 0,$$

или

$$(\cos^2 \alpha - 2 \sin \alpha \cos \alpha + \sin^2 \alpha)x_1^2 + (\sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \alpha + \cos^2 \alpha)y_1^2 + \\ + 2(\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)x_1 y_1 - (10 \cos \alpha + 6 \sin \alpha)x_1 + (10 \sin \alpha - 6 \cos \alpha)y_1 + 25 = 0.$$

Приравнявая к нулю коэффициент при произведении $x_1 y_1$, имеем $2 \sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha = 0$, откуда $\operatorname{tg}^2 \alpha = 1$, т.е. $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = -1$. Возьмем $\operatorname{tg} \alpha = 1$, откуда $\alpha = \frac{\pi}{4}$ и $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Тогда уравнение принимает вид

$$2y_1^2 - 8\sqrt{2}x_1 + 2\sqrt{2}y_1 + 25 = 0, \text{ или } 2(y_1^2 + \sqrt{2}y_1) - 8\sqrt{2}x_1 + 25 = 0.$$

Выражение в скобках дополним до полного квадрата:

$$2\left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 8\sqrt{2}x_1 - 24, \text{ или } \left(y_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4\sqrt{2}\left(x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}\right).$$

Приняв за новое начало точку $O'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, применим формулы преобразования координат

$$x_1 = x_2 - \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad y_1 = y_2 + \frac{\sqrt{2}}{2};$$

получим

$$y_2^2 = 4\sqrt{2}x_2 - \text{уравнение параболы.}$$

Линии, заданные уравнениями в полярных координатах и параметрическими уравнениями

Полярные координаты точки и уравнение линии в полярных координатах

Положение некоторой точки M на плоскости в прямоугольной декартовой системе координат Oxy определяется числами x и y , т.е. $M(x, y)$ (рисунок 37). Эту точку можно задать и другим способом,

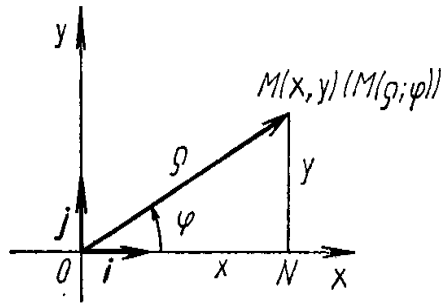


Рисунок 37

Например, с помощью расстояния $\rho = |\overline{OM}|$ и угла φ , отсчитываемого против хода часовой стрелки от оси Ox , называемой **полярной осью**, до радиуса-вектора $\overline{OM}$. В этом случае используется запись $M(\rho; \varphi)$. Расстояние ρ называется **полярным радиусом**, φ — **полярным углом** точки M , а точка O — **полюсом**.

Связь между декартовыми x , y и полярными ρ , φ координатами M при указанном расположении осей Ox и Oy , вектора $\overline{OM}$ и угла φ выражается формулами:

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi, \rho \geq 0, \\ y = \rho \sin \varphi, 0 \leq \varphi < 2\pi \end{cases} \quad (7.29)$$

С помощью формул (7.29) можно находить декартовы координаты точки M по ее полярным координатам. Если эти формулы разрешить относительно ρ и φ , то получим формулы:

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (7.30)$$

с помощью которых по декартовым координатам точки M легко найти ее полярные координаты.

Формулы (7.29) и (7.30) дают также возможность переходить от уравнений линий, заданных в декартовых координатах, к их уравнениям в полярных координатах, и наоборот.

Задача 7.54 Построить точки, заданные полярными координатами: $M_1(2; \pi/6)$, $M_2(1; 3\pi/4)$, $M_3(3; 5\pi/4)$, $M_4(2; 5\pi/6)$, $M_5(3/2; \pi/2)$, $M_6(4; 0)$, $M_7(3; 7\pi/4)$.

Решение. Вначале проведем луч под углом φ к полярной оси Ox , затем на построенном луче отложим от полюса O отрезок длиной ρ . В итоге найдем все семь точек (рисунок 38). Отрезок OE определяет единицу длины.

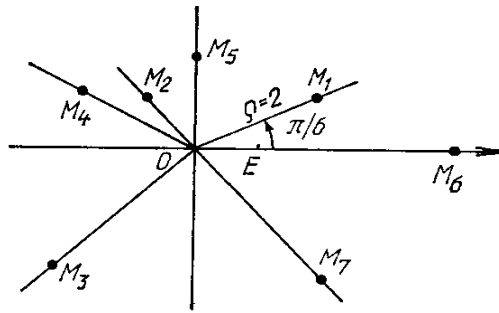


Рисунок 38

Задача 7.55 Точки заданы декартовыми координатами: $A(\sqrt{2}, -\sqrt{2})$, $B(0, -3)$, $C(\sqrt{3}, 1)$. Построить эти точки и найти их полярные координаты.

Решение. Согласно формулам (7.30), получаем: для точки A : $\rho = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = -1$, $\varphi = 7\pi/4$, т.е. $A(2; 7\pi/4)$; для точки B : $\rho = 3$, $\sin \varphi = -1$, $\varphi = 3\pi/2$, значит, $B(3; 3\pi/2)$; для точки C : $\rho = 2$, $\operatorname{tg} \varphi = 1/\sqrt{3} = \sqrt{3}/3$, $\varphi = \pi/6$, т.е. $C(2; \pi/6)$ (рисунок 39).

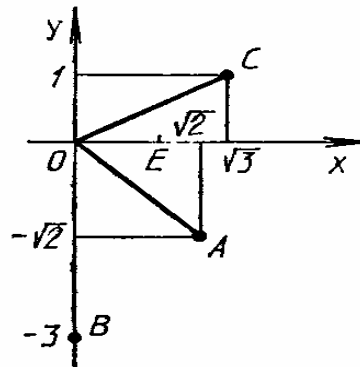


Рисунок 39

Задача 7.56 Построить кардиоиду $\rho = a(1 + \cos \varphi)$ и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

Решение. Для построения кардиоиды находим значения полярного радиуса для различных углов: $\rho(0) = 2a$; $\rho\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3a}{2}$; $\rho\left(\pm \frac{\pi}{2}\right) = a$; $\rho(\pi) = 0$. Заменяя ρ и $\cos \varphi$ по формулам (7.30), получим уравнение кардиоиды в прямоугольной системе координат

$$\sqrt{x^2 + y^2} = a \left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right), \text{ или } x^2 + y^2 = a(x + \sqrt{x^2 + y^2}),$$

которое можно представить в виде

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$$

Ответ. $(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2).$

Задача 7.57 Уравнение эллипса $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$ представить в полярной системе координат, при условии, что полюс находится в фокусе эллипса.

Решение. По условию $a = 2$, $b = \sqrt{3}$. Фокальный параметр эллипса $q = \frac{b^2}{a} = \frac{3}{2}$, а его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{4 - 3}}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, полярное уравнение эллипса есть

$$\rho = \frac{q}{1 - \varepsilon \cos \varphi} = \frac{3/2}{1 - (1/2)\cos \varphi} = \frac{3}{2 - \cos \varphi}.$$

Ответ. $\rho = \frac{3}{2 - \cos \varphi}.$

Задача 7.58 Записать уравнение линии $(x^2 + y^2)^{3/2} = 4(x^2 - 3y^2)$ в полярных координатах.

Решение. Воспользовавшись формулами (7.29), подставим в данное уравнение вместо x и y их выражения. Получим

$$\begin{aligned} (\rho^2 \cos^2 \varphi + \rho^2 \sin^2 \varphi)^{3/2} &= 4(\rho^2 \cos^2 \varphi - 3\rho^2 \sin^2 \varphi), \\ (\rho^2)^{3/2} (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi)^{3/2} &= 4(\rho^2 \cos^2 \varphi - 3\rho^2 \sin^2 \varphi) \\ \rho^3 &= 4(\rho^2 \cos^2 \varphi - 3\rho^2 \sin^2 \varphi). \end{aligned}$$

Считая $\rho \neq 0$, преобразуем последнее уравнение:

$$\begin{aligned} \rho &= 4(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi - 2\sin^2 \varphi), \\ \rho &= 4(\cos 2\varphi - 1 + \cos 2\varphi), \quad \rho = 4(2\cos 2\varphi - 1). \end{aligned}$$

Ответ. $\rho = 4(2\cos 2\varphi - 1).$

Задача 7.59 На окружности радиуса a зафиксирована точка O . Луч Ox вращается около точки O , при этом он пересекает окружность в некоторой точке N . На прямой ON от точки N в направлении луча Ox откладывается отрезок $NM = b$. Когда луч Ox совершит полный оборот, точка M опишет кривую, называемую **улиткой Паскаля**. Составить уравнение этой кривой и построить ее. Показать, что при $b = 2a$ получается кардиоида.

Решение. Примем точку O за полюс, а полярную ось совместим с диаметром OA (рисунок 40). Непосредственно из чертежа находим

$$\rho = OM = ON + NM.$$

Подставляя в это равенство выражения

$$ON = 2a \cos \varphi, \quad NM = b,$$

получим уравнения улитки Паскаля в полярных координатах

$$\rho = 2a \cos \varphi + b.$$

Исходя из определения кривой, легко построить ряд точек. Форма кривой зависит от соотношения между постоянными $2a$ и b . Если $b < 2a$, кривая имеет

вид, изображенный на рисунке 40. На рисунке 41 изображена кривая для случая $b > 2a$.

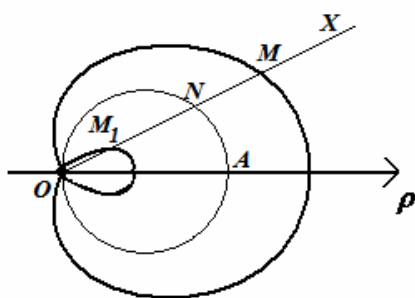


Рисунок 40

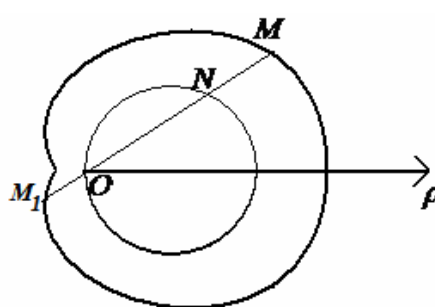


Рисунок 41

Если $b = 2a$, то уравнение улитки Паскаля примет вид $\rho = 2a(1 + \cos \varphi)$ - это уравнение кардиоиды.

В декартовых прямоугольных координатах уравнение улитки Паскаля таково:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Ответ. $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 - b^2(x^2 + y^2) = 0.$

Задача 7.60 Прямая $x = a$ пересекает ось Ox в точке A и произвольный луч OB в точке B . На луче от точки B по обе стороны отложены отрезки BM_1 и BM_2 , равные AB . Написать уравнение геометрического места точек M_1 и M_2 в полярных и прямоугольных декартовых координатах. (Кривая эта называется **строфоидой**.)

Решение. Из рисунка 42 получаем

$$\rho = OB \pm AB.$$

Так как

$$OB = \frac{a}{\cos \varphi}, \quad AB = a \tan \varphi,$$

то

$$\rho = \frac{a(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}.$$

В декартовых координатах это уравнение примет вид

$$y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}.$$

Ответ. $\rho = \frac{a(1 \pm \sin \varphi)}{\cos \varphi}$ и $y^2 = \frac{x(x-a)^2}{2a-x}.$

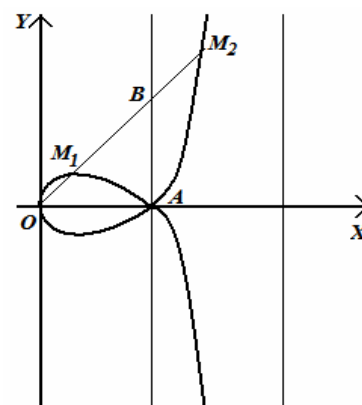


Рисунок 42

Задача 7.61 Выведите уравнение лемнискаты в декартовой и полярной системе координат.

Решение. Эта кривая есть геометрическое место точек, произведение расстояний которых до двух данных точек F_1 и F_2 есть постоянная величина a^2 , где $2a$ - расстояние F_1F_2 .

Таким образом, для любой точки $M(x, y)$ лемнискаты будем иметь

$$r_1 r_2 = a^2. \quad (***)$$

Приступая к выводу уравнения, мы оси координат располагаем, как показано на рисунке 43. Координаты точек F_1 и F_2 тогда будут $F_1(-a; 0)$, $F_2(a; 0)$.

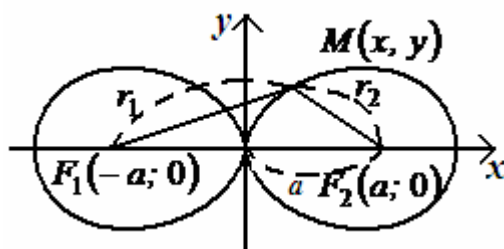


Рисунок 43

Рассматривая r_1 как расстояние между точками $F_1(-a; 0)$ и $M(x, y)$ и r_2 как расстояние между точками $F_2(a; 0)$ и $M(x, y)$, из (***) получим

$$\begin{aligned} \sqrt{(x+a)^2 + y^2} \sqrt{(x-a)^2 + y^2} &= a^2, \\ (x^2 + a^2 + y^2 + 2ax)(x^2 + a^2 + y^2 - 2ax) &= a^4, \\ (x^2 + y^2 + a^2)^2 - 4a^2x^2 &= a^4, \\ (x^2 + y^2)^2 + 2a^2(x^2 + y^2) - 4a^2x^2 &= 0, \\ (x^2 + y^2)^2 &= 2a^2(x^2 - y^2). \end{aligned} \quad (****)$$

Это и есть уравнение лемнискаты в прямоугольных координатах.

Однако гораздо проще будет выглядеть уравнение лемнискаты, отнесенное к полярным координатам (полюс в O , полярная ось Ox). Его получим, если в уравнение (****) заменим x и y их выражениями, полученными из формул перехода

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi.$$

Тогда уравнение (****) примет вид

$$\left[r^2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) \right]^2 = 2a^2 r^2 (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi),$$

или $r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi$,

или, извлекая корень и оставляя только знак +,

$$r = a\sqrt{2} \sqrt{\cos 2\varphi}.$$

В заключении дадим краткое исследование формы лемнискаты согласно найденному уравнению. Ход изменения r с изменением φ ясен из нижеследующей таблицы:

φ	2φ	r
Возрастает от 0° до 45°	Возрастает от 0° до 90°	Убывает от $h = a\sqrt{2}$ до 0
Возрастает от 45° до 135°	Возрастает от 90° до 270°	Мнимое
Возрастает от 135° до 180°	Возрастает от 270° до 360°	Возрастает от 0 до h
При дальнейшем изменении от 180° до 360° все указанные изменения r повторятся в той же последовательности.		

Параметрические уравнения линии

Уравнения вида

$$\begin{cases} x = f_1(t), \\ y = f_2(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2, \\ z = f_3(t), \end{cases} \quad (7.31)$$

где $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$ — некоторые функции параметра t , называются *параметрическими уравнениями* линии в пространстве. В частном случае, когда $f_3(t) \equiv 0$ (или $f_1(t) \equiv 0$, или $f_2(t) \equiv 0$), получаем параметрические уравнения линии на плоскости $z = 0$ (или $x = 0$, или $y = 0$). Следует отметить, что уравнения (7.31) задают не только линию, но и «закон движения» точки $M(x, y, z)$ по этой линии: каждому значению параметра t соответствует определенное положение точки на линии.

Задача 7.62 Выяснить, какую линию задают указанные параметрические уравнения

$$\begin{cases} x = a \sin^2 t, \quad a > 0, \\ y = b \cos^2 t, \quad b > 0, \quad -\infty < t < \infty. \\ z = 0, \end{cases}$$

Решение. Это отрезок прямой, концы которого лежат на осях координат в точках $A(a, 0)$ и $B(0, b)$. При изменении t в интервале $(-\infty; +\infty)$ точка $M(t)$ отрезка AB бесчисленное множество раз «пробегаёт» этот отрезок (рисунок 44).

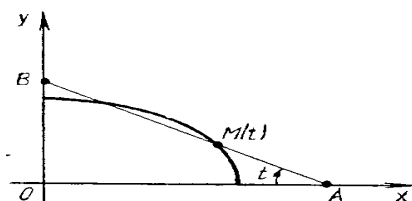


Рисунок 44

Задача 7.63 Построить линию, заданную параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = 0, \\ y = t - 1/t + 2, \\ z = t + 1/t - 3. \end{cases}$$

Решение. Данная линия лежит в координатной плоскости Oyz . Придавая различные значения параметру t , можно получить достаточное количество точек линии, по которым она строится. Чтобы более точно изучить эту линию, воспользуемся методом исключения параметра. Перенесем числа 2 и -3 во втором и третьем уравнениях системы в левую часть. Возведем обе части уравнений в квадрат и из $(z + 3)^2$ вычтем $(y - 2)^2$. Тогда:

$$(z + 3)^2 - (y - 2)^2 = (t + 1/t)^2 - (t - 1/t)^2 = 4.$$

$$\frac{(z + 3)^2}{4} - \frac{(y - 2)^2}{4} = 1.$$

Следовательно, в координатной плоскости $x = 0$ имеем равнобочную гиперболу ($a = b = 2$) с центром в точке $C(0, 2, -3)$, изображенную на рисунке 45.

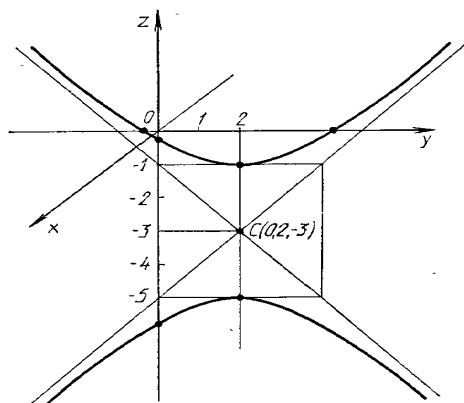


Рисунок 45

Задача 7.64 Написать параметрические уравнения окружности радиуса R с центром в начале координат.

Решение. Пусть $M(x, y)$ - произвольная точка окружности (рисунок 46). Тогда

$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

Полученные уравнения и будут искомыми. Исключая параметр t из этих уравнений (для чего нужно возвести в квадрат оба уравнения и почленно сложить), получим уравнение окружности в прямоугольных координатах:

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Ответ.
$$\begin{cases} x = R \cos t, \\ y = R \sin t. \end{cases}$$

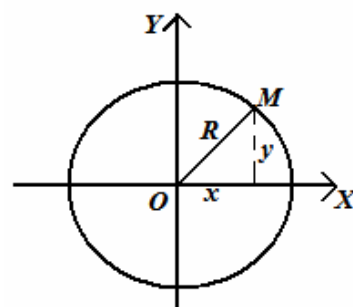


Рисунок 46

Задача 7.65 По окружности $x^2 + y^2 = a^2$ перемещается прямая, начальное положение которой $x = a$. Определить траекторию точки перемещающейся прямой, принимая за начальное ее положение точку $A(a, 0)$. (Кривая называется *разверткой окружности*.)

Решение. Возьмем произвольную точку N данной окружности (рисунок 47). Введем угол $t = \angle AON$. В силу условия задачи длина дуги NA равна длине отрезка NM , где M - точка искомой траектории, начальное положение которой совпадало с точкой A . Координаты точки M через угол t и радиус a выразятся следующим образом:

$$\begin{aligned} x &= OP = OK + KP = OK + QM = \\ &= a \cos t + NM \sin t = a \cos t + at \sin t; \\ y &= MP = QK = NK - NQ = \\ &= a \sin t - MN \cos t = a \sin t - at \cos t. \end{aligned}$$

Таким образом, получены следующие параметрические уравнения развертки окружности:

$$\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t), \\ y = a(\sin t - t \cos t). \end{cases}$$

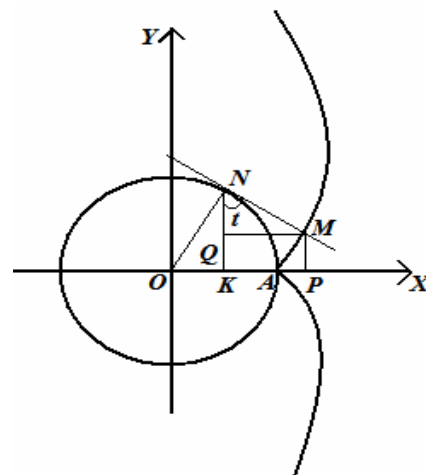


Рисунок 47

7.1 Задачи для самостоятельного решения

7.66 Вычислить периметр треугольника с вершинами $A(3,4)$, $B(3,8)$, $C(6,4)$.

Ответ. 12.

7.67 Даны вершины треугольника $A(2,1)$, $B(-2,-2)$, $C(-8,6)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины B .

Ответ. $h = 2\sqrt{5}$.

7.68 Найти точки пересечения линии $3x + 4y - 12 = 0$ с координатными осями.

Ответ. $A(4,0)$, $B(0,3)$.

7.69 Составить уравнения геометрического места точек, равноудаленных от точек пересечения линий: $x^2 + y^2 = 25$, $4x - 3y = 0$.

Ответ. $3x + 4y = 0$.

7.70 Записать уравнения прямых, на которых лежат стороны равнобедренной трапеции, зная, что основания ее равны 10 и 6, а боковые стороны образуют с большим основанием угол 60° . Большее основание лежит на оси абсцисс, а ось симметрии трапеции – на оси ординат.

Ответ. $y = 0$, $y = 2\sqrt{3}$, $y\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$, $y = -\sqrt{3}x + 5\sqrt{3}$.

7.71 Записать уравнения прямых, которые проходят через точку $A(3, -1)$ и параллельны: а) оси абсцисс; б) оси ординат; в) биссектрисе первого координатного угла; г) прямой $y = 3x + 9$.

Ответ. а) $y = -1$; б) $x = 3$; в) $y = x - 4$; г) $y = 3x - 10$.

7.72 Записать уравнение прямой, проходящей через точки $A(-1, 3)$, $B(4, 5)$.

Ответ. $2x - 5y + 17 = 0$.

7.73 Точка $A(-2, 3)$ лежит на прямой, перпендикулярной к прямой $2x - 3y + 8 = 0$. Записать уравнение этой прямой.

Ответ. $3x + 2y = 0$.

7.74 Точка $A(2, -5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Вычислить площадь квадрата.

Ответ. 5.

7.75 Найти уравнение прямой, параллельной прямой $12x + 5y - 52 = 0$ и отстоящей от нее на расстоянии 2.

Ответ. $12x + 5y - 26 = 0$, $12x + 5y - 78 = 0$.

7.76 Записать уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей угол 45° с прямой $y = 2x + 5$.

Ответ. $3x + y = 0$.

7.77 На прямой $x - 2y + 2 = 0$ найти точку равноудаленную от точек $M_1(-2, 3)$, $M_2(2, -1)$.

Ответ. $N(0, 1)$.

7.78 При каких значениях n прямые, заданные уравнениями $(n + 1)x + (3 - n)y + 16 = 0$; $(n - 3)x + (2n - 3)y + 6 = 0$, окажутся взаимно перпендикулярными?

Ответ. $n = 3, n = 4$.

7.79 Найти уравнение окружности, проходящей через точку $(6, -1)$ и имеющей центр в точке $(2, -5)$.

Ответ. $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 32$.

7.80 Составить каноническое уравнения эллипса, если известно, что:

а) расстояние между фокусами равно 24 и большая ось 26;

б) большая полуось равна 10 и эксцентриситет 0,8.

Ответ. а) $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1$; б) $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$.

7.81 Дан эллипс $x^2 + 2y^2 = 8$. Через точку $M(1,1)$ провести хорду, делящуюся в этой точке пополам.

Ответ. $x + 2y - 3 = 0$.

7.82 Найти уравнение окружности, если концы одного из ее диаметров находятся в точках $A(3,9)$, $B(7,3)$.

Ответ. $(x - 5)^2 + (y - 6)^2 = 13$.

7.83 Составить уравнение гиперболы, имеющей вершины в фокусах эллипса $\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{144} = 1$, а фокусы в его вершинах.

Ответ. $\frac{x^2}{81} - \frac{y^2}{144} = 1$.

7.84 Найти касательные к параболе $x^2 = 4y$, проходящей через точку $N(0, -1)$.

Ответ. $x + y + 1 = 0$.

7.85 Написать уравнение параболы, симметричной относительно оси Oy и проходящей через точки пересечения прямой $x + y = 0$ и окружности $x^2 + y^2 + 8y = 0$.

Ответ. $x^2 = -4y$.

7.86 Найти точки гиперболы $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$, находящиеся на расстоянии 7 от фокуса F_1 .

Ответ. $M(-6, \pm 4\sqrt{3})$.

8 Аналитическая геометрия в пространстве

Плоскость в пространстве

В декартовых прямоугольных координатах уравнение любой плоскости приводится к виду

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad (8.1)$$

где, A, B, C, D - числа, причем $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, и обратно, уравнение (8.1) всегда является уравнением некоторой плоскости.

Уравнение (8.1) называется *общим уравнением плоскости*. Коэффициенты A, B, C являются координатами вектора $\vec{n}$, перпендикулярного к плоскости, заданной уравнением (8.1). Он называется *нормальным вектором* этой плоскости и определяет ориентацию плоскости в пространстве относительно системы координат.

Существуют различные способы задания плоскости и соответствующие им виды ее уравнения.

1. Уравнение плоскости по точке и нормальному вектору

Если плоскость проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярна к вектору $\vec{n} = \{A, B, C\}$, то ее уравнение записывается в виде

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (8.2)$$

2. Уравнение плоскости в «отрезках»

Если плоскость пересекает оси координат Ox, Oy, Oz в точках $M_1(a, 0, 0), M_2(0, b, 0), M_3(0, 0, c)$ соответственно, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \quad (8.3)$$

где $a \neq 0; b \neq 0; c \neq 0$.

3. Уравнение плоскости по трем точкам

Если плоскость проходит через точки $M_i(x_i, y_i, z_i)$ ($i = \overline{1, 3}$), не лежащие на одной прямой, то ее уравнение можно записать в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.4)$$

Раскрыв данный определитель по элементам первой строки, приходим к уравнению вида (8.2).

Уравнения (8.2) – (8.4) всегда можно привести к виду (8.1).

4. Уравнения плоскости в нормальном виде

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0, \quad (8.5)$$

где α, β, γ - углы между координатными осями Ox, Oy, Oz и перпендикуляром, опущенным из начала координат на плоскость, а p - длина этого перпендикуляра.

Для приведения общего уравнения плоскости (8.1) к нормальному виду (8.5) необходимо обе его части умножить на нормирующий множитель

$$\lambda = \frac{1}{\pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad (8.6)$$

выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в уравнении (8.1).

5. **Уравнение связки плоскостей**, проходящих через точку $M(x, y, z)$, имеет вид

$$A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0. \quad (8.7)$$

Давая A, B, C в уравнении (8.7) различные значения, мы получим различные плоскости, проходящие через точку $M(x, y, z)$.

Рассмотрим простейшие задачи.

1. Величина угла φ между плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ вычисляется на основании формулы

$$\cos \varphi = \cos(n_1, n_2) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}, \quad (8.8)$$

где $\bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$, $\bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ - нормальные векторы данных плоскостей.

8. С помощью формулы (8.8) можно получить *условие перпендикулярности* данных плоскостей:

$$\bar{n}_1 \cdot \bar{n}_2 = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3. *Условие параллельности* рассматриваемых плоскостей, имеет вид

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

4. Расстояние d от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости, заданной уравнением (8.1) вычисляется по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (8.9)$$

Задача 8.1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2; -2; 4)$ перпендикулярно вектору $\bar{a}\{2, -1, 4\}$ (рисунок 48).

Решение. Для составления уравнение плоскости используем формулу (8.2), где вектор $\bar{a}$ нормальный вектор плоскости. В результате получаем следующее уравнение

$$2(x - 2) - 1(y + 2) + 4(z - 4) = 0,$$

$$2x - y + 4z - 22 = 0.$$

$$\text{Ответ. } 2x - y + 4z - 22 = 0.$$

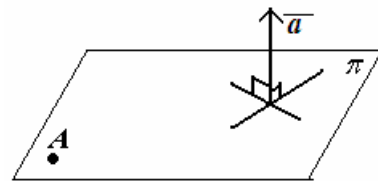


Рисунок 48

Задача 8.2 Найти уравнение плоскости, параллельной оси Oz , и проходящей через точки $A(2, 3, -1)$ и $B(-1, 2, 4)$.

Решение. Уравнение плоскости, параллельной оси Oz , имеет вид

$$Ax + By + D = 0 \quad (*)$$

(так как плоскость по условию задачи параллельна оси Oz , то в ее уравнении отсутствует координата z).

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости. Подставляя координаты точек A и B в уравнение (*), получим два уравнения:

$$\begin{cases} 2A + 3B + D = 0, \\ -A + 2B + D = 0. \end{cases}$$

Для определения коэффициентов A, B и D мы решаем систему двух однородных линейных уравнений с тремя неизвестными. Предлагаем решить данную систему самостоятельно. В результате получаем

$$A = 1; \quad B = -3; \quad D = 7.$$

Следовательно, уравнение искомой плоскости приобретет вид $x - 3y + 7 = 0$.

Проверьте правильность решения подстановкой в полученное уравнение сначала координат точки A , а потом координат точки B . Каждый раз в левой части должен получиться нуль.

Ответ. $x - 3y + 7 = 0$.

Задача 8.3 Найти уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку $A(2, 1, 3)$.

Решение. Так как искомая плоскость проходит через ось Ox , то ее уравнение имеет вид

$$By + Cz = 0. \quad (A)$$

Подставим в это уравнение координаты точки A , через которую плоскость проходит. Получим $B + 3C = 0$, откуда $B = -3C$.

Это значение B подставляем в (A) и получаем, сокращая на C , $3y - z = 0$.

Ответ. $3y - z = 0$.

Задача 8.4 Составить уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(2, 4, 1)$, $M_2(1, 0, 4)$, $M_3(-1, -1, 2)$ (рисунок 49).

Решение.

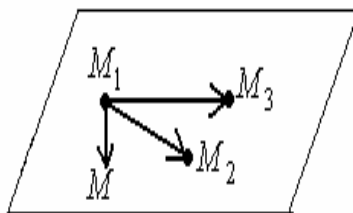


Рисунок 49

Находим уравнение плоскости, используя формулу (8.4)

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ 1-2 & 0-4 & 4-1 \\ -1-2 & -1-4 & 2-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-4 & z-1 \\ -1 & -4 & 3 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow (x-2) \begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -5 & 1 \end{vmatrix} - (y-4) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -1 & -4 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = 0, \\ (x-2) \cdot 11 - (y-4) \cdot 8 + (z-1) \cdot (-7) = 0,$$

$11x - 8y - 7z + 17 = 0$ - уравнение искомой плоскости.

Ответ. $11x - 8y - 7z + 17 = 0$.

Задача 8.5 Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$ и $M_2(2, 1, 2)$ параллельно вектору $\vec{a}\{2, -1, 1\}$.

Решение. Точка $M(x, y, z)$ принадлежит искомой плоскости в том и только в том случае, когда векторы $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\vec{a}$ компланарны (рисунок 50).

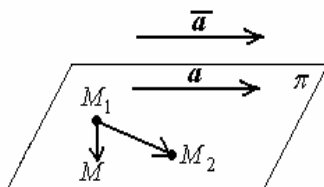


Рисунок 50

Следовательно,

$$\overline{M_1M_2} \cdot \overline{M_1M} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-1) \cdot 1 - (y-1)(-1) + (z-1)(-1) = 0 \Rightarrow x + y - z - 1 = 0.$$

Ответ. $x + y - z - 1 = 0$.

Задача 8.6 Найти угол между плоскостями $2x + 2y - z + 5 = 0$ и $4x - 2y - 2z + 6 = 0$.

Решение. Угол между плоскостями находим по формуле (8.8).

Запишем координаты нормальных векторов плоскостей:

$$\vec{n}_1 = \{2, 2, -1\}, \quad \vec{n}_2 = \{4, -2, -2\}.$$

$$\cos \varphi = \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + (-1) \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} = \frac{8 - 4 + 2}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{24}} = \frac{6}{3 \cdot 2\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

$$\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ответ. $\varphi = \arccos \frac{1}{\sqrt{6}}$.

Задача 8.7 Укажите, какие из следующих плоскостей параллельны и перпендикулярны?

$$\pi_1: 2x + 2y - z + 6 = 0;$$

$$\pi_3: 8x + 8y - 4z + 6 = 0;$$

$$\pi_2: -2x + 2y + 10 = 0;$$

$$\pi_4: 2x + 2y + z + 6 = 0.$$

Решение. Запишем координаты нормальных векторов соответствующих заданным плоскостям:

$$\vec{n}_1 = \{2, 2, -1\}, \quad \vec{n}_2 = \{-2, 2, 0\}; \quad \vec{n}_3 = \{8, 8, -4\}; \quad \vec{n}_4 = \{2, 2, 1\}.$$

Из условия параллельности плоскостей

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

следует, что $\pi_1 \nparallel \pi_2$, так как координаты нормальных векторов непропорциональны, т.е.

$$\frac{2}{-2} \neq \frac{2}{2} \neq \frac{-1}{0}.$$

Проверяем условие параллельности для плоскостей π_1 и π_3

$$\frac{2}{8} = \frac{2}{8} = \frac{-1}{-4} = \frac{1}{4} \Rightarrow \pi_1 \parallel \pi_3.$$

Аналогично проверяем условие и для плоскостей π_1 и π_4 , π_2 и π_3 , π_2 и π_4 , π_3 и π_4 . Получаем, что все эти плоскости не параллельны.

Используя условие перпендикулярности плоскостей $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$, выясним какие плоскости перпендикулярны:

$2 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 = 0$, следовательно плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны;

$2 \cdot 2 + 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 \neq 0$, значит плоскости π_1 и π_4 не перпендикулярны;

$(-2) \cdot 8 + 2 \cdot 8 + 0 \cdot (-4) = 0$ - π_2 и π_3 перпендикулярны;

$(-2) \cdot 2 + 2 \cdot 2 + 0 \cdot 1 = 0$ - π_2 и π_4 перпендикулярны;

$8 \cdot 2 + 8 \cdot 2 + (-4) \cdot 1 \neq 0$ - π_3 и π_4 не перпендикулярны.

Задача 8.8 Уравнение плоскости $5x + 7y - 34z + 5 = 0$ привести к нормальному виду.

Решение. Для приведения общего уравнения плоскости (8.1) к нормальному виду (8.5), надо обе его части умножить на нормирующий множитель (8.6), выбрав перед корнем знак, противоположный знаку свободного члена в общем уравнении плоскости. В нашем случае перед корнем следует выбрать знак минус. У нас $A = 5$; $B = 7$; $C = -34$, и для λ получаем

$$\lambda = -\frac{1}{\sqrt{5^2 + 7^2 + (-34)^2}}; \lambda = -\frac{1}{\sqrt{1230}},$$

Следовательно, уравнение плоскости $5x + 7y - 34z + 5 = 0$ принимает следующий «нормальный» вид:

$$-\frac{5}{\sqrt{1230}}x - \frac{7}{\sqrt{1230}}y + \frac{34}{\sqrt{1230}}z - \frac{5}{\sqrt{1230}} = 0.$$

$$\text{Ответ. } -\frac{5}{\sqrt{1230}}x - \frac{7}{\sqrt{1230}}y + \frac{34}{\sqrt{1230}}z - \frac{5}{\sqrt{1230}} = 0.$$

Задача 8.9 Через точку $M(2, 3, -1)$ провести плоскость, параллельную плоскости $2x - 3y + 5z - 4 = 0$ (рисунок 51).

Решение. Уравнение связки плоскостей, проходящих через данную точку, имеет вид (8.7). В нашем случае оно будет таким:

$$A(x - 2) + B(y - 3) + C(z + 1) = 0.$$

Из условия параллельности двух плоскостей

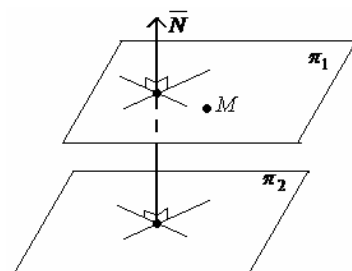


Рисунок 51

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2},$$

получаем $\frac{A}{2} = \frac{B}{-3} = \frac{C}{5} (=k).$

Заменяя в последнем уравнении A , B и C величинами, им пропорциональными, будем иметь

$$2k(x-2) - 3k(y-3) + 5k(z+1) = 0$$

или окончательно после упрощений

$$2x - 3y + 5z + 10 = 0.$$

Ответ. $2x - 3y + 5z + 10 = 0$.

Задача 8.10 Составить уравнение плоскостей по следующим данным:

а) плоскость перпендикулярна оси Oz и проходит через точку $P(1, -2, 3)$;

б) плоскость проходит через ось Oy и точку $Q(4, 2, -5)$;

в) плоскость параллельна оси Ox и проходит через две точки $R(1, 1, 2)$ и $S(5, 3, -2)$.

Решение. а) Плоскость перпендикулярна оси Oz , параллельна координатной плоскости Oxy и ее уравнение имеет вид

$$Cz + D = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки P , получим $C \cdot 3 + D = 0$, откуда $D = -3C$. Следовательно, $Cz - 3C = 0$, $C(z - 3) = 0$, но $C \neq 0$, значит получим уравнение $z - 3 = 0$ или $z = 3$.

б) Так как плоскость проходит через ось Oy , то ее уравнение ищем в таком виде:

$$Ax + Cz = 0.$$

Подставляя в это уравнение координаты точки Q , получим $A \cdot 4 + C \cdot (-5) = 0$, откуда $A = \frac{5}{4}C$. Таким образом, плоскость имеет уравнение

$$\frac{5}{4}Cx + Cz = 0 \text{ или } C\left(\frac{5}{4}x + z\right) = 0, \text{ но } C \neq 0, \text{ значит } 5x + 4z = 0.$$

в) Поскольку плоскость параллельна оси Ox , то ее уравнение не содержит члена с x , т.е. имеет вид

$$By + Cz + D = 0.$$

Так как плоскость проходит через две точки R и S , то их координаты удовлетворяют уравнению. Подставляя координаты этих точек в данное уравнение, получим

$$B + 2C + D = 0; \quad 3B - 2C + D = 0,$$

откуда $B = -\frac{D}{2}$, $C = -\frac{D}{4}$. Следовательно, уравнение принимает вид

$$-\frac{D}{2}y - \frac{D}{4}z + D = 0 \text{ или } 2y + z - 4 = 0.$$

Ответ. а) $z - 3 = 0$, б) $5x + 4z = 0$, в) $2y + z - 4 = 0$.

Задача 8.11 Вычислить расстояние от точек $M_1(3, 4, -7)$, $M_2(2, 4, 9)$, $M_3(5, 1, 0)$ до плоскости $2x - y + 2z - 9 = 0$.

Решение. Для нахождения расстояния от точки до плоскости используем формулу (8.9)

В результате получаем:

$$d_1 = \frac{|2 \cdot 3 - 4 + 2(-7) - 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|-21|}{3} = 7;$$

$$d_2 = \frac{|2 \cdot 2 - 4 + 2 \cdot 9|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{|9|}{3} = 3; \quad d_3 = \frac{|2 \cdot 5 - 1 + 2 \cdot 0 - 9|}{3} = 0.$$

Следовательно, точка M_3 лежит на данной плоскости.

Ответ. $d_1 = 7, d_2 = 3, d_3 = 0$.

Задача 8.12 Найти расстояние от точки $M_0(1, 2, 4)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(4, 2, 1), M_2(-3, 6, 3), M_3(-1, 0, 4)$.

Решение. 1-й способ. Сначала найдем уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(4, 2, 1), M_2(-3, 6, 3), M_3(-1, 0, 4)$, для этого используем решение задачи 8.4.

Находим уравнение плоскости, используя формулу (8.4)

$$\begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-1 \\ -3-4 & 6-2 & 3-1 \\ -1-4 & 0-2 & 4-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-4 & y-2 & z-1 \\ -7 & 4 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x-4) \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -7 & 4 \\ -5 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$(x-4) \cdot 16 - (y-2) \cdot (-11) + (z-1) \cdot 34 = 0,$$

$$16x + 11y + 34z - 120 = 0.$$

Расстояние от точки до плоскости находим по формуле (8.9)

$$d_1 = \frac{|16 \cdot 1 + 11 \cdot 2 + 34 \cdot 4 - 120|}{\sqrt{16^2 + 11^2 + 34^2}} = \frac{54}{\sqrt{1533}}.$$

2-й способ. Расстояние d от точки $M_0(1, 2, 4)$ до плоскости равно длине проекции вектора $\overline{M_1M_0}$ на нормальный вектор плоскости $\vec{n}$, т.е.

$$d = \left| \text{пр}_{\vec{n}} \overline{M_1M_0} \right| = \frac{\left| (\vec{n}, \overline{M_1M_0}) \right|}{|\vec{n}|}$$

Поскольку нормальный вектор плоскости $\vec{n}$ ортогонален векторам $\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}$ его можно найти как их векторное произведение:

$$\vec{n} = [\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}]$$

Находим координаты векторов

$$\overline{M_1M_2} = \{-7, 4, 2\}, \overline{M_1M_3} = \{-5, -2, 3\}, \overline{M_1M_0} = \{-3, 0, 3\},$$

и нормального вектора плоскости:

$$\vec{n} = [\overrightarrow{M_1M_2}, \overrightarrow{M_1M_3}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -7 & 4 & 2 \\ -5 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 16\vec{i} + 11\vec{j} + 34\vec{k}.$$

Вычисляем расстояние d от точки M_0 до плоскости

$$d = \frac{|\langle \vec{n}, \overrightarrow{M_1M_0} \rangle|}{|\vec{n}|} = \frac{|16 \cdot (-3) + 11 \cdot 0 + 34 \cdot 3|}{\sqrt{16^2 + 11^2 + 34^2}} = \frac{54}{\sqrt{1533}}.$$

Ответ. $d = \frac{54}{\sqrt{1533}}$ ед. длины.

Задача 8.13 На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки $A(9, -2, 2)$ и от плоскости $3x - 6y + 2z - 3 = 0$.

Решение. Пусть $M(x, 0, 0)$ - искомая точка ($y=0$, $z=0$, так как точка лежит на оси Ox). Находим расстояние от этой точки до данной плоскости и от точки A :

$$d_1 = \frac{|3 \cdot x - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 3|}{\sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = \frac{|3x - 3|}{7};$$

$$d_2 = MA = \sqrt{(9-x)^2 + (-2)^2 + 2^2}.$$

В соответствии с условием имеем $d_1 = d_2$, поэтому

$$\sqrt{(9-x)^2 + 8} = \frac{|3x-3|}{7} \text{ или } 7\sqrt{x^2 - 18x + 89} = 3|x-1|.$$

Возведя в квадрат обе части последнего уравнения и приводя подобные члены, получим

$$5x^2 - 108x + 544 = 0.$$

Решая это квадратное уравнение, находим $x_1 = 8$, $x_2 = 13,6$. Следовательно, условию задачи удовлетворяют две точки: $M_1(8, 0, 0)$ и $M_2(13,6; 0; 0)$.

Ответ. $M_1(8, 0, 0)$ и $M_2(13,6; 0; 0)$.

Задача 8.14 Составить уравнение плоскостей, делящих пополам двугранные углы между пересекающимися плоскостями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Решение. Каждая из искомых плоскостей является геометрическим местом точек, равноудаленных от двух данных плоскостей. Пусть $M(x, y, z)$ - произвольная точка искомой плоскости, тогда:

$$d_1 = \frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}}; \quad d_2 = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Так как по условию $d_1 = d_2$, то

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1z + D_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2z + D_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

откуда получаем уравнения искомых плоскостей:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1z + D_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2z + D_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

В частности, если даны плоскости $5x - 10y + 10z - 6 = 0$, $10x + 2y - 11z + 4 = 0$, то уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между ними, запишутся следующим образом:

$$\frac{5x - 10y + 10z - 6}{\sqrt{5^2 + (-10)^2 + 10^2}} = \pm \frac{10x + 2y - 11z + 4}{\sqrt{10^2 + 2^2 + (-11)^2}}.$$

Следовательно,

$$5x - 10y + 10z - 6 = \pm(10x + 2y - 11z + 4),$$

откуда

$$1) 5x - 10y + 10z - 6 = (10x + 2y - 11z + 4) \text{ или } 5x + 12y - 21z + 10 = 0;$$

$$2) 5x - 10y + 10z - 6 = -(10x + 2y - 11z + 4) \text{ или } 15x - 8y - z - 2 = 0.$$

Ответ. $5x + 12y - 21z + 10 = 0$ и $15x - 8y - z - 2 = 0$.

Задача 8.15 Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $4x - 4y + 2z - 3 = 0$ и отстоящей от нее на 5 единиц.

Решение. Уравнение искомой плоскости запишем так:

$$4x - 4y + 2z + D = 0.$$

Найдем расстояние между плоскостями, для чего возьмем произвольную точку первой плоскости и определим ее расстояние до второй. Положив $x = 0$, $y = 0$, из уравнения $4x - 4y + 2z - 3 = 0$ найдем $z = \frac{3}{2}$; получим точку $M\left(0, 0, \frac{3}{2}\right)$.

Расстояние этой точки до плоскости $4x - 4y + 2z + D = 0$ определяется формулой

$$d = \frac{\left|4 \cdot 0 - 4 \cdot 0 + 2 \cdot \frac{3}{2} + D\right|}{\sqrt{16 + 16 + 4}} = \frac{|3 + D|}{6}.$$

Так как по условию $d = 5$, то для определения D имеем уравнение

$$5 = \frac{|3 + D|}{6} \text{ или } 30 = \pm(3 + D),$$

откуда

$$D_1 = 27, D_2 = -33.$$

Подставляя в искомое уравнение найденные значения D получим две плоскости

$$4x - 4y + 2z + 27 = 0 \text{ и } 4x - 4y + 2z - 33 = 0.$$

Ответ. $4x - 4y + 2z + 27 = 0$ и $4x - 4y + 2z - 33 = 0$.

Прямая в пространстве

В зависимости от способа задания прямой в пространстве можно рассматривать различные ее уравнения.

Векторно-параметрическое уравнение прямой

Пусть прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ параллельно вектору $\bar{s} = \{m, n, p\}$.

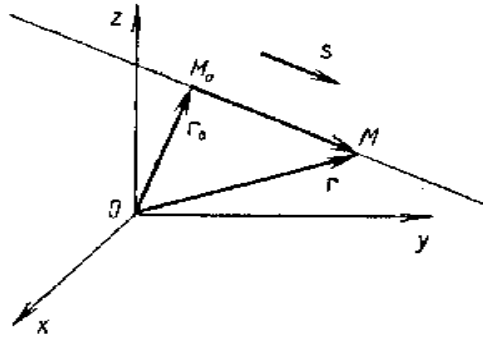


Рисунок 52

Точка $M(x, y, z)$ - любая точка этой прямой. Если $\bar{r}_0$ и $\bar{r}$ - радиус-векторы точек M_0 и M (рисунок 52), то справедливо векторное равенство

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + t\bar{s} \quad (-\infty < t < +\infty), \quad (8.10)$$

которое получается по правилу сложения векторов. Уравнение (8.10) называется *векторно-параметрическим уравнением прямой*, $\bar{s}$ - *направляющим вектором прямой* (8.10), t - *параметром*.

Параметрическое уравнение прямой

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad (8.11)$$

которые называются параметрическими уравнениями и прямой.

Канонические уравнения прямой

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (8.12)$$

Зная одно из уравнений (8.10) – (8.12), легко получить, другие уравнения.

Уравнение прямой в пространстве, проходящей через две точки

Если прямая проходит через точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то ее уравнение можно записать в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (8.13)$$

Общее уравнение прямой в пространстве

Две пересекающиеся плоскости

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, & \bar{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, & \bar{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}. \end{cases} \quad (8.14)$$

где $\bar{n}_1 \nparallel \bar{n}_2$, определяют прямую. Уравнение (8.14) называются *общим уравнением прямой в пространстве*.

Направляющий вектор $\bar{s}$ прямой, заданной уравнениями (8.14), определяется по формуле

$$\bar{s} = \bar{n}_1 \times \bar{n}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix},$$

а координаты какой-либо точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащей на этой прямой, можно найти как решение системы (8.14). Тогда уравнения данной прямой можно записать в канонической форме (8.12).

Взаимное расположение двух прямых в пространстве

Две прямые в пространстве или скрещивающиеся, или пересекаются, или параллельные, или совпадают. В любом случае они образуют некоторый угол (между их направляющими векторами $\bar{s}_1$ и $\bar{s}_2$). Если прямые заданы каноническими уравнениями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} = \frac{z-z_1}{p_1} \quad \text{и} \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} = \frac{z-z_2}{p_2}, \quad (8.15)$$

то величина угла φ между ними определяется из формулы

$$\cos \varphi = (\bar{s}_1, \bar{s}_2) = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| |\bar{s}_2|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (8.16)$$

Условие перпендикулярности прямых:

$$\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = 0 \quad \text{или} \quad m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0.$$

Условие параллельности прямых:

$$\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}.$$

Необходимое и достаточное условие пересечения непараллельных прямых ($\bar{s}_1 \nparallel \bar{s}_2$), заданных уравнениями (8.15):

$$\overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = 0 \quad \text{или} \quad \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (8.17)$$

Если условие (8.17) не выполняется, то прямые (8.15) – скрещивающиеся.

Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямой (8.12), проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в направлении вектора $\bar{s} = \{m, n, p\}$, вычисляется по формуле

$$d = \frac{|\bar{s} \cdot \overrightarrow{M_0 M_1}|}{|\bar{s}|}. \quad (8.18)$$

Задача 8.16 Составить параметрические уравнения прямых, проведенных через точку $M_0(5, -1, -4)$ в каждом из следующих случаев:

- 1) прямая параллельна прямой $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$;
- 2) прямая параллельна оси Ox ;
- 3) прямая перпендикулярна плоскости $x + 2y + 3z - 5 = 0$.

Решение. 1) Так как прямая параллельна прямой $x = 3 + 6t$, $y = 2 - 4t$, $z = 7 - t$, то они имеют один и тот же направляющий вектор $\vec{a} = \{6, -4, -1\}$. Подставляя значения $x_0 = 5$, $y_0 = -1$, $z_0 = -4$ и координаты вектора $\vec{a}$ в формулы (8.11), получим параметрические уравнения прямой

$$x = 5 + 6t, y = -1 - 4t, z = -4 - t.$$

2) Вектор, параллельный оси Ox , имеет координаты $y = 0$, $z = 0$ (координата x равна длине вектора, взятой с соответствующим знаком). В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{a} = \{1, 0, 0\}$, совпадающий с ортом $\vec{i}$, поэтому параметрические уравнения прямой имеют вид

$$x = 5 + t, y = -1, z = -4.$$

4) Поскольку вектор $\vec{n} = \{1, 2, 3\}$ перпендикулярен плоскости $x + 2y + 3z - 5 = 0$, то в силу условия он будет параллелен прямой. Следовательно, параметрические уравнения прямой примут вид

$$x = 5 + t, y = -1 + 2t, z = -4 + 3t.$$

Ответ. 1) $x = 5 + 6t$, $y = -1 - 4t$, $z = -4 - t$; 2) $x = 5 + t$, $y = -1$, $z = -4$;

3) $x = 5 + t$, $y = -1 + 2t$, $z = -4 + 3t$.

Задача 8.17 Составить канонические уравнения диагоналей параллелограмма, три вершины которого находятся в точках $A(2, 4, 6)$, $B(-3, 5, 4)$, $C(8, -6, 2)$.

Решение. Задача сводится к составлению уравнения прямой, проходящей через две точки. Напишем уравнения диагонали AC . По формуле (8.13) получаем

$$\frac{x-2}{8-2} = \frac{y-4}{-6-4} = \frac{z-6}{2-6} \Rightarrow \frac{x-2}{6} = \frac{y-4}{-10} = \frac{z-6}{-4}$$

или

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-6}{-2}.$$

Поскольку точка D не дана, то уравнения диагонали BD напишем как уравнения прямой, проходящей через точки B и S , где S - точка пересечения диагоналей. Так как S является серединой отрезка AC , то ее координаты равны полусуммам соответствующих координат концов, т.е. $S(5, -1, 4)$. Уравнения диагонали BD принимают вид

$$\frac{x+3}{5+3} = \frac{y-5}{-1-5} = \frac{z-4}{4-4}$$

или

$$\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-3}, z-4=0.$$

Ответ. Уравнения диагонали AC - $\frac{x-2}{3} = \frac{y-4}{-5} = \frac{z-6}{-2}$, уравнения

диагонали BD - $\frac{x+3}{4} = \frac{y-5}{-3}, z-4=0$.

Задача 8.18 Исследовать взаимное расположение двух прямых в каждом из следующих случаев:

- 1) $x = 1 - 3t$, $y = 2 + 5t$, $z = -3 + 4t$ и $x = -4 - 2t$, $y = 2 - 2t$, $z = 5 - t$;
- 2) $x = 2 + t$, $y = -3 - 2t$, $z = 4 - 2t$ и $y = 2 + 2t$, $y = -6 - 4t$, $z = 6 - 4t$;
- 3) $x = 6 + t$, $y = -4 - t$, $z = 2 + t$ и $x = 10 + 4t$, $y = -8 - 4t$, $z = 6 + 4t$;
- 4) $x = 6 + 2t$, $y = 0 + t$, $z = 7 + 4t$ и $x = 2 + 3t$, $y = 2 - 2t$, $z = -1 + t$.

Решение. 1) Определитель (8.17) в данном случае принимает вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \\ -4-1 & 2-2 & 5+3 \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} -3 & 5 & 4 \\ -2 & -2 & -1 \\ -5 & 0 & 8 \end{vmatrix} = 48 + 25 + 0 - 40 + 80 = 113.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то прямые скрещиваются.

2) Определитель (8.17) имеет вид

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 2-2 & -6+3 & 6-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 2 & -4 & -4 \\ 0 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку $\Delta = 0$ и только первые две строки пропорциональны, то прямые параллельны.

3) Так как в определителе

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 10-6 & -8+4 & 6-2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 4 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{vmatrix}.$$

Все строки пропорциональны, то прямые совпадают.

4) Так как определитель равен нулю, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ -4 & 2 & -8 \end{vmatrix} = 0,$$

и первые две строки не пропорциональны, то прямые пересекаются.

Ответ. 1) прямые скрещиваются; 2) прямые параллельны; 3) прямые совпадают; 4) прямые пересекаются.

Задача 8.19 В уравнениях прямой $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{n}$ определить параметр n так,

чтобы эта прямая пересекалась с прямой $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$, и найти точку их пересечения.

Решение. Для нахождения параметра n используем условие (8.17) пересечения двух прямых; полагая $x_1 = -1$, $y_1 = -5$, $z_1 = 0$, $x_2 = 0$, $y_2 = 0$, $z_2 = 0$, $l_1 = 3$, $m_1 = 2$, $n_1 = 1$, $l_2 = 2$, $m_2 = -3$, $n_2 = n$, получим

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & n \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad 2n + 10 + 3 - 15n = 0, \text{ т.е. } n = 1.$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямых $\frac{x}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z}{1}$, выразим из первых уравнений x и y через z :

$$x = 2z, \quad y = -3z.$$

Подставляя эти значения в равенство $\frac{x+1}{3} = \frac{y+5}{2}$, имеем $\frac{2z+1}{3} = \frac{-3z+5}{2}$, откуда $z = 1$. Зная z , находим $x = 2z = 2$, $y = -3z = -3$.

Следовательно, $M(2, -3, 1)$ точка пересечения этих прямых.

Ответ. $M(2, -3, 1)$.

Задача 8.20 Найти углы между координатными осями и прямой, проходящей через две точки $M_1(2\sqrt{2}; 4; -5)$, $M_2(\sqrt{2}; 3; -4)$.

Решение. В качестве направляющего вектора можно взять вектор $\vec{a} = \overline{M_1M_2} = \{\sqrt{2} - 2\sqrt{2}, 3 - 4, -4 + 5\} = \{-\sqrt{2}, -1, 1\}$.

Направляющие косинусы этого вектора определяются формулами

$$\cos \alpha = \frac{x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{z}{|\vec{a}|}.$$

В нашем случае

$$\cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{2+1+1}} = \frac{-\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = \frac{-1}{2}; \quad \cos \gamma = \frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямая образует с координатными осями углы

$$\alpha = 135^\circ, \quad \beta = 120^\circ, \quad \gamma = 60^\circ.$$

Ответ. $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 120^\circ$, $\gamma = 60^\circ$.

Задача 8.21 Составить уравнение прямой, проведенной через точку $M_0(2, -3, 5)$ перпендикулярно двум прямым:

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y-3}{2} = \frac{z+5}{2}; \quad \frac{x-2}{6} = \frac{y+1}{3} = \frac{z+7}{-2}.$$

Решение. Уравнение прямой ищем в виде

$$\frac{x-2}{l} = \frac{y+3}{m} = \frac{z-5}{n}.$$

Коэффициенты l, m, n , определяемые с точностью до постоянного множителя, в силу перпендикулярности направляющих векторов этих прямых, должны удовлетворять системе двух уравнений:

$$\begin{cases} (-1)l + 2m + 2n = 0, \\ 6l + 3m - 2n = 0. \end{cases}$$

Складывая и вычитая почленно эти уравнения, получим

$$\begin{cases} 5l + 5m = 0, \\ 3l - 2n = 0, \end{cases}$$

откуда $l = -m, l = \frac{2}{3}n$. Полагая, например, $n = 3$, получим $l = 2, m = -2$.

Следовательно, уравнение прямой примет вид

$$\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}.$$

Ответ. $\frac{x-2}{2} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z-5}{3}.$

Задача 8.22 Найти острый угол между двумя прямыми

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-3}{2},$$

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{-2}.$$

Решение. Угол φ между двумя прямыми определяется по формуле (8.16), в которой надо взять

$$m_1 = 3, n_1 = -1, p_1 = 2,$$

$$m_2 = 2, n_2 = 4, p_2 = -2.$$

Следовательно,

$$\cos \varphi = \pm \frac{3 \cdot 2 + (-1)4 + 2(-2)}{\sqrt{3^2 + (-1)^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 4^2 + (-2)^2}},$$

$$\cos \varphi = \pm \frac{-2}{\sqrt{14}\sqrt{24}} = \mp \frac{1}{2\sqrt{27}}, \cos \varphi = \mp 0,1091.$$

Ответ. $\cos \varphi = \mp 0,1091.$

Задача 8.23 Написать канонические уравнения прямой, заданной как линия пересечения двух плоскостей (общими уравнениями)

$$\begin{cases} 2x + 3y + z - 8 = 0, \\ x - 2y - 2z + 1 = 0. \end{cases}$$

Решение. Проверим, что векторы $\vec{n}_1 = \{2, 3, 1\}, \vec{n}_2 = \{1, -2, -2\}$ неколлинеарны.

Имеем

$$\frac{2}{1} \neq \frac{3}{-2} \neq \frac{1}{-2}.$$

Векторы $\bar{n}_1 = \{2, 3, 1\}$, $\bar{n}_2 = \{1, -2, -2\}$ неколлинеарны, так как их координаты непропорциональны. Следовательно, две плоскости пересекаются по прямой.

Так как прямая принадлежит одновременно обеим плоскостям, то ее направляющий вектор $\vec{a}$ ортогонален нормальным векторам обеих плоскостей, т.е. $\vec{a} \perp \bar{n}_1 = \{2, 3, 1\}$, $\vec{a} \perp \bar{n}_2 = \{1, -2, -2\}$.

Следовательно, направляющий вектор $\vec{a}$ находим по формуле

$$\vec{a} = [\bar{n}_1, \bar{n}_2] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = -4\bar{i} + 5\bar{j} - 7\bar{k}.$$

Теперь находим какую-нибудь точку на прямой. Поскольку направляющий вектор прямой не параллелен ни одной из координатных плоскостей, то прямая пересекает все три координатные плоскости. Следовательно, в качестве точки на прямой может быть взята точка ее пересечения, например с плоскостью $y=0$. Координаты этой точки находим, решая систему трех уравнений

$$\begin{cases} 2x + z - 8 = 0, \\ x - 2z + 1 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Получим $x_0 = 3, y_0 = 0, z_0 = 2$, $M_0(3, 0, 2)$.

Подставляя найденные направляющий вектор и точку в канонические уравнения прямой, получим

$$\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-7}.$$

Ответ. Канонические уравнения прямой имеют вид $\frac{x-3}{-4} = \frac{y}{5} = \frac{z-2}{-7}$.

Прямая и плоскость в пространстве

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Прямая (8.12) и плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ могут пересекаться, быть параллельными либо прямая может лежать в плоскости.

Перейдем от канонических уравнений (8.12) к параметрическим (8.11) и подставим значений x, y, z из уравнений (8.11) в уравнение плоскости. Получим уравнение относительно неизвестного параметра t :

$$(Am + Bn + Cp)t + (Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D) = 0. \quad (8.19)$$

Возможны три случая.

1 При $(Am + Bn + Cp)t \neq 0$ уравнение (8.19) имеет единственное решение: $t = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D)/(Am + Bn + Cp)$. Подставив это значение t в параметрические уравнения прямой (8.11), найдем координаты точки пересечения M (рисунок 33).

$$2 \text{ При } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0 \quad (8.20)$$

уравнение (8.19) не имеет решения, и прямая не имеет общих точек с плоскостью. Формулы (8.20) являются условиями параллельности прямой и плоскости.

$$3 \text{ При } Am + Bn + Cp = 0, Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \quad (8.21)$$

любое значение t является решением уравнения (8.19), т.е. любая точка прямой принадлежит плоскости. Равенства (8.21) называются условиями принадлежности прямой и плоскости.

Углом между прямой и плоскостью называется угол между прямой и ее ортогональной проекцией на плоскость.

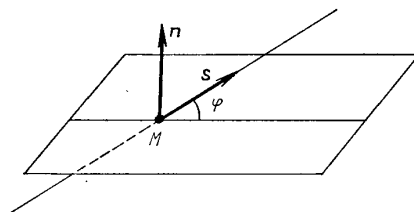


Рисунок 53

Величина угла φ между прямой и плоскостью вычисляется по формуле

$$|\cos(\vec{n}, \vec{s})| = \sin \varphi = \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (8.22)$$

Задача 8.24 Найти угол между прямой $x = 6 + 2t$, $y = -3 + t$, $z = 6 - 2t$ и плоскостью $2x - y - z + 10 = 0$.

Решение. Применим формулу (8.22). Так как $m = 2$, $n = 1$, $p = -2$, $A = 2$, $B = -1$, $C = -1$, то

$$\sin \varphi = \frac{|2 \cdot 2 + (-1) \cdot 1 + (-1) \cdot (-2)|}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{4 + 1 + 4}} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{9}} = \frac{5}{3\sqrt{6}}.$$

$$\text{Следовательно, } \varphi = \arcsin \frac{5}{3\sqrt{6}}.$$

$$\text{Ответ. } \varphi = \arcsin \frac{5}{3\sqrt{6}}.$$

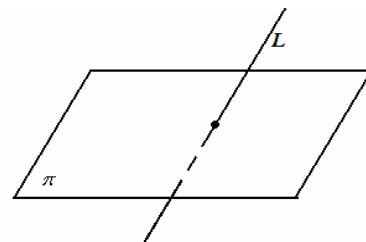


Рисунок 54

Задача 8.25 Найти точку пересечения плоскости $2x - 8y + 6z + 12 = 0$ и прямой $x = -6 + 3t$, $y = -1 + 2t$, $z = 1 + t$.

Решение. Проверим, что прямая не параллельна плоскости, т.е. что направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{3, 2, 1\}$ и нормальный вектор плоскости $\vec{n} = \{2, -8, 6\}$ не ортогональны. Для этого рассмотрим их скалярное произведение.

Имеем

$$(\vec{s}, \vec{n}) = 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-8) + 1 \cdot 6 = -4 \neq 0.$$

Следовательно, направляющий вектор прямой и нормальный вектор

плоскости не ортогональны, т.е. прямая и плоскость пересекаются в единственной точке.

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости, вообще говоря, надо решить систему трех уравнений с тремя неизвестными (два уравнения прямой и одно уравнение плоскости). Решим совместно систему уравнений прямой и плоскости. Подставим выражения x , y , z в уравнение плоскости.

$$2(-6 + 3t) - 8(-1 + 2t) + 6(1 + t) + 12 = 0,$$

$$6t - 12 - 16t + 8 + 6t + 6 + 12 = 0,$$

$$-4t + 14 = 0,$$

$$t = \frac{14}{4} \Rightarrow t = \frac{7}{2}.$$

Из уравнения прямой находим координаты точки пересечения:

$$x = -6 + 3 \cdot \frac{7}{2} = \frac{9}{2}, \quad y = -1 + 2 \cdot \frac{7}{2} = 6, \quad z = 1 + \frac{7}{2} = \frac{9}{2}.$$

Таким образом, искомой точкой пересечения является точка $N\left(\frac{9}{2}, 6, \frac{9}{2}\right)$.

Ответ. $N\left(\frac{9}{2}, 6, \frac{9}{2}\right)$.

Задача 8.26 Найти точку пересечения прямой $\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1}$ и плоскости $2x - 3y + z - 8 = 0$.

Решение. Используем решение задачи 8.24. Выражаем из канонических уравнений прямой x, y, z . Для этого необходимо перейти к параметрическим уравнениям прямой. Положим

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{0} = \frac{z}{-1} = t.$$

Тогда параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = 2t + 1, \\ y = -1, \\ z = -t. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости, находим значения параметра t , при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$2(2t + 1) - 3(-1) + 1(-t) - 8 = 0 \Rightarrow t_0 = 1.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = 1$, получаем $x_0 = 3, y_0 = -1, z_0 = -1$.

Ответ. Прямая и плоскость пересекаются в точке $(3, -1, -1)$.

Задача 8.27 Найти проекцию точки $P(6, -1, 2)$ на прямую $x = 6 - 2t$, $y = 3 - 3t$, $z = 1 + t$.

Решение. Искомая проекция является точкой пересечения прямой и плоскости, проведенной через точку P перпендикулярно этой прямой (рисунок 55). Направляющий вектор прямой $\vec{s} = \{-2, -3, 1\}$ является нормальным вектором для плоскости. Составим уравнение плоскости

$$-2(x - 6) - 3(y + 1) + 1(z - 2) = 0$$

или

$$-2x - 3y + z + 7 = 0.$$

Находим точку пересечения данной прямой и полученной плоскости. Для этого используем решение задачи 8.24

$$-2(6 - 2t) - 3(3 - 3t) + (1 + t) + 7 = 0,$$

$$4t - 12 + 9t - 9 + 1 + t + 7 = 0 \Rightarrow 14t - 13 = 0 \Rightarrow t = \frac{13}{14}.$$

$$x = 6 - 2 \cdot \frac{13}{14} = \frac{29}{7}, \quad y = 3 - 3 \cdot \frac{13}{14} = \frac{3}{14}, \quad z = 1 + \frac{13}{14} = \frac{27}{14}.$$

Итак, точка $M\left(\frac{29}{7}, \frac{3}{14}, \frac{27}{14}\right)$ является проекцией точки P на данную прямую.

Ответ. $M\left(\frac{29}{7}, \frac{3}{14}, \frac{27}{14}\right).$

Задача 8.27 Найти координаты проекции P' точки $P(1, 2, -1)$ на плоскость $3x - y + 2z - 27 = 0$.

Решение. Проекция P' точки P на плоскость является основанием перпендикуляра, опущенного из точки P на эту плоскость.

Составляем уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно данной плоскости. Для этого в качестве направляющего вектора прямой берем нормальный вектор плоскости: $\vec{s} = \vec{n} = \{3, -1, 2\}$. Тогда канонические уравнения прямой имеют вид

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{2}.$$

Найдем координаты точки P' пересечения этой прямой с заданной плоскостью. Положим

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y - 2}{-1} = \frac{z + 1}{2} = t.$$

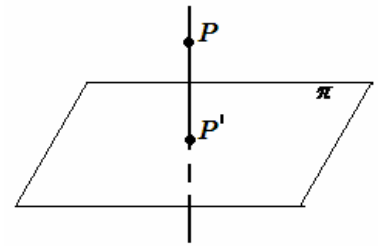


Рисунок 55

Тогда параметрические уравнения имеют вид

$$\begin{cases} x = 3t + 1, \\ y = -t + 2, \\ z = 2t - 1. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости, находим значение параметра t , при котором происходит пересечение прямой и плоскости:

$$3(3t + 1) - 1(-t + 2) + 2(2t - 1) - 27 = 0 \Rightarrow t_0 = 2.$$

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = 2$, получаем $x_0 = 7, y_0 = 0, z_0 = 1$.

Ответ. Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости есть проекция точки P на плоскость, которая имеет координаты $(7, 0, 1)$.

Задача 8.28 Из начала координат опустить перпендикуляр на прямую $\frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-3}{1}$.

Решение. Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости и полагая $A=l, B=m, C=n, D=0$, составим уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной заданной прямой. Это уравнение имеет вид $2x + 3y + z = 0$.

Найдем точку пересечения этой плоскости и данной прямой. Параметрические уравнения прямой запишутся так:

$$x = 2t + 2, \quad y = 3t + 1, \quad z = t + 3.$$

Для определения t имеем уравнение

$$2(2t + 2) + 3(3t + 1) + t + 3 = 0,$$

откуда $t = -\frac{5}{7}$. Координаты точки пересечения $x = \frac{4}{7}, y = -\frac{8}{7}, z = \frac{16}{7}$, т.е.

$$M\left(\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right).$$

Остается составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и через точку M ; используя соотношения канонические уравнения прямой, в качестве направляющего вектора берем вектор $\overrightarrow{OM} = \left\{\frac{4}{7}, -\frac{8}{7}, \frac{16}{7}\right\}$.

Следовательно, уравнение прямой примет вид

$$\frac{x}{4/7} = \frac{y}{-8/7} = \frac{z}{16/7}, \quad \text{или} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}.$$

$$\text{Ответ.} \quad \frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{4}.$$

Задача 8.29 При каком значении n прямая $x = 2 + 2t, y = 6 - 2t, z = 1 + nt$ параллельна плоскости $2x - 2y + 6z + 5 = 0$?

Решение. Обращаемся к условию параллельности прямой и плоскости. Из уравнений прямой и плоскости известно

$$\bar{n} = \{2, -2, 6\}, \quad \bar{s} = \{2, -2, n\}.$$

Используем формулу (8.20)

$$2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-2) + 6 \cdot n = 0 \Rightarrow 4 + 4 + 6n = 0 \text{ или}$$

$$6n = -8 \Rightarrow n = -\frac{8}{6} \Rightarrow n = -\frac{4}{3}.$$

Ответ. $n = -\frac{4}{3}.$

Задача 8.30 При каких значениях A и D прямая $\frac{x-2}{4} = \frac{y+5}{6} = \frac{z+1}{3}$ лежит на плоскости $Ax + 4y + 2z + D = 0$?

Решение. Так как $\bar{n} = \{A, 4, 2\}$, $\bar{s} = \{4, 6, 3\}$, то подставляя в уравнения (8.20) соответствующие значения, получим систему уравнений

$$\begin{cases} 4A + 24 + 6 = 0, \\ 2A + 4 \cdot (-5) + 2 \cdot (-1) + D = 0, \end{cases}$$

из которой определяем $A = -\frac{15}{2}$, $D = 37$.

Ответ. $A = -\frac{15}{2}$, $D = 37$.

Задача 8.31 При каких значениях m и B прямая $x = 3 + mt$, $y = -6 + 2t$, $z = 1 + t$ перпендикулярны плоскости $2x - By + 3z - 10 = 0$?

Решение. Так как $\bar{n} = \{2, -B, 3\}$, $\bar{s} = \{m, 2, 1\}$, то из условия перпендикулярности прямой и плоскости $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$ следует

$$\frac{2}{m} = \frac{-B}{2} = \frac{3}{1}, \quad \text{т.е.} \quad \frac{2}{m} = 3 \text{ и } \frac{-B}{2} = 3,$$

откуда

$$m = \frac{2}{3}, \quad B = -6.$$

Ответ. $m = \frac{2}{3}$, $B = -6$.

Задача 8.32 Найти уравнения плоскостей, проектирующих прямую

$$\begin{cases} 3x - 4y + 5z + 7 = 0, \\ x + 2y + 3z + 11 = 0 \end{cases} \quad (*)$$

на координатные плоскости.

Решение. Чтобы найти уравнение плоскости, проектирующей прямую (*) на плоскость xOy , надо из системы (*) исключить координату z . Умножая первое

уравнение этой системы на -3 , а второе на 5 и складывая полученные уравнения, будем иметь $-4x + 22y + 34 = 0$, а сокращая на -2 , получим искомое уравнение в виде $2x - 22y - 17 = 0$.

Уравнение плоскости, проектирующей прямую (*) на плоскость xOz , получим, исключая из системы (*) координату y . Умножая второе уравнение в системе (*) на 2 и складывая с первым, получим искомое уравнение в виде

$$5x + 11z + 29 = 0.$$

Уравнение плоскости, проектирующей прямую (*) на плоскость yOz , получим, исключая из (*) координату x . Умножая второе уравнение в системе (*) на -3 и складывая с первым, получим искомое уравнение в виде

$$5y + 2z + 13 = 0.$$

Ответ. $2x - 22y - 17 = 0, 5x + 11z + 29 = 0, 5y + 2z + 13 = 0$.

Задача 8.33 Найти острый угол между прямой

$$\begin{cases} x + y + z - 4 = 0, \\ 2x - y + 4z + 5 = 0 \end{cases}$$

и плоскостью $x + y + 3z - 1 = 0$.

Решение. Уравнения прямой нет надобности преобразовывать к каноническому виду. Достаточно определить координаты направляющего вектора $\vec{s} = \{m, n, p\}$ этой прямой. Зная координаты нормальных векторов плоскостей $\vec{n}_1 = \{1, 1, 1\}$, $\vec{n}_2 = \{2, -1, 4\}$, находим координаты вектора $\vec{s} = [\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

$$m = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5; \quad n = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad p = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3.$$

Из уравнения плоскости заключаем, что $A=1$, $B=1$, $C=3$ и тогда для определения острого угла φ между прямой и плоскостью по формуле (8.22) получаем

$$\sin \varphi = \left| \frac{-6}{\sqrt{11} \cdot \sqrt{38}} \right| = \frac{6}{\sqrt{418}} = 0,2935; \quad \varphi \approx 17^\circ 4'.$$

Ответ. $\varphi \approx 17^\circ 4'$.

Задача 8.34 Составьте уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x + y - 4z + 5 = 0, \\ x - y + 2z - 1 = 0 \end{cases}$$

и точку $M(1, -1, 2)$.

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через данную прямую, на основании формулы

$$Ax + By + Cz + D + \lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0,$$

(λ - любое действительное число)

может быть записано так:

$$3x + y - 4z + 5 + \lambda(x - y + 2z - 1) = 0 \quad (**)$$

Из этого пучка плоскостей нам требуется выбрать ту, которая проходит через точку $M(1, -1, 2)$.

Если плоскость проходит через точку, то координаты этой точки должны удовлетворять уравнению плоскости. Подставляя в уравнение (**) координаты точки M , получим уравнение для определения λ : $5\lambda - 1 = 0$; $\lambda = \frac{1}{5}$. Подставляя это значение λ в уравнение (**), получим $8x + 2y - 9z + 12 = 0$.

Ответ. $8x + 2y - 9z + 12 = 0$.

Задача 8.35 Найти уравнение плоскости, проходящей через прямую

$$\begin{cases} 3x - y + z - 5 = 0, \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \quad (A)$$

параллельно прямой

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{2}. \quad (B)$$

Решение. Уравнение пучка плоскостей, проходящих через прямую (A), имеет вид

$$3x - y + z - 5 + \lambda(x + 2y - z + 2) = 0,$$

или иначе

$$(3 + \lambda)x + (2\lambda - 1)y + (1 - \lambda)z - 5 + 2\lambda = 0. \quad (C)$$

Из этого пучка плоскостей должна быть отобрана плоскость, параллельная прямой (B), и потому должно выполняться условие $Am + Bn + Cp = 0$ параллельности прямой и плоскости. На основании уравнения (C) $A = 3 + \lambda$, $B = 2\lambda - 1$, $C = 1 - \lambda$, а из уравнения (B) следует, что $m = -1$, $n = 2$, $p = 2$. Тогда условие параллельности прямой и плоскости запишется в виде

$$(3 + \lambda)(-1) + (2\lambda - 1) \cdot 2 + (1 - \lambda) \cdot 2 = 0$$

или

$$-3 - \lambda + 4\lambda - 2 + 2 - 2\lambda = 0; \quad \lambda = 3.$$

Подставляя это значение λ в (C), получаем уравнение плоскости

$$6x + 5y - 2z + 1 = 0.$$

Ответ. $6x + 5y - 2z + 1 = 0$.

Задача 8.36 Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(2, -1, 2)$ относительно прямой

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z+1}{-2}.$$

Решение. Искомая точка Q лежит на прямой, перпендикулярной данной и пересекающей ее в точке P' (рисунок 56).

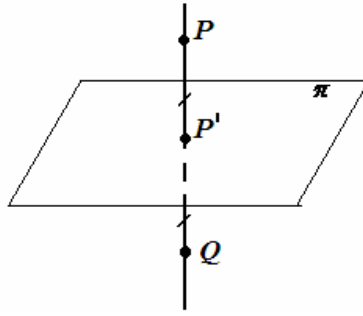


Рисунок 56

Поскольку точка P' делит отрезок PQ пополам, координаты (x_q, y_q, z_q) точки Q определяются из условий

$$x_{p'} = \frac{x_p + x_q}{2}, y_{p'} = \frac{y_p + y_q}{2}, z_{p'} = \frac{z_p + z_q}{2}, \quad (***)$$

где (x_p, y_p, z_p) – координаты точки P и $(x_{p'}, y_{p'}, z_{p'})$ – координаты ее проекции P' на данную прямую.

Найдем проекцию точки P на данную прямую, т.е. точку P' .

Для этого составим уравнение плоскости, проходящей через точку P перпендикулярной данной прямой. В качестве нормального вектора $\vec{n}$ этой плоскости можно взять направляющий вектор данной прямой $\vec{n} = \vec{a} = \{1, 0, -2\}$.

Тогда

$$1(x - 2) + 0(y + 1) - 2(z - 2) = 0 \Rightarrow x - 2z + 2 = 0;$$

Найдем точку пересечения заданной прямой и плоскости $x - 2z + 2 = 0$.

Для этого запишем уравнение прямой в параметрической форме:

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = 0, \\ z = -2t - 1. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения для x, y, z в уравнение плоскости, находим значение параметра t , при котором происходит пересечение прямой и плоскости: $t_0 = -1$.

Подставляя в параметрические уравнения прямой найденное значение $t_0 = -1$, получаем

$$x_{p'} = 0, y_{p'} = 0, z_{p'} = 1.$$

Таким образом, точка пересечения прямой и плоскости и, следовательно, проекция точки P на прямую есть $P'(0, 0, 1)$.

Координаты точки Q , симметричной P относительно прямой, определяются из условий (***) :

$$x_q = 2x_{p'} - x_p = -2,$$

$$y_q = 2y_{p'} - y_p = 1,$$

$$z_q = 2z_{p'} - z_p = 0.$$

Ответ. $Q(-2, 1, 0)$.

Задача 8.37 Найти следы плоскости $3x + 2y - 4z + 5 = 0$ на координатных плоскостях.

Решение. Уравнение прямой, по которой данная плоскость пересекается с плоскостью xOy , мы получим как уравнение геометрического места точек, координаты которых одновременно удовлетворяют уравнению данной плоскости и уравнению плоскости xOy . Так как плоскость xOy имеет уравнение $z = 0$, то уравнение искомого следа получим, положив в уравнение данной плоскости $z = 0$.

Окончательно уравнения искомого следа данной плоскости на плоскости xOy имеют вид

$$\begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0, \\ z = 0. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений изображает плоскость, параллельную оси Oz , а второе указывает на то, что на этой плоскости рассматриваются точки, принадлежащие плоскости xOy (в плоскости xOy первое из этих уравнений определяет прямую линию).

Уравнение искомого следа на плоскости yOz получим, учитывая, что плоскость yOz имеет уравнение $x = 0$. Положив в данном уравнении $x = 0$, получим уравнения следа заданной плоскости на плоскости yOz

$$\begin{cases} 2y - 4z + 5 = 0, \\ x = 0. \end{cases}$$

Первое из этих уравнений есть уравнение плоскости, параллельной оси Ox , а второе указывает на то, что в этой плоскости рассматриваются только точки, принадлежащие плоскости yOz (в плоскости yOz первое из уравнений определяет прямую линию).

Наконец, след данной плоскости на плоскости xOz , уравнение которой $y = 0$, мы получим, положив $y = 0$ в уравнении данной плоскости. Уравнения этого следа

$$\begin{cases} 3x - 4z + 5 = 0, \\ y = 0, \end{cases}$$

Причем первое из них – уравнение плоскости, параллельной оси Oy , а второе указывает на то, что на этой плоскости рассматриваются только точки, лежащие в плоскости xOz (первое уравнение в плоскости xOz определяет прямую линию).

$$\text{Ответ. } \begin{cases} 3x + 2y + 5 = 0, \\ z = 0. \end{cases}, \begin{cases} 2y - 4z + 5 = 0, \\ x = 0. \end{cases}, \begin{cases} 3x - 4z + 5 = 0, \\ y = 0. \end{cases}$$

Поверхности в пространстве

Поверхностью в пространстве называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению

$$F(x, y, z) = 0. \quad (8.23)$$

Линия в пространстве, как пересечение двух плоскостей, определяется двумя уравнениями

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0. \end{cases} \quad (8.24)$$

Уравнения

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2 \quad (8.25)$$

определяет сферу, радиуса R с центром в точке $M(a, b, c)$.

Цилиндрической поверхностью называется поверхность, описываемая прямой (образующей), параллельной данному направлению и пересекающей данную линию (направляющую).

Уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz , имеют вид

$$F(x, y) = 0. \quad (8.26)$$

Уравнение направляющей цилиндрической поверхности (8.26)

$$\begin{cases} F(x, y) = 0, \\ z = 0. \end{cases} \quad (8.27)$$

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению:

$$F(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{14} = 0. \quad (8.28)$$

Коэффициенты a_{ij} зависят от выбора системы координат.

При соответствующем выборе прямоугольной декартовой системы координат в пространстве уравнение поверхности второго порядка можно привести к одному из видов.

	Название кривой	Каноническое уравнение
1	Эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$
2	Мнимый эллипсоид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = -1$
3	Однополостной гиперboloид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$
4	Двуполостный гиперboloид	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$

5	Действительный конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$
6	Мнимый конус	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$
7	Эллиптический параболоид	$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z; p > 0, q > 0$
8	Гиперболический параболоид	$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z; p > 0, q > 0$
9	Действительный эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
10	Мнимый эллиптический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$
11	Гиперболический цилиндр	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
12	Две пересекающиеся действительные плоскости	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$
13	Две мнимые пересекающиеся плоскости	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$
14	Параболический цилиндр	$x^2 = \pm 2py$
15	Две действительные параллельные плоскости	$x^2 - a^2 = 0$
16	Две мнимые параллельные плоскости	$x^2 + a^2 = 0$
17	Две совпадающие плоскости	$x^2 = 0$

Одной из основных задач теории поверхностей второго порядка является упрощение общего уравнения (8.28) путем надлежащего подбора новой системы координат. Упрощение уравнения (8.28) так же как и в случае кривой второго порядка, приводится в два этапа.

а) Упрощение уравнения поверхности путем поворота системы координат.

При повороте координатных осей:

$$\begin{cases} x = x \cos \alpha_1 + y \cos \alpha_2 + z \cos \alpha_3, \\ y = x \cos \beta_1 + y \cos \beta_2 + z \cos \beta_3, \\ z = x \cos \gamma_1 + y \cos \gamma_2 + z \cos \gamma_3, \end{cases} \quad (8.29)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ - углы, образуемые с осью Ox соответственно с новыми осями OX, OY, OZ ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ - углы, образуемые с осью Oy и Oz с новыми осями.

б) Упрощение уравнения поверхности путем переноса начала координат.

При параллельном переносе координатных осей:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c, \quad (8.30)$$

где x, y, z - координаты некоторой точки в старой системе координат $Oxyz$; x', y', z' - координаты той же точки в новой системе координат $O'x'y'z'$; a, b, c - координаты нового начала O' в старой системе координат.

Задача 8.38 Определить координаты центра сферы и ее радиус

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y + 10z + 25 = 0.$$

Решение. Представим это уравнение в виде (8.25), для чего

1) объединим в группы члены, содержащие одноименные координаты;

2) выделим в этих группах полные квадраты (мы так же поступали и при определении координат центра окружности и ее радиуса). Поступая, как указано, получим

$$\underbrace{x^2 - 6x}_I + \underbrace{y^2 + 8y}_II + \underbrace{z^2 + 10z}_III + 25 = 0.$$

Выделяя полные квадраты в подчеркнутых группах, получим

$$\underbrace{(x - 3)^2 - 9}_I + \underbrace{(y + 4)^2 - 16}_II + \underbrace{(z + 5)^2 - 25}_III + 25 = 0,$$

а упрощая будем иметь

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 - 25 = 0$$

и окончательно

$$(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2 = 25.$$

Сравнивая с (8.25), имеем

$$a = 3; b = -4; c = -5; R^2 = 25.$$

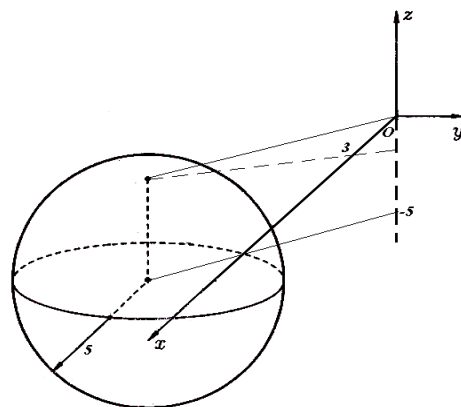


Рисунок 57

Ответ. Центр сферы – точка $C(3, -4, -5)$, $R = 5$ (рисунок 57).

Задача 8.39 Написать уравнение сферы, проходящей через четыре точки $M_1(1, 1, 0)$, $M_2(7, 11, 0)$, $M_3(10, 1, 9)$, $M_4(-2, -11, 9)$.

Решение.

Уравнение сферы ищем в виде $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$.

Подставляя координаты точек M_1, M_2, M_3, M_4 в это уравнение, получим систему четырех уравнений относительно четырех неизвестных a, b, c и R :

$$\begin{cases} (1 - a)^2 + (1 - b)^2 + (0 - c)^2 = R^2, \\ (7 - a)^2 + (-11 - b)^2 + (0 - c)^2 = R^2, \\ (10 - a)^2 + (1 - b)^2 + (9 - c)^2 = R^2, \\ (-2 - a)^2 + (-11 - b)^2 + (9 - c)^2 = R^2. \end{cases}$$

Решение данной системы уравнений предлагаем найти самостоятельно.

В результате решения получаем $a = 4$, $b = -5$, $c = 6$, $R = 9$.

Следовательно, уравнение сферы имеет вид

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 + (z - 6)^2 = 81.$$

Ответ. $(x - 4)^2 + (y + 5)^2 + (z - 6)^2 = 81$.

Задача 8.40 Дан эллипс

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1; \\ y = 0. \end{cases}$$

Вращая этот эллипс вокруг оси Oz , получим поверхность, называемую эллипсоидом вращения. Составить ее уравнение.

Решение. Уравнения эллипса приведем к виду

$$\begin{cases} x = \varphi_1(z), \\ y = \varphi_2(z), \end{cases}$$

т.е. выразим x и y как функции переменной z .

Из уравнения эллипса найдем квадраты x и y :

$$\begin{cases} x^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right); \\ y^2 = 0. \end{cases}$$

В соответствии с формулой

$$x^2 + y^2 = \varphi_1^2(z) + \varphi_2^2(z)$$

получим уравнение эллипсоида вращения:

$$x^2 + y^2 = a^2 \left(1 - \frac{z^2}{c^2} \right)$$

или

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Ответ. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Задача 8.41 Какие поверхности определяют уравнения

1) $x^2 + z^2 = 25$; 2) $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$; 3) $x = 2z^2$; 4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$?

Решение. Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z и определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу; 4) гиперболу.

В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy , так как эти уравнения не

содержат переменной y . Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

1) $x^2 + z^2 = 25$ - уравнение прямого кругового цилиндра;

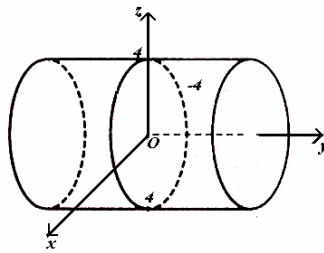


Рисунок 58

2) $\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$ - уравнение эллиптического цилиндра;

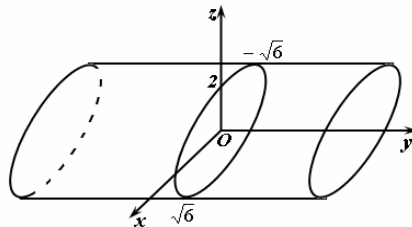


Рисунок 59

3) $x = 2z^2$ - уравнение параболического цилиндра;

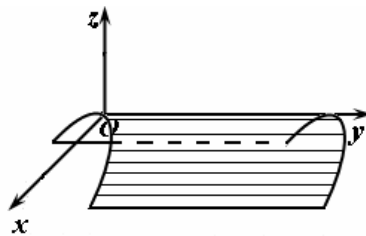


Рисунок 60

4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$ - уравнение гиперболического цилиндра.

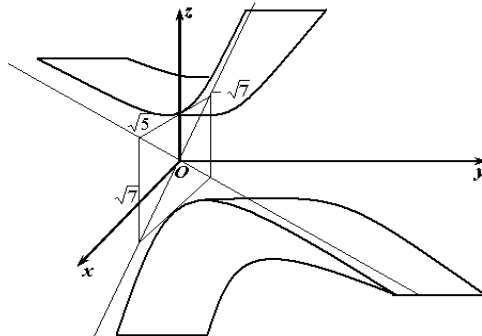


Рисунок 61

Задача 8.42 Какая линия изображается системой уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (z - 7)^2 = 16, \\ z = 6. \end{cases}$$

Решение. Первое из уравнений системы определяет сферу, а второе – плоскость, параллельную плоскости xOy . Так как плоскость $z = 6$ пересекает данную сферу, то линией пересечения будет окружность. Значит, линия, о которой идет речь в задаче, окружность, лежащая в плоскости $z = 6$. Получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + (6 - 7)^2 = 16, \\ z = 6, \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 = 16, \\ z = 6. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 15, \\ z = 6. \end{cases}$$

Первое уравнение определяет в пространстве прямой круговой цилиндр, у которого осью служит ось Oz , а второе – плоскость, параллельную плоскости xOy . Первое уравнение этой системы $x^2 + y^2 = 15$ на плоскости xOy определяет окружность, являющуюся прямоугольной проекцией той окружности, которая определяется заданной системой уравнений.

Ответ. Окружность.

Задача 8.43 Какую поверхность определяет уравнение

$$4x^2 - 9y^2 + 36z^2 - 16x - 54y - 72z - 65 = 0.$$

Решение. Преобразуем левую часть уравнения (выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных):

$$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 + 6y + 9) + 36(z^2 - 2z + 1) - 16 + 81 - 36 - 65 = 0$$

или

$$4(x - 2)^2 - 9(y + 3)^2 + 36(z - 1)^2 = 36.$$

Разделив обе части уравнения на 36 и введя новые координаты по формулам

$$x' = x - 2, \quad y' = y + 3, \quad z' = z - 1,$$

получаем

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 1.$$

Изучим форму этой поверхности с помощью метода сечений. Найдем главные сечения. В сечении поверхности плоскостью $Ox'y'$ получим гиперболу

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1, \quad z' = 0;$$

в сечении плоскостью $Oy'z'$ - гиперболу

$$-\frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 1, \quad x' = 0;$$

в сечении плоскостью $Ox'z'$ - эллипс

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{z'^2}{1} = 1, \quad y' = 0.$$

Плоскость, параллельная плоскости $Ox'y'$, пересекает поверхность по гиперболе

$$\frac{x'^2}{9} - \frac{y'^2}{4} = 1 - \frac{h^2}{1}, \quad z' = h.$$

Плоскость, параллельная плоскости $Oy'z'$, пересекает поверхность по гиперболе

$$-\frac{y'^2}{4} + \frac{z'^2}{1} = 1 - \frac{h^2}{9}, \quad x' = h.$$

Плоскость, параллельная плоскости $Ox'z'$, пересекает поверхность по эллипсу

$$\frac{x'^2}{9} + \frac{z'^2}{1} = 1 + \frac{h^2}{4}, \quad y' = h.$$

Анализируя сечения, заключаем, что данная поверхность является однополостным гиперболоидом.

Ответ. Однополостный гиперболоид.

Задача 8.44 Привести к каноническому виду уравнение $x^2 - 2y^2 + 4z^2 + 2x - 12y - 8z - 3 = 0$, выяснить тип, свойства и расположение заданной этим уравнением поверхности относительно системы координат $Oxyz$.

Решение. Выделив полные квадраты при входящих в уравнение переменных, имеем:

$$(x^2 + 2x + 1 - 1) - 2(y^2 + 6y + 9 - 9) + 4(z^2 - 2z + 1 - 1) - 3 = 0,$$

$$(x + 1)^2 - 2(y - 3)^2 + 4(z - 1)^2 = 3 + 1 - 18 + 4 = -10,$$

$$\frac{(x + 1)^2}{10} - \frac{(y - 3)^2}{5} + \frac{(z - 1)^2}{5/2} = -1.$$

При параллельном переносе осей координат, задаваемом формулами: $x' = x + 1$, $y' = y - 3$, $z' = z - 1$, начало координат новой системы окажется в точке $O'(-1, -3, 1)$, а уравнение поверхности примет канонический вид

$$\frac{x'^2}{10} - \frac{y'^2}{5} + \frac{z'^2}{5/2} = -1.$$

Следовательно, данная поверхность – двуполостной гиперболоид, который имеет $a = \sqrt{10}$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{5/2}$, вытянут вдоль оси $O'y'$, а центр его находится в точке $O'(-1, -3, 1)$ (рисунок 62).

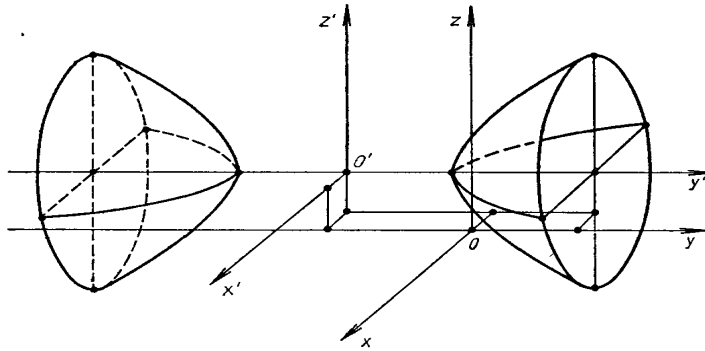


Рисунок 62

Задача 8.45 Упростим уравнение

$$4x^2 + 9y^2 + 36z^2 - 8x - 36y + 72z + 40 = 0$$

поверхности второго порядка с помощью параллельного переноса прямоугольной системы координат.

Решение. Уравнение содержит каждое из трех переменных в первой и во второй степени. Поэтому по каждому переменному выделяем полный квадрат:

$$4(x^2 - 2x + 1 - 1) + 9(y^2 - 4y + 4 - 4) + 36(z^2 + 2z + 1 - 1) + 40 = 0,$$

$$4(x-1)^2 + 9(y-2)^2 + 36(z+1)^2 = 36,$$

$$\frac{(x-1)^2}{3^2} + \frac{(y-2)^2}{2^2} + (z+1)^2 = 1.$$

Приходим к смещенному уравнению эллипсоида с центром в точке $O'(1; 2; -1)$ и полуосями $a=3$, $b=2$, $c=1$. Соответствующее каноническое уравнение получается после параллельного переноса системы координат $x' = x - 1$, $y' = y - 2$, $z' = z + 1$ и имеет вид

$$\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{2^2} + z'^2 = 1.$$

Ответ. $\frac{x'^2}{3^2} + \frac{y'^2}{2^2} + z'^2 = 1.$

Задача 8.46 Выясним, какая поверхность является геометрическим образом уравнения

$$x^2 - y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z - 3 = 0.$$

Решение. По каждому переменному в уравнении выделяем полный квадрат:

$$(x^2 - 2x + 1 - 1) - (y^2 - 4y + 4 - 4) + (z^2 - 2z + 1 - 1) - 3 = 0,$$

$$(x-1)^2 - (y-2)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

Приходим к смещенному уравнению однополостного гиперболоида вращения с центром в точке $O'(1, 2, 1)$. После параллельного переноса системы координат в эту точку $x' = x - 1$, $y' = y - 2$, $z' = z - 1$ уравнение принимает вид

$$x'^2 - y'^2 + z'^2 = 1.$$

Это уравнение не является каноническим из-за несоответствия знаков. Осью вращения гиперboloида является ось $O'y'$ новой системы координат (рисунок 63).

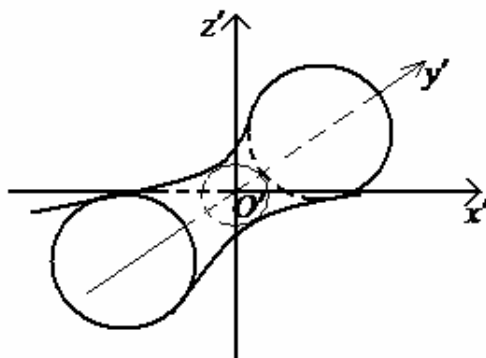


Рисунок 63

Ответ. Однополостный гиперболоид.

Задача 8.47 Выясним, какую поверхность определяет уравнение второго порядка

$$x^2 - 4z^2 + 8y + 8z - 12 = 0.$$

Решение. В уравнении нет слагаемого x первой степени и слагаемого y второй степени. Полный квадрат выделяем только по переменному z :

$$x^2 - 4(z^2 - 2z + 1 - 1) + 8y - 12 = 0,$$

$$x^2 - 4(z - 1)^2 + 8y - 8 = 0,$$

$$x^2 - 4(z - 1)^2 = -8(y - 1),$$

$$\frac{x^2}{2^2} - (z - 1)^2 = -2(y - 1).$$

Приходим к смещенному уравнению гиперболического параболоида. Выполнив параллельный перенос системы координат $x' = x$, $y' = y - 1$, $z' = z - 1$ в точку $O'(0; 1; 1)$ получим уравнение вида

$$\frac{(x')^2}{2^2} - (z')^2 = -2y',$$

которое преобразуется в каноническое дополнительным переобозначением переменных (рисунок 64).

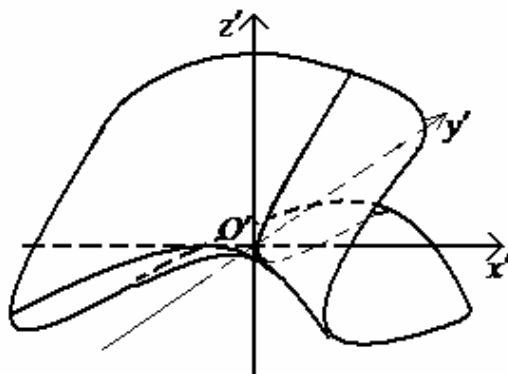


Рисунок 64

Ответ. Гиперболический параболоид.

Задача 8.48 Установить форму и свойства однополостного гиперболоида

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1.$$

Решение. Для решения задачи применяем метод сечений. Будем пересекать поверхность горизонтальными плоскостями $z = h$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 + \frac{h^2}{9}, \\ z = h, \end{cases}$$

видно, что в любом таком сечении получается эллипс с полуосями $a_1 = 4\sqrt{1 + h^2/9}$, $b_1 = 2\sqrt{1 + h^2/9}$.

Сечение плоскостями $x = h$ дает гиперболы:

$$\begin{cases} \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{h^2}{4}, \\ x = h, \end{cases}$$

а сечение плоскостями $y = h$:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{9} = 1 - \frac{h^2}{4}, \\ y = h \end{cases} \text{ - гиперболы}$$

(только с другими полуосями).

При $h = 0$ получим сечения поверхности (однополостного гиперболоида) координатными плоскостями $z = 0$, или $x = 0$, или $y = 0$. Эти сечения называются *главными*. Размеры главных сечений очевидны: в плоскости $z = 0$ эллипс имеет полуоси $a = 4$, $b = 2$; в плоскости $x = 0$ гипербола имеет действительную полуось $b = 2$, мнимую $c = 3$; в плоскости $y = 0$ гипербола имеет действительную полуось $a = 4$, мнимую $c = 3$. Координатные плоскости являются плоскостями симметрии поверхности.

В инженерных задачах часто встречаются различные *поверхности вращения*, т.е. поверхности, получаемые вращением некоторой плоской линии вокруг заданной прямой (называемой *осью поверхности вращения*), лежащей с этой линией в одной плоскости.

Если линия лежит в плоскости Oyz и имеет уравнения $F(y, z) = 0$, $x = 0$, то при вращении ее вокруг оси Oz получаем поверхность вращения, уравнение которой имеет вид $F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$; если вращение совершать вокруг оси Oy , то уравнение поверхности вращения запишется в виде $F(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}) = 0$.

Задача 8.49 Записать уравнение поверхности вращения, полученной при вращении гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$: а) вокруг оси Oz ; б) вокруг оси Oy .

Решение. а) Согласно изложенному выше правилу, в уравнении гиперболы заменяем y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$ и получаем уравнение поверхности вращения:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Это однополостной гиперболоид вращения, у которого в горизонтальных сечениях вместо эллипсов лежат окружности.

б) При вращении данной гиперболы вокруг оси Oy следует в ее уравнении заменить z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$. Тогда имеем:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2 + z^2}{b^2} = 1 \text{ или } \frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1.$$

Это двуполостной гиперболоид вращения, вытянутый вдоль оси Oy , сечения которого плоскостями $y = h > a$ представляют собой окружности, а не эллипсы.

Ответ. а) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1$; б) $\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = -1$.

Задача 8.50 Составить уравнение поверхности, полученной вращением дуги синусоиды $z = \sin y$, $x = 0$ ($0 \leq y \leq 2\pi$) вокруг оси Oy (рисунок 65).

Решение. При вращении дуги синусоиды $z = \sin y$, $x = 0$ ($0 \leq y \leq 2\pi$) вокруг оси Oy следует в ее уравнении заменить y на $\pm\sqrt{x^2 + y^2}$. В результате имеем:

$$z = \sin(\pm\sqrt{x^2 + y^2}), \quad z = \pm\sin\sqrt{x^2 + y^2}.$$

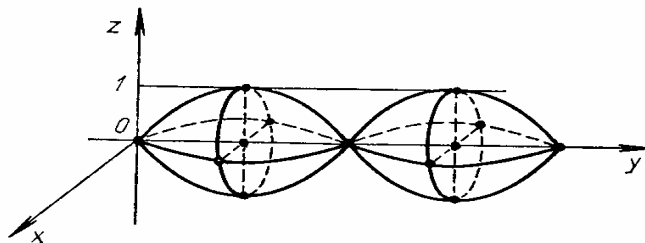


Рисунок 65

Задача 8.51 Записать уравнение поверхности, полученной при вращении:

- 1) параболы $z = -\frac{1}{2}y^2$: а) вокруг оси Oy ; б) вокруг оси Oz ;
- 2) эллипса $\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$: а) вокруг оси Oz ; б) вокруг оси Oy .

Решение.

1) В соответствии с общим правилом получения уравнения поверхности вращения находим:

а) В уравнении параболы в данном случае заменяем z на $\pm\sqrt{x^2 + z^2}$

$$\pm \sqrt{x^2 + z^2} = -\frac{1}{2}y^2.$$

В результате преобразований получаем уравнение поверхности $4x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$;

б) В уравнении параболы заменяем y на $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$

$$z = -\frac{1}{2} \left(\pm \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2,$$

получаем уравнение параболоида вращения (рисунок 66)

$$z = -\frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

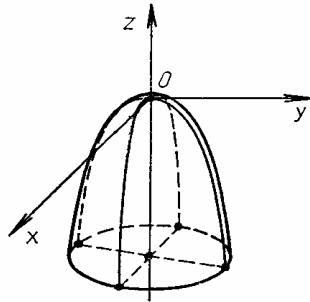


Рисунок 66

2) Имеем:

а) Заменяем в уравнении эллипса y на $\pm \sqrt{x^2 + y^2}$

$$\frac{\left(\pm \sqrt{x^2 + y^2} \right)^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1, \text{ или } \frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1.$$

Получили сплюснутый вдоль оси Oz эллипсоид вращения (сфероид), полуоси его главных сечений $OA = OB = 8$, $OC = 2$;

б) Заменяем в уравнении эллипса z на $\pm \sqrt{x^2 + z^2}$, т.е.

$\frac{y^2}{64} + \frac{\left(\pm \sqrt{x^2 + z^2} \right)^2}{4} = 1$, получили уравнение $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{4} = 1$, которое задает вытянутый вдоль оси Oy эллипсоид вращения: $OA = OC = 2$, $OB = 8$ рисунок 67.

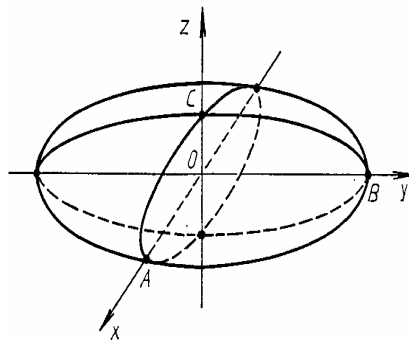


Рисунок 67

8.1 Задачи для самостоятельного решения

8.52 Записать уравнение и построить плоскость:

- а) параллельную плоскости Oxz и проходящую через точку $M_0(7, -3, 5)$;
- б) проходящую через ось Oz и точку $A(-3, 1, -2)$;
- в) параллельную оси Ox и проходящую через две точки $M_1(4, 0, -2)$ и $M_2(5, 1, 7)$;
- г) проходящую через точку $B(2, 1, -1)$ и имеющую нормальный вектор $\vec{n} = \{1, -2, 3\}$;
- д) проходящую через точку $C(3, 4, -5)$ параллельно двум векторам $\vec{a} = \{3, 1, -1\}$ и $\vec{b} = \{1, -2, 1\}$.

Ответ. а) $y + 3 = 0$; б) $x + 3y = 0$; в) $9y - z - 2 = 0$; г) $x - 2y + 3z + 3 = 0$;
д) $x + 4y + 7z + 16 = 0$.

8.53 Составить уравнения плоскости:

- а) проходящей через точки $M_1(1, 1, 1)$ и $M_2(2, 3, 4)$ перпендикулярно к плоскости $2x - 7y + 5z + 9 = 0$;
- б) проходящей через точку $M_0(7, -5, 1)$ и отсекающей на осях координат равные положительные отрезки.

Ответ. а) $31x + y - 11z - 21 = 0$; б) $x + y + z - 3 = 0$.

8.54 Вычислить угол между плоскостями $x - 2y + 2z - 3 = 0$ и $3x - 4y + 5 = 0$.

Ответ. $\cos \varphi = 11/15$, $\varphi \approx 42^\circ 51'$.

8.55 Вычислить расстояние между параллельными плоскостями $3x + 6y + 2z - 15 = 0$ и $3x + 6y + 2z + 13 = 0$.

Ответ. 4.

8.56 Записать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями $3x - y + 7z - 4 = 0$ и $5x + 3y - 5z + 2 = 0$.

Ответ. $x + 2y - 6z + 3 = 0$, $4x + y + z - 1 = 0$.

8.57 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $P(1, 0, 2)$ перпендикулярно к двум плоскостям $2x - y + 3z - 1 = 0$ и $3x + 6y + 3z - 5 = 0$.

Ответ. $7x - y - 5z + 3 = 0$.

8.58 Составить уравнение плоскости, параллельной вектору $\vec{s} = \{2, 1, -1\}$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = 3$, $b = -2$.

Ответ. $2x - 3y + z - 6 = 0$.

8.59 Составить уравнение плоскости, перпендикулярной к плоскости $2x - 2y + 4z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Ox и Oy отрезки $a = -2$, $b = 2/3$ соответственно.

Ответ. $x - 3y - 2z + 2 = 0$.

8.60 Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(-3, 1, -9)$ относительно плоскости $4x - 3y - z - 7 = 0$.

Ответ. $Q(1, -2, -10)$.

8.61 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2, 0, -3)$:

а) параллельно вектору $\vec{s} = \{2, -3, 5\}$;

б) параллельно прямой $\begin{cases} 2x - y + 3z - 11 = 0, \\ 5x + 4y - z + 8 = 0. \end{cases}$

Ответ. а) $\frac{x-2}{2} = \frac{y}{-3} = \frac{z+3}{5}$; б) $\frac{x-2}{11} = \frac{y}{-17} = \frac{z+3}{-13}$.

8.62 Установить взаимное расположение прямой и плоскости и в случае их пересечения найти координаты точки пересечения:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y-3}{4} = \frac{z}{3}$ и $3x - 3y + 2z - 5 = 0$; б) $\frac{x-13}{8} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{3}$ и $x + 2y - 4z + 1 = 0$; в) $\frac{x-7}{5} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{4}$ и $3x - y + 2z - 5 = 0$.

Ответ. а) параллельны; б) прямая лежит в плоскости; в) пересекаются в точке $M(2, 3, 1)$.

8.63 Найти координаты точки Q , симметричной точке $P(2, -5, 7)$ относительно прямой, проходящей через точки $M_1(5, 4, 6)$ и $M_2(-2, -17, -8)$.

Ответ. $Q = (4, -1, -3)$.

8.64 Найти расстояние от точки $P(7, 9, 7)$ до прямой $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$.

Ответ. $\sqrt{22}$.

8.65 Найти кратчайшее расстояние между двумя непересекающимися прямыми: $\frac{x-9}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z}{1}$ и $\frac{x}{-2} = \frac{y+7}{9} = \frac{z-2}{2}$.

Ответ. 7.

8.66 Даны вершины треугольника $A(4, 1, -2)$, $B(2, 0, 0)$, $C(-2, 3, -5)$. Составить уравнения его высоты, опущенной из вершины B на противоположную сторону.

Ответ. $\frac{x-2}{74} = \frac{y}{57} = \frac{z}{-110}$.

8.67 Составить параметрические уравнения прямой, которая проходит параллельно плоскостям $3x + 12y - 3z - 5 = 0$, $3x - 4y + 9z + 7 = 0$ и пересекает

прямые $\frac{x+5}{2} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+1}{3}$, $\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{4}$.

Ответ. $x = 8t - 3$, $y = -3t - 1$, $z = -4t + 2$.

8.68 Прямая $y = z$ вращается вокруг оси Oy . Найти уравнение поверхности вращения (конуса).

Ответ. $x^2 + z^2 - y^2 = 0$.

8.69 Найти уравнения поверхности, образованной вращением гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ вокруг: а) оси Ox ; б) оси Oz .

Ответ. а) $\frac{y^2 + z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = -1$ (двуполостный гиперболоид вращения); б)

$\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ (однополостный гиперболоид вращения).

8.70 Методом параллельных сечений исследовать форму поверхности и построить ее:

а) $x^2 + 2y^2 + 4z^2 = 2$; б) $2x^2 - 9y^2 - z^2 = 36$;

в) $-2x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 0$; г) $2y^2 + z^2 = 2x$.

8.71 Определить вид поверхности и построить ее:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 3x + 5y - 4z = 0$;

б) $36x^2 + 16y^2 - 9z^2 + 18z = 9$;

в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2z$.

9 Линейное пространство. Линейное подпространство

Линейное пространство

Множество V элементов любой природы называется **линейным пространством**, если выполнены следующие три условия:

1) на множестве V определена операция *условного сложения элементов*, т.е. каждой паре элементов x и y из V поставлен в соответствие определенный элемент z из V . Элемент z называется **суммой элементов** x , y и обозначается $x + y$: $z = x + y$;

2) для элементов множества V определена операция *условного произведения на действительное число*, т.е. каждому элементу x из V и каждому действительному числу α поставлен в соответствие определенный элемент y из V . Элемент y называется **произведением элемента x на число α** и обозначается αx : $y = \alpha x$;

3) указанные операции удовлетворяют следующим **аксиомам линейного пространства**.

I. $\forall x$ и y из V : $x + y = y + x$ (переместительное свойство).

II. $\forall x, y, z$ из V : $(x + y) + z = x + (y + z)$ (сочетательное свойство).

III. Существует элемент $\theta \in V$ такой, что $\forall x \in V$: $x + \theta = x$ (θ - нулевой элемент).

IV. $\forall x \in V$ существует элемент $x' \in V$ такой, что $x + x' = \theta$ (элемент x' - противоположный элементу x).

V. $\forall x \in V$: $1 \cdot x = x$ (существование единичного элемента).

VI. $\forall x \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in R$: $\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x$ (сочетательное свойство относительно числовых сомножителей).

VII. $\forall x \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in R$: $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (распределительное свойство относительно суммы чисел).

VIII. $\forall x$ и y из V и $\forall \alpha \in R$: $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (распределительное свойство относительно суммы элементов).

Свойства линейных пространств

1⁰ В линейном пространстве V существует единственный нулевой элемент.

2⁰ $\forall x \in V$ существует единственный противоположный элемент x' .

3⁰ $\forall x \in V$: $0 \cdot x = \theta$ (θ - нулевой элемент).

4⁰ Противоположный элемент x' для элемента x выражается формулой $x' = (-1) \cdot x$.

Обозначение: $x' = -x$.

5⁰ Для любого числа α : $\alpha \cdot \theta = \theta$.

Разностью элементов x и y называется элемент z такой, что $y + z = x$.

Обозначение: $z = x - y$.

$6^0 \forall x \text{ и } y \text{ из } R: x - y = x + (-y)$, где $(-y)$ - элемент, противоположный элементу y .

Задача 9.1 Доказать, что множество всех функций, непрерывных на сегменте $[a, b]$ (обозначим его $C[a, b]$), с обычными операциями сложения функций и умножения функций на действительные числа является вещественным линейным пространством.

Решение. Прежде всего отметим, что если $f(x)$ и $g(x)$ взяты из $C[a, b]$, а α - действительное число, то $(f(x) + g(x)) \in C[a, b]$ и $(\alpha \cdot f(x)) \in C[a, b]$, т.е. операции сложения функций и умножения функции на действительное число не выводят из множества $C[a, b]$.

Проверим выполнение восьми аксиом линейного пространства. Очевидно, что для любых функций $f(x), g(x), h(x)$ из $C[a, b]$ имеют место равенства

$$f(x) + g(x) = g(x) + f(x), (f(x) + g(x)) + h(x) = f(x) + (g(x) + h(x)),$$

т.е. выполнены аксиомы I и II.

Очевидно, нулевым элементом является функция $\theta(x) = 0$. Действительно, эта функция удовлетворяет аксиоме III:

$$f(x) + \theta(x) = f(x).$$

Противоположным элементом для любой функции $f(x) \in C[a, b]$ может вполне служить функция $[-f(x)]$, т.к. $[-f(x)] \in C[a, b]$ и

$$f(x) + (-f(x)) = \theta(x).$$

Таким образом, аксиома IV также выполнена.

Проверим выполнимость остальных аксиом. (Слова «для любого (ой)» заменим символом $\forall$):

$$\text{V. } \forall f(x) \in C[a, b]: 1 \cdot f(x) = f(x).$$

$$\text{VI. } \forall f(x) \in C[a, b] \text{ и } \forall \alpha, \beta \in R: \alpha(\beta f(x)) = (\alpha\beta)f(x).$$

$$\text{VII. } \forall f(x) \in C[a, b] \text{ и } \forall \alpha, \beta \in R: (\alpha + \beta)f(x) = \alpha f(x) + \beta f(x).$$

$$\text{VIII. } \forall f(x) \text{ и } g(x) \text{ из } C[a, b] \text{ и } \forall \alpha \in R:$$

$$\alpha(f(x) + g(x)) = \alpha f(x) + \alpha g(x).$$

Итак, мы доказали, что $C[a, b]$ - вещественное линейное пространство.

Задача 9.2 Пусть R^* - множество всех положительных чисел. Сумма элементов x и y этого множества определена как их произведение, т.е. $x \cdot y$, а произведением элемента x на действительное число α - как степень x^α . Доказать, что множество R^* является линейным пространством.

Решение. Для того, чтобы доказать, что множество R^* с введенными операциями сложения и умножения является линейным пространством так же как и в предыдущем примере докажем справедливость восьми аксиом.

Поскольку операция «сложение» есть на самом деле умножение, а «умножение» заменено степенью, чтобы не путаться занесем все аксиомы в таблицу:

№	аксиома	справедливость аксиомы в данном примере (множество R^*)
I	$\forall x \text{ и } y \text{ из } V: x + y = y + x.$	$x \cdot y = y \cdot x.$
II	$\forall x, y, z \in V: (x + y) + z = x + (y + z).$	$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$
III	Существование нулевого элемента $\theta \in V: x + \theta = x.$	Нулевой элемент $\theta = 1$, тогда $x \cdot 1 = x.$
IV	Существование противоположного элемента $x': x + x' = \theta.$	Противоположный элемент $\frac{1}{x}$, действительно $x \cdot \frac{1}{x} = 1 = \theta.$
V	$\forall x \in V: 1 \cdot x = x.$	Т.к. «умножение» - возведение в степень, то $x^1 = x.$
VI	$\alpha(\beta x) = (\alpha \cdot \beta)x.$	$(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}.$
VII	$(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x.$	$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha \cdot x^\beta.$
VIII	$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y.$	$(xy)^\alpha = x^\alpha \cdot y^\alpha.$

Таким образом, множество R^* с введенными операциями сложения и умножения на действительное число является линейным пространством, причем нулевой элемент равен 1.

Задача 9.3 Показать, что множество векторов на координатной плоскости, отложенных от начала координат и расположенных в первой четверти с обычными операциями сложения векторов и умножения вектора на число, линейным пространством не является.

Решение. Для того, чтобы доказать, что какое-либо множество не является линейным пространством достаточно указать на **невыполнимость** хотя бы одной из аксиом линейного пространства.

В нашем случае отметим, что при умножении вектора, отложенного от начала координат и расположенного в первой четверти, на отрицательное число получается вектор, расположенный в третьей четверти и, следовательно, не принадлежащий данному множеству векторов. Поэтому данное множество линейным пространством не является.

Задача 9.4 Доказать, что множество многочленов степени n ($n > 0$) с обычными операциями сложения многочленов и умножения многочлена на число, не является линейным пространством.

Решение. Данное множество не является линейным пространством, так как сумма многочленов степени n может не быть многочленом той же степени, например, при $n \geq 2$: $(x^n + x - 1) + (-x^n + 2x) = 3x - 1.$

Задача 9.7 Доказать, что однородная система линейных уравнений $AX = \Theta$ имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A линейно зависимы.

Решение. Обозначим элементы столбца X (неизвестные) через $x_1, x_2, \dots, x_n$, а столбцы матрицы A - через $A_1, \dots, A_n$. Тогда систему уравнений $AX = \Theta$ можно записать в виде

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \dots + x_n A_n = \Theta. \quad (9.2)$$

Отсюда следует, что если система (9.2) имеет ненулевое решение $x_1, x_2, \dots, x_n$ (хотя бы одно x_k не равно нулю), то это означает, что линейная комбинация столбцов $A_1, \dots, A_n$ с коэффициентами $x_1, x_2, \dots, x_n$ является нулевым столбцом, т.е. столбцы $A_1, \dots, A_n$ линейно зависимы. И обратно: если столбцы $A_1, \dots, A_n$ линейно зависимы, т.е. существуют числа $x_1, x_2, \dots, x_n$, не все равные нулю и такие, что выполняется равенство (9.2), то $x_1, x_2, \dots, x_n$ - ненулевое решение системы.

Задача 9.8 Доказать, что три компланарных вектора a, b и c линейно зависимы.

Решение. Для доказательства этого утверждения достаточно привести векторы к общему началу и разложить один из векторов на составляющие, соответственно коллинеарные двум другим.

Задача 9.9 Доказать, что любые четыре вектора a, b, c и d линейно зависимы.

Решение. Если три из четырех векторов компланарны, то задача решается просто. Предположим, что эти векторы некомпланарны. Приведем все четыре вектора к общему началу O . Построим параллелепипед, диагональю которого является вектор d с ребрами на прямых, содержащих a, b и c . Очевидно $d = \alpha a + \beta b + \gamma c$, что доказывает линейную зависимость векторов a, b, c и d .

Задача 9.10 Доказать, что три матрицы $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ линейно независимы и любой элемент линейного пространства симметричных 2×2 -матриц есть их линейная комбинация.

Решение. Составим линейную комбинацию данных матриц:

$$\sum_{p=1}^3 c_p e_p = \begin{pmatrix} c_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & c_1 \\ c_1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}.$$

Она равна нулевой матрице $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ только в том случае, когда $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, а это и означает, что матрицы e_1, e_2, e_3 линейно независимы.

Любая симметричная матрица $\begin{pmatrix} c_1 & c_2 \\ c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ является, очевидно, линейной комбинацией матриц e_1, e_2, e_3 с коэффициентами c_1, c_2, c_3 .

Задача 9.11 Доказать, что матрицы (элементы пространства H_3^2)

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_5 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_6 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

являются линейно независимыми, а любой элемент пространства H_3^2 есть линейная комбинация этих шести элементов.

Решение. Составим линейную комбинацию данных элементов:

$$\sum_{p=1}^6 c_p e_p = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}.$$

Она равна нулевому элементу $\Theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ только в том случае, когда все $c_p = 0$, а это означает, что элементы $e_1, \dots, e_6$ линейно независимы.

Очевидно, любую матрицу $C = \begin{pmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$ (произвольный элемент пространства H_3^2) можно представить как $\sum_{p=1}^6 c_p e_p$, т.е. любая матрица C является линейной комбинацией матриц $e_1, \dots, e_6$.

Задача 9.12 Доказать, что в пространстве P_2 - многочленов степени не выше второй, три многочлена $1, x, x^2$ - линейно независимы и любой элемент пространства P_2 есть линейная комбинация этих элементов.

Решение. Нулевым элементом в пространстве P_2 является многочлен, тождественно равный нулю. Составим линейную комбинацию трех данных многочленов и приравняем ее нулевому элементу:

$$a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0.$$

Это равенство справедливо для всех x только в том случае, когда $a = b = c = 0$. В самом деле, если хотя бы один из коэффициентов a, b и c не равен нулю, то в левой части равенства стоит многочлен степени не выше второй, а он имеет не более двух корней, и потому не равен нулю для всех x . Следовательно, многочлены $1, x, x^2$ линейно независимы. Очевидно, любой многочлен $a1 + bx + cx^2$ из P_2 есть линейная комбинация многочленов $1, x$ и x^2 с коэффициентами a, b и c .

Задача 9.13 Доказать, что функции $\cos x, \cos 2x, \cos 3x$ ($-\infty < x < +\infty$) линейно независимы.

Решение. Допустим, что данные функции линейно зависимы. Тогда существует их линейная комбинация, равная нулевому элементу, т.е. тождественно равная нулю:

$$a \cos x + b \cos 2x + c \cos 3x = 0,$$

причем хотя бы один из коэффициентов a, b и c не равен нулю.

Продифференцировав это тождество два раза, а затем четыре раза, приходим к тождествам

$$a \cos x + 4b \cos 2x + 9c \cos 3x = 0, \quad a \cos x + 16b \cos 2x + 81c \cos 3x = 0.$$

Положив во всех трех тождествах $x=0$, получим однородную систему линейных уравнений относительно коэффициентов a, b и c

$$\begin{cases} a + b + c = 0, \\ a + 4b + 9c = 0, \\ a + 16b + 81c = 0. \end{cases}$$

Эта система имеет только нулевое решение $a = b = c = 0$, т.к. определитель ее матрицы не равен нулю. Получили противоречие с тем, что хотя бы один из коэффициентов a, b и c отличен от нуля. Следовательно, данные функции линейно независимы.

Размерность и базис линейного пространства

Если в линейном пространстве V имеется n линейно независимых векторов, но любые $n+1$ векторов этого пространства линейно зависимы, то пространство V называют n -мерным. Принято также говорить, что размерность пространства V равна n , и писать $d(V) = n$. Пространство, в котором можно найти сколь угодно много линейно независимых векторов, называется **бесконечномерным**. Если V - бесконечномерное пространство, то $d(V) = \infty$.

Совокупность n линейно независимых векторов n -мерного линейного пространства называется **базисом**. Справедлива следующая **теорема**:

Каждый вектор линейного n -мерного пространства может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов базиса.

Так, если $e_1, e_2, \dots, e_n$ - базис n -мерного линейного пространства V , то любой вектор $x \in V$ может быть единственным образом представлен в виде

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n.$$

Таким образом, вектор x в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ определяется единственным образом с помощью чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$. Эти числа называют **координатами** вектора в данном базисе.

Итак, совокупность элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$ называется базисом линейного пространства V , если:

- 1) элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы;
- 2) каждый элемент пространства V можно представить в виде линейной комбинации элементов $e_1, e_2, \dots, e_n$, т.е. $\forall x \in V$ существуют числа $x_1, \dots, x_n$ такие, что справедливо равенство

$$x = \sum_{p=1}^n x_p e_p. \quad (9.3)$$

Если введен базис, то действия над элементами линейного пространства (сложение элементов и умножение элементов на числа) сводятся к таким же действиям над числами – координатами элементов.

Задача 9.14 В некотором базисе даны векторы $x(1, -2, 3, -1, 0)$, $y(2, 1, -3, -1, 4)$. Найти координаты вектора $4x - 3y$.

Решение. Поскольку $4x = (4, -8, 12, -4, 0)$ и $-3y = (-6, -3, 9, 3, -12)$, то вектор $4x - 3y = 4x + (-3y)$ имеет координаты $(-2, -11, 21, -1, -12)$.

Ответ. $(-2, -11, 21, -1, -12)$.

Задача 9.15 Пусть A_4 - четырехмерное линейное пространство с базисом e_1, e_2, e_3, e_4 . Найти координаты векторов e_3 и $x = 2e_1 + 4e_3 - 5e_4$ в этом базисе.

Решение. Представим каждый из векторов e_3 и x в виде линейной комбинации базисных векторов, имеем

$$e_3 = 0 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3 + 0 \cdot e_4,$$

таким образом, вектор e_3 имеет координаты $(0, 0, 1, 0)$.

Так как

$$x = 2e_1 + 0 \cdot e_2 + 4e_3 - 5e_4$$

то вектор x имеет координаты $(2, 0, 4, -5)$.

Ответ. $(2, 0, 4, -5)$.

Задача 9.16 Дано линейное пространство всевозможных пар упорядоченных действительных чисел

$$x_1 = (x_{11}; x_{21}) \text{ и } x_2 = (x_{12}; x_{22}), x_3 = (x_{13}; x_{23}), \dots,$$

причем сложение векторов и умножение вектора на действительное число определены равенствами

$$x_i + x_k = (x_{1i} + x_{1k}; x_{2i} + x_{2k}); \quad \lambda x_i = (\lambda x_{1i}; \lambda x_{2i}).$$

Доказать, что векторы $e_1 = (1, 2)$ и $e_2 = (3, 4)$ образуют базис данного линейного пространства. Найти координаты вектора $x = (7, 10)$ в этом базисе.

Решение. Векторы $e_1 = (1, 2)$ и $e_2 = (3, 4)$ линейно независимы, т.к.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим какой-нибудь вектор $y = (y_1; y_2)$. Покажем, что для любых y_1 и y_2 можно определить числа λ и μ так, чтобы выполнялось равенство $y = \lambda e_1 + \mu e_2$, или $(y_1; y_2) = (\lambda + 3\mu; 2\lambda + 4\mu)$.

Нетрудно видеть, что существует единственная пара значений $(\lambda; \mu)$, для которой выполняется это равенство. Это следует из того, что система уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = y_1, \\ 2\lambda + 4\mu = y_2 \end{cases}$$

является определенной.

Итак, векторы e_1 и e_2 образуют базис. Определим координаты вектора $x = (7, 10)$ в этом базисе. Задача сводится к определению λ и μ из системы уравнений

$$\begin{cases} \lambda + 3\mu = 7, \\ 2\lambda + 4\mu = 10. \end{cases}$$

Отсюда находим $\lambda = 1$, $\mu = 2$, т.е. $x = e_1 + 2e_2$.

Задача 9.17 Доказать, что все координаты нулевого элемента в любом базисе равны нулю, и обратно, если все координаты элемента в каком-то базисе равны нулю, то этот элемент нулевой.

Решение. Пусть в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ разложение нулевого элемента θ имеет вид

$$\theta = \sum_{p=1}^n c_p e_p.$$

Тогда все $c_p = 0$, так как элементы базиса $e_1, e_2, \dots, e_n$ линейно независимы, и поэтому их линейная комбинация равна нулевому элементу только тогда, когда все коэффициенты c_p равны нулю. Обратно: если все координаты элемента x равны нулю: $x = 0 \cdot e_1 + \dots + 0 \cdot e_n$, то x является нулевым элементом, так как согласно свойству 3^0 линейных пространств имеем $0 \cdot e_p = \theta$, и поэтому $x = \theta$.

Задача 9.18 а) Какова размерность линейного пространства R^* (пространство R^* определено в задаче 9.2).

б) Определить базис пространства R^* .

Решение. а) Возьмем какое-либо число из R^* , отличное от нулевого элемента (от единицы), например число 2. Покажем, что любое число x из R^* может быть выражено в виде линейной комбинации элемента 2, т.е. существует такое число a из R , что $x = "a \cdot 2" = 2^a$. Действительно, такое число существует, именно $a = \log_2 x$, т.к. $2^{\log_2 x} = x$. Таким образом, любые два элемента линейного пространства R^* линейно зависимы. Следовательно, по определению, размерность линейного пространства R^* равна 1.

б) Что является базисом в этом линейном пространстве R^* ?

Как и в любом другом линейном пространстве, базисов в линейном пространстве R^* имеется бесконечно много. В качестве базиса можно взять любое число из R^* , не равное 1 (так как 1 – нулевой элемент).

Задача 9.19 Найти базис и размерность линейного пространства P_2 многочленов $p(x)$, степень которых не выше двух и которые удовлетворяют условию $p(1) = 0$.

Решение. Любой многочлен

$$p(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

из P , удовлетворяет условию

$$p(1) = c_1 + c_2 + c_3 = 0.$$

Отсюда $c_3 = -c_1 - c_2$, и поэтому

$$p(x) = c_1 + c_2x + (-c_1 - c_2)x^2 = c_1(1 - x^2) + c_2(x - x^2),$$

т.е. любой многочлен из P_2 представим в виде линейной комбинации
многочленов $p_1(x) = 1 - x^2$ и $p_2(x) = x - x^2$.

Покажем, что многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ линейно независимы. Составим столбцы их координат в базисе $1, x, x^2$ пространства P_2 :

$$F_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad F_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Эти столбцы линейно независимы, так как их элементы не пропорциональны, и, следовательно, многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ линейно независимы. Итак, многочлены $p_1(x)$ и $p_2(x)$ образуют базис в пространстве P_2 , и, следовательно, $\dim P_2 = 2$.

Преобразование координат вектора при переходе от базиса к базису

Пусть в линейном пространстве X_n заданы базисы

$$[e] = (e_1, e_2, \dots, e_n) \text{ и } [e'] = (e'_1, e'_2, \dots, e'_n). \quad (9.4)$$

Разложим векторы базиса e' по базису e :

$$\begin{cases} e'_1 = t_{11}e_1 + t_{21}e_{21} + \dots + t_{n1}e_{1n}, \\ e'_2 = t_{12}e_1 + t_{22}e_{21} + \dots + t_{n2}e_{1n}, \\ \dots\dots\dots \\ e'_n = t_{1n}e_1 + t_{2n}e_{21} + \dots + t_{nn}e_{1n}. \end{cases} \quad (9.5)$$

Матрицу

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}$$

называют **матрицей перехода** от базиса $[e]$ к базису $[e']$.

Соотношения (9.5) коротко записываются так:

$$e' = eT. \quad (9.6)$$

(9.6) – формула перехода от базиса $[e]$ к базису $[e']$.

$$e = e' \cdot T^{-1} \quad (9.7)$$

- формула перехода от базиса $[e']$ к базису $[e]$.

Задача 9.20 Пусть i, j - координатные векторы прямоугольной системы координат на плоскости. Найти разложение вектора $x = i + j$ по базису e_1, e_2 , если $e_1 = 7i + 4j$, $e_2 = 5i + 3j$.

Решение. По определению матрица перехода от базиса i, j к базису e_1, e_2 есть матрица

$$T = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Вычислим обратную матрицу:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Столбец X координат вектора x в базисе i, j имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле (9.7) находим столбец X_e координат вектора x в базисе e_1, e_2 :

$$X_e = T^{-1}X = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.21 В линейном пространстве T_3 даны два базиса e_1, e_2, e_3 и f_1, f_2, f_3 :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix},$$

и

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Найти: а) матрицу T перехода от базиса e к базису f ;

б) матрицу T^{-1} обратного перехода;

в) координаты элемента e_1 в обоих базисах;

г) координаты элемента x в базисе e , имеющего во втором базисе

координаты $X_f = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Формулу (9.6) можно записать равенством:

$(f_1 f_2 f_3) = (e_1 e_2 e_3)T$, которое в свою очередь представим матричным уравнением в виде $F = ET$, где

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

T - матрица перехода от базиса e к базису f . Решая составленное матричное уравнение, находим T :

$$\text{а) } T = E^{-1}F = \begin{pmatrix} 2 & -1,5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица перехода от e к f найдена.

$$\text{б) } T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} - \text{матрица обратного перехода;}$$

в) Найдем координаты элемента e_1 в обоих базисах. В первом базисе элемент e_1 имеет разложение $e_1 = e_1 + 0 \cdot e_2 + 0 \cdot e_3$, т.е.

$$(e_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ тогда по формуле (9.7) находим}$$

$$(e_1)_f = T^{-1}(e_1)_e = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

г) Используя формулу (9.6), получаем

$$(X)_e = T(X)_f = \begin{pmatrix} 2 & -1,5 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ -1 \\ 2,5 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.22 В пространстве R_2 даны три базиса: $e_1, e_2; f_1, f_2; g_1, g_2$, причем

$$f_1 = e_1 - e_2, \quad f_2 = e_1 + e_2, \quad g_1 = 3e_1 + e_2, \quad g_2 = 5e_1 + 2e_2.$$

Найти матрицу перехода от базиса f_1, f_2 к базису g_1, g_2 .

Решение. По определению матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису f_1, f_2 есть матрица

$$T_{e \rightarrow f} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрица перехода от базиса e_1, e_2 к базису g_1, g_2 есть матрица

$$T_{e \rightarrow g} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, связь векторов базисов f, e и g можно оформить системой:

$$\begin{cases} f = eT_{e \rightarrow f}, \\ g = eT_{e \rightarrow g}. \end{cases}$$

Из первого равенства находим $e = f \cdot T_{e \rightarrow f}^{-1}$. Подставляя во второе равенство, получаем $g = f \cdot T_{e \rightarrow f}^{-1} \cdot T_{e \rightarrow g}$.

Таким образом, матрицей перехода от базиса f_1, f_2 к базису g_1, g_2 является матрица $T_{e \rightarrow f}^{-1} \cdot T_{e \rightarrow g}$. Вычисляем матрицу $T_{e \rightarrow f}^{-1}$:

$$T_{e \rightarrow f}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а затем находим произведение $T_{e \rightarrow f}^{-1} \cdot T_{e \rightarrow g}$:

$$T_{e \rightarrow f}^{-1} \cdot T_{e \rightarrow g} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, матрица перехода от базиса f к базису g имеет вид

$$T_{e \rightarrow f}^{-1} \cdot T_{e \rightarrow g} = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 \\ 2 & 7/2 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.23 В линейном пространстве $P_2(x)$ многочленов не выше третьей степени с действительными коэффициентами даны два базиса:

$$e = (e_1, e_2, e_3),$$

где $e_1 = 1, \quad e_2 = x, \quad e_3 = x^2$, и

$$e' = (e'_1, e'_2, e'_3),$$

где $e'_1 = 1$, $e'_2 = x - 1$, $e'_3 = (x - 1)^2$.

Найти матрицу перехода T от базиса e к базису e' .

Решение. Так как

$$\begin{cases} e'_1 = 1 = e_1, \\ e'_2 = x - 1 = -1 + x = -e_1 + e_2, \\ e'_3 = (x - 1)^2 = 1 - 2x + x^2 = e_1 - 2e_2 + e_3, \end{cases}$$

то

$$(e'_1)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (e'_2)_e = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (e'_3)_e = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.24 Найти разложение элемента $p(x) = x^3 + x + 1$ пространства P_3 по базису $p_0 = 1$, $p_1 = x + a$, $p_2 = (x + a)^2$, $p_3 = (x + a)^3$.

Решение. Выразим координаты второго базиса (обозначим его (2)) через координаты первого базиса (1). Поскольку

$$(x + a)^2 = a^2 + 2ax + x^2, \quad (x + a)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3,$$

то

$$\begin{cases} p_0 = 1, \\ p_1 = a \cdot 1 + 1 \cdot x, \\ p_2 = a^2 \cdot 1 + 2a \cdot x + 1 \cdot x^2, \\ p_3 = a^3 \cdot 1 + 3a^2 \cdot x + 3a \cdot x^2 + x^3. \end{cases}$$

Таким образом, матрица T перехода от базиса $1, x, x^2, x^3$ к базису p_0, p_1, p_2, p_3 имеет вид

$$T_{(1) \rightarrow (2)} = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & 2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим обратную матрицу:

$$T_{(2) \rightarrow (1)} = \begin{pmatrix} 1 & -a & a^2 & -a^3 \\ 0 & 1 & -2a & 3a^2 \\ 0 & 0 & 1 & -3a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Далее составляем столбец $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ из координат элемента $p(x) = x^3 + x + 1$

в базисе (1): $1, x, x^2, x^3$. По формуле (9.6) находим столбец X_2 координат элемента $p(x)$ в базисе (2): p_0, p_1, p_2, p_3 :

$$X_2 = T_{(2) \rightarrow (1)} X_1 = \begin{pmatrix} 1 - a - a^3 \\ 1 + 3a^2 \\ -3a \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$p(x) = (1 - a - a^3)p_0(x) + (a + 3a^2)p_1(x) - 3ap_2(x) + 1 \cdot p_3(x),$$

или

$$x^3 + x + 1 = (1 - a - a^3) + (1 + 3a^2)(x + a) - 3a(x + a)^2 + (x + a)^3.$$

Задача 9.25 В пространстве X_3 заданы вектор x и векторы e'_1, e'_2, e'_3 базиса e' координатами в базисе e :

$$[x]_e = (1, 4, -1)^T, [e'_1]_e = (5, -1, 2)^T, [e'_2]_e = (2, 3, 0)^T, [e'_3]_e = (-2, 1, 1)^T.$$

Задан также вектор y своими координатами в базисе e' : $[y]_{e'} = (1, 2, 3)^T$.

Найти координаты вектора x в базисе e' и координаты вектора y в базисе e .

Решение. Ввиду того, что векторы базиса e' заданы столбцами координат в базисе e , можно составить матрицу перехода T от базиса e к базису e' , сгруппировав координатные столбцы вектора базиса e' :

$$T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По формуле $[y]_e = T[y]_{e'}$ получаем:

$$[y]_e = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Далее вычисляем обратную матрицу перехода

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix}$$

и находим:

$$[x]_{e'} = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{pmatrix} = T^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 8 \\ -1 & 1 & -3 \\ 6 & -4 & 17 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 6 \\ -27 \end{pmatrix}.$$

Формулой $[x]_{e'} = T[x]_e$ удобно пользоваться при отыскании матрицы перехода от базиса e к базису e' , когда векторы этих базисов заданы своими координатами в некотором третьем базисе e° .

Задача 9.26 Найти матрицу перехода от базиса $e = (e_1, e_2, e_3)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2, e'_3)$, если известны координаты векторов $e_1, e_2, e_3, e'_1, e'_2, e'_3$ в некотором базисе e_0 :

$$[e_1]_{e_0} = (1, 1, 1)^T, [e_2]_{e_0} = (1, 2, 3)^T \text{ и } [e_3]_{e_0} = (1, 0, 1)^T$$

и

$$[e'_1]_{e_0} = (1, 1, 1)^T, [e'_2]_{e_0} = (1, 2, 1)^T \text{ и } [e'_3]_{e_0} = (1, 1, 3)^T.$$

Решение. Прейдем от базиса e_0 к базису e и найдем координаты векторов базиса e' в базисе e . Матрицей перехода от базиса e_0 к базису e является матрица

$$T_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

а обратной к ней – матрица

$$T_1^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Поэтому для векторов e'_1, e'_2, e'_3 получаем:

$$[e'_1]_e = T_1^{-1}[e'_1]_{e_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$[e'_2]_e = T_1^{-1}[e'_2]_{e_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

$$[e'_3]_e = T_l^{-1}[e'_3]_{e_0} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из полученных координатных столбцов составляем матрицу перехода от базиса e к базису e' :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 9.27 Найти матрицу перехода от базиса $e = (e_1, e_2)$ к базису $e' = (e'_1, e'_2)$, где $[e'_1]_e = (2, 1)^T$, $[e'_2]_e = (3, 2)^T$.

Решение. Здесь векторы нового базиса заданы координатами в старом базисе. Поэтому сразу можно составить искомую матрицу T из координатных столбцов векторов e'_1 и e'_2 :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм линейных пространств

Рассмотрим два линейных пространства V и V' . Элементы пространства V будем обозначать через $x, y, z, \dots$, а элементы пространства V' - через $x', y', z', \dots$.

Пространства V и V' называют **изоморфными**, если между их элементами x, y, x', y' можно установить такое взаимно однозначное соответствие $x \leftrightarrow x'$; $y \leftrightarrow y'$, при котором $x + y \leftrightarrow x' + y'$, $\lambda x \leftrightarrow \lambda x'$ (λ - любое действительное число). Следует отметить важную **теорему**, с помощью которой легко устанавливается изоморфизм конечномерных линейных пространств:

Для того, чтобы два конечномерных пространства V и V' были изоморфными, необходимо и достаточно, чтобы их размерности были одинаковыми.

Задача 9.28 Какие пространства H_n^m матриц с размерами $m \times n$ изоморфны пространству T_6 столбцов с шестью элементами?

Решение. Размерности пространств H_n^m и T_6 равны соответственно $m \times n$ и 6. Из теоремы следует, что пространства H_n^m и T_6 изоморфны тогда и только тогда, когда $m \cdot n = 6$. Следовательно, пространства H_6^1 , H_1^6 , H_3^2 , H_2^3 изоморфны пространству T_6 .

Отметим, что пространство H_1^6 - это пространство матриц с размерами 6×1 , т.е. это само пространство T_6 . Разумеется, любое линейное пространство изоморфно самому себе.

Линейное подпространство, его размерность

Множество $W \subset V$ называется **подпространством** линейного пространства V , если выполняются следующие условия:

- 1) в множестве W определены те же операции, что и в множестве V ;
- 2) если $x, y \in W$, то $x + y \in W$;
- 3) если $x \in W$, то $\alpha x \in W$.

Очевидно, всякое подпространство W линейного пространства V является линейным пространством, т.е. в W выполняются аксиомы I – VIII.

Теорема *Размерность любого подпространства не превосходит размерности всего пространства. Базис подпространства линейного пространства R_n можно дополнить элементами из R_n до базиса всего пространства.*

Задача 9.29 Образуе ли множество N всех натуральных чисел подпространство линейного пространства R^* (смотри задачу 9.2).

Решение. Так как дано непустое множество N из R^* , то остается проверить корректность линейных операций на N , введенных в R^* .

1⁰ Операция сложения – для любых x, y из N « $x + y$ » $\in N$. Так как " $x + y$ " = $xy \in N$, то эта операция корректна на множестве N .

2⁰ Операция умножения на действительное число – для любых x из N и a из R " ax " $\in N$. Но " ax " $= x^a$, что, вообще говоря, не принадлежит множеству N . Например, если $x = 2$, $a = -1$, то " ax " $= 1/2$, т.е. не является натуральным числом; $1/2 \notin N$. Поэтому множество N не является подпространством линейного пространства R^* .

Подпространства, образованные решениями однородной линейной системы уравнений

Рассмотрим однородную систему уравнений

[illegible]

Пусть $x_1 = \lambda_1, x_2 = \lambda_2, \dots, x_n = \lambda_n$ - какое-нибудь решение системы. Запишем это решение в виде вектора $f = (\lambda_1; \lambda_2; \dots; \lambda_n)$. Совокупность линейно

независимых решений $f_1, f_2, \dots, f_n$ системы уравнений (9.8) называется **фундаментальной системой решений**, если любое решение системы уравнений (9.8) может быть представлено в виде линейной комбинации векторов $f_1, f_2, \dots, f_n$.

Теорема о существовании фундаментальной системы решений. Если ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

меньше n , то система (9.8) имеет ненулевые решения. Число векторов, определяющих фундаментальную систему решений, находится по формуле

$$k = n - r,$$

где r - ранг матрицы.

Таким образом, если рассматривается линейное пространство V , векторами которого являются всевозможные системы n действительных чисел, то совокупность всех решений системы (9.8) является подпространство пространства V . Размерность этого пространства равна k .

Задача 9.30 Найти базис и размерность подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

равен 2, так как определитель третьего порядка, образованный элементами матрицы, равен нулю, а среди миноров второго порядка имеются отличные от нуля. Размерность пространства решений

$$k = n - r = 3 - 2 = 1.$$

Так как $r = 2$, то достаточно взять два уравнения из заданных трех. Отбросим третье уравнение, поскольку его коэффициенты пропорциональны соответствующим коэффициентам первого уравнения.

В системе

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -x_3, \\ 2x_1 - x_2 = x_3 \end{cases}$$

полагаем, например, $x_3 = 1$, тогда решение системы

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = -1, \\ 2x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$$

есть $x_1 = 1, x_2 = 1$.

Итак, подпространство решений определяется одним базисным вектором $f = (1, 1, 1)$. Понятно, если бы мы взяли x_3 равным другому числу, то и получили бы соответственно другой базисный вектор.

Задача 9.31 Найти размерность и базис подпространства решений системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Определяем ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Вычтем из 3-й строки 2-ю, а из 4-й строки 1-ю:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Так как элементы 3-й строки пропорциональны соответствующим элементам 1-й строки, а элементы 4-й строки пропорциональны элементам 2-й строки, то 3-ю и 4-ю строки можно вычеркнуть:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, ранг матрицы A равен 2 и $k = n - r = 4 - 2 = 2$.

Итак, размерность подпространства решений равна 2. Так как $r = 2$, то из четырех уравнений возьмем два:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x_1 + x_2 = x_3 - x_4, \\ x_1 - x_2 = -x_3 + x_4. \end{cases}$$

Полагая, например, $x_3 = 1, x_4 = 0$, получим систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1, \\ x_1 - x_2 = -1. \end{cases}$$

Следовательно, $x_1 = 0, x_2 = 1$ и $f_1 = (0; 1; 1; 0)$.

Полагая теперь $x_3 = 0, x_4 = 1$, имеем

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -1, \\ x_1 - x_2 = 1. \end{cases}$$

Таким образом, $x_1 = 0$, $x_2 = -1$ и $f_2 = (0; -1; 0; 1)$. За базисные векторы подпространства могут быть приняты векторы $f_1 = (0; 1; 1; 0)$, $f_2 = (0; -1; 0; 1)$. Общее решение системы уравнений определяется вектором

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2,$$

T.e. $f = (0; c_1 - c_2; c_1; c_2)$.

Задача 9.32 Доказать, что множество M всех функций $f(x)$ удовлетворяющих условию $f(-2)=0$, является подпространством линейного пространства функций, определенных на числовой прямой.

Решение. Проверим выполнение двух условий, определяющих подпространство. Если $f(x)$ и $g(x) \in M$, то $f(-2) = 0$, $g(-2) = 0$, и поэтому,

$$f(-2) + g(-2) = 0 \quad \text{и} \quad \alpha \cdot f(-2) = 0$$

(α - любое число). Следовательно,

$$f(x) + g(x) \quad \text{и} \quad \alpha \cdot f(x)$$

принадлежит множеству M , и поэтому M - подпространство линейного пространства функций.

Задача 9.33 Доказать, что все векторы, параллельные данной прямой, образуют подпространство линейного пространства V_3 .

Решение. Если векторы x и y параллельны данной прямой, то их сумма $x + y$ и вектор αx (α - любое число) также параллельны этой прямой. Таким образом, для данного множества векторов выполнены оба условия, входящие в определение подпространства, и поэтому векторы, параллельные данной прямой, образуют подпространство линейного пространства V_3 .

Задача 9.34 Дана однородная система m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Доказать, что множество всех решений данной системы является подпространством пространства T_n .

Решение. Запишем данную систему в матричном виде:

$$AX = \mathbf{0},$$

где $A = (a_{ij}) - m \times n$ матрица коэффициентов системы, X - столбец, состоящий из решений системы, Θ - нулевой столбец. Если X_1 и X_2 - решения системы, т.е. $AX_i = \Theta$, $i = 1, 2$, то

$$X_1 + X_2 \quad \text{и} \quad \alpha X_1$$

(α - число) - также ее решения, поскольку

$$A(X_1 + X_2) = AX_1 + AX_2 = \Theta + \Theta = \Theta \quad \text{и} \quad A(\alpha X_1) = \alpha AX_1 = \alpha \Theta = \Theta.$$

Следовательно, для множества решений данной системы выполнены оба условия, фигурирующих в определении подпространства, и поэтому это множество решений является подпространством линейного пространства T_n .

Пусть M - подпространство линейного пространства V и элемент x_0 из V не принадлежит M . Рассмотрим множество Γ всех элементов $y \in V$, представимых в виде $y = x_0 + x$, где $x \in M$. Множество Γ называется **гиперплоскостью**, полученной в результате сдвига подпространства M вдоль элемента x_0 .

Задача 9.35 Доказать, что гиперплоскость не является подпространством.

Решение. Пусть гиперплоскость Γ получена в результате сдвига подпространства M вдоль элемента x_0 . Согласно определению гиперплоскости $x_0 \notin M$. Предположим, что Γ - подпространство. Тогда $\theta \in \Gamma$, а значит, θ можно представить в виде

$$\theta = x_0 + x,$$

где $x \in M$. Отсюда следует, что $x_0 = -x$, и поэтому $x_0 \in M$. Таким образом, получили противоречие с условием $x_0 \notin M$. Следовательно, $\theta \notin \Gamma$, и потому Γ не является подпространством.

Задача 9.36 Доказать, что $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = L(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m)$, т.е. прибавление к элементу порождающей системы другого ее элемента не изменяет линейной оболочки.

Решение. Чтобы доказать, что два множества совпадают, нужно показать, что каждый элемент первого множества является элементом второго и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества. Пусть

$$x \in L(x_1, x_2, \dots, x_m), \text{ т.е. } x = \sum_{p=1}^m c_p x_p.$$

Элемент x можно представить в виде линейной комбинации элементов порождающей системы второй оболочки:

$$x = c_1(x_1 + x_2) + (c_2 - c_1)x_2 + \sum_{p=3}^m c_p x_p.$$

$$\text{Итак, } x \in L(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m).$$

Обратно: каждый элемент второй оболочки есть линейная комбинация элементов $x_1, x_2, \dots, x_m$, т.е. принадлежит первой оболочке. Таким образом, $L(x_1, x_2, \dots, x_m) = L(x_1 + x_2, x_2, \dots, x_m)$.

Задача 9.37 Найти какой-либо базис подпространства L , заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выбрав в качестве главных неизвестных x_1, x_2 , а свободных - x_3, x_4 , решим систему. В результате получим:

$$x = \begin{pmatrix} -x_3 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальную систему решений рассматриваемой однородной системы линейных уравнений составляют столбцы $(-1, 0, 1, 0)^T$, $(0, -1, 0, 1)^T$ а базис линейного пространства – векторы, которые в заданном базисе имеют указанные столбцы координат.

Задача 9.38 Найти базис пересечения подпространств

$$L_1 = (a_1, a_2, a_3) \text{ и } L = (b_1, b_2, b_3),$$

где

$$a_1 = (1, 1, 1, 1)^T, a_2 = (1, 1, -1, -1)^T, a_3 = (1, -1, 1, -1)^T \text{ и}$$

$$b_1 = (1, -1, -1, 1)^T, b_2 = (2, -2, 0, 0)^T, b_3 = (3, -1, 1, 1)^T.$$

Решение. I способ. Подпространство L_1 описывает параметрическим уравнением

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3,$$

которое в координатной форме имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = t_1 + t_2 + t_3, \\ x_2 = t_1 + t_2 - t_3, \\ x_3 = t_1 - t_2 + t_3, \\ x_4 = t_1 - t_2 - t_3. \end{cases}$$

Исключив параметры t_1, t_2, t_3 придем к общему уравнению

$$x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0$$

подпространства L_1 . Аналогично получаем общее уравнение

$$x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0$$

подпространства L_2 . Общие уравнения подпространств $L_1 \cap L_2$ имеют вид:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Фундаментальную систему решений этой системы составляют, например, векторы

$$x_1 = (1, 0, 1, 0)^T, \quad x_2 = (0, 1, 0, 1)^T.$$

Эти векторы образуют базис подпространства $L_1 \cap L_2$.

II способ. Составим векторное уравнение

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \beta_3 b_3,$$

в подробной записи имеющее вид:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \beta_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta_3 \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Переходя к координатным уравнениям, получим однородную систему

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + 2\beta_2 + 3\beta_3, \\ \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3 = -\beta_1 - 2\beta_2 - \beta_3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 = -\beta_1 + \beta_3, \\ \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 = \beta_1 + \beta_3 \end{cases}$$

с шестью неизвестными. Ее общее решение таково:

$$\begin{cases} \alpha_1 = \beta_1, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = \beta_2 + \beta_3, \\ \beta_1 = -\beta_2 - \beta_3. \end{cases}$$

Свободных неизвестных два, и фундаментальная система решений состоит из двух столбцов

$$(0, 0, 1, -1, 1, 0)^T \text{ и } (1, 0, 1, -1, 0, 1)^T.$$

В этих двух столбцах выбираем первые три компоненты и принимаем в качестве значений $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ в выражении

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3.$$

Получаем два вектора

$$x_1 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = a_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$x_2 = 1 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 0 \cdot a_3 = a_1 + a_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

составляющих базис подпространства $L_1 \cap L_2$.

Пусть в линейном пространстве X над полем P дана система векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$. Множество всевозможных линейных комбинаций

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k$$

этой системы называют **линейной оболочкой** системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$.

Линейная оболочка L системы векторов $a_1, a_2, \dots, a_k$ является подпространством в X .

Теорема Пусть X – конечномерное линейное пространство и в нем задан базис. Тогда для любого линейного подпространства L в X можно указать такую однородную систему линейных уравнений $Ax = 0$, что множество координатных столбцов всех векторов L будет совпадать с множеством решений системы $Ax = 0$.

Так как линейное подпространство L в базисе $a_1, a_2, \dots, a_n$ описывается однородной системой линейных уравнений, то это подпространство в соответствии с только что доказанным и в базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ описывается системой линейных уравнений.

Однородную систему линейных уравнений, описывающую данное линейное подпространство L , называют **общими уравнениями** этого подпространства.

Общие уравнения линейного подпространства определяются неоднозначно: достаточно систему линейных уравнений заменить любой эквивалентной системой, чтобы получить другие общие уравнения того же линейного подпространства.

Если подпространство задано общими уравнениями, то для построения базиса этого подпространства следует построить фундаментальную систему решений для общих уравнений подпространства.

Если $a_1, a_2, \dots, a_k$ – базис линейного подпространства L в линейном пространстве X , то L можно задать уравнением

$$x = t_1 a_1 + t_2 a_2 + \dots + t_n a_n,$$

которое называют **параметрическим уравнением подпространства L в векторной форме.**

[illegible]

Задача 9.39 Найти базис и размерность подпространства линейной однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 0, \\ (1/2)x_1 + x_2 + (3/2)x_3 + 2x_4 = 0, \\ (1/3)x_1 + (2/3)x_2 + x_3 + (4/3)x_4 = 0, \\ (1/4)x_1 + (1/2)x_2 + (3/4)x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3/2 & 2 \\ 1/3 & 2/3 & 1 & 4/3 \\ 1/4 & 1/2 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}$$
$$x_1 = -2x_2 - 3x_3 - 4x_4.$$

Задача 9.40 Найти базис суммы $L_1 + L_2$ подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$ и $L_2 = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$, если

$$\begin{aligned} a_1 &= (1, 1, 1, 1)^T, & a_2 &= (1, 1, -1, -1)^T, & a_3 &= (1, -1, 1, -1)^T, \\ b_1 &= (1, -1, -1, 1)^T, & b_2 &= (2, -2, 0, 0)^T, & b_3 &= (3, -1, 1, 1)^T. \end{aligned}$$

268

$$(a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проводя элементарные преобразования строк матрицы, приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -4 & -4 \end{pmatrix}.$$

Видим, что ранг матрицы равен четырем, а один из ее базисных миноров располагается на векторах a_1, a_2, a_3, b_1 . Следовательно, эти векторы составляют базис суммы $L_1 + L_2$.

9.1 Задачи для самостоятельного решения

9.41 Заданы координаты векторов a и b в некотором базисе. Найти координаты вектора c в этом же базисе.

а) $a(2; 3; -1)$, $b(0; 1; 2)$, $c = 2a + 3b$;

б) $a(0; -5; 1; 4)$, $b(7; 2; 0; -1)$, $c = a - b$.

Ответ. а) $c(4, 9, 4)$; б) $c(-7, -7, 1, 5)$.

9.42 Даны векторы $a = 2e_1 - e_2$, $b = e_1 + 3e_2$, где e_1, e_2 - базис. Доказать, что векторы a, b образуют базис. Найдите координаты вектора $c = 3e_1 - 2e_2$ в базисе a, b .

Ответ. $c(11/7; -1/7)$.

9.43 Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы, заданные координатами в некотором базисе:

а) $a_1(2, 1, -1)$, $a_2(-6, 2, 0)$, $a_3(2, -4, 2)$;

б) $a_1(1, -1, 0, 1)$, $a_2(2, 3, -1, 0)$, $a_3(4, 0, 0, -1)$.

Ответ. а) нет; б) да.

9.44 Выяснить, является ли вектор a_4 линейной комбинацией остальных векторов:

а) $a_1(-2, 1, 0)$, $a_2(3, -1, 1)$, $a_3(2, 0, -2)$, $a_4(1, 1, 1)$;

б) $a_1(1, 1, 1)$, $a_2(2, 2, 2)$, $a_3(0, -1, 1)$, $a_4(2, -1, 3)$.

Ответ. а) да; б) да.

9.45 Даны векторы a_1, a_2, a_3, b в некотором базисе. Найти все значения λ , при которых вектор b линейно выражается через векторы a_1, a_2, a_3 :

а) $a_1(2, 3, 0)$, $a_2(1, 36, 0)$, $a_3(-1, 2, 0)$, $b(0, \lambda, 5)$;

б) $a_1(1, 2, 4)$, $a_2(2, 1, 5)$, $a_3(3, -1, 5)$, $b(1, \lambda, \lambda)$.

Ответ. а) при любом λ ; б) ни при каком λ .

9.46 Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2, e_3, e_4 к базису e_3, e_4, e_1, e_2 .

Ответ.
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

9.47 Является ли данная матрица матрицей перехода от одного базиса к другому:

а) $\begin{pmatrix} -1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 7 \\ 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$

Ответ. а) нет;

б) да.

9.48 Дана матрица $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$ перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису

e'_1, e'_2, e'_3 . Найти координаты e'_2 в базисе e_1, e_2, e_3 и координаты e'_1 в базисе e'_1, e'_2, e'_3 .

Ответ. $e'_2(0, -1, 4)$, $e'_1(-1, -2, 13/6)$.

9.49 Найти матрицу перехода от базиса e_1, e_2 к базису e'_1, e'_2 , если $e'_1 = 3e_1 - 2e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

9.50 По координатам вектора x в базисе e_1, e_2 найти его координаты в базисе e'_1, e'_2 :

а) $x = 3e_1 - 2e_2$, $e'_1 = 5e_1 + 3e_2$, $e'_2 = e_1 + e_2$;

б) $x = 2e_1 - 5e_2$, $e'_1 = 3e_1 - 4e_2$, $e'_2 = e_1 - e_2$.

Ответ. а) $x(5/2; -19/2)$; б) $x(-3, 7)$.

9.51 Показать, что данная система векторов $a_1, \dots, a_n$ образует базис, и найти координаты вектора d в этом базисе:

а) $a_1(1, 2)$, $a_2(-1, 4)$, $d(3, -7)$;

б) $a_1(1, 2, 3)$, $a_2(-1, 4, 0)$, $a_3(1, 0, 0)$, $d(5, 2, -6)$.

Ответ. а) $d(5/6; -13/6)$; б) $d(-2, 3/2; 17/2)$.

10 Евклидово и унитарное пространство

Линейное пространство R называется **евклидовым**, если имеется правило, которое позволяет для каждых двух векторов x и y из R построить действительное число, называемое **скалярным произведением** векторов x и y и обозначаемое (x, y) , причем это правило удовлетворяет следующим условиям:

$$1^0 \quad (x, y) = (y, x);$$

$$2^0 \quad (x + y, z) = (x, z) + (y, z);$$

$$3^0 \quad (\lambda x, y) = \lambda(x, y) \text{ для любого действительного числа } \lambda;$$

$$4^0 \quad (x, x) > 0 \text{ для всех } x \neq 0.$$

Из условий $1^0 - 4^0$ следует, что:

$$а) \quad (y + z, x) = (y, x) + (z, x);$$

$$б) \quad (x, \lambda y) = \lambda(x, y);$$

$$в) \quad (0, x) = 0 \text{ для любого вектора } x.$$

Скалярное произведение любого вектора $x \in R$ на себя называется **скалярным квадратом** вектора x .

Длиной вектора x в евклидовом пространстве называется квадратный корень из скалярного квадрата этого вектора, т.е.

$$|x| = \sqrt{(x, x)}.$$

Если λ - любое действительное число, а x - любой вектор евклидова пространства, то $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

Вектор, длина которого равна единице, называется **нормированным**. Если $x \in R$ - нулевой вектор, то нетрудно видеть, что $\frac{x}{|x|}$ является нормированным вектором.

Для любых двух векторов x и y в евклидовом пространстве выполняется неравенство

$$(x, y)^2 \leq (x, x)(y, y),$$

называемое **неравенством Коши-Буняковского**.

Равенство $(x, y)^2 = (x, x)(y, y)$ имеет место тогда и только тогда, когда векторы x и y линейно зависимы.

Из неравенства Коши-Буняковского следует, что

$$-1 \leq \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} \leq 1.$$

Угол φ , определяемый равенством

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}$$

и принадлежащий отрезку $[0, \pi]$, называется **углом между векторами** x и y . Если x и y - ненулевые векторы, а $\varphi = \pi/2$, то $(x, y) = 0$. В этом случае говорят, что векторы x и y **ортогональны**, и пишут $x \perp y$.

Для произвольных векторов x и y евклидова пространства имеют место следующие важные соотношения:

$$1. |x + y| \leq |x| + |y| \text{ (неравенство треугольника).}$$

2. Пусть φ - угол между векторами x и y , тогда

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x| \cdot |y| \cos \varphi$$

(теорема косинусов). Если $x \perp y$, то получается равенство

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2.$$

Заменяя в последнем равенстве y на $-y$, получаем

$$|x + y|^2 = |x|^2 + |y|^2$$

(теорема Пифагора).

Задача 10.1 Доказать, что для любого элемента x евклидова пространства справедливо равенство $(\theta, x) = 0$.

Решение. Для любого элемента x имеем

$$0 \cdot x = \theta.$$

Используя это равенство и аксиому 3⁰ скалярного произведения, получаем

$$(\theta, x) = (0 \cdot x, x) = 0 \cdot (x, x) = 0.$$

Задача 10.2 Доказать, что в евклидовом пространстве P_2 многочленов с действительными коэффициентами степени, не превосходящей 2, скалярное произведение можно ввести по формуле

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Решение. Для доказательства утверждения нужно проверить выполнимость четырех аксиом скалярного произведения.

$$1^0 (f, g) = (g, f) \text{ в силу коммутативности умножения чисел.}$$

$$2^0 \text{ Проверим, что } (f + \varphi, g) = (f, g) + (\varphi, g). \text{ Имеем}$$

$$\begin{aligned} (f + \varphi, g) &= [f(-1) + \varphi(-1)]g(-1) + [f(0) + \varphi(0)]g(0) + \\ &+ [f(1) + \varphi(1)]g(1) = [f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)] + \\ &+ [\varphi(-1)g(-1) + \varphi(0)g(0) + \varphi(1)g(1)] = (f, g) + (\varphi, g). \end{aligned}$$

$$3^0 \text{ Проверим, что } (\alpha f, g) = \alpha(f, g), \text{ где } \alpha - \text{число. Находим}$$

$$(\alpha f, g) = \alpha f(-1)g(-1) + \alpha f(0)g(0) + \alpha f(1)g(1) =$$

$$= \alpha[f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1)] = \alpha(f, g).$$

4⁰ Для любого многочлена $f(x)$ справедливо неравенство

$$(f, f) = f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) \geq 0.$$

Покажем, что если $(f, f) = 0$, то $f = \theta$. Пусть $(f, f) = 0$, т.е.

$$f^2(-1) + f^2(0) + f^2(1) = 0.$$

Отсюда получаем

$$f(-1) = f(0) = f(1) = 0.$$

Так как степень многочлена $f(x)$ не превосходит 2, то число корней этого многочлена не может быть более чем 2. Следовательно, $f(0) \equiv 0$, т.е. $f(x)$ - нулевой элемент пространства P_2 .

Таким образом, по указанной формуле можно ввести скалярное произведение в пространстве P_2 .

Задача 10.3 Задано линейное пространство, n -мерных векторов при $n = 4$. Определить угол между векторами $x = (4; 1; 2; 2)$ и $y = (1; 3; 3; -9)$.

Решение. $|x| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{16 + 1 + 4 + 4} = 5;$

$$|y| = \sqrt{(y, y)} = \sqrt{1 + 9 + 8 + 81} = 10;$$

$$(x, y) = 4 + 3 + 6 - 18 = -5;$$

$$\cos \varphi = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|} = \frac{-5}{5 \cdot 10} = -0,1;$$

$$\varphi = \arccos(-0,1) = 174^\circ 15'.$$

Ответ. $\varphi = 174^\circ 15'.$

Задача 10.4 Пусть P_2 - евклидово пространство, рассмотренное в задаче 10.2.

а) Вычислить нормы многочленов $f(x) = 1 - x + x^2$ и $g(x) = 1 + x$ и угол между ними.

б) Написать выражение скалярного произведения двух произвольных элементов пространства P_2 через их координаты в базисе $p_0 = 1$, $p_1 = x$, $p_2 = x^2$.

Решение. а) Вычислим значения $f(x)$ и $g(x)$ в точках $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$:

$$f(-1) = 3, f(0) = 1, f(1) = 1, g(-1) = 0, g(0) = 1, g(1) = 2.$$

По формуле скалярного произведения

$$(f, g) = f(-1) \cdot g(-1) + f(0) \cdot g(0) + f(1) \cdot g(1) \text{ находим}$$

$$(f, g) = 3 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 3, \quad (f, f) = 3^2 + 1^2 + 1^2 = 11,$$

$$(g, g) = 0^2 + 1^2 + 2^2 = 5.$$

Вычислим теперь нормы элементов f и g и угол между ними:

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} = \sqrt{11}, \quad \|g\| = \sqrt{5}, \quad \cos \varphi = \frac{(f, g)}{\|f\| \cdot \|g\|} = \frac{3}{\sqrt{55}},$$

откуда $\varphi = \arccos \frac{3}{\sqrt{55}}$.

б) Найдем выражение скалярного произведения произвольных элементов $f(x)$ и $g(x)$ через их координаты в базисе: $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$.

Пусть

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2, \quad g(x) = d_0 + d_1x + d_2x^2;$$

тогда

$$f = \sum_{i=1}^2 c_i p_i, \quad g = \sum_{j=1}^2 d_j p_j$$

и скалярное произведение элементов f и g можно записать в виде

$$(f, g) = \sum_{i,j=0}^2 a_{ij} c_i d_j,$$

где $a_{ij} = (p_i, p_j)$. Находим коэффициенты a_{ij} :

$$\begin{aligned} a_{00} &= (p_0, p_0) = 3, & a_{11} &= (p_1, p_1) = 2, & a_{22} &= (p_2, p_2) = 2, \\ a_{01} &= a_{10} = (p_0, p_1) = 0, & a_{02} &= a_{20} = (p_0, p_2) = 2, \\ a_{12} &= a_{21} = (p_1, p_2) = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, скалярное произведение элементов $f(x)$ и $g(x)$ через координаты этих элементов в базисе $p_0 = 1, p_1 = x, p_2 = x^2$ выражается так:

$$(f, g) = 3c_0d_0 + 2c_1d_1 + 2c_2d_2 + 2c_0d_2 + 2c_2d_0.$$

Задача 10.5 Дано линейное пространство, векторами которого являются всевозможные системы, состоящие из n положительных чисел:

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n), \quad y = (y_1, y_2, \dots, y_n), \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_n), \dots$$

Сложение векторов и умножение вектора на число определены равенствами

$$x + y = (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n), \quad \lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, \dots, x_n^\lambda).$$

Будет ли это пространство евклидовым, если определить скалярное произведение равенством

$$(x, y) = \ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + \dots + \ln x_n \ln y_n?$$

Решение. Проверим выполнение условий $1^0 - 4^0$.

$$1^0 (x, y) = \ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + \dots + \ln x_n \ln y_n,$$

$$(y, x) = \ln y_1 \ln x_1 + \ln y_2 \ln x_2 + \dots + \ln y_n \ln x_n,$$

т.е. $(x, y) = (y, x)$.

2⁰ Так как $y + z = (y_1 z_1, y_2 z_2, \dots, y_n z_n)$, то
 $(x, y + z) = \ln x_1 \ln(y_1 z_1) + \ln x_2 \ln(y_2 z_2) + \dots + \ln x_n \ln(y_n z_n) =$
 $= \ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + \dots + \ln x_n \ln y_n + \ln x_1 \ln z_1 +$
 $+ \ln x_2 \ln z_2 + \dots + \ln x_n \ln z_n = (x, y) + (x, z).$

3⁰ Так как $\lambda x = (x_1^\lambda, x_2^\lambda, \dots, x_n^\lambda)$, то
 $\lambda x = \ln x_1^\lambda \ln y_1 + \ln x_2^\lambda \ln y_2 + \dots + \ln x_n^\lambda \ln y_n =$
 $= \lambda (\ln x_1 \ln y_1 + \ln x_2 \ln y_2 + \dots + \ln x_n \ln y_n) = \lambda (x, y).$

4⁰ $(x, x) = \ln^2 x_1 + \ln^2 x_2 + \dots + \ln^2 x_n \geq 0.$

Следовательно, рассматриваемое пространство является евклидовым.

Задача 10.6 Дано линейное пространство – множество всевозможных систем действительных чисел $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, Сумма двух любых элементов которого определяется равенством

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n),$$

а произведение любого элемента на число

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$$

Можно ли скалярное произведение двух произвольных векторов $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ определить равенством

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

(для того чтобы это пространство стало евклидовым)?

Решение. Проверим выполнение условий **1⁰ – 4⁰**.

1⁰ Так как $(y, x) = y_1 x_1 + y_2 x_2 + \dots + y_n x_n$, то $(x, y) = (y, x).$

2⁰ Пусть $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Тогда

$$y + z = (y_1 + z_1, y_2 + z_2, \dots, y_n + z_n)$$

и

$$(x, y + z) = x_1 y_1 + x_1 z_1 + x_2 y_2 + x_2 z_2 + \dots + x_n y_n + x_n z_n =$$

$$= (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) + (x_1 z_1 + x_2 z_2 + \dots + x_n z_n) = (x, y) + (x, z).$$

3⁰ $(\lambda x, y) = \lambda x_1 y_1 + \lambda x_2 y_2 + \dots + \lambda x_n y_n = \lambda (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n) = \lambda (x, y).$

4⁰ $(x, x) = x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \neq 0$, если хотя бы одно из чисел $x_1, x_2, \dots, x_n$

отлично от нуля.

Значит, в заданном пространстве с помощью указанного равенства можно определить скалярное произведение по формуле

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

и тогда пространство будет евклидовым.

Задача 10.7 а) Доказать теорему Пифагора в евклидовом пространстве:
если

$$(x, y) = 0, \text{ то } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

б) Доказать обратную теорему: если

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \text{ то } (x, y) = 0.$$

Решение. Вычислим квадрат нормы элемента $x + y$:

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) = \\ &= \|x\|^2 + 2(x, y) + \|y\|^2. \end{aligned}$$

Отсюда следует:

$$\text{а) если } (x, y) = 0, \text{ то } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2;$$

$$\text{б) обратно, если } \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2, \text{ то } (x, y) = 0.$$

Ортогональность элементов. Ортонормированный базис. Ортогонализация базисных элементов

Элементы в евклидовом пространстве называются **ортогональными**, если их скалярное произведение равно нулю.

Система элементов $(x_p)_k$ называется **ортогональной**, если

$$(x_p, x_m) = 0, \quad p \neq m, \quad p, m = \overline{1, k}. \quad (10.1)$$

Система элементов $(x_p)_k$ называется **ортонормированной**, если выполняется

$$(x_p, x_m) = 0, \quad p = m, \quad |x_p| = 1 \quad (10.2)$$

для любых $p, m = \overline{1, k}$.

Теорема 1 Любая ортогональная система ненулевых элементов евклидова пространства является линейно зависимой.

Теорема 2 В евклидовом пространстве существует ортонормированный базис.

Если $(e_k)_n$ - ортонормированный базис, то, как следует из формул (10.1) и (10.2), для любых элементов x, y , имеющих в этом базисе координаты

$$X_e = \|x^k\|^n, \quad Y_e = \|y^k\|^n,$$

скалярное произведение вычисляется по формуле

$$(x, y) = x^1 y^1 + x^2 y^2 + \dots + x^n y^n = X_e^T Y_e. \quad (10.3)$$

Из соотношений (10.2) и (10.3) следует справедливость обратной **теоремы**: если в евклидовом пространстве для любых элементов x, y с координатами

$\|x^k\|^n, \|y^k\|^n$ в базисе $(e_k)_n$ скалярное произведение вычисляется по формуле (10.3), то $(e_k)_n$ - ортонормированный базис.

Пусть $(x_p)_k$ - система линейно независимых элементов в евклидовом пространстве ε_m . Рассмотрим подпространство $L(x_1, x_2, \dots, x_k)$, в котором система $(x_p)_k$ является базисом. Процесс ортогонализации системы элементов $(x_p)_k$, позволяющий построить в $L(x_1, x_2, \dots, x_k)$ ортогональный базис $(e_p)_k$, описывается формулами

$$e_1 = x_1, \quad e_p = x_p - a_p^m e_m, \quad m = \overline{1, p-1}, \quad p = \overline{2, k}, \quad (10.4)$$

где

$$a_p^m = (x_p, e_m) : (e_m, e_m). \quad (10.5)$$

Отметим, что получающиеся при этом элементы $e_1, e_2, \dots, e_n$ - ненулевые.

Задача 10.8 Задано евклидово пространство, рассмотренное в задаче 10.6, при $n=6$. Проверить справедливость теоремы Пифагора для ортогональных векторов

$$x = (1; 0; 2; 0; 2; 0) \quad \text{и} \quad y = (0; 6; 0; 3; 0; 2).$$

Решение. Имеем

$$|x| = \sqrt{1+0+4+0+4+0} = 3, \quad |y| = \sqrt{0+36+0+9+0+4} = 7.$$

$$\text{Следовательно, } |x|^2 + |y|^2 = 9 + 49 = 58.$$

Далее,

$$x + y = (1; 6; 2; 3; 2; 2); \quad |x + y| = \sqrt{1+36+4+9+4+4} = \sqrt{58};$$

$$|x + y|^2 = 58..$$

$$\text{Итак, } |x|^2 + |y|^2 = |x + y|^2.$$

Задача 10.9 При каких значениях α и β базис, образованный векторами

$$e'_1 = \frac{\alpha}{3}e_1 + \frac{1-\alpha}{3}e_2 + \beta e_3, \quad e'_2 = \frac{1-\alpha}{3}e_1 + \beta e_2 + \frac{\alpha}{3}e_3,$$

$$e'_2 = \beta e_1 + \frac{\alpha}{3}e_2 + \frac{1-\alpha}{3}e_3,$$

является ортонормированным?

Решение. Из условий $|e'_i| = 1, (e'_i, e'_k) = 0$ (при $i \neq k$) получим систему уравнений

$$\begin{cases} \alpha^2 + (1-\alpha)^2 + 9\beta^2 = 9, \\ \alpha(1-\alpha) + 3(1-\alpha)\beta + 3\alpha\beta = 0. \end{cases}$$

Из последнего уравнения находим

$$\beta = -\frac{\alpha(\alpha - 1)}{3}.$$

Подставив это значение β в первое уравнение, имеем

$$\alpha^2 + (1 - \alpha)^2 + \alpha^2(1 - \alpha)^2 = 9;$$

$$1 - 2(1 - \alpha)\alpha + \alpha^2(1 - \alpha)^2 = 9;$$

$$(1 - \alpha + \alpha^2)^2 = 9.$$

Так как $1 - \alpha + \alpha^2 > 0$ при действительных значениях α , то $1 - \alpha + \alpha^2 = 3$, т.е. $\alpha^2 - \alpha - 2 = 0$. Следовательно,

$$\alpha_1 = -1, \quad \alpha_2 = 2, \quad \beta_1 = -2/3, \quad \beta_2 = 2/3.$$

Итак, получаем два ортонормированных базиса:

$$\mathbf{e}_1^{(1)} = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2^{(1)} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3,$$

$$\mathbf{e}_3^{(1)} = -\frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3.$$

$$\mathbf{e}_1^{(2)} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_2^{(2)} = -\frac{1}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{e}_3^{(2)} = \frac{2}{3}\mathbf{e}_1 + \frac{2}{3}\mathbf{e}_2 - \frac{1}{3}\mathbf{e}_3.$$

Задача 10.10 При каком значении λ базис, образованный векторами

$$\mathbf{g}_1 = \lambda\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 + \lambda\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \lambda\mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{g}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \lambda\mathbf{e}_4,$$

является ортогональным? Нормировать этот базис.

Решение. Из условия $(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = 0$ (при $i \neq k$) получаем уравнение

$$\lambda + \lambda + 1 + 1 = 0.$$

Следовательно, $\lambda = -1$ и

$$\mathbf{g}_1 = -\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{g}_2 = \mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4,$$

$$\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4, \quad \mathbf{g}_4 = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4,$$

$$|\mathbf{g}_i| = \sqrt{1+1+1+1} = 2.$$

Таким образом, векторы

$$\mathbf{e}'_1 = 0,5(-\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4), \quad \mathbf{e}'_2 = 0,5(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4),$$

$$\mathbf{e}'_3 = 0,5(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 - \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4), \quad \mathbf{e}'_4 = 0,5(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4)$$

образуют ортонормированный базис.

Задача 10.11 В пространстве P_2 многочленов степени, не превосходящей 2, введено скалярное произведение по формуле

$$(f, g) = f(-1)g(-1) + f(0)g(0) + f(1)g(1).$$

Построить ортонормированный базис в этом евклидовом пространстве.

Решение. Выберем в P_2 произвольный базис, например $y_k = x^{k-1}$ ($k-1$ - показатель степени), $k=1, 2, 3$. Пользуясь формулами (10.4) и (10.5), построим ортогональный базис $(g_k)_3$. Положим

$$g_1 = y_1,$$

$$g_2 = y_2 - a_2^1 g_1,$$

$$g_3 = y_3 - a_3^1 g_1 - a_3^2 g_2.$$

По формулам (10.5) находим

$$a_2^1 = (y_2, g_1) : (g_1, g_1),$$

$$a_3^1 = (y_3, g_1) : (g_1, g_1),$$

$$a_3^2 = (y_3, g_2) : (g_2, g_2).$$

Вычислим коэффициенты a_m^1 ($m=2, 3$) с помощью заданной в условии формулы:

$$(y_2, g_1) = (y_2, y_1) = (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0,$$

$$(y_3, g_1) = (-1)^2 \cdot 1 + 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 1 = 2,$$

$$(g_1, g_1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 3.$$

Значит, $a_2^1 = 0$ и поэтому $g_2 = y_2 = x$. Кроме того, $a_3^1 = 2/3$. Далее, имеем

$$(y_3, g_2) = (-1)^2 \cdot (-1) + 0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot 1 = 0.$$

Следовательно, $a_3^2 = 0$ и

$$g_3 = y_3 - \frac{2}{3} y_1 = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Таким образом, построен ортогональный базис:

$$g_1 = 1, \quad g_2 = x, \quad g_3 = x^2 - \frac{2}{3}.$$

Нормируя элементы $(g_k)_3$, получим ортонормированный базис $(e_k)_3$. Так как

$$(g_1, g_1) = 3, \quad (g_2, g_2) = 2, \quad (g_3, g_3) = 2/3,$$

то

$$e_1 = \frac{g_1}{|g_1|} = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad e_2 = \frac{g_2}{|g_2|} = \frac{x}{\sqrt{2}}, \quad e_3 = \sqrt{\frac{3}{2}} x^2 - \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Задача 10.12 Элементы x_1, x_2, x_3, x_4 евклидова пространства $\mathcal{E}_5$ имеют следующие разложения по ортонормированному базису e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 :

$$x_1 = e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5, \quad x_2 = e_1 + e_3 - e_4 - 2e_5,$$

$$x_3 = e_1 + 3e_3, \quad x_4 = 2e_3 + e_4 + 6e_5;$$

$L = L(x_1, x_2, x_3, x_4)$ - линейная оболочка данных элементов.

Требуется:

- а) построить ортонормированный базис линейной оболочки L ;
- б) дополнить этот базис до ортонормированного базиса пространства ε_5 .

Решение.

а) Из координат элементов x_1, x_2, x_3, x_4 в данном базисе составим столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$$

и рассмотрим матрицу A из этих столбцов

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{} & 2 \\ & 1 \\ & 6 \end{pmatrix}.$$

Вычислим ее ранг. Нетрудно проверить, что $X_4 = X_1 - 2X_2 + X_3$. Поэтому последний столбец можно удалить из матрицы A , не изменив при этом ее ранга. Выделенный рамкой минор третьего порядка отличен от нуля, т. е. является базисным минором матрицы. Отсюда следует, что столбцы X_1, X_2, X_3 линейно независимы и, значит, элементы x_1, x_2, x_3 образуют базис линейной оболочки L .

К этому базису применим процедуру ортогонализации. Используя формулу (10.1), получаем (новые базисные элементы обозначим y_1, y_2, y_3)

$$y_1 = x_1 \quad y_2 = x_2 - a_{12}y_1, \quad y_3 = x_3 - a_{13}y_1 - a_{23}y_2.$$

Коэффициенты a_{ij} определяем последовательно.

$$a_{12} = (x_2, y_1) \cdot (y_1, y_1)^{-1} = -\frac{1}{7}.$$

Итак,

$$y_1 = x_1 = e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5, \quad y_2 = x_2 + \frac{1}{7}y_1 = \frac{4}{7}(2e_1 + 2e_3 - 2e_4 - 3e_5).$$

Далее имеем

$$a_{13} = (x_3, y_1) \cdot (y_1, y_1)^{-1} = -\frac{4}{7}, \quad a_{23} = (x_3, y_2) \cdot (y_2, y_2)^{-1} = \frac{2}{3}.$$

Поэтому

$$y_3 = x_3 - \frac{4}{7}y_1 - \frac{2}{3}y_2 = \frac{1}{3}(-e_1 + 5e_3 + 4e_4).$$

Построенные элементы y_1, y_2, y_3 образуют ортогональный базис в L . Разделив каждый элемент на его норму, получим ортонормированный базис в L :

$$g_1 = \frac{y_1}{\|y_1\|} = \frac{1}{\sqrt{7}}(e_1 + e_3 - e_4 + 2e_5),$$

$$g_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{21}}(2e_1 + 2e_3 - 2e_4 - 3e_5),$$

$$g_3 = \frac{y_3}{\|y_3\|} = \frac{1}{\sqrt{42}}(-e_1 + 5e_3 + 4e_4).$$

б) Займемся теперь дополнением базиса g_1, g_2, g_3 до ортонормированного базиса пространства ε_5 . С этой целью найдем такие элементы

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$$

пространства ε_5 , которые ортогональны элементам g_1, g_2, g_3 , т.е. удовлетворяют условиям

$$(x, g_i) = 0, i = 1, 2, 3.$$

Эти условия дают однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных координат $x_1, \dots, x_5$ элемента x

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0, \\ 2x_1 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0, \\ -x_1 + 5x_3 + 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Так как ранг матрицы системы равен 3, то размерность пространства решений $5 - 3 = 2$, т.е. фундаментальная совокупность решений состоит из двух решений. Для нахождения фундаментальной совокупности решений перепишем систему в виде

$$\begin{cases} x_3 - x_4 + 2x_5 = -x_1, \\ 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = -2x_1, \\ 5x_3 + 4x_4 = x_1. \end{cases}$$

Полагая сначала $x_1 = 3, x_2 = 0$, получаем $x_3 = -1, x_4 = 2, x_5 = 0$; полагая затем $x_1 = 0, x_2 = 1$, находим $x_3 = x_4 = x_5 = 0$. Таким образом, фундаментальная совокупность решений состоит из двух линейно независимых решений

$$X_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad X_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

которым соответствуют линейно независимые элементы

$$x_4 = 3e_1 - e_3 + 2e_4 \quad \text{и} \quad x_5 = e_2,$$

ортогональные к элементам g_1, g_2, g_3 . Более того, элементы x_4 и x_5 ортогональны, так как $(x_4, x_5) = 0$.

Разделим x_4 на его норму:

$$g_4 = \frac{x_4}{\|x_4\|} = \frac{1}{\sqrt{14}}(3e_1 - e_3 + 2e_4),$$

и положим $g_5 = x_5 = e_2$. Элементы $g_1, \dots, g_5$ образуют искомый ортонормированный базис в пространстве $\mathcal{E}_5$.

Ортогональные и унитарные матрицы

Ортогональные матрицы

Пусть $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$ - два ортонормированных базиса в евклидовом пространстве $\mathcal{E}_n$, и пусть $Q = (q_{ij})$ - матрица перехода от первого базиса ко второму, т.е. имеет место равенство

$$f = eQ, \quad (10.6)$$

где $e = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ и $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ - строки, составленные из базисных элементов.

Матрица Q , т.е. матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому, называется **ортогональной** матрицей. Если взять произвольный ортонормированный базис и с помощью ортогональной матрицы перейти по формуле (10.6) к новому базису, то новый базис будет также ортогональным, т.е. *ортогональная матрица переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный базис*.

Свойства ортогональных матриц

$$1^0 \sum_{k=1}^n q_{ki} q_{kj} = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} - \text{символ Кронекера.}$$

Это свойство означает, что любые два столбца Q_i и Q_j ортогональной матрицы, рассматриваемые как элементы евклидова пространства T_n , ортогональны:

$$(Q_i, Q_j) = 0 \text{ при } i \neq j,$$

а скалярный квадрат любого столбца ортогональной матрицы равен 1:

$$(Q_i, Q_i) = 1.$$

Таким же свойством обладают строки ортогональной матрицы:

$$\sum_{k=1}^n q_{ki} q_{kj} = \delta_{ij}.$$

$$2^0 Q^{-1} = Q^T \quad (QQ^T = I, Q^T Q = I, \text{ где } I - \text{единичная матрица}).$$

$$3^0 |\det Q| = 1.$$

4⁰ Элемент q_{ij} ортогональной матрицы равен косинусу угла между базисными элементами e_i и f_j .

Свойства 1⁰ и 2⁰ являются **характеристическими** свойствами ортогональных матриц.

Унитарные матрицы

При рассмотрении комплексных евклидовых (т.е. унитарных) пространств аналогом ортогональных матриц выступают унитарные матрицы. **Унитарная** матрица $U = (u_{ij})$ - это матрица перехода от одного ортонормированного базиса, скажем $e_1, \dots, e_n$ к другому ортонормированному базису $f_1, \dots, f_n$ в унитарном пространстве E_n , т.е.

$$f = eU.$$

где f и e - строки, составленные из базисных элементов.

Свойства унитарных матриц.

1⁰ $\sum_{k=1}^n u_{ki} \overline{u_{kj}} = \delta_{ij}$ (символ Кронекера), т.е. скалярное произведение любых двух столбцов U_i и U_j унитарной матрицы, рассматриваемых как элементы пространства T_n^* , равно нулю при $i \neq j$ и равно 1 при $i = j$. Таким же свойством обладают строки унитарной матрицы.

2⁰ $U^{-1} = \overline{U^T}$, где $\overline{U^T}$ - матрица, которая получается из матрицы U путем транспонирования и замены всех элементов на комплексно сопряженные (индекс T означает транспонирование, а черта – комплексное сопряжение). Матрица $\overline{U^T}$ называется **эрмитово сопряженной** по отношению к матрице U и обозначается U^* . Таким образом, свойство 2⁰ можно записать так:

$$U^{-1} = U^*,$$

или, в эквивалентных формах:

$$UU^* = I \quad \text{или} \quad U^*U = I,$$

где I - единичная матрица. Матрица U^{-1} , т.е. матрица U^* , также является унитарной.

$$3^0 |\det U| = 1.$$

Аналогично ортогональным матрицам свойства 1⁰ и 2⁰ являются характеристическими свойствами унитарных матриц.

Задача 10.13 Доказать, что если Q - ортогональная 2×2 -матрица, то она представима либо в виде

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad (10.7)$$

либо в виде

$$Q = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}. \quad (10.8)$$

Дать геометрическую интерпретацию матрицы Q в каждом случае.

Решение. Запишем матрицу Q в виде

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

Согласно свойству 1^0 сумма квадратов элементов каждого столбца равна 1, а сумма произведений соответствующих элементов первого и второго столбцов равна нулю. Это дает три равенства:

$$q_{11}^2 + q_{21}^2 = 1, \quad q_{12}^2 + q_{22}^2 = 1, \quad q_{11} \cdot q_{12} + q_{21} \cdot q_{22} = 0. \quad (10.9)$$

Учитывая первые два равенства, положим

$$q_{11} = \cos \varphi, \quad q_{21} = \sin \varphi, \quad q_{12} = \cos \psi, \quad q_{22} = \sin \psi,$$

где φ и ψ - пока произвольные числа. Тогда первое и второе равенства (10.9) выполняются, а третье равенство можно записать в виде

$$\cos(\psi - \varphi) = 0.$$

Это равенство позволяет установить связь между φ и ψ . Без ограничения общности можно считать, что φ и ψ принадлежат промежутку $[0, 2\pi]$. Поэтому из равенства $\cos(\psi - \varphi) = 0$ следует, что

$$\psi - \varphi = \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \psi - \varphi = \pm \frac{3\pi}{2}.$$

Если

$$\psi - \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \psi - \varphi = -\frac{3\pi}{2},$$

то

$$\cos \psi = -\sin \varphi, \quad \sin \psi = \cos \varphi,$$

и мы получаем представление матрицы Q в виде (10.7). Если же

$$\psi - \varphi = -\frac{\pi}{2} \quad \text{или} \quad \psi - \varphi = \frac{3\pi}{2},$$

то

$$\cos \psi = \sin \varphi, \quad \sin \psi = -\cos \varphi,$$

и матрица Q имеет вид (10.8).

Итак, любая ортогональная 2×2 -матрица представима либо в виде (10.7) (в этом случае $\det Q = 1$), либо в виде (10.8) (в этом случае $\det Q = -1$).

Задача 10.14 Дана матрица

$$U = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot e^{i\varphi_1} & \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_2} \\ \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_3} & -\cos \varphi \cdot e^{i(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1)} \end{pmatrix},$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ - произвольные вещественные числа и $\varphi \in [0, \pi/2]$.

Доказать, что U - унитарная матрица и вычислить обратную к ней матрицу U^{-1} .

Решение. Матрица U является унитарной, если она обладает характеристическим свойством 1), т.е.

$$\sum_{k=1}^2 u_{ki} \overline{u_{kj}} = \delta_{ij}. \quad (10.10)$$

Проверим выполнение равенства (10.10). При $i = j = 1$ получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 u_{k1} \overline{u_{k1}} &= \cos \varphi \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \cos \varphi \cdot e^{-i\varphi_1} + \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_3} \cdot \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_3} = \\ &= \cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1. \end{aligned}$$

Аналогично, при $i = j = 2$ имеем

$$\sum_{k=1}^2 u_{k2} \overline{u_{k2}} = 1.$$

Наконец, при $i = 1, j = 2$ находим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^2 u_{k1} \overline{u_{k2}} &= \cos \varphi \cdot e^{i\varphi_1} \cdot \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_2} + \sin \varphi \cdot e^{i\varphi_3} \cdot \left(-\cos \varphi \cdot e^{-i(\varphi_2 + \varphi_3 - \varphi_1)} \right) = \\ &= \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} - \sin \varphi \cdot \cos \varphi \cdot e^{-i(\varphi_2 - \varphi_1)} = 0. \end{aligned}$$

Итак, матрица U обладает свойством 1) и, следовательно, U - унитарная матрица. Для вычисления обратной матрицы воспользуемся формулой $U^{-1} = \overline{U^T}$:

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cdot e^{-i\varphi_1} & \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_3} \\ \sin \varphi \cdot e^{-i\varphi_2} & -\cos \varphi \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2 - \varphi_3)} \end{pmatrix}.$$

10.1 Задачи для самостоятельного решения

10.15 Даны векторы евклидова пространства E^n . Найти длины векторов, скалярное произведение векторов и угол φ между ними:

а) $a(1, -2, 3)$, $b(3, 0, -4)$;

б) $a(1, -3, 0, 2)$, $b(0, 5, -12, 0)$.

Ответ. а) $|a| = \sqrt{14}$, $|b| = 5$, $(a, b) = -9$, $\varphi = \arccos(-9/5\sqrt{14})$;
 б) $|a| = \sqrt{14}$, $|b| = 13$, $(a, b) = -15$, $\varphi = \arccos(-15/13\sqrt{14})$.

10.16 Являются ли ортогональными в евклидовом пространстве E^3 следующие системы векторов:

а) $(0; 1; 1)$, $(0; -1; 3)$; б) $(1; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 0; 3)$?

Ответ. а) нет; б) да.

10.17 В евклидовом пространстве E^3 по данному базису построить ортонормированный базис:

а) $g_1 = (1, 2, 3)$, $g_2 = (0, 2, 0)$, $g_3 = (0, 0, 3)$;

б) $g_1 = (1, 0, 0)$, $g_2 = (0, 1, -1)$, $g_3 = (1, 1, 1)$.

Ответ. а) $(1/\sqrt{14}; 2/\sqrt{14}; 3/\sqrt{14})$, $(-1/\sqrt{35}; 5/\sqrt{35}; -3/\sqrt{35})$, $(-3/\sqrt{10}; 0; 1/\sqrt{10})$; б) $(1; 0; 0)$, $(0; 1/\sqrt{2}; -1/\sqrt{2})$, $(0; 1/\sqrt{2}; 1/\sqrt{2})$.

10.18 Даны векторы e_1, e_2, e_3, e_4, e_5 , образующие ортонормированный базис. Найти (x, y) , и $|x|$, $|y|$, если:

а) $x = e_1 - 2e_2 + e_5$, $y = 3e_2 + e_3 - e_4 + 2e_5$;

б) $x = 2e_1 + 3e_2 - 3e_3$, $y = e_5 - 2e_3$;

в) $x = 5e_1 - 3e_2 + e_3 + 4e_4$, $y = 2e_2 - e_3 + e_4$.

Ответ. а) $(x, y) = -4$, $|x| = \sqrt{6}$, $|y| = \sqrt{15}$;

б) $(x, y) = 6$, $|x| = \sqrt{22}$, $|y| = \sqrt{5}$;

в) $(x, y) = -3$, $|x| = \sqrt{51}$, $|y| = \sqrt{6}$.

10.19 Даны векторы e_1, e_2, e_3, e_4 , образующие ортогональный базис. Найти угол между векторами x и y , если:

а) $x = e_1 - 2e_2 + e_3 + e_4$, $y = e_2 + 2e_3 - e_4$, $|e_2| = 2$, $|e_3| = 1$, $|e_4| = 2$;

б) $x = 2e_1 - e_2 + e_3$, $y = e_2 + e_3 - e_4$, $|e_1| = 2$, $|e_3| = 3$, $|e_3| = 2$, $|e_4| = \sqrt{2}$.

Ответ. а) $\arccos(-\sqrt{10}/6)$; б) $\frac{\pi}{2}$.

11 Линейные операторы

Линейным оператором f , действующим в линейном пространстве R_n над числовым полем K (или линейным преобразованием линейного пространства R_n над числовым полем K), называется правило, по которому каждому элементу x из R_n ставится в соответствие определенный элемент y из R_n :

$$y = f(x)$$

причем для любых элементов x_1, x_2 из R_n и любого числа c из поля K выполняются равенства:

$$1^0 f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2);$$

$$2^0 f(cx_1) = cf(x_1).$$

Линейный оператор называется **тождественным**, если он преобразует любой вектор x в самого себя, т.е. если $f(x) = x$.

На практике приходится решать задачи, связанные с преобразованием пространства. Рассмотрим прежде всего следующие:

- 1) установить, является ли данное преобразование линейным оператором;
- 2) найти матрицу линейного оператора в заданном базисе.

Задача 11.1 Показать, что преобразование $f(x) = \alpha x$, где α - действительное число, является линейным оператором.

Решение. Имеем $f(x + y) = \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y = f(x) + f(y)$, $f(\lambda x) = \alpha(\lambda x) = \lambda f(x)$. Итак, оба условия, определяющие линейный оператор, выполнены. Рассмотренный линейный оператор f называется **преобразованием подобия**.

Задача 11.2 Оператор f в линейном пространстве R определен равенством $f(x) = x + x_0$, где $x_0 \in R$ - фиксированный ненулевой вектор. Является ли оператор f линейным?

Решение. Из равенств $f(x) = x + x_0$, $f(y) = y + x_0$, $f(x + y) = x + y + x_0$, $f(x + y) = f(x) + f(y)$ заключаем, что $x + y + x_0 = (x + x_0) + (y + x_0)$. Отсюда следует, что $x_0 = 0$, но это противоречит условию. Следовательно, оператор f не является линейным.

Задача 11.3 Доказать, что оператор f поворота на угол φ , действующий в пространстве V_2 векторов на плоскости, является линейным. Найти матрицу этого оператора в произвольном ортонормированном базисе e_1, e_2 .

Решение. Докажем вначале, что f - линейный оператор.

Пусть $d = b + c$ и векторы b и c неколлинеарны (рисунок 68).

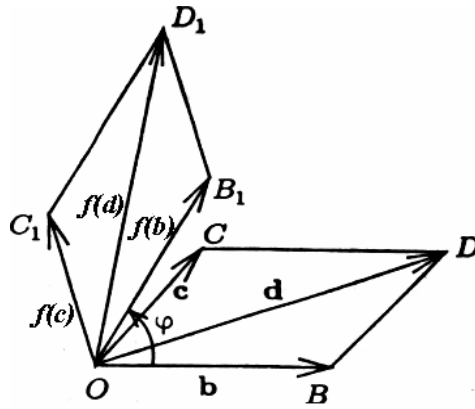


Рисунок 68

При повороте на угол φ векторы $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$, $\mathbf{c} = \overrightarrow{OC}$ и $\mathbf{d} = \overrightarrow{OD}$ переходят соответственно в векторы $f(\mathbf{b}) = \overrightarrow{OB_1}$, $f(\mathbf{c}) = \overrightarrow{OC_1}$ и $f(\mathbf{d}) = \overrightarrow{OD_1}$. При этом параллелограмм $OBDC$ переходит в параллелограмм $OB_1D_1C_1$. Поэтому $\overrightarrow{OD_1} = \overrightarrow{OB_1} + \overrightarrow{OC_1}$, т.е. $f(\mathbf{d}) = f(\mathbf{b}) + f(\mathbf{c})$ или $f(\mathbf{b} + \mathbf{c}) = f(\mathbf{b}) + f(\mathbf{c})$. Если векторы $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ коллинеарны, то это равенство также выполнено. Таким образом, первое условие линейности оператора имеет место.

Проверим выполнение второго условия. Для любого числа α векторы $\mathbf{b}$ и $\alpha\mathbf{b}$, отложенные от одной точки, лежат на одной прямой. При повороте на угол φ они переходят в векторы $f(\mathbf{b})$ и $f(\alpha\mathbf{b})$, также лежащие на одной прямой, и при этом $f(\alpha\mathbf{b}) = \alpha(f(\mathbf{b}))$. Итак, оператор f поворота на угол φ - линейный оператор.

Чтобы найти матрицу этого оператора в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$, нужно найти координаты образов $f\mathbf{e}_1, f\mathbf{e}_2$ в этом базисе. Как следует из рисунка 69

$$f(\mathbf{e}_1) = \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_2,$$

$$f(\mathbf{e}_2) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) \cdot \mathbf{e}_2 = -\sin \varphi \cdot \mathbf{e}_1 + \cos \varphi \cdot \mathbf{e}_2.$$

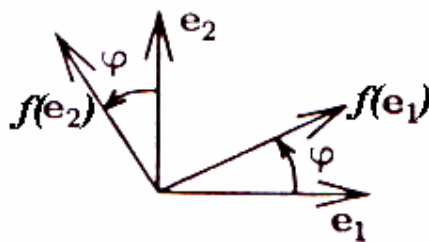


Рисунок 69

Таким образом,

$$A_e = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

- матрица оператора поворота на угол φ в ортонормированном базисе e_1, e_2 .
Заметим, что в любом ортонормированном базисе матрица данного оператора имеет один и тот же вид.

Задача 11.4 Найти матрицу оператора дифференцирования (оператора d) в пространстве P_2 многочленов степени, не превосходящей 2, в базисе:

а) $1, x, x^2$; б) $1, 1+x, 1+x+x^2$.

Решение. а) Чтобы составить матрицу D_e оператора d в базисе $e_1 = 1, e_2 = x, e_3 = x^2$, найдем образы элементов e_1, e_2, e_3 :

$$d(e_1) = (1)' = 0,$$

$$d(e_2) = (x)' = 1 = e_1,$$

$$d(e_3) = (x^2)' = 2x = 2e_2.$$

Отсюда следует, что

$$D_e = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

б) Аналогично, для базиса $y_1 = 1, y_2 = 1+x, y_3 = 1+x+x^2$ имеем равенства

$$d(y_1) = 0,$$

$$d(y_2) = 1 = y_1,$$

$$d(y_3) = 1 + 2x = -1 + 2(1+x) = -y_1 + 2y_2.$$

Отсюда следует, что

$$D_y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.5 Элементы x_1 и x_2 линейного пространства R_2 имеют в базисе e_1, e_2 координаты $(0, 1)$ и $(1, 0)$. Найти матрицы оператора f в базисах e_1, e_2 и x_1, x_2 , если элементы $f(x_1)$ и $f(x_2)$ имеют в базисе e_1, e_2 координаты $(2, 3)$ и $(4, 5)$.

Решение. Так как в базисе e_1, e_2 координаты элемента x_1 равны $(0, 1)$, а координаты элемента x_2 равны $(1, 0)$, то $x_1 = e_2, x_2 = e_1$. Используя эти равенства, а также данные координаты элементов $f(x_1)$ и $f(x_2)$, приходим к равенствам

$$f(x_1) = f(e_2) = 2e_1 + 3e_2 = 3x_1 + 2x_2,$$

$$f(x_2) = f(e_1) = 4e_1 + 5e_2 = 5x_1 + 4x_2.$$

Отсюда по определению матрицы оператора получаем

$$A_e = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_x = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Если линейный оператор $y = f(x)$ n -мерного линейного пространства в некотором базисе $e_1, e_2, \dots, e_n$ задан матрицей A , тогда зависимость между координатами вектора x и его образа $y = f(x)$ выражается формулой $Y = AX$, где X и Y - матрицы-столбцы соответственно векторов x и y .

Задача 11.6 Пусть линейный оператор f двумерного пространства в базисе e_1, e_2 задан матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Найти $f(x)$, если $x = 3e_1 - 2e_2$.

Решение. Составляем матрицу-столбец из координат вектора x в базисе e_1, e_2 :

$$X = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix},$$

тогда так как $Y = AX$, имеем

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Итак, $f(x) = 3e_1 - 7e_2$.

Преобразование матрицы линейного оператора при переходе к новому базису

Если

$$e_1, e_2, \dots, e_n; \tag{11.1}$$

$$e'_1, e'_2, \dots, e'_n \tag{11.2}$$

- базисы некоторого линейного пространства и A - матрица линейного оператора f в базисе (11.1), то матрица B этого оператора в базисе (11.2) имеет вид:

$$B = T^{-1}AT,$$

где T - матрица перехода от базиса (11.1) к базису (11.2).

Задача 11.7 В базисе e_1, e_2 оператор f имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу оператора f в базисе $e'_1 = e_1 - 2e_2$, $e'_2 = 2e_1 + e_2$.

Решение. Матрица перехода

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$T^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Искомая матрица

$$B = T^{-1}AT = \frac{1}{5} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.8 Пусть даны два базиса e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 линейного пространства и матрица A линейного оператора в базисе e_1, e_2, e_3 . Найти матрицу этого оператора в базисе e'_1, e'_2, e'_3

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$e'_1 = 3e_1 + e_2 + 2e_3, \quad e'_2 = 2e_1 + e_2 + 2e_3, \quad e'_3 = -e_1 + 2e_2 + 5e_3.$$

Решение. Составляем матрицу перехода от старого базиса e_1, e_2, e_3 к новому базису e'_1, e'_2, e'_3 , имеем

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Находим T^{-1} . Напомним формулу

$$T^{-1} = \frac{1}{\det T} \begin{pmatrix} T_{11} & T_{21} & T_{31} \\ T_{21} & T_{22} & T_{32} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{pmatrix},$$

где $T_{11}, \dots, T_{33}$ - соответствующие алгебраические дополнения.

$$\det T = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 - 2 - (-2 + 10 + 12) = 21 - 20 = 1.$$

$$\begin{aligned} T_{11} &= \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, & T_{12} &= -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -1, & T_{13} &= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0, \\ T_{21} &= -\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -12, & T_{22} &= \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 17, & T_{23} &= -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -2, \\ T_{31} &= \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, & T_{32} &= -\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -7, & T_{33} &= \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Итак

$$\begin{aligned} B &= T^{-1} \cdot A \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & -12 & 5 \\ -1 & 17 & -7 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -26 & -19 & 6 \\ 37 & 26 & -8 \\ -4 & -3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -85 & -59 & 18 \\ 121 & 84 & -25 \\ -13 & -9 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ядро и область значений линейного оператора

Ядром оператора $f: V \rightarrow W$ называется множество тех векторов пространства V , каждый из которых данный оператор переводит в нулевой вектор. Обозначение $\ker f$.

Областью значений или **образом оператора** $f: V \rightarrow W$ называется множество векторов пространства W , каждый из которых является образом хотя бы одного вектора из V . Обозначение $\operatorname{Im} f$.

Рангом оператора f называется $\dim \operatorname{Im} f$, т.е. размерность образа оператора.

Дефектом оператора f называется $\dim \ker f$, т.е. размерность ядра оператора.

Если $f: V \rightarrow V$ - линейный оператор, то:

$$\dim \operatorname{Im} f = r_A;$$

$$\dim \ker f = n - r_A,$$

где r_A - ранг матрицы A оператора f , n - размерность пространства V .

Задача 11.9 Найти ранг оператора f пространства V_3 , если известна матрица оператора

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Находим r_A . Так как

$$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 0 - 6 - (2 - 6 + 0) = -6 + 4 = -2 \neq 0,$$

то $r_A = 3$.

Таким образом, находим ранг и дефект оператора

$$\dim \operatorname{Im} f = r_A = 3;$$

$$\dim \ker f = n - r_A = 3 - 3 = 0.$$

Следовательно, ранг оператора равен трем, а его дефект равен нулю.

Характеристическое уравнение линейного оператора

Пусть A - матрица линейного оператора f , тогда $P_n(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ - **характеристический многочлен матрицы A** , $\det(A - \lambda E) = 0$ - **характеристическое уравнение оператора f** , а корни характеристического уравнения - **характеристические числа линейного оператора f** или **характеристические числа матрицы A** .

Задача 11.10 Найти характеристический многочлен матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением характеристического многочлена получаем:

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ -2 & -2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)(-1-\lambda) = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$$

- характеристический многочлен матрицы A .

Задача 11.11 Найти характеристический многочлен и характеристические числа матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. В соответствии с определением характеристического многочлена получаем

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 1 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix},$$

$$P_n(\lambda) = (4-\lambda)(1-\lambda)^2 + 4 + 2 + 2(1-\lambda) + 2(1-\lambda) - 2(4-\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6.$$

Приравнявая этот многочлен нулю, находим характеристическое уравнение

$$-\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6 = 0, \text{ или } \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0.$$

Разлагая левую часть этого уравнения на множители

$$\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = \lambda^3 - \lambda^2 - 5\lambda^2 + 5\lambda + 6\lambda - 6 = \\ = \lambda^2(\lambda - 1) - 5\lambda(\lambda - 1) + 6(\lambda - 1) = (\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6),$$

приводим данное уравнение к виду

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 3$. Эти корни – характеристические числа заданной матрицы.

Минимальный многочлен матрицы

Многочлен $\varphi(\lambda)$ минимальной степени, имеющий старший коэффициент, равный единице, и аннулируемый матрицей A , называют **минимальным многочленом** этой матрицы.

Теорема Любой многочлен, аннулируемый матрицей A , нацело делится на минимальный многочлен этой матрицы. В частности, характеристический многочлен матрицы делится на ее минимальный многочлен.

Любой корень минимального многочлена матрицы является корнем ее характеристического многочлена.

Характеристический многочлен $|A - \lambda E|$ матрицы A и ее минимальный многочлен $\varphi(\lambda)$ связаны соотношением

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^n |A - \lambda E|}{D_{n-1}}, \quad (11.3)$$

где D_{n-1} – наибольший общий делитель всех миноров матрицы $A - \lambda E$, имеющих $(n-1)$ -й порядок.

Корнями минимального многочлена $\varphi(\lambda)$ являются все различные корни характеристического многочлена $|A - \lambda E|$,

Разные матрицы могут иметь одинаковые характеристические, но разные минимальные многочлены.

Задача 11.12 Найти характеристические и минимальные многочлены матриц

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение. Для матрицы A_1 непосредственным вычислением определителя находим характеристический многочлен

$$\det(A_1 - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2 - \lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 4)^2(2 - \lambda).$$

Выпишем все миноры второго порядка матрицы $A_1 - \lambda E$:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (\lambda-4)^2, & \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} &= 2(\lambda-4), \\ \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} &= 2(4-\lambda), & \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} &= 2(4-\lambda), \\ \begin{vmatrix} 6-\lambda & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= (\lambda-4)^2, & \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 2(4-\lambda), \\ \begin{vmatrix} -2 & 2-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} &= 2(\lambda-4), & \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= 2(\lambda-4), \\ \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= \lambda(\lambda-4). \end{aligned}$$

Общий наибольший делитель D_2 всех этих миноров есть $\lambda - 4$. Поэтому минимальный многочлен матрицы A_1 имеет вид:

$$\varphi(\lambda) = \frac{(-1)^3 |A_1 - E|}{D_2} = \frac{(-1)^3 (\lambda-4)^2 (2-\lambda)}{\lambda-4} = (\lambda-4)(\lambda-2).$$

Заметим, что D_2 можно найти иначе. Действительно, если в матрицу $A_1 - \lambda E$ подставить $\lambda = 4$, то получим матрицу

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

ранга $r=1$. Следовательно, все миноры второго порядка этой матрицы равны нулю. Это означает, что все миноры второго порядка матрицы $A_1 - \lambda E$ делятся на $\lambda - 4$, причем эти миноры не могут делиться на большую степень двучлена $\lambda - 4$,

так как, например, минор $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2-\lambda & 2 \end{vmatrix} = 2(4-\lambda)$ делится лишь на первую степень

двучлена. Следовательно, он входит в множитель $\lambda - 4$ в первой степени. Другие множители из $|A_1 - \lambda E|$ в D_2 не входят, так как на них не делится, например, выписанный только что минор второго порядка. Поэтому $D_2 = \lambda - 4$.

Для матрицы A_2 также непосредственным вычислением определителя находим характеристический многочлен

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-4)^2(2-\lambda).$$

Далее замечаем, что в матрице

$$A_2 - \lambda E = \begin{pmatrix} 6 - \lambda & 2 & 2 \\ -2 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda \end{pmatrix}$$

миноры второго порядка

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 - \lambda & 0 \end{vmatrix}$$

взаимно простые. Поэтому $D_2 = 1$ и

$$\varphi_2(\lambda) = (-1)^3 |A_2 - \lambda E| = (\lambda - 4)^2 (\lambda - 2).$$

Собственные векторы линейного пространства

Вектор x линейного пространства называется **собственным вектором линейного оператора f** этого пространства, если этот вектор ненулевой и существует число k , такое, что

$$f(x) = kx. \quad (11.4)$$

Число k называется **собственным значением вектора относительно оператора f** , а также **собственным значением оператора f** .

Равенство (11.4) можно записать в матричном виде:

$$AX = kX, \quad (11.5)$$

где A - матрица оператора f в некотором базисе; X - матрица-столбец из координат вектора x в том же базисе.

Ненулевую матрицу-столбец X , удовлетворяющую условию (11.5), назовем **собственным вектор-столбцом матрицы A с собственным значением k** .

Задача 11.13 Пусть линейный оператор f линейного двумерного пространства в базисе e_1, e_2 имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказать, что вектор $x = e_1 - 3e_2$ является собственным вектором этого оператора с собственным значением $k = -1$.

Решение. Вектор x ненулевой и

$$AX = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = -X,$$

т.е. $f(x) = -x$. Таким образом, вектор $x(1, -3)$ - собственный вектор заданного оператора с собственным значением $k = -1$.

Подставив значение $\lambda_2 = 7$, приходим к соотношению $x_1 - x_2 = 0$, т.е. $x_1 = x_2 = \beta \neq 0$. Таким образом, собственным вектором, соответствующим второму характеристическому числу, служит $y(\beta, \beta)$.

Задача 11.15 Найти собственные векторы линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение.

1. Характеристическое уравнение данного оператора имеет вид

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & -4 & -8 \\ -4 & 7-\lambda & -4 \\ -8 & -4 & 1-\lambda \end{pmatrix} = 0.$$

Корни этого уравнения следующие: $\lambda_1 = \lambda_2 = 9$, $\lambda_3 = -9$.

2. Все корни являются собственными значениями.

3. Чтобы найти собственный вектор с собственным значением $k_1 = 9$, полагаем в системе (11.6) $k = 9$. Получаем:

$$\begin{cases} -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0, \\ -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0, \\ -8x_1 - 4x_2 - 8x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение этой системы $x_1 = s_1$, $x_2 = -2s_1 - 2s_2$, $x_3 = s_2$.

4. Вектор $x(2s_1, -2s_1 - 2s_2, s_2)$, где s_1, s_2 - любые числа, удовлетворяющие условию $s_1^2 + s_2^2 \neq 0$, является собственным вектором данного оператора с собственным значением $k_1 = 9$.

Аналогично находим, что вектор $y(2t, t, 2t)$, где t - любое отличное от нуля число, является собственным вектором данного оператора с собственным значением $k_3 = -9$.

Задача 11.16 Найти характеристические числа и собственные векторы

матрицы $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. Составляем характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$(3 - \lambda)[(5 - \lambda)(3 - \lambda) - 1] + (-3 + \lambda + 1) + (1 - 5 + \lambda) = 0.$$

После элементарных преобразований уравнение приводится к виду

$$(3 - \lambda)(\lambda^2 - 8\lambda + 12) = 0,$$

откуда $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$.

1) Находим собственный вектор, соответствующий характеристическому числу $\lambda_1 = 2$. Из системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

(одно из уравнений этой системы есть следствие двух других и может быть отброшено), получим $\square$, $x_3 = -x_1$. Полагаем $\square$, тогда $x_2 = 0$, $\square$, т.е. $\mathbf{x}(\alpha; 0; -\alpha)$ - собственный вектор при $\square$.

2) Находим собственный вектор, соответствующий значению $\lambda_2 = 3$. Получаем систему уравнений

$\square$

(одно из этих уравнений – следствие двух других). Отсюда $x_1 = x_2 = x_3 = \beta$ и $\square$ соответствующий собственный вектор.

3) Находим собственный вектор при $\lambda_3 = 6$. Составляем систему уравнений

$\square$

(одно из уравнений – следствие двух других). Решая эту систему, находим $x_1 = \gamma$, $\square$, $x_3 = \gamma$ и, следовательно, $\square$.

Итак, собственные векторы заданной матрицы имеют вид

$$\mathbf{x} = \alpha(\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2), \quad \square, \quad \mathbf{z} = \gamma(\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3),$$

где $\square$ - произвольные, отличные от нуля числа.

Задача 11.17 Найти собственные векторы и собственные значения матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 9 \end{pmatrix}.$$

Решение. Характеристический многочлен матрицы $\square$ имеет вид

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 6 - \lambda & -3 & 0 \\ 0 & 3 - \lambda & -3 \\ 0 & 3 & 9 - \lambda \end{vmatrix} = (6 - \lambda)^3.$$

Его трехкратный корень $\square$ является собственным значением матрицы A . Чтобы найти собственные векторы, нужно решить систему уравнений $\square$, т.е.

$$\begin{cases} -3x^2 = 0, \\ -3x^2 - 3x^3 = 0, \\ 63x^2 + 3x^3 = 0. \end{cases}$$

В этой системе число неизвестных равно 3, а ранг матрицы системы равен 2. Поэтому размерность пространства решений равна 1. Решая систему, находим $\square$. Таким образом, множество всех собственных векторов матрицы A есть множество векторов $\square$, где c - произвольное число, не равное нулю.

Задача 11.18 В некотором базисе $\square$ оператор A задан матрицей $\square$. Найти собственный базис B' оператора $\square$, матрицу перехода C от $\square$ к B' и указать $\square$ - матрицу оператора в базисе B' .

Решение. Ищем собственные числа и собственные векторы матрицы $\square$:

1. Характеристическое уравнение

$$\det(A - \lambda E) = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 4 = 0 \Rightarrow \lambda = \pm 2$$

- собственные числа;

2. Найдем соответствующие собственные векторы из соотношения

$\square$

$$\lambda_1 = -2; \quad \square; \quad \lambda_2 = 2; \quad \square.$$

Напомним, что собственный вектор определяется с точностью до (ненулевого) множителя.

Ответ. Собственный базис оператора B' : $\square$; $\overline{a_2}' = (1; 1)^T$; матрица перехода от $\square$ к B' есть $\square$, матрица оператора в базисе B' есть $\square$.

Диагонализируемость линейного оператора

При изучении заданного линейного оператора появляется мысль выбрать такой базис, в котором его матрица выглядит наиболее просто. В определенных ситуациях линейный оператор в некотором базисе имеет диагональную матрицу. Чтобы это было так, оператор должен иметь базис из собственных векторов. Изменение базиса вызывает замену матрицы оператора подобной ей. Замену матрицы A диагональной матрицей $\square$, подобной A , называют **приведением матрицы $\square$ к диагональному виду**.

Задача приведения матрицы к диагональному виду может рассматриваться самостоятельно, вне зависимости от изучения конкретного линейного оператора. Она состоит в подборе для данной матрицы A такой невырожденной матрицы $\square$, что матрица $B = T^{-1} \cdot A \cdot T$ является диагональной.

Для ответа на вопрос диагонализируемости заданной матрицы пользуются следующей теоремой:

Пусть собственные значения $\square$ матрицы A порядка $\square$, кратности которых равны соответственно $m_1, m_2, \dots, m_s$ $\square$, попарно различны. Если

$$m_1 = n - r_1, \square, \dots, m_s = n - r_s,$$

где $\square$ - ранги матриц $A - \lambda_1 E, \square, \dots, A - \lambda_s E$ соответственно, то матрица $\square$ диагонализируема.

Задача 11.19 Выяснить, можно ли привести к диагональному виду матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}.$$

И если это возможно, найти соответствующую диагональную матрицу $\square$, диагонализующую матрицу A .

Решение. Найдем собственные значения данной матрицы. Ее характеристическое уравнение имеет вид

$$\square.$$

Раскрывая определитель и решая характеристическое уравнение, находим его корни: $\lambda_1 = -1, \square$. Таким образом имеем два собственных значения, причем одно из них кратности 2.

Матрицу можно привести к диагональному виду, если сумма размерностей всех собственных подпространств равна размерности линейного пространства, в нашем случае – трем. Отметим, что размерность собственного подпространства линейного оператора (матрицы) не превышает кратности соответствующего собственного значения. Проверим это на собственном подпространстве, отвечающем собственному значению λ_1 , для чего вычислим ранг матрицы $\square$:

$$\text{rang}(A - \lambda_1 E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 8 & -12 & 6 \\ 10 & -18 & 10 \\ 12 & -24 & 14 \end{pmatrix} = 2.$$

Значит, размерность первого собственного подпространства равна $\square$.

Аналогично находим размерность второго собственного подпространства. Вычисляем ранг соответствующей матрицы $A - \lambda_2 E$:

$$\square.$$

Размерность второго собственного подпространства равна $3 - 1 = 2$.

Сумма размерности обоих подпространств равна трем. Следовательно, базис из собственных векторов существует. Он собирается из базисов собственных подпространств. Чтобы его построить, нужно для каждого собственного значения λ найти фундаментальную систему решений СЛАУ $\square$. Фундаментальная система решений представляет собой базис линейного пространства решений однородной СЛАУ, в нашем случае собственного подпространства матрицы.

Для собственного значения $\lambda_1 = -1$ получаем систему

$$\square.$$

Ранг матрицы системы равен двум, поэтому фундаментальная система состоит из одного столбца. Например, можно взять столбец $(3 \ 5 \ 6)^T$.

Для собственного значения λ получаем систему

$$\begin{pmatrix} 6 & -12 & 6 \\ 10 & -20 & 10 \\ 12 & -24 & 12 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ранг матрицы системы равен единице, поэтому фундаментальная система состоит из двух столбцов. Например, фундаментальную систему решений составляют столбцы λ и $(0 \ 1 \ 2)^T$.

Таким образом, базисом из собственных векторов матрицы A является система

$$e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \lambda, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

а сама матрица A подобна диагональной матрице

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что матрица T преобразования подобия представляет собой матрицу перехода из одного базиса в другой, т.е. эти столбцы представляют собой столбцы координат векторов нового базиса, записанные в старом. В нашем случае столбцы матрицы T определяются векторами «нового» базиса λ :

$$T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \\ 6 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.20 Линейный оператор, действующий в трехмерном пространстве, в некотором базисе имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно ли, изменив базис, привести матрицу этого оператора к диагональному виду?

Решение. Составляем характеристическое уравнение линейного оператора:

$$\begin{vmatrix} 6 - \lambda & -5 & -3 \\ 3 & -2 - \lambda & -2 \\ 2 & -2 & 0 - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая определитель, получаем

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 16\lambda - 12 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются числа $\lambda_1 = 1$ кратности 2 и $\lambda_2 = 2$. Для определения размерностей собственных подпространств линейного

оператора, отвечающих этим двум значениям, вычислим ранги соответствующих матриц:

$$\text{rang}(A - \lambda_1 E) = \text{rang} \begin{pmatrix} 5 & -5 & -3 \\ 3 & -3 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 2,$$

□.

Оба собственных подпространства линейного оператора, отвечающие двум собственным значениям, имеют размерность $3 - 2 = 1$. Поэтому линейно независимая система из собственных векторов данного оператора может содержать максимум два вектора и по соображениям размерности не может быть базисом.

Действия над линейными операторами

Суммой операторов □ и g некоторого пространства называется оператор □ такой, что для любого вектора x этого пространства выполняется

□.

Если линейные операторы f и □ в некотором базисе имеют соответственно матрицы A и □, то оператор $f + g$ в том же базисе имеет матрицу □.

Произведение αf линейного оператора □ некоторого пространства на число α называется оператор □, такой, что для любого x из этого пространства

□.

Произведение линейного оператора f на число □ является линейным оператором, а матрица этого оператора (в любом базисе) равна произведению матрицы оператора f на число □.

Оператор, заключающийся в последовательном применении операторов f и □, называется **произведением** оператора f на оператор □, или **композицией** этих операторов, и обозначается $g \circ f$ (или просто □); отметим, что справа записывается первый оператор. Таким образом,

$$g \circ f(x) = g(f(x)).$$

Если в некотором базисе линейные операторы □ и g имеют соответственно матрицы □ и B , то оператор произведения □ в том же базисе имеет матрицу BA .

Два линейных оператора □ и φ называются **взаимно обратными**, если для любого □ имеют место равенства

$$f \circ \varphi(x) = \varphi \circ f(x) = x,$$

(11.7)

т.е. □ и $\varphi \circ f$ - тождественные операторы.

Если операторы φ и ψ имеют в некотором базисе матрицы соответственно A и B , то из равенств (11.7) следует, что $AB = E$, т.е. A и B - взаимно обратные матрицы.

Для того чтобы линейный оператор имел обратный оператор, необходимо и достаточно, чтобы он был невырожденным.

Для данного линейного невырожденного оператора с матрицей A в некотором базисе существует единственный обратный оператор, причем матрица обратного оператора равна матрице A^{-1} в том же базисе.

Задача 11.21 Линейные операторы f и g в некотором базисе заданы соответственно матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу линейного оператора

а) $f + g$; б) fg ; в) $f \cdot g$.

Решение.

а) Пусть линейный оператор f имеет матрицу C_1 , тогда

$C_1 = A$.

б) Пусть линейный оператор $2f$ имеет матрицу C_2 , тогда

$$C_2 = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 6 & 0 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

в) fg - матрица линейного оператора $f \cdot g$:

$C_3 = AB$.

Задача 11.22 Линейный оператор f заключается в повороте каждого вектора плоскости $\mathbb{R}^2$ на угол $\alpha = \frac{\pi}{4}$. Найти в координатной форме оператор f (e - линейный оператор, матрица которого единичная).

Решение. Имеем

$i^2 = -1$;

$$f(j) = i \cos(3\pi/4) + j \sin(3\pi/4) = -(\sqrt{2}/2)i + (\sqrt{2}/2)j.$$

Следовательно,

$C = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 1 \end{pmatrix}$

- матрица оператора f .

Так как E - матрица оператора e , то

$C + E = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & 2 \end{pmatrix}$.

Таким образом, линейный оператор $f + e$ можно записать с помощью равенств $C + E$, $y' = (\sqrt{2}/2)x + (\sqrt{2}/2 + 1)y$.

Задача 11.23 Даны линейные операторы

$$x' = x + y, \quad x' = y + z,$$

$$\square: y' = y + z, \quad \text{и} \quad \square: y' = x + z,$$

$$z' = z + x \quad z' = z + y.$$

Найти координатную форму операторов $\square$ и gf .

Решение. Матрицы данных преобразований имеют вид

$$\square, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем произведения этих матриц:

$$\square, \quad BA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

В данном случае $\square$, поэтому линейные операторы fg и $\square$ совпадают.

Координатная форма преобразования fg записывается следующим образом:

$$\square.$$

Задача 11.24 Преобразование f заключается в повороте каждого вектора плоскости $\square$ на угол α . Найти матрицу оператора $\square$ (т.е. $f \cdot f$).

Решение. Так как $\square$, $f(j) = -isina + jcosa$, то

$$\square.$$

Следовательно,

$$A^2 = \begin{pmatrix} \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha \\ 2 \sin \alpha \cos \alpha & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 2\alpha & -\sin 2\alpha \\ \sin 2\alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}.$$

Таким образом, преобразование $\square$ в координатной форме определяется равенствами

$$x' = x \cos 2\alpha - y \sin 2\alpha, \quad \square.$$

Эти результаты могут быть получены и из чисто геометрических соображений.

Задача 11.25 Линейный оператор f заключается в повороте на угол $\square$ каждого вектора плоскости xOy . Найти матрицу линейного оператора $\square$.

Решение. Используя найденную в задаче 11.22 матрицу заданного линейного оператора имеем

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} = \sqrt{2}/2 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad \square.$$

Итак, находим матрицу B линейного оператора $\square$:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Задача 11.26 Дано пространство геометрических векторов. Пусть линейный оператор φ - поворот пространства вокруг оси Oz на угол $\frac{\pi}{4}$, а линейный оператор g - поворот пространства вокруг оси Ox на тот же угол. Найти матрицу линейного оператора fg .

Решение. Имеем

$\varphi(j) = j$,

$$f(j) = -i \sin(\pi/4) + j \cos(\pi/4) = -(\sqrt{2}/2)i + (\sqrt{2}/2)j,$$

$\varphi(k) = k$,

$$g(i) = i,$$

$\varphi(k) = k$,

$$g(k) = -\sqrt{2}/2 j + \sqrt{2}/2 k.$$

Следовательно,

$$\varphi, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix},$$

φ .

Задача 11.27 В линейном пространстве X задан базис e . Линейный оператор φ переводит векторы e_1 и $a_2 = (-1, 1)$ соответственно в векторы e_1 , $b_2 = (3, 3)$. Найти матрицу оператора φ в базисе e .

Решение. Через φ обозначим оператор, переводящий векторы e_1 и e_2 в векторы a_1 и a_2 . Его матрицей в базисе e будет

φ .

Оператор φ переводит векторы e_1 и a_2 в векторы e_1 и b_2 . Значит, произведение φ операторов ψ и φ переводит векторы e_1 , e_2 в векторы b_1 , b_2 . Поэтому в базисе e оператор $\varphi\psi$ имеет матрицу

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Матрица $\varphi\psi$ оператора $\varphi\psi$ равна произведению матриц операторов φ и ψ , т.е. если A_e - матрица оператора φ в базисе e , то $T_2 = A_e T_1$. Отсюда получаем:

φ .

Задача 11.28 Пусть f_k - оператор поворота на угол φ_k в пространстве V_2 векторов на плоскости. Найти матрицу (в произвольном ортонормированном базисе) оператора: а) f_k ; б) f_1^{-1} .

Решение. Матрица оператора f_k в любом ортонормированном базисе имеет вид

$$A_k = \begin{pmatrix} \cos \varphi_k & -\sin \varphi_k \\ \sin \varphi_k & \cos \varphi_k \end{pmatrix}.$$

а) По определению произведения операторов действие оператора f_k на произвольный вектор a состоит в том, что сначала вектор a поворачивается на угол φ_2 , а затем вектор a поворачивается на угол φ_1 . В результате поворота вектора a на угол $\varphi_2 + \varphi_1$, т.е. произведения f_k есть оператор поворота на угол $\varphi_2 + \varphi_1$. Поэтому матрица оператора f_k в любом ортонормированном базисе равна

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi_1 + \varphi_2) & -\sin(\varphi_1 + \varphi_2) \\ \sin(\varphi_1 + \varphi_2) & \cos(\varphi_1 + \varphi_2) \end{pmatrix}.$$

Тот же результат можно получить иначе, если воспользоваться тем, что матрица произведения операторов равна произведению матриц операторов-сомножителей:

f_k .

б) Оператор f_1 поворачивает каждый вектор на угол φ_1 . Ясно, что обратный оператор поворачивает каждый вектор на тот же угол φ_1 , но в противоположную сторону, т.е. f_1^{-1} - оператор поворота на угол $-\varphi_1$. Поэтому матрица оператора f_1^{-1} является матрицей оператора поворота на угол $-\varphi_1$ и, следовательно, в произвольном ортонормированном базисе имеет вид

f_1^{-1} .

Тот же результат можно получить иначе, если воспользоваться тем, что матрица обратного оператора f_1^{-1} есть матрица, обратная к матрице оператора f_1 :

$$A_1^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & -\sin \varphi_1 \\ \sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_1 & \sin \varphi_1 \\ -\sin \varphi_1 & \cos \varphi_1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональные операторы

Матрица

A

называется **ортогональной**, если соответствующая ей система векторов

$$a_1(a_{11}, a_{21}, \dots, a_{n1}), a_2(a_{12}, a_{22}, \dots, a_{n2}), \dots, a_n(a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{nn})$$

является ортонормированной.

Линейный оператор $\square$ евклидова пространства E называется **ортогональным**, если для любых $\square$ выполняется условие $(x, y) = (f(x), f(y))$.

Для того чтобы оператор $\square$ был ортогональным, необходимо и достаточно, чтобы его матрица в ортонормированном базисе была ортогональна.

Для ортогонального оператора справедливы следующие утверждения.

1. Ортогональный оператор – невырожденный.
2. Для ортогонального оператора существует обратный оператор, который также является ортогональным.
3. Если A - матрица ортогонального оператора, то $\square$ - матрица оператора, обратного данному.
4. Произведение ортогональных операторов также является ортогональным оператором.

11.1 Задачи для самостоятельного решения

11.29 Выяснить какие из следующих преобразований φ , заданных путем задания координат вектора $\square$ как функций координат вектора x , являются линейными операторами.

а) $\square$;

б) $\varphi x = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3 + 1, x_3^2)$.

Ответ. а) $\square$ не является линейным; б) φ не является линейным.

11.30 Доказать, что существует единственный линейный оператор трехмерного пространства, переводящее векторы $\square$ соответственно в b_1, b_2, b_3 , и найти матрицу этого оператора в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов:

а) $\square$, $b_1 = (1, 1, 1)$,

$\square$, $b_2 = (1, 1, -1)$,

$\square$, $b_3 = (2, 1, 2)$.

б) $\square$, $b_1 = (1, 2, -1)$,

$\square$, $b_2 = (4, 5, -2)$,

$\square$, $b_3 = (1, -1, 1)$.

Ответ. а) $\square$; б) $\begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$.

11.31 Линейный оператор φ в базисе e_1, e_2, e_3, e_4 имеет матрицу

$\square$.

Найти матрицу этого же оператора в базисе:

а) e_1, e_3, e_2, e_4 ;

б) $\square$.

Ответ. а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\square$.

11.32 Линейный оператор φ в базисе $\square$ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 15 & -11 & 5 \\ 20 & -15 & 8 \\ 8 & -7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Найти его матрицу в базисе $\square$, $f_2 = 3e_1 + 4e_2 + e_3$, $\square$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

11.33 Линейный оператор $\square$ в базисе $a_1 = (8, -6, 7)$, $\square$, $a_3 = (9, -3, 7)$ имеет матрицу

$\square$.

Найти его матрицу в базисе $b_1 = (1, -2, 1)$, $\square$, $b_3 = (2, 1, 2)$.

Ответ. $\square$.

11.34 Пусть оператор φ в базисе $\square$, $a_2 = (2, 3)$ имеет матрицу

$\square$.

Оператор ψ в базисе $\square$, $b_2 = (4, 2)$ имеет матрицу

$\square$.

Найти матрицу оператора $\varphi + \psi$ в базисе $\square$.

Ответ. $\begin{pmatrix} 44 & 44 \\ -29\frac{1}{2} & -25 \end{pmatrix}$.

11.35 Линейный оператор $\square$ в базисе $a_1 = (2, 7)$, $\square$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а оператор $\square$ в базисе $b_1 = (6, 7)$, $\square$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$.

Найти матрицу оператора $\square$ в том базисе, в котором даны координаты всех векторов.

Ответ. $\begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$.

11.36 Найти собственные значения и собственные векторы линейных операторов, заданных в некотором базисе матрицами:

1) $\square$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $\square$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$;

5) $\square$; 6) $\begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix}$;

7) $\square$; 8) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. 1) $\square$. Собственные векторы имеют вид $c_1(1, 1, -1)$, где $\square$;

2) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$. Собственные векторы имеют вид $\square$, где c_1 и $\square$ не равны нулю одновременно;

3) $\lambda_1 = 1$, $\square$. Собственные векторы для значений 1 имеют вид $c(1, 1, 1)$, а для $\square$ - вид $c(1, 2, 3)$, где $\square$;

4) $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$. Собственные векторы имеют вид $\square$, где $c \neq 0$;

5) $\square$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -1$. Собственные векторы для значений $\square$ имеют вид $c(1, 2, 2)$, а для $\square$ вид $c(1, 2, 1)$, где $\square$;

6) $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\square$. Собственные векторы для значений $\lambda = 1$ имеют вид $\square$, а для $\lambda = -1$ вид $\square$, где c_1 и $\square$ не равны нулю одновременно и $c \neq 0$;

7) $\square$, $\lambda_2 = 2 + 3i$, $\square$. Собственные векторы для значений $\lambda = 1$ имеют вид $\square$, для $\lambda = 2 + 3i$ - вид $\square$, для $\lambda = 2 - 3i$ - вид $\square$, $c \neq 0$;

8) $\square$, $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$. Собственные векторы для $\square$ имеют вид $c(0, 0, 0, 1)$, а для $\square$ вид $c_1(0, 1, 0, 0) + c_2(0, 1, 0, 0)$, где $\square$ и c_1 и $\square$ не равны нулю одновременно.

11.37 Выяснить, какие из следующих матриц линейных операторов можно привести к диагональному виду путем перехода к новому базису. Найти этот базис и соответствующую ему матрицу:

$$1) \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad 2) \square;$$

$$3) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad 4) \square;$$

$$5) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ. 1) $\square$, $a_2(1, 1, 0)$, $\square$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

2) Матрица к диагональному виду не приводится.

3) $\square$, $a_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\square$, $a_4 = (1, -1, -1, -1)$, $\square$;

4) Матрица к диагональному виду не приводится.

$$5) a_1 = (1, 0, 0, 1), \square, a_3 = (0, -1, 1, 0), \square, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

12 Квадратичные формы

Квадратичной формой действительных переменных $\square$ называется многочлен второй степени относительно этих переменных, не содержащий свободного члена и членов первой степени.

Если $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ - квадратичная форма переменных $\square$, а λ - какое-нибудь действительное число, то

□.

Если $n = 2$, то

□.

Если $n = 3$, то

□.

В дальнейшем все необходимые формулировки и определения приведем для квадратичной формы трех переменных.

Матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

у которой □, называется **матрицей квадратичной формы** $f(x_1, x_2, x_3)$, а соответствующий определитель – **определителем этой квадратичной формы**.

Так как □ - симметрическая матрица, то корни λ_1, λ_2 и □ характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

являются действительными числами.

Задача 12.1 Записать матрицу квадратичной формы

□

и найти ее ранг.

Решение. В данном случае $a_{11} = 1$, □, $a_{13} = a_{31} = -4$, □, $a_{23} = a_{32} = 2$, □, поэтому

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -4 \\ -3 & 7 & 2 \\ -4 & 2 & -5 \end{pmatrix}.$$

Вычислим определитель этой матрицы:

□.

Так как $\det A \neq 0$, то ранг матрицы равен трем, т.е. □.

Задача 12.2 Запишите квадратичную форму $x_1^2 + 4x_1x_3$ матричной записью.

Решение. Квадратичная форма от трех переменных □ имеет матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Так как □, то эта квадратичная форма является вырожденной. В матричной записи квадратичная форма имеет вид

$$x_1^2 + 4x_1x_3 = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задача 12.3 Квадратичную форму

□

преобразуем к новым переменным y_1, y_2, y_3 , где

□

Решение. Эта замена переменных в матричной записи имеет вид $X = UY$, где

□.

Таким образом,

$$A' = U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -4 & 1 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

□,

и квадратичная форма принимает вид

$$f(y_1, y_2, y_3) = 2y_1^2 + 3y_2^2 - y_3^2,$$

т.е. все коэффициенты при попарных произведениях переменных обнуляются и остаются слагаемые с квадратами переменных.

Метод Лагранжа

Один из методов преобразования (или, как говорят, приведения) квадратичной формы к каноническому виду путем замены переменных состоит в последовательном выделении полных квадратов. Такой метод называют **методом Лагранжа**. Проиллюстрируем этот метод на простом примере.

Задача 12.4 Привести квадратичную форму □ к каноническому виду методом Лагранжа.

Решение. Для приведения квадратичной формы $x_1^2 - 4x_1x_2$ от двух переменных к каноническому виду выделим полный квадрат по □. Для этого соберем все слагаемые, содержащие x_1 , и дополним до полного квадрата:

□.

Введя новые переменные $z_1 = x_1 - 2x_2$, □ (т.е. определив линейный оператор), получим квадратичную форму канонического вида: $z_1^2 - z_2^2$.

Задача 12.5 Методом Лагранжа привести квадратичную форму

□

к канонической форме и построить невырожденное преобразование координат, осуществляющее такое приведение.

Решение. Опишем два способа, позволяющие привести квадратичную форму к каноническому виду.

Итак, метод Лагранжа (метод выделения полных квадратов) состоит в последовательном выделении полных квадратов сначала в группе слагаемых содержащих x_1 , затем содержащих x_2 и т.д. Имеем

$$\begin{aligned} f &= (2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3) + 9x_2^2 + 19x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 - 8x_2^2 - 2x_3^2 - \\ &= 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + (x_2 - 4x_3)^2 - 16x_3^2 + 17x_3^2 = 2(x_1 + 2x_2 + x_3)^2 + \\ &+ x_3^2, \end{aligned}$$

где $y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - 4x_3$, $y_3 = x_3$.

Если Q - матрица перехода к новому базису, то $X_e = QY_e$. Поэтому

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, формулы преобразования координат имеют вид

$y_1 = x_1 + 2x_2 + x_3$, $y_2 = x_2 - 4x_3$, $y_3 = x_3$.

Заметим, что стандартный метод Лагранжа соответствует треугольному преобразованию координат.

Задача 12.6 Привести квадратичную форму

$$f = 4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 10x_2^2$$

к каноническому виду и найти приводящее к нему преобразование координат.

Решение. Применим метод Лагранжа:

$y_1 = 2x_1 - 3ix_2$, $y_2 = x_2$.

где $y_1 = 2x_1 - 3ix_2$, $y_2 = x_2$. Таким образом, каноническим видом будет форма $y_1^2 - y_2^2$, а формулы преобразования координат имеют вид

$$x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{3i}{2}y_2, \quad x_2 = y_2.$$

Ортогональные преобразования квадратичных форм

Алгоритм построения ортогонального преобразования:

- 1) записать матрицу квадратичной формы;
- 2) применить к этой матрице процедуру приведения к диагональному виду.

Проиллюстрируем на примере процедуру практического вычисления ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Задача 12.7 Привести $f = 4x_1^2 - 12ix_1x_2 - 10x_2^2$ к каноническому виду ортогональным преобразованием.

Решение. Матрица нашей квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем *характеристическое уравнение* этой матрицы:

□.

Вычисляем корни характеристического уравнения, они же собственные значения матрицы A :

□.

Теперь можем записать канонический вид нашей квадратичной формы:

$$\frac{1 + \sqrt{17}}{2} y_1^2 + \frac{1 - \sqrt{17}}{2} y_2^2.$$

Задача 12.8 Привести к каноническому виду квадратичную форму

□,

ортогональным преобразованием, и указать одно из таких ортогональных преобразований (операторов).

Решение. Исходная квадратичная форма имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Составляем характеристическое уравнение матрицы:

□.

Собственными значениями матрицы квадратичной формы являются $\lambda_1 = 1$, □, т.е. квадратичная форма приводится ортогональным преобразованием к каноническому виду

$$f(y_1, y_2) = y_1^2 + 9y_2^2.$$

Для построения ортогонального преобразования найдем собственные векторы матрицы рассматриваемой квадратичной формы. Из однородной системы линейных алгебраических уравнений □ при $\lambda = 1$ находим собственный вектор □.

Тогда вектор $e_2 = (1 \ 1)^T$, ортогональный вектору □, будет собственным вектором с соответствующим собственным значением $\lambda_2 = 9$. Пронормировав эти векторы, составляем из столбцов их координат *матрицу ортогонального преобразования*

□,

которой соответствует *линейная замена переменных* $X = PY$.

Задача 12.9 Привести квадратичную форму

□

к каноническому виду:

а) методом Лагранжа;

б) ортогональным преобразованием.

Решение. а) Коэффициент при x_2^2 отличен от нуля (равен 3). Соберем в одну группу все члены квадратичной формы, содержащие □:

$$3x_2^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3.$$

Дополним это выражение до полного квадрата членами, не содержащими $\square$, и, чтобы квадратичная форма $Q(x_1, x_2, x_3)$ не изменилась, вычтем добавленные члены.

Получим

$\square$.

Положим

$$y_2 = \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3.$$

Тогда в выражении квадратичной формы появляется переменная $\square$ и исчезает переменная x_2 . Приведя подобные члены, перепишем квадратичную форму в виду

$\square$.

К квадратичной форме $W(x_1, x_3)$ снова применим метод выделения полного квадрата. С этой целью соберем в одну группу все члены, содержащие $\square$:

$$-\frac{4}{3}x_1^2 + \frac{16}{3}x_1x_3.$$

Дополним это выражение до полного квадрата слагаемым, не содержащим $\square$, и, чтобы квадратичная форма $W(x_1, x_3)$ не изменилась, вычтем добавленное слагаемое. Получим

$\square$.

Положим $y_1 = x_1 - 2x_3$. Приведя подобные члены, перепишем исходную квадратичную форму в виде

$\square$.

Вводя обозначение $x_3 = y_3$, получаем следующий канонический вид исходной квадратичной формы:

$$\square, \quad (12.1)$$

где

$$y_1 = x_1 - 2x_3, \quad \square, \quad y_3 = x_3.$$

Преобразование переменных, приводящее исходную квадратичную форму к каноническому виду, можно записать в матричном виде

$\square$.

В результате применения метода Лагранжа всегда получается невырожденное линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

б) Составим матрицу данной квадратичной формы:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Найдем ее собственные значения. Характеристическое уравнение имеет вид

$\square$.

Оно имеет корни $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 1$. Это позволяет сразу написать канонический вид квадратичной формы:

$$\tilde{Q}(y_1, y_2, y_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2.$$

Построим теперь матрицу ортогонального преобразования, приводящего квадратичную форму к этому каноническому виду. С этой целью найдем собственные векторы матрицы A . Элементы x_1, x_2, x_3 любого собственного вектора x , соответствующего собственному значению $\lambda = -2$, являются решением системы уравнений $(A - \lambda E)x = 0$, т.е. системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

у которой ранг $A - \lambda E$ матрицы равен 2, а $n - r = 1$. Следовательно, фундаментальная совокупность решений системы состоит из одного вектора.

Матрица искомого ортогонального преобразования состоит из столбцов x, y, z , т.е. искомое преобразование имеет вид

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{5} & \sqrt{2/5} \\ 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{30} \\ 1/\sqrt{6} & 0 & \sqrt{5/6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Оно приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду (12.2).

Замечание 2 Отметим, что как канонический вид (12.1) квадратичной формы, полученный методом Лагранжа, так и канонический вид (12.2), полученный ортогональным преобразованием, содержит два положительных канонических коэффициента и один отрицательный канонический коэффициент, что соответствует закону инерции квадратичных форм.

Метод Якоби

Угловым (главным) минором матрицы $A(n \times n)$ порядка k назовем минор, расположенный на пересечении первых k строк и первых k столбцов матрицы. Угловой минор максимального, n -го порядка представляет собой определитель матрицы (обозначение Δ_n).

Метод Якоби основан на следующей **теореме**:

Если $\Delta_k \neq 0$ ($k < n$), то существует единственный невырожденный линейный оператор с треугольной матрицей, приводящий квадратичную форму к каноническому виду с каноническими коэффициентами $b_{11} = \Delta_1, b_{22} = \Delta_2/\Delta_1, \dots, b_{nn} = \Delta_n/\Delta_{n-1}$.

Задача 12.10 Используя метод Якоби, найти канонический вид квадратичной формы

□.

Решение. Матрица квадратичной формы равна

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

ее угловые миноры равны соответственно:

$$\square, \quad \Delta_2 = -3, \quad \square.$$

Согласно формулам Якоби каноническими коэффициентами квадратичной формы являются числа

$$\lambda_1 = \frac{\Delta_1}{1} = 1, \quad \square, \quad \lambda_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = -\frac{8}{3},$$

так что каноническим видом квадратичной формы будет форма

□.

Задача 12.11 Найти нормальный вид квадратичной формы

$$f = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица квадратичной формы □ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

ее угловые миноры равны

$$\square, \quad \Delta_2 = -3, \quad \square.$$

Согласно формулам Якоби за канонический вид формы f можно взять форму

□

с каноническими коэффициентами

$$\frac{\Delta_1}{1} = 1, \quad \square, \quad \frac{\Delta_3}{\Delta_2} = \frac{7}{3}.$$

Напомним, что канонический вид квадратичной формы, в котором все ненулевые канонические коэффициенты равны 1 или □, называется **нормальным видом**, таким образом, последняя форма после преобразования координат

$$z_1 = y_1, \quad \square, \quad z_3 = \sqrt{7/3}y_3$$

примет нормальный вид

□.

Метод элементарных преобразований

Заметим, что если Q - матрица элементарных преобразований, то преобразование □ матрицы A квадратичной формы равносильно двум преобразованиям – элементарному преобразованию столбцов матрицы □, определенному матрицей Q , и такому же преобразованию строк матрицы □.

Матрицы элементарных преобразований невырождены. Следовательно, их произведение – тоже невырожденная матрица. Поэтому матрица, получающаяся в результате умножения матриц элементарных преобразований, проводимых над столбцами и строками матрицы A квадратичной формы, является матрицей перехода к новому базису. Соответственно, квадратичная форма в результате этих преобразований может быть приведена к каноническому виду.

Отметим также, что матрицы элементарных преобразований столбцов второго типа являются диагональными матрицами, а если элементарное преобразование заключается в прибавлении к столбцу другого столбца с меньшим номером, то соответствующая матрица является верхней треугольной. Если можно обойтись только такими элементарными преобразованиями, то матрица $\square$ перехода к новому базису, будучи произведением верхних треугольных матриц, так же получится верхней треугольной.

Задача 12.12 Методом элементарных преобразований привести квадратичную форму $f = 2x_1^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 9x_2^2 + 19x_3^2$ к каноническому виду и построить невырожденное преобразование координат (оператор), осуществляющее такое приведение.

Решение. Построим последовательность элементарных преобразований столбцов и таких же преобразований строк, которые приводят матрицу $\square$ заданной квадратичной формы к диагональному виду.

Имеем:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 4 & 9 & 0 \\ 2 & 0 & 19 \end{pmatrix}.$$

Угловые миноры матрицы $\square$ равны соответственно:

$$\Delta_1 = 2, \quad \square, \quad \Delta_3 = |A| = 2.$$

1) Вычитая из 2-го столбца удвоенный 1-й столбец, а затем вычитая из 2-й строки удвоенную 1-ю строку, получим

$$\square, \quad \text{где } L_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что в результате такого преобразования главные миноры матрицы $\square$ остались теми же:

$$\Delta_1 = 2, \quad \square, \quad \Delta_3 = |A_1| = 2.$$

2) Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, а затем вычитая из 3-й строки 1-ю строку, получим

$$\square,$$

где $L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Главные миноры опять остаются без изменения:

$$\square, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad \square.$$

3) Наконец, прибавив к 3-му столбцу 2-й столбец, умноженный на 4, а затем прибавив к 3-й строке 2-ю строку, умноженную на 4, получим

$$A_3 = L_3^T A_2 L_3 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\square$.

Матрица A_3 - диагональная, т.е. квадратичная форма $\square$ приведена к каноническому виду

$$f = 2z_1^2 + z_2^2 + z_3^2.$$

В результате последнего преобразования главные миноры опять не изменились, и теперь в матрице $\square$:

$$\Delta_1 = 2, \quad \square, \quad \Delta_3 = 2 \cdot 1 \cdot 1.$$

Иными словами, канонические коэффициенты могут быть вычислены по формулам:

$$\square, \quad 1 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \quad \square,$$

т.е. по формулам Якоби.

Чтобы найти преобразование координат, отметим, что

$$A = L_3^\perp L_2^\perp L_1^\perp A L_1 L_2 L_3 = (L_1 L_2 L_3)^T A (L_1 L_2 L_3),$$

так что матрица $\square$ перехода к новому базису имеет вид

$$Q = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -9 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

а старые координаты связаны с новыми, соответственно, по формулам

$$\square, \quad x_2 = z_2 + 4z_3, \quad \square.$$

Задача 12.13 Привести квадратичную форму

$$f = x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3$$

к каноническому виду и найти приводящее к нему преобразование координат.

Решение. Матрица квадратичной формы $\square$ имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее угловой минор $\square$, поэтому здесь не применимы ни стандартный метод Лагранжа, ни метод элементарных преобразований в том виде, в котором он был использован в предыдущей задаче.

Модифицируем сначала *метод Лагранжа*.

Перейдем к новым координатам

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad \square, \quad x_3 = y_3,$$

тогда квадратичная форма $\square$ перейдет в квадратичную форму

$$g = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = \{\text{выделим полный квадрат}\} = \square.$$

В координатах

$$z_1 = y_1 + y_3, \quad \square, \quad z_3 = y_3$$

квадратичная форма $\square$ будет иметь канонический вид

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Он соответствует преобразованию координат

$$\square, \quad x_2 = z_1 + z_2 - z_3, \quad \square,$$

которое уже не будет треугольным.

Покажем теперь, какие изменения нужно внести в *метод элементарных преобразований*.

Отметим, что аннулировать все внедиагональные элементы матрицы A квадратичной формы элементарными преобразованиями столбцов и такими же преобразованиями строк не удастся, так как главная диагональ матрицы $\square$ нулевая. Поэтому сначала выполним предварительное преобразование.

Прибавим к 1-му столбцу 2-й столбец, а затем прибавим к 1-й строке 2-ю строку. Имеем:

$$A_1 = L_1^T A L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\square$.

Теперь уже $\Delta_1 = 1 \neq 0$ и можно преобразованиями, аналогичными проведенным в предыдущей задаче, обнулить внедиагональные элементы 1-го столбца и 1-й строки матрицы $\square$.

Вычитая из 2-го столбца 1-й столбец, умноженный на $1/2$, а затем вычитая из 2-й строки 1-ю строку, умноженную на $\square$, получим

$$A_2 = L_2^T A_1 L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\square$.

Вычитая из 3-го столбца 1-й столбец, а затем вычитая из 3-й строки 1-ю строку, получим

$$A_3 = L_3^T A_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

где $\square$.

Матрица A_3 - диагональная, следовательно, квадратичная форма $\square$ приведена к каноническому виду

$$z_1^2 - \frac{1}{4}z_2^2 - z_3^2.$$

Матрица перехода $\square$ является произведением матриц используемых элементарных преобразований:

$$Q = L_1 L_2 L_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1 \\ 1 & 1/2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Соответствующее преобразование координат осуществляется по формулам

$$\square, \quad x_2 = z_1 + \frac{1}{2}z_2 - z_3, \quad \square.$$

Отметим также, что это преобразование, как и в модифицированном методе Лагранжа, не будет треугольным.

Критерий Сильвестра

Квадратичные формы подразделяют на различные типы в зависимости от множества их значений.

Квадратичную форму $f(x) = x^T A x$, $\square$, будем называть:

- **положительно (отрицательно)** определенной, если для любого ненулевого столбца x выполняется неравенство $\square (f(x) < 0)$;

- **неотрицательно (неположительно)** определенной, если $\square (f(x) \leq 0)$ для любого столбца $\square$, для которого $f(x) = 0$;

- **знакопеременной (неопределенной)**, если существуют такие столбцы $\square$ и y , что $\square$ и $f(y) < 0$.

Задача 12.14 Рассмотрим четыре квадратичные формы от трех переменных:

$\square$,

$$f_2(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2,$$

$\square$,

$$f_4(x_1, x_2, x_3) = x_1 x_2.$$

Решение. Квадратичная форма f_1 положительно определена, так как представляет собой сумму трех квадратов и потому принимает только положительные значения, если переменные одновременно не обращаются в нуль. Квадратичная форма f_2 неотрицательно определена: будучи суммой двух квадратов она не принимает отрицательных значений, но при $x_1 = 0$ и $x_3 \neq 0$ она принимает нулевые значения. Квадратичные формы f_3 и f_4 знакопеременны. Первая из них положительна при $x_1 > 0$ и отрицательна при $x = (0 \ 1 \ 0)^T$. Вторая положительна при $x_1 > 0$ и отрицательна при $x = (1 \ -1 \ 0)^T$. Квадратичные формы f_3 и f_4 являются вырожденными, так как ранг каждой из них равен 2.

Задача 12.15 Определить, является ли квадратичная форма

f_1

знакоопределенной.

Решение. Составим матрицу квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

и вычислим ее угловые миноры $\Delta_1, \Delta_2 = -4, \Delta_3$. В силу критерия Сильвестра данная квадратичная форма не является ни положительно определенной, ни отрицательно определенной, т.е. не является знакоопределенной.

Задача 12.16 Найти все значения параметра a , при которых квадратичная форма

f_2

является положительно определенной.

Решение. Найдем угловые миноры матрицы квадратичной формы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}.$$

Имеем $\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 3 > 0, \Delta_3$.

Пользуясь критерием Сильвестра, находим, что в данная квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда $\Delta_3 > 0$, т.е. при $a > 2$.

Приведение уравнений кривых и поверхностей второго порядка к каноническому виду

Задача 12.17 Приведите к каноническому виду уравнение кривой второго порядка

$$14x_1^2 + 24x_1x_2 + 21x_2^2 - 4x_1 + 18x_2 - 139 = 0. \quad (12.3)$$

Решение. Выпишем все использованные преобразования и построим эту кривую в исходной системе координат.

Квадратичная форма кривой имеет вид $\square$, а матрицей этой квадратичной формы является

$$A = \begin{pmatrix} 14 & 12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix}.$$

Чтобы найти ортогональное преобразование, приводящее квадратичную форму кривой к каноническому виду, выпишем характеристическое уравнение матрицы $\square$

$$\lambda^2 - 35\lambda + 150 = 0$$

и найдем его корни: $\square$, $\lambda_2 = 5$.

Ранг матрицы однородной системы линейных алгебраических уравнений $\square$ при $\lambda = \lambda_{1,2}$ равен единице, и мы можем в системе оставить только одно уравнение – первое: $\square$. Собственному значению $\lambda_1 = 30$ соответствует единичный собственный вектор

$\square$,

а $\lambda_2 = 5$ - единичный собственный вектор

$\square$,

который в двумерном случае проще найти из условия ортогональности вектору e_1 , т.е. путем перестановки координат вектора $\square$ и изменения знака у одной из координат.

Из найденных координат собственных векторов составляем матрицу ортогонального преобразования

$$U = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix},$$

которое является поворотом, так как $\square$. Этому ортогональному преобразованию соответствует линейная замена переменных

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2, \\ x_2 = \frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2. \end{cases} \quad (12.4)$$

Чтобы получить уравнение кривой квадратичной формы канонического вида, нужно подставить выражения (12.4) для переменных $\square$ и x_2 в (12.3):

$\square$

$$\begin{aligned}
&= 14\left(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\right)^2 + 24\left(\frac{3}{5}y_1 - \frac{4}{5}y_2\right)\left(\frac{4}{5}y_1 + \frac{3}{5}y_2\right) + \\
&\square \\
&= \left(14 \cdot \frac{9}{25} + 24 \cdot \frac{12}{25} + 21 \cdot \frac{16}{25}\right)y_1^2 + \\
&\square \\
&+ \left(14 \cdot \frac{16}{25} - 24 \cdot \frac{12}{25} + 21 \cdot \frac{9}{25}\right)y_2^2 + \\
&\square \\
&= 30y_1^2 + 5y_2^2 + 12y_1 + 14y_2 - 139.
\end{aligned} \tag{12.5}$$

Следует отметить, что мы сразу можем записать канонический вид квадратичной формы кривой по известным собственным числам: $\square$. Линейные слагаемые $-4x_1 + 18x_2 = 2b^T x$, представляющие собой удвоенное скалярное произведение вектора с координатами $\square$ на вектор с координатами x , в новых переменных будет иметь вид $\square$, или

$$2b^T U y = (-4 \ 18) U \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}(-4 \ 18) \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 12y_1 + 14y_2.$$

Свободный член в процессе преобразования поворота не изменится. Таким образом, приходим к тому же уравнению (12.5).

По каждому из переменных выделяем полный квадрат:

$\square$.

Теперь параллельный перенос системы координат, определяемый соотношениями

$$\begin{cases} z_1 = y_1 + \frac{1}{5}, \\ z_2 = y_2 + \frac{7}{5}, \end{cases} \tag{12.6}$$

приводит к уравнению

$\square$,

которое легко преобразуется к каноническому уравнению эллипса делением на 150:

$$\frac{z_1^2}{5} + \frac{z_2^2}{30} = 1.$$

Чтобы построить эллипс, заданный в исходной системе координат уравнением (12.3), можно поступить следующим образом. Изобразим исходную систему координат $\square$, а в ней векторы e_1, e_2 , которые являются собственными для матрицы квадратичной формы поверхности. Эти векторы откладываем от начала $\square$ системы координат, они задают координатные оси новой системы координат Oy_1y_2 . В этой системе координат строим точку $\square$, которая должна быть началом

следующей канонической системы координат $O_1z_1z_2$. Оси этой системы координат параллельны осям Ox_1 и Oy_2 .

Определив положение канонической системы координат $O_1z_1z_2$ относительно исходной Ox_1x_2 , строим в ней эллипс, руководствуясь величинами его большой и малой полуосей. В результате получаем расположение эллипса относительно исходной системы координат. Расположение осей трех систем координат и эллипса в данной задаче показано на рисунке 70.

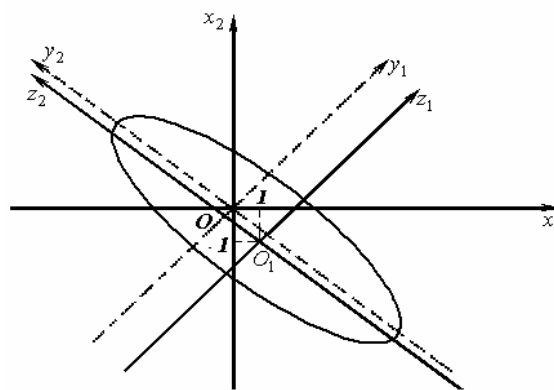


Рисунок 70

Задача 12.18 Определим, какая кривая задается уравнением

$45y_1^2 - 20y_2^2 + 180 = 0$,

и изобразим ее в канонической системе координат.

Решение. Для решения поставленной задачи приведем к каноническому виду квадратичную форму

$F = 32x_1^2 + 52x_1x_2 - 7x_2^2$ этой кривой. Матрица A квадратичной формы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 32 & 26 \\ 26 & -7 \end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение Δ , или

$$\begin{vmatrix} 32 - \lambda & 26 \\ 26 & -7 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 25\lambda - 900 = 0,$$

откуда находим собственные значения $\lambda_1 = 30$, $\lambda_2 = -20$. Теперь мы можем записать канонический вид квадратичной формы кривой:

Δ .

Так как линейные слагаемые в исходном уравнении отсутствуют, то и после поворота, приводящего квадратичную форму кривой к каноническому виду, линейные слагаемые будут отсутствовать. Свободный член при поворотах также не изменяется. Поэтому в новой системе координат кривая будет описываться уравнением

$$45y_1^2 - 20y_2^2 + 180 = 0,$$

или

Δ .

Мы получили уравнение гиперболы, ее положение в канонической системе координат изображено на рисунке 71.

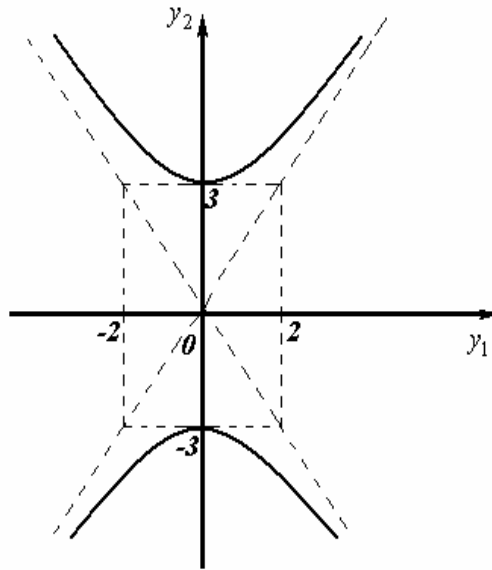


Рисунок 71

Задача 12.19 Приведем к каноническому виду уравнение поверхности

$$4x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 + 12x_1x_2 - 20 = 0,$$

определим ее тип и изобразим в канонической системе координат.

Решение. Как и в предыдущем примере, уравнение поверхности не содержит линейных слагаемых. Следовательно, чтобы привести уравнение к каноническому виду, достаточно привести к каноническому виду квадратичную форму поверхности. Само преобразование поворота по условию примера находить не требуется.

Квадратичная форма данной поверхности имеет вид

□.

Запишем ее матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и составим характеристическое уравнение этой матрицы

□.

Решая уравнение, находим его корни $\lambda_1 = 1$, □, $\lambda_3 = -2$. Зная их, записываем канонический вид квадратичной формы поверхности, а вместе с ним и каноническое уравнение самой поверхности:

□,

или

$$\frac{y_1^2}{20} + \frac{y_2^2}{2} - \frac{y_3^2}{10} = 1.$$

Полученное уравнение описывает однополостный гиперболоид (рисунок 72).

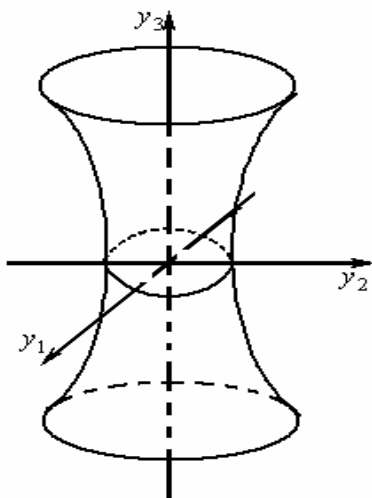


Рисунок 72

12.1 Задачи для самостоятельного решения

12.20 Выписать общий вид квадратичной формы, имеющей в некотором базисе матрицу

- 1) $\square$; 2) $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$;
- 3) $\square$; 4) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ. 1) $\square$;

2) $4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$;

3) $\square$;

4) $2(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - x_1x_2 - x_1x_3 - x_2x_3)$.

12.21 Методом Лагранжа найти канонический вид для следующих квадратичных форм:

- 1) $\square$; 2) $x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2$;
- 3) $\square$; 4) $-x_1^2 + 2x_1x_2 - 2x_2^2$;
- 5) $\square$.

Ответ. 1) $4y_1^2 + 4y_2^2$; 2) $\square$; 3) $25y_1^2$;
4) $\square$; 5) $-16y_1^2$.

12.22 Ортогональным преобразованием привести квадратичную форму к каноническому виду:

- 1) $\square$;
- 2) $x_1^2 - 3x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$;
- 3) $\square$;
- 4) $4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 3x_1x_2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3$;
- 5) $\square$.

Ответ. 1) $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$;
2) $\square$; 3) $y_1^2 + 4y_2^2 - y_3^2$;
4) $\square$; 5) $-12y_1^2 - \frac{5}{3}y_2^2 + \frac{12}{5}y_3^2$.

12.23 Используя правило Якоби найти канонический вид и преобразование координат, приводящее к этому виду, для следующих квадратичных форм:

- 1) $\square$;
- 2) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$;
- 3) $\square$;
- 4) $8x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 5) $\square$.

Ответ. 1) $2y_1^2 + 3y_2^2 - 3y_3^2$, $\square$, $x_2 = -y_2 + y_3$, $\square$;
2) $2y_1^2 + 10y_2^2 + 190y_3^2$, $\square$, $x_2 = 2y_2 + 2y_3$, $\square$;
3) y_1^2 , $\square$, $y_2 = x_2$, $\square$;
4) $8y_1^2 + \frac{1}{2}y_3^2$, $\square$, $y_2 = x_2$, $\square$;
5) $3y_1^2 - 30y_2^2 + 530y_3^2$, $\square$, $y_2 = \frac{2}{3}x_2 - \frac{1}{20}x_3$, $\square$.

12.24 Найти нормальный вид, положительный и отрицательный индексы инерции и сигнатуру следующих квадратичных форм:

- 1) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$;
- 2) $\square$;
- 3) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;
- 4) $\square$;
- 5) $x_1^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3$.

Ответ. 1) $\square$, 2, 1, 1; 2) $\square$, 1, 3, -2;
3) $\square$, 3, 0, 3; 4) $\square$, 1, 2, -1;
5) $\square$, 2, 1, 1.

12.25 Найти все значения параметра λ , при которых положительно определены следующие квадратичные формы:

1) $\lambda x_1^2 - 4x_1x_2 + (\lambda + 3)x_2^2$;

2) $\square$;

3) $\lambda x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$;

4) $\square$;

5) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 2\lambda x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$.

Ответ. 1) $\square$; 2) $\lambda > 2$; 3) $\square$;

4) $|\lambda| < \sqrt{5/3}$; 5) $\square$.

13 Геометрические объекты дифференциальной геометрии

Всякую линию, отличную от прямой будем называть кривой.

Кривую на плоскости можно изобразить различными способами.

Если кривая определяется по отношению к декартовой системе координат, то ее уравнение запишется в виде

$$F(x, y) = 0$$

или, предполагая данное уравнение разрешенным относительно ординаты y , в виде

$$y = f(x).$$

Если левая часть уравнения $F(x, y) = 0$ является алгебраической функцией координат x и y , то линия, им изображаемая, называется **алгебраической линией**.

Если же кривая определяется по отношению к полярной системе координат, то ее уравнение имеет форму

$$F(r, \varphi) = 0,$$

или

$$\varphi = f(r).$$

Если каждая из двух текущих координат кривой задается как функция некоторого параметра, то возможно параметрическое изображение кривой:
 $x = x(t), \quad y = y(t).$

Мы не напоминаем читателю знакомое со школы определение касательной, а повторим лишь основное из курса дифференциальной геометрии.

Если кривая задана уравнениями в параметрической форме:

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

то уравнение касательной имеет вид

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}.$$

Если уравнение кривой дано в форме $y = f(x)$, то касательная

$$Y - y = y'(X - x).$$

Если уравнение кривой дано в полярных координатах $r = r(\varphi)$, то уравнение касательной найдется по формуле $\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$.

$\frac{X - x}{x'}$ - уравнение касательной, в данном случае параллельной оси Oy .

$\frac{Y - y}{y'}$ - уравнение касательной, параллельной оси Ox .

Нормалью к кривой в точке (x, y) называется прямая, проходящую через выбранную точку кривой перпендикулярно к ее касательной в той же точке.

Уравнение нормали составляется, как уравнение прямой, проходящей через точку (x, y) и имеющей угловой коэффициент k , именно в виде

$$Y - y = k(X - x).$$

Уравнение кривой	Уравнение касательной	Уравнение нормали
$y = f(x)$	$(X - x)\frac{\partial F}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial F}{\partial y} = 0$	$Y - y = k(X - x)$

$y = f(x)$	$\square$	$Y - y = -\frac{1}{\frac{\partial y}{\partial x}}(X - x)$
$\square$	$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$	$\square$

Сравнивая кривую с ее касательной в какой-либо ее точке, будем говорить, что кривая в этой точке имеет большую или меньшую кривизну, если она вблизи рассматриваемой точки быстрее или медленнее удаляется от прямой – своей касательной.

За характеристику кривизны кривой на некотором ее участке можем считать большее или меньшее уклонение касательной в конечной точке участка от касательной в начальной ее точке.

Так, для окружности средняя кривизна любого ее участка постоянна и равна обратной величине ее радиуса.

Кривизна в точке M кривой общего вида выражается следующим образом

$$\square \quad \text{или} \quad K = \frac{d\alpha}{ds},$$

где $\square$ - угол образованный касательной в точке M и осью абсцисс, s - длина дуги.

Число $\square$ называется **радиусом кривизны кривой в данной точке** и обозначается через r :

$$\square,$$

Конец радиуса кривизны, отложенного по нормали от точки кривой, называется **центром кривизны** в данной точке кривой.

Кривизна кривой определяется соотношением

$$K = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

тогда **радиус кривизны** соответственно соотношением

$$\square.$$

Если кривая дана уравнением

$$y = f(x),$$

то ее кривизна и радиус кривизны определяется формулами:

$$\square, \quad r = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''}.$$

Кривизна кривой или радиус кривизны являются инвариантами по отношению к любому преобразованию координат.

Уравнение

$$\square \quad (\text{или} \quad r = f(s))$$

называют **натуральным уравнением кривой**.

Эволютой, или **разверткой**, для данной кривой называется геометрическое место центров ее кривизны. Поскольку центр кривизны является

центром соприкасающейся окружности, то эволюта будет одновременно и местом центров соприкасающихся окружностей данной кривой.

Эволюта кривой есть огибающая ее нормалей. Дифференциал дуги эволюты по абсолютной величине равен абсолютному значению дифференциала радиуса кривизны кривой, т.е.

□.

Если на каждой касательной заданной кривой в обратную ее сторону откладывать дугу кривой, отсчитанную от некоторой ее произвольно выбранной точки, то построенная таким образом кривая называется *эвольвентой*.

Предельное положение плоскости, проходящей через касательную прямую и близкую точку кривой, называется *соприкасающейся плоскостью* кривой в заданной ее точке.

$(r - \rho)\rho'\rho'' = 0$ - уравнение соприкасающейся плоскости кривой.

Соприкасающуюся плоскость можно определить, как предельное положение плоскости, проходящей через три близкие точки кривой, когда две из них стремятся к совпадению с третьей.

Уравнение соприкасающейся плоскости в координатном изображении будет иметь вид

□.

Вектором кривизны кривой в точке M называется предел отношения □, где τ - единичный вектор касательной к кривой в некоторой точке M.

Вектор кривизны лежит в соприкасающейся плоскости. Единичный вектор, перпендикулярный к касательной, лежащий в соприкасающейся плоскости и направленный в сторону вогнутости кривой (по вектору кривизны), называется *главной нормалью* кривой и обозначается буквой □ («ню» греческое), причем

$$\frac{d\tau}{ds} = \frac{\nu}{r};$$

С каждой точкой кривой можно связать три направления, именно, касательную □, главную нормаль ν и, наконец, направление, перпендикулярное к двум предыдущим (а следовательно, перпендикулярное к соприкасающейся плоскости), которое называется *бинормалью* кривой. Бинормаль обозначается единичным вектором □ и направление ее берется так, чтобы в данной точке кривой три попарно ортогональных вектора τ , □, β образовали левую тройку (как и координатные оси).

Три указанных направления называют *главными направлениями* в данной точке линии.

Справедливы следующие равенства:

$$\begin{aligned} \square, \quad \nu^2 &= 1, & \square; \\ \nu\beta &= 0, & \square, \quad \tau\nu &= 0, \\ \square, \quad \nu &= [\beta\tau], & \square. \\ \tau\nu\beta &= 1. \end{aligned}$$

Через каждые два главных направления в точке □ можно провести

плоскость (рисунок 73). Плоскость, содержащая векторы τ , $\square$ и ортогональная к β , называется **соприкасающейся плоскостью**. Плоскость через $\square$ и β , ортогональная к касательной $\square$, называется **нормальной плоскостью**. Плоскость, содержащая τ и $\square$ и перпендикулярная к ν , называется **спрямляющей плоскостью** кривой.

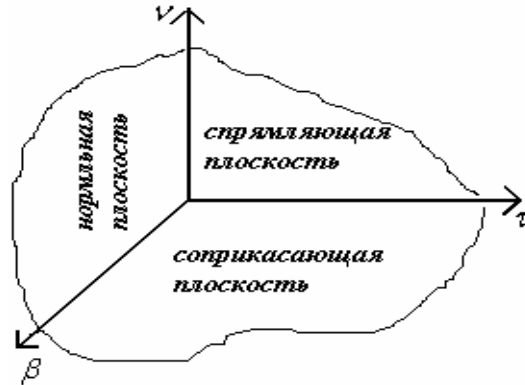


Рисунок 73

Задача 13.1 Составить уравнение касательной к эллипсу $\square$ в какой-либо его точке $(x; y)$.

Решение. Пользуясь формулой $\square$, сразу находим

$$\frac{2x}{a^2}(X - x) + \frac{2y}{b^2}(Y - y) = 0$$

или в силу самого уравнения эллипса

$\square$.

Ответ. $\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - 1 = 0$.

Задача 13.2 Составим уравнение касательной к кривой, данной своим уравнением в полярных координатах: $\square$.

Решение. Очевидно, $x = a\theta \cos \theta$, $\square$, и уравнение касательной по формуле

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'}$$

будет иметь вид

$\square$

или

$$(\sin \theta + \theta \cos \theta)X - (\cos \theta - \theta \sin \theta)Y - a\theta^2 = 0.$$

Ответ. $\square$.

Задача 13.3 Найти уравнения касательной к винтовой линии

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t \\ z = kt \end{cases}$$

Решение. Из этих уравнений находим

$$\square, dy = a \cos t dt, \square;$$

а потому уравнение

$$\frac{X-x}{dx} = \frac{Y-y}{dy} = \frac{Z-z}{dz},$$

по сокращении знаменателей на dt , дадут уравнения касательной в виде

□.

Чтобы найти углы касательной с осями, составляем

$$ds^2 = a^2 \sin^2 t dt^2 + a^2 \cos^2 t dt^2 + k^2 dk^2 = (a^2 + k^2) dt^2$$

откуда

□

и потому, по сокращении на dt :

$$\cos \alpha = \pm \frac{a \sin t}{\sqrt{a^2 + k^2}}; \quad \square; \quad \cos \gamma = \pm \frac{k}{\sqrt{a^2 + k^2}};$$

следовательно, касательная к винтовой линии образует с осью Oz постоянный угол.

Посмотрим теперь, как составить уравнения касательной, если кривая задана пересечением двух поверхностей:

□

Продифференцируем эти уравнения:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz = 0. \end{cases}$$

Уравнения □ показывают, что для точек касательной dx, dy, dz пропорциональны разностям $X-x, Y-y, Z-z$; положим

□,

откуда

$$dx = h(X-x), \quad dy = h(Y-y), \quad dz = h(Z-z).$$

Подставив поэтому в написанные выше уравнения вместо □ эти выражения и сократив на h мы получим уравнение касательной:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z-z) = 0, \\ \frac{\partial F}{\partial x}(X-x) + \frac{\partial F}{\partial y}(Y-y) + \frac{\partial F}{\partial z}(Z-z) = 0. \end{cases}$$

Каждое из этих уравнений есть уравнение плоскости, так как оно первой степени относительно X, Y, Z ; пересечение этих плоскостей и дает касательную к пространственной кривой.

Задача 13.4 Найти уравнения касательной к кривой Вивиани

□

в точке $(2, 1, 2\sqrt{5})$.

Решение. Составим частные производные

□

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 2y - 5, \quad \frac{\partial F}{\partial z} = 0.$$

Находим соответствующие значения для данной точки:

□

Следовательно, уравнения касательной будут иметь вид

$$\begin{cases} 4(X-2) + 2(Y-1) + 4\sqrt{5}(Z-2\sqrt{5}) = 0, \\ 4(X-2) - 3(Y-1) = 0. \end{cases} \quad (13.1)$$

или

□

Если найти углы, образуемые этой касательной с осями координат, то можно преобразовать полученные уравнения в вид пропорций. Для этого исключаем из уравнений (13.1) $X-2$:

$$5(Y-1) + 4\sqrt{5}(Z-2\sqrt{5}) = 0.$$

Получаем систему

□

Из первого уравнения имеем

$$Y-1 = \frac{Z-2\sqrt{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}},$$

а из второго

□

так что

$$\frac{X-2}{\frac{3}{4}} = \frac{Y-1}{1} = \frac{Z-2\sqrt{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}},$$

или, избавляясь от дробей в знаменателях, имеем

□

Углы с осями найдутся по формулам:

$$\cos \alpha = \pm \frac{3}{\sqrt{9+16+5}} = \pm \frac{3}{\sqrt{30}} = \pm \frac{\sqrt{30}}{10},$$

□

$$\cos \gamma = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{9+16+5}} = \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{30}} = \pm \frac{\sqrt{6}}{6}.$$

Обратим внимание на то, что и в том случае, когда кривая задана пересечением двух поверхностей, уравнения касательной могут быть получены и в виде пропорций, если воспользоваться правилом дифференцирования неявных функций. Сделаем это для данной задачи 13.4.

Дифференцируем уравнения кривой, сокращая первое на 2:

□

Для данной точки они запишутся так

$$\begin{cases} 2dx + dy + 2\sqrt{5}dz = 0, \\ 4dx - 3dy = 0. \end{cases}$$

Откуда

□

Следовательно, уравнения касательной примут вид

$$\frac{X-2}{\frac{3}{4}dy} = \frac{Y-1}{dy} = \frac{Z-2\sqrt{5}}{-\frac{\sqrt{5}}{4}dy},$$

или окончательно

□

$$\text{Ответ. } \frac{X-2}{3} = \frac{Y-1}{4} = \frac{Z-2\sqrt{5}}{-\sqrt{5}}.$$

Задача 13.5 Составим натуральное уравнение цепной линии по ее уравнению в декартовых координатах:

□.

Решение. Прежде всего, находим первую и вторую производные от ординаты по абсциссе:

$$y' = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right), \quad \square,$$

отсюда

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right) dx$$

и, следовательно,

□;

с другой стороны,

$$r = \frac{(1 + y'^2) \cdot \frac{3}{2}}{y''} = \frac{a}{4} \left(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}} \right)^2;$$

исключая □ из двух уравнений, определяющих s и □, мы получим натуральное уравнение цепной линии в виде

$$r = a + \frac{s^2}{a}.$$

Рассмотрим теперь обратную задачу и будем искать уравнение кривой в декартовых координатах по ее натуральному уравнению; определим, например, кривую, радиус которой постоянен:

□.

Из уравнения

$$r = \frac{ds}{d\alpha}$$

прежде всего находим интегрированием

□,

далее,

$$dz = e^{i\alpha} ds = e^{i\left(\alpha_0 + \frac{s}{a}\right)} ds$$

или

□;

следовательно,

$$x = a \sin\left(\frac{s}{a} + \alpha_0\right) + C_1, \quad \square.$$

Найденные кривые получаются произвольным перемещением по плоскости кривой, изображаемой параметрическими уравнениями:

$$x = a \cos \frac{s}{a}, \quad \square,$$

т.е. окружности. Таким образом, окружность является на плоскости единственной линией с постоянным радиусом кривизны.

Ответ. $r = a + \frac{s^2}{a}.$

Задача 13.6 Составить натуральное уравнение циклоиды

$$\square, \quad y = a(1 + \cos \varphi)$$

(здесь ось $\square$ является основанием циклоиды, а ось Oy - ее осью симметрии).

Решение. Для дифференциала дуги и радиуса кривизны получим выражения:

$$\square, \quad r = -4a \cos \frac{\varphi}{2},$$

следовательно,

$\square.$

Исключая параметр φ из уравнений, определяющих $\square$ и r , получим натуральное уравнение циклоиды в виде

$\square.$

Ответ. $r^2 + s^2 = 16a^2.$

Задача 13.7 Найти натуральное уравнение развертки окружности

$$\square, \quad y = a \sin \varphi.$$

Решение. На каждой касательной окружности $\square$, $y = a \sin \varphi$ в отрицательном направлении откладывается длина пройденной дуги окружности (считая от точки $\square$). Геометрическое место концов касательных будет развертка окружности; она изображается уравнениями

$$x = a(\cos \varphi + \varphi \sin \varphi), \quad \square.$$

Из параметрических уравнений развертки окружности найдем

$$x'^2 + y'^2 = a^2 \varphi^2, \quad \square$$

следовательно, $ds = a \varphi d\varphi$ или $\square$

и $r = a\varphi$;

поэтому ее натуральное уравнение будет иметь вид $\square.$

Ответ. $r^2 = 2as.$

Задача 13.8 Найти радиус кривизны параболы $\square$ в точке (4,2).

Решение. Имеем $y = \frac{x^2}{8}$, $y' = \frac{x}{4}$, $y'' = \frac{1}{4}.$

Для данной точки находим значения производных $\square.$

Следовательно, находим радиус кривизны по формуле $R = \left| \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} \right|.$

$\square$

Ответ. $R = 8\sqrt{2}.$

Задача 13.9 Найти линию, радиус кривизны которой пропорционален ее дуге.

Решение. Пусть $\square$, тогда $d\alpha = \frac{ds}{ms}$, или

$\square$,

откуда

$$s = ce^{m\alpha}, \quad \square;$$

далее,

$$dz = e^{i\alpha} ds = mce^{(m+i)\alpha} d\alpha,$$

следовательно,

$\square$

или

$$z = \frac{mc(m-i)}{m^2+1} e^{m\alpha} (\cos \alpha + i \sin \alpha),$$

откуда

$\square$,

$$y = \frac{mc}{m^2+1} (m \sin \alpha - \cos \alpha) e^{m\alpha}.$$

Поворачивая оси координат и полагая

$$\square, \quad \bar{y} = \frac{x + my}{\sqrt{m^2+1}},$$

получим

$$\square, \quad \bar{y} = \frac{mc}{\sqrt{m^2+1}} e^{m\alpha} \sin \alpha,$$

т.е. логарифмическую спираль

$\square$.

Задача 13.10 Винтовой цилиндрической линией называется такая линия на (любом) цилиндре, которая каждую из образующих цилиндра встречает под постоянным углом; она получится из прямой линии, начерченной на плоскости, если плоскость навернуть на цилиндр. Доказать два предложения: а) для всякой винтовой линии отношение радиусов кривизны и кручения постоянно, и обратно, б) если отношение радиусов кривизны и кручения постоянно, то линия будет винтовой цилиндрической.

Решение. а) Пусть направление образующих цилиндра определяется вектором (постоянным) γ , тогда по самому определению винтовой линии

$\square$;

дифференцируя это соотношение два раза, получим

$$\gamma \nu = 0, \quad \square.$$

Первое из этих уравнений показывает, что γ перпендикулярен к главной нормали и, следовательно, он находится в плоскости векторов $\square$ и β ; но с вектором $\square$ вектор γ составляет угол $\square$, поэтому $\gamma\beta = \pm \sin m$. В таком случае второе из полученных выше уравнений дает

$\square$.

б) Предположим теперь, что для некоторой линии

$$\frac{t}{r} = C$$

где C - постоянное; исключая из первого и последнего из уравнений Френе-Серре вектор ν , получим

C ,

откуда следует, что вектор $\tau - C\beta$ будет вектором постоянным. Полагая

C

и умножая это соотношение скалярно на τ , найдем

C ,

т.е. свойство, характеризующее цилиндрическую винтовую линию.

Ответ. Линией является логарифмическая спираль.

Задача 13.11 Найти эволюту астроида

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Решение. По формулам

$$\begin{cases} \xi = x - \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} y', \\ \eta = y + \frac{x'^2 + y'^2}{x'y'' - x''y'} x' \end{cases}$$

получим

C ,

$$\eta = a(\sin^3 t + 3\cos^2 t \sin t);$$

заменяя степени синуса и косинуса их выражениями через функции кратных аргументов, приведем предыдущие уравнения к виду:

C ,

$$y = \frac{a}{2}(3\sin t + \sin 3t),$$

которые показывают, что кривая будет одной из эпициклоид.

Задача 13.12 Найти эвольвенты окружности.

Решение. Возьмем параметрические уравнения окружности в виде:

C ,

$$y = a \sin \frac{s}{a};$$

тогда эвольвенты ее изобразятся по формулам $\xi = x - (s+c)y'$, $\eta = y + (s+c)x'$ уравнениями:

C ,

$$\bar{\eta} = a \sin \frac{s}{a} - (s+c) \cos \frac{s}{a}.$$

Задача 13.13 Найти эвольвенты спирали Архимеда.

Решение. По параметрическим уравнениям спирали

C ,

$$y = a\theta \sin \theta$$

найдем

C ,

$$\frac{dx}{ds} = \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}}, \quad \frac{dy}{ds} = \frac{\sin \theta + \theta \cos \theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}};$$

уравнения эвольвент будут:

$$\bar{\xi} = a\theta \cos \theta - (s - c) \frac{\cos \theta - \theta \sin \theta}{\sqrt{\theta^2 + 1}}, \quad \square,$$

где s есть указанная выше функция от $\square$.

Задача 13.14 Соприкасающаяся плоскость будет неопределенной во всех точках линии только для прямой.

Решение. Если уравнение соприкасающейся плоскости пропадает для всех точек линии, тогда для каждого значения параметра (т.е. тождественно) выполняются условия

$$\frac{x''}{x'} = \frac{y''}{y'} = \frac{z''}{z'};$$

интегрируя первый раз эти соотношения, получим

$\square$

или

$$\frac{x'}{a_1} = \frac{y'}{b_1} = \frac{z'}{c_1},$$

где $\square$, b_1 , $\square$ - произвольные постоянные.

Вторичное интегрирование с введением новых произвольных постоянных даст уравнения прямой

$$\frac{x - a_2}{a_1} = \frac{y - b_2}{b_1} = \frac{z - c_2}{c_1}.$$

Задача 13.15 Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали, бинормали и углы, образованные этими нормальями с осями координат для кривой

$\square$

в точке, для которой $t=0$.

Решение. Обратим внимание на расположение вычислений при решении подобных задач. Сначала сделаем подготовительные определения тех чисел, которые нам понадобятся при решении задачи, а именно, найдем дифференциалы первого и второго порядков от x , y , z и вычисляем их значения для данной точки. При этом во всех уравнениях подобных задач важно знать не сами значения дифференциалов, а лишь числа, им пропорциональные, и поэтому, например, можно отбрасывать одинаковые степени дифференциала независимой переменной (в данной задаче степени dt).

Итак, находим дифференциалы

$$dx = e^t (\cos t - \sin t) dt,$$

$$dy = e^t (\sin t + \cos t) dt, \quad \square$$

$$dz = 2e^{2t} dt.$$

Составляем таблицу для $t=0$.

t	x	y	z	dx	$\square$	dz	$\square$	d^2y	$\square$
0	1	0	1	1	1	2	0	2	4

$$A = dyd^2z - dzd^2y = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 0,$$

$\square$,

$$C = dx d^2 y - dy d^2 x = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 0 = 2.$$

Следовательно, уравнение соприкасающейся плоскости будет иметь вид
□ или $2Y - Z + 1 = 0$.

Уравнение главной нормали: составляем сначала уравнение нормальной плоскости

$$\square \text{ или } X + Y + 2Z - 3 = 0.$$

Тогда главная нормаль определяется совокупностью уравнений:

□

Придавая им вид пропорций, получим

$$\frac{X-1}{-5} = \frac{Y}{1} = \frac{Z-1}{2}.$$

Углы □ главной нормали с осями координат определяются по формулам:

$$\cos \alpha' = \pm \frac{-5}{\sqrt{25+1+4}} = \mp \frac{\sqrt{30}}{6},$$

□

$$\cos \gamma' = \pm \frac{2}{\sqrt{25+1+4}} = \pm \frac{2}{\sqrt{30}} = \pm \frac{\sqrt{30}}{15}.$$

Уравнение бинормали:

□

Углы ее с осями определяются по формулам

$$\cos \alpha'' = 0, \quad \square \cos \gamma' = \pm \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Задача 13.16 Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали для кривой Вивиани

□

в точке $(2, 1, 2\sqrt{5})$.

Решение. Выберем за независимую переменную y и будем находить значения □ для данной точки. Для этого дифференцируем данные уравнения:

$$\begin{cases} xdx + ydy + zdz = 0, \\ 2xdx + 2ydy - 5dz = 0. \end{cases} \quad (13.2)$$

Для данной точки они запишутся следующим образом

□

Второе уравнение дает

$$dx = \frac{3}{4} dy,$$

и, заменяя этим выражение dx в первом уравнении, получаем:

□

откуда

$$dz = -\frac{5}{4\sqrt{5}} dy = -\frac{\sqrt{5}}{4} dy.$$

Чтобы найти значения вторых дифференциалов, еще раз дифференцируем уравнения (13.2), помня, что □:

$$\begin{cases} dx + xd^2 x + dy^2 + dz^2 + zd^2 z = 0, \\ 2dx^2 + 2xd^2 x + 2dy^2 = 0. \end{cases}$$

Заменяя $\square$ через $\frac{9}{16}dy^2$ и $\square$ через $\frac{5}{16}dy^2$

Вводя вместо x и z их значения и сокращая второе уравнение на 2 получим:
 $\square$

Откуда

$$d^2x = -\frac{25}{32}dy^2, d^2z = -\frac{\sqrt{5}}{32}dy^2.$$

Составим теперь таблицу пропорциональных чисел

	$\square$	d^2
$\square$	3	25
$y = 1$	4	0
$\square$	$-\sqrt{5}$	$\square$

$$A = 4\sqrt{5}, B = -28\sqrt{5}, C = -100.$$

Уравнение соприкасающейся плоскости после сокращения на $\square$ имеет вид
 $(X - 2) - 7(Y - 1) - 5\sqrt{5}(Z - 2\sqrt{5}) = 0$

или

$\square$

Уравнения главной нормали будем искать следующим образом. Берем уравнение плоскости из примера 13.4 и только что полученное уравнение соприкасающейся плоскости

$$\begin{cases} 3X + 4Y - \sqrt{5}Z = 0, \\ X - 7Y - 5\sqrt{5}Z + 55 = 0. \end{cases}$$

Уравнения бинормали имеют вид

$\square$

Задача 13.17 Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности эллипсоида $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.

Решение. Так как

$$\square, \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2y}{b^2}, \square,$$

то уравнение касательной плоскости, после сокращения на 2 запишется следующим образом

$$\frac{x}{a^2}(X - x) + \frac{y}{b^2}(Y - y) + \frac{z}{c^2}(Z - z) = 0$$

или $\square$,

а в силу уравнения эллипсоида правая часть этого уравнения равна 1. Следовательно, уравнение касательной плоскости к эллипсоиду имеет вид

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Уравнения нормали запишутся следующим образом

$\square$

или

$$\frac{(X-x)a^2}{x} = \frac{(Y-y)b^2}{y} = \frac{(Z-z)c^2}{z}.$$

Задача 13.18 Найти геометрическое место концов перпендикуляров, опущенных из начала координат на касательные плоскости параболоида

$$\square, \quad y = 2\sqrt{qu} \sin v, \quad \square.$$

Решение. Представим уравнение данного параболоида в векторной форме:

$$\rho = 2\sqrt{pu} \cos v i + 2\sqrt{qu} \sin v j + 2u^2 k.$$

Прежде всего находим

$$\square, \quad [\rho_1 \rho_2] = \begin{vmatrix} i & -2\sqrt{p} \cos v & -2\sqrt{p} u \sin v \\ j & 2\sqrt{q} \sin v & 2\sqrt{q} u \cos v \\ k & 4u & 0 \end{vmatrix} = -8\sqrt{q} u^2 \cos v i -$$

$\square.$

Поэтому искомое геометрическое место (подэра эллиптического параболоида относительно его вершины) изобразится векторным уравнением

$$r = 2\sqrt{pq} u^2 \cdot \frac{2\sqrt{q} u \cos v i + 2\sqrt{p} u \sin v j - \sqrt{pq} k}{\sigma}$$

или параметрическими уравнениями:

$$\square, \quad y = \frac{4p\sqrt{qu}^2 \sin v}{\sigma}, \quad \square, \quad (13.3)$$

где $\sigma = 4u^2(q \cos^2 v + p \sin^2 v) + pq$. Из полученных уравнений нетрудно исключить параметры $\square$ и v ; в самом деле, вычислим прежде всего $\square$; это выражение равно

$$r^2 = \frac{4pqu^4}{\sigma},$$

а тогда уравнение (13.3) можно представить в виде

$$\square, \quad \sqrt{qu} y = r^2 \sin v, \quad \square$$

откуда уже легко исключить u и $\square$. Окончательное уравнение искомой подэры параболоида будет $px^2 + qy^2 + 2z(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

Задача 13.19 Найти на шаре $\square$ ортогональные траектории семейства окружностей, полученных от пересечения шара пучком плоскостей

$$\frac{a-x}{y} = \text{const}.$$

Решение. Данное семейство кругов на шаре определяется уравнением

$\square$;

ортогональное ему семейство определится уравнением

$$(1+p^2)dx\delta x + pq(dx\delta y + dy\delta y) + (1+q^2)dy\delta y = 0$$

или же в данном случае уравнением

$\square.$

Полученное уравнение легко интегрируется, если принять за новое переменное y^2 ; искомое семейство ортогоналей на шаре изобразится уравнением $\square$.

13.1 Задачи для самостоятельного решения

13.20 Написать уравнения касательной и нормали к кривой $r = \{a \cos^3 t, a \sin^3 t\}$ (астроида).

Ответ. $\square$.

13.21 Написать уравнения касательной и нормали к кривой $y = x^3$ в точках A, B с абсциссами 0 и 1.

Ответ. В точке A касательная $\square$, нормаль $x = 0$; в точке B касательная $\square$, нормаль $x + 3y - 4 = 0$.

13.22 В какой точке касательная к параболе $\square$ образует с осью Ox угол 45° ?

Ответ. $\square$.

13.23 Вычислить длину кривой $r = \{a \cos^3 t, a \sin^3 t\}$ (астроида).

Ответ. $\square$.

13.24 Найти длину дуги кривой $y = \ln \cos x$ между точками с абсциссами $\square$.

Ответ. $s = \ln \operatorname{tg}(5\pi/12)$.

13.25 Вычислить кривизну плоской кривой $\square$ (астроида).

Ответ. $k = \frac{2}{3a \sin 2t}$.

13.26 Найти координаты центра кривизны кривой $\square$ в точке $M(-2, 1)$.

Ответ. $x = -\frac{10}{3}, y = -\frac{3}{2}$.

13.27 Найти эволюту кривой $\square$ (гипербола).

Ответ. $x = \frac{a^2 + b^2}{a} ch^3 t, y = \frac{a^2 + b^2}{b} sh^3 t$.

13.28 Найти эволюту эллипса $\square$.

Ответ. $\left(\frac{ax}{c^2}\right)^{2/3} + \left(\frac{by}{c^2}\right)^{2/3} = 1$.

13.29 Найти уравнения касательной прямой, $\square$ углов ее с осями координат и уравнение нормальной плоскости для кривой

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2}, \\ y = \frac{t^3}{3}, \\ z = \frac{t^4}{4}. \end{cases} \text{ в точке, для которой } \square.$$

Ответ. $\frac{X - \frac{1}{2}}{1} = \frac{Y - \frac{1}{3}}{1} = \frac{Z - \frac{1}{4}}{1}; \left(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right);$
 $12X + 12Y + 12Z - 13 = 0.$

13.30 Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали и косинусы углов, образованных этими нормальями с осями координат для кривой $\square$ в точке $(1, 1, 1)$.

Ответ. $Y - Z = 0; \frac{X}{0} = \frac{Y}{1} = \frac{Z}{1}; 0, \pm \frac{1}{\sqrt{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt{2}};$

$\square$

13.31 Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали и косинусы углов, образованных этими нормальями с осями координат для кривой $x = t \cos t, y = t \sin t, z = t^2$ в точке, для которой $\square$.

Ответ. $X + Y - 2Z = 0; \frac{X - 1}{1} = \frac{Y - 1}{1} = \frac{Z - 1}{1}; \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}};$

$\square$

13.32 Найти уравнения соприкасающейся плоскости, главной нормали и бинормали для кривой $x = t^2, y = t - 1, z = t^3 - t$ в точке, для которой $\square$.

Ответ. $6X - 13Y - Z - 5 = 0; \frac{X - 4}{71} = \frac{Y - 1}{35} = \frac{Z - 6}{-29}; \square.$

13.33 Найти радиусы первой и второй кривизны кривой $\begin{cases} x = \frac{t^2}{2}, \\ y = \frac{t^3}{3}, \\ z = \frac{t^4}{4}. \end{cases} \text{ в точке,}$

для которой $\square$.

Ответ. $R = \frac{3\sqrt{2}}{2}; T = 3.$

13.34 Найти уравнения касательной плоскости и нормали и косинусы углов, образуемых нормалью с осями координат для однополостного гиперболоида $\square$ в точке $(1, -2, 3)$.

Ответ. $X + 6Y + 6Z - 7 = 0; \frac{X-1}{1} = \frac{Y+2}{6} = \frac{Z-3}{6}; \pm \frac{1}{\sqrt{73}}, \pm \frac{6}{\sqrt{73}}, \pm \frac{6}{\sqrt{73}}.$

13.35 Найти уравнения касательной плоскости и нормали и косинусы углов, образуемых нормалью с осями координат для поверхности $\square$ в точке $(0, -1, 2)$.

Ответ. $3X - Y + 2Z - 5 = 0; \frac{X}{3} = \frac{Y+1}{-1} = \frac{Z-2}{2}; \pm \frac{3}{\sqrt{14}}, \mp \frac{1}{\sqrt{14}}, \pm \frac{2}{\sqrt{14}}.$

13.36 Вычислить первую квадратичную форму поверхности $\square$ (геликоид).

Ответ. $(v^2 + k^2)du^2 + dv^2.$

13.37 Вычислить длину дуги линии $\square$ между точками ее пересечения с линиями $u = 1, v = 2$ на поверхности, заданной уравнением $\square$.

Ответ. $s = 2\sqrt{2 + a^2 + 2a^4}.$

13.38 Вычислить первую квадратичную форму поверхности $\square$ (сфера).
Ответ. $r^2(\cos^2 v du^2 + dv^2).$

13.39 Вычислить первую квадратичную форму поверхности $\square$ (конус).

Ответ. $v^2(a^2 \sin^2 u + b^2 \cos^2 u)du^2 + 2(b^2 - a^2)v \sin u \cos u dudv +$
 $+(a^2 \cos^2 u + b^2 \sin^2 u + c^2)dv^2.$

Список использованных источников

1. Беклемешев Л.А., Петрович А.Ю., Чубаров И.А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987.-334с.

2. Бугров, Я.С. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии /Бугров Я.С., Никольский С.М. - М.:Наука,1980- 222 с.

3. Бюшгенс, С.С., Дифференциальная геометрия / С.С. Бюшгенс. Изд. 2-е, испр. М.: КомКнига, 2006. – 304 с.

4. Глухов, М.М. Алгебра и аналитическая геометрия: Учебное пособие. – М.: Гелиос АРВ, 2005. – 392с., ил.

5. Гусак, А.А. Высшая математика: В 2 т. Т.1 Учеб. Для студентов вузов. – 5-е изд. – Мн.: ТетраСистемс, 2004. – 544с.

6. Гусак, А.А. Пособие к решению задач по высшей математике - Минск.: БГУ,1973-532 с.

7. **Гусятников П.Б., Резниченко С.В.** Векторная алгебра в примерах и задачах: учебное пособие для студентов инж.-тех. Спец. Вузов.-М.:высш. Шк.,1985.-232с.

8. **Данко П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.1: учеб. Пособие для вузов/П.Е. Данко,А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова.-6-е изд.- М:ООО «Издательство Оникс»: ООО «Издательство «Мир и Образование»,2006.- 304с.

9. **Ефимов, Н.В.** Квадратичные формы и матрицы - М.: Наука,1975 - 160 с.

10.**Икрамов, Х. Д.** Задачник по линейной алгебре / Икрамов Х.Д., Воеводин В.В - М.: Наука, 1988-320с.

11.**Идельсон А.В., Блюмкина И.А.** Аналитическая геометрия. Линейная алгебра. Учеб. пособие/Под ред. Л.П. Гаштольда, В.Г. Дмитриева,А.Ф. Тарасюка.- М.: ИНФРА-М,2000.-200с.

12.**Канатников, А.Н.** Крищенко А.П. Линейная алгебра. - М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001 – 336 с.

13.**Канатников А.Н., Крищенко А.П.** Аналитическая геометрия: Учеб.для вузов. 2-е изд./ Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко.-М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана. 2001.-388с.

14.**Клиот-Дашинский, М.И.** Алгебра матриц и векторов. – СПб.: Изд-во “Лань”, 2001 – 160с.

15.**Колосов, В.А.** Теоремы и задачи алгебры, теории чисел и комбинаторики - М.: Гелиос АРВ, 2001 – 256с.

16.**Кострикин, А.И.** Введение в алгебру. Части I, II, III. - М.: Физико-математическая литература, 2001 – 368 с.

17.**Крутицкая, Н.Ч.** Линейная алгебра в вопросах и задачах: Учеб. Пособие для студентов вузов по спец. «Физика» и «Прикл. математика»/ Крутицкая Н.Ч., Шишкин А.А. – М.: Высш. шк., 1985. – 120с., ил.

18.**Кузнецов, Л.А.** Сборник заданий по высшей математике: Типовые расчеты - М. Высшая школа,1983 -175 с.

19.**Курош, А.Г.** Курс высшей алгебры. - М.: Наука,1971- 432 .

20.**Норден А.П.** Дифференциальная геометрия. уч. пособие для пед. ин-тов. / А.П. Норден. – М.: Учпедгиз, 1948.-215 с.

21. **Позняк, Э.Г.**, Дифференциальная геометрия: Первое знакомство / Э.Г. Позняк, Е.В. Шикин. – М.: Едиториал УРСС, 2003. – 408с.

22. **Проскуряков И.В.** Сборник задач по линейной алгебре. - М.: Наука, 1974- 460с.

23. **Резниченко, С. и др.** Векторная алгебра в примерах и задачах - М.: Высшая школа, 1985 -150 с.

24. **Сизый, С.В.** Лекции по теории чисел: Учебное пособие для математических специальностей. – 2-е изд., исправ. и доп. – Екатеринбург: 2002. – 194с

25. **Сикорская, Г.А.** Курс лекций по алгебре и геометрии: учебное пособие для студентов транспортного факультета / Г.А. Сикорская, Оренбург: ГОУ ОГУ, 2007. - 376 с.

26. **Стакун, А.А.** Линейная алгебра с элементами аналитической геометрии: Конспект лекций с метод. Указаниями и контрольными заданиями для студентов-заочников/Авт.-сост. А.А. Стакун. – СПб.: Политехника, 2001. – 120с.

27. **Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии:** учебное пособие для вузов / Р.Ф. Апатенок [и др.]- 2-е изд., перераб. и доп. - Минск: Вышэйш. шк., 1986. - 272 с.

