Беридзе С.П.

СВОБОДНЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КОНИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ

Предлагается методика расчета крутильных колебаний стержня в виде усеченного конуса с защемленным большим и свободным меньшим основаниями. Решение предложенного уравнения колебаний стержня получено в виде разложения в ряд по функциям Бесселя.

Часто на ответственных гребных валах, валах мощных приводов имеются конические участки. При необоснованном назначении размеров таких участков снижается надежность работы и ухудшаются эксплуатационные характеристики машины в целом. При этом большую роль играют крутильные колебания валов. В настоящее время задачу расчета вала с переменным сечением на крутильные колебания осуществляют приближенно, заменяя вал системой элементов с конечным числом степеней свободы /5/. Расчет таким способом сложен и громоздок. Предлагается более простой и точный аналитический способ расчета крутильных колебаний для случая валов конической формы. В силу ранее сказанного поставленная задача весьма актуальна

Рассмотрим стержень (рис. 1), защемлённый у левого большего основания радиуса R_1, свободный у меньшего радиуса R_2, имеющий длину 1

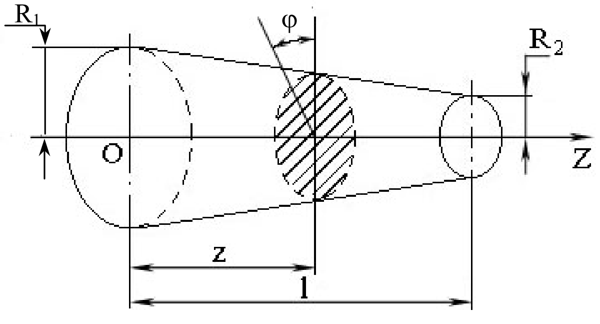

Рис. 1 Уравнение свободных крутильных колебаний конического стержня берём в виде /1/:

$$\rho J_p(z)\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial z}\left[GJ_p(z)\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right], \qquad (1)$$

здесь ρ - плотность материала, $J_p=\frac{\pi r^4}{2}$ - полярный момент инерции текущего сечения стержня, а $r=r(z)$, (рис. 2), z – текущая координата, r – радиус текущего сечения стержня, t – время, G – модуль сдвига, φ=φ(z,t) – угол скручивания в некотором сечении стержня.

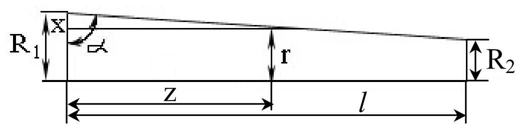

Рис. 2

На рисунке 2 показана половина осевого сечения стержня, здесь $x=R_1$-r

Определим r как функцию от z. Из рис. 2 следует, что

$$x=\frac{z}{tg\alpha},$$

но

$$tg\alpha=\frac{l}{R_1-R_2}.$$

Далее (рис. 2)

$$r=R_1-x=R_1-\frac{z}{tg\alpha}=\frac{lR_1-z(R_1-R_2)}{l} \qquad (2)$$

и

$$\frac{dJ_p}{dz}=\frac{dJ_p}{\partial r}\cdot\frac{dr}{dz}=\frac{\pi 4r^3}{2}\left[-\left(\frac{R_1-R_2}{l}\right)\right]=-\frac{2\pi(R_1-R_2)}{l}\cdot r^3. \qquad (3)$$

Перепишем (1) в виде

$$\rho J_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}=G\frac{\partial J_p}{\partial z}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial z}+GJ_p\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}. \qquad (4)$$

Решение уравнения (1) ищем в виде

$$\varphi=\Theta(z)\sin(\omega t+\varepsilon). \qquad (5)$$

Подставим (2), (3), (5) в (4), получим

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2}-\frac{4(R_1-R_2)}{lR_1-z(R_1-R_2)}\cdot\frac{d\Theta}{dz}+\frac{\rho\omega^2}{G}\Theta=0$$

Это дифференциальное уравнение для функции формы колебаний $\theta=\theta(z)$.

Обозначим

$$R_1 - R_2 = a,\ \frac{\rho\omega^2}{G} = p^2 a^2,\ lR_1 = b,$$

тогда уравнение (6) примет вид:

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} - \frac{4a}{b-az}\cdot\frac{d\Theta}{dz} + a^2 p^2 \Theta = 0.$$

Сделаем замену переменных.

$y = b - az$, тогда

$$\frac{d\Theta}{dz} = \frac{d\Theta}{dy}\cdot\frac{dy}{dz} = \frac{d\Theta}{dy}(-a),$$

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = \left(\frac{d\Theta}{dy}\right)'_y \frac{dy}{dz}(-a) = \frac{d^2\Theta}{dy^2}a^2.$$

Окончательно

$$\frac{d^2\Theta}{dy^2} + \frac{4}{y}\cdot\frac{d\Theta}{dy} + p^2\Theta = 0 \qquad (7)$$

или

$$y\Theta'' + 4\Theta' + p^2 y\Theta = 0. \qquad (8)$$

Полученное уравнение есть уравнение, приводящееся к уравнению Бесселя /2/.

Его решение имеет вид:

$$\Theta = C_1 y^{-\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(py) + C_2 y^{-\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(py) \qquad (9)$$

Здесь $J_{\frac{3}{2}}(py)$ - функция Бесселя первого рода, порядка $\frac{3}{2}$, $J_{-\frac{3}{2}}$ она же, порядка $-\frac{3}{2}$.

Функция Θ должна удовлетворять следующим граничным условиям /3/.

Первое: на левом защемлённом конце отсутствуют перемещения и, следовательно,

при $z = 0 \quad \varphi = 0$.

Так как

$$y = lR_1 - zR_1 + zR_2,$$

то при

$$0 \le z \le l$$

буде иметь

$$lR_2 \le y \le lR_1.$$

В новых обозначениях это граничное условие будет иметь вид:

при $y = lR_1 \quad \Theta = 0$. (10)

Второе: на правом свободном конце отсутствует крутящий момент.

Значит

при $z = l \qquad M_k = GJ_p\dfrac{\partial\varphi}{\partial z} = 0$.

Т.к. $J_p(l)$ не равно 0, то должно быть

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = 0.$$

В новых обозначениях это будет:

при $y = lR_2 \qquad \dfrac{d\Theta}{dy} = 0$. (11)

Подставим (9) в (10) и (11), получим

$$\begin{cases} C_1(lR_1)^{-\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(plR_1) + C_2(lR_1)^{-\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(plR_1) = 0 \\ C_1\left[(R_1-R_2)\frac{3}{2}(lR_2)^{-\frac{5}{2}} J_{\frac{3}{2}}(plR_2) - (R_1-R_2)(lR_2)^{-\frac{3}{2}} J'_{\frac{3}{2}}(plR_2)\cdot p\right] + \\ + C_2\left[(R_1-R_2)\frac{3}{2}(lR_2)^{-\frac{5}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(plR_2) - (R_1-R_2)(lR_2)^{-\frac{3}{2}} J'_{-\frac{3}{2}}(plR_2)\cdot p\right] = 0. \end{cases} \qquad (12)$$

Чтобы задача имела решение, нужно, чтобы определитель системы (12) был равным нулю, тогда получим

$$J_{\frac{3}{2}}(plR_1)\cdot\left[(R_1-R_2)\frac{3}{2}(lR_2)^{-\frac{5}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(plR_2) - (R_1-R_2)(lR_2)^{-\frac{3}{2}} pJ'_{-\frac{3}{2}}(plR_2)\right] - \qquad (13)$$

$$- J_{-\frac{3}{2}}(plR_1)\cdot\left[(R_1-R_2)\frac{3}{2}(lR_2)^{-\frac{5}{2}} J_{\frac{3}{2}}(plR_2) - (R_1-R_2)(lR_2)^{-\frac{3}{2}} J'_{\frac{3}{2}}(plR_2)p\right] = 0$$

Уравнение (13) является уравнением частот для данной краевой задачи, его корни $p_1, p_2, \ldots, p_k \ldots$ - характеристические числа, определяющие частоты колебаний стержня. Каждому характеристическому числу p_k, соответствует значение формы колебаний Θ_k и, следовательно,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} \Theta_k(y)\sin(\omega_k t + \varepsilon_k), \qquad (14)$$

где

$$\Theta_k = C_{1k} y^{-\frac{3}{2}} J_{\frac{3}{2}}(p_k y) + C_2 y^{-\frac{3}{2}} J_{-\frac{3}{2}}(p_k y) \qquad (15)$$

и

$$\omega_k = p_k(R_1 - R_2)\sqrt{\frac{G}{\rho}}.$$

Из первого уравнения системы (12) имеем

$$C_{2k} = -C_{1k}\frac{J_{\frac{3}{2}}(p_k lR_1)}{J_{-\frac{3}{2}}(p_k lR_1)}.$$

C_{2k} подставим в (15), получим

$$\Theta_k = \frac{C_{1k} y^{-\frac{3}{2}}}{J_{-\frac{3}{2}}(p_k lR_1)}\left[J_{\frac{3}{2}}(p_k y) J_{-\frac{3}{2}}(p_k lR_1) - J_{\frac{3}{2}}(p_k lR_1) J_{-\frac{3}{2}}(p_k y)\right]$$

или

$$\Theta_k = H_k y^{-\frac{3}{2}}\left[J_{\frac{3}{2}}(p_k y) J_{-\frac{3}{2}}(p_k lR_1) - J_{\frac{3}{2}}(p_k lR_1) J_{-\frac{3}{2}}(p_k y)\right]. \qquad (16)$$

В выражении (16) обозначим квадратную скобку, умноженную на $y^{-\frac{3}{2}}$, через

$$z_k\left(p_k y\right).$$

Тогда

$$\varphi=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\left(p_k y\right) H_k \sin\left(\omega_k t+\varepsilon_k\right). \qquad (17)$$

Постоянные H_k и ε_k определяются из начальных условий

$$\text{при } t=0 \quad \left.\begin{array}{l}\varphi=\varphi_0(y) \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial t}=\psi(y)\end{array}\right\}. \qquad (18)$$

Но прежде нужно доказать, что система функций $\left\{z_k\left(p_k y\right)\right\}$ ортогональна на отрезке $\left[lR_2, lR_1\right]$.

$z_k\left(p_k y\right)$ удовлетворяет уравнению (8) при замене p на p_k.

Произведя соответствующую замену, умножим это уравнение

$$y z_n''+4 z_n'+p_n^2 y z_n=0$$

на y^3, получим

$$y^4 z_n''+4 y^3 z_n'+p_n^2 y^4 z_n=0$$

или

$$\left(y^4 z_n'\right)'+p_n^2 y^4 z_n=0.$$

Рассмотрим систему

$$\begin{cases}\left(y^4 z_n'\right)'+p_n^2 y^4 z_n=0 \Big| z_m \\ \left(y^4 z_m'\right)'+p_m^2 y^4 z_m=0 \Big| z_n\end{cases},$$

первое уравнение которой умножим на z_m, а второе на z_n, получим

$$\begin{cases}\left(y^4 z_n'\right) z_m+p_n^2 y^4 z_n z_m=0 \\ \left(y^4 z_m'\right) z_n+p_m^2 y^4 z_m z_n=0\end{cases}.$$

Из второго уравнения полученной системы вычтем первое, тогда

$$y^4\left(p_m^2-p_n^2\right) z_m z_n=\left(y^4 z_m'\right)' z_n-\left(y^4 z_n'\right)' z_m.$$

Умножим это равенство на dy и проинтегрируем от lR_2 до lR_1, правую часть проинтегрируем по частям, получим

$$\left(p_m^2-p_n^2\right) \int_{lR_2}^{lR_1} y^4 z_m z_n dy=z_n z_m' y^4 \Big|_{lR_2}^{lR_1}-z_m z_n' y^4 \Big|_{lR_2}^{lR_1}.$$

С учётом граничных условий (10) и (11), имеем

$$\left(p_m^2-p_n^2\right) \int_{lR_2}^{lR_1} y^4 z_m z_n dy=0 \quad \text{при } m \neq n \qquad (19)$$

Что и доказывает ортогональность данной системы функций.

Для определения постоянных H_k и ε_k, (17) подставим в (18), получим

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_0(y)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\left(p_k y\right) H_k \sin \varepsilon_k \\ \psi(y)=\sum_{k=1}^{\infty} z_k\left(p_k y\right) H_k \cdot \omega_k \cos \varepsilon_k\end{array}\right\}. \qquad (20)$$

Из (20) с учётом (19) получим

$$\begin{cases} H_k \sin \varepsilon_k=\dfrac{\int_{lR_2}^{lR_1} y^4 \varphi_0(y) z_k dy}{\int_{lR_2}^{lR_1} y^4 z_k^2 dy}=B_k \\ H_k \cos \varepsilon_k=\dfrac{\int_{lR_2}^{lR_1} y^4 \Psi(y) z_k dy}{\omega_k \int_{lR_2}^{lR_1} y^4 z_k^2 dy}=D_k \end{cases}. \qquad (21)$$

Откуда

$$\begin{cases} H_k=\sqrt{B_k^2+D_k^2} \\ \varepsilon_k=arctg \dfrac{B_k}{D_k} \end{cases}. \qquad (22)$$

Ряды, определяющие функции Бесселя $J_{\frac{3}{2}}(y)$ и $J_{-\frac{3}{2}}(y)$ сходятся при любом y и допускают двукратное почленное дифференцирование /4/, этими же свойствами обладает и их линейная комбинация (14), следовательно, (14) есть решение уравнения (1), если вернуться к прежней переменной z. Полнота решения следует из того, что оно разложено по полной ортогональной системе функций, выражающихся через функции Бесселя. В работе /3/ доказана однозначность решений общей задачи о колебаниях упругих тел, которые удовлетворяет данным начальным условиям для смещений и скоростей. Рассмотренная задача является частным случаем этой общей задачи.

Поскольку ряды, членами которых являются Бесселевы функции, сходятся достаточно быстро, то, с учетом возможного использования ЭВМ для суммирования ряда, решение задачи можно получить с любой степенью точности.

Список использованной литературы

1. Бабаков И.М. Теория колебаний. - М.: Наука, 1968. - 500 с.
2. Кузнецов Д.С. Специальные функции. - М.: Высшая школа, 1965. - 273 с.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. - М.-Л.: Объединённое научно- техническое издательство НКТП СССР, 1935. - 676 с.
4. Эльсгольц Л.Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. - М.: Наука, 1965. - 424 с.
5. Терских В.П. Расчет крутильных колебаний силовых установок. – М.: Машгиз, 1953.

Статья поступила в редакцию 6.12.99г.