Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра общей физики

М.С. Бурлак, А.Х. Кулеева

ИЗУЧЕНИЕ ОБОРОТНОГО МАЯТНИКА

Методические указания
к лабораторной работе №137

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 531.536(07)
ББК 22.2 я 7
Б 91

Рецензент - доктор физико-математических наук, профессор Н.А. Манаков

Бурлак, М.С.
Б 91 Изучение оборотного маятника: методические указания к лабораторной работе / М.С. Бурлак, А.Х. Кулеева; Оренбургский гос. ун-т. - Оренбург: ОГУ, 2010. - 12 с.

Методические указания включают теоретическое изложение материала, описание методики проведения опыта и контрольные вопросы для самоподготовки.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторной работы №137 «Изучение оборотного маятника» по дисциплине «Общая физика» для студентов всех специальностей.

УДК 531.536(07)
ББК 22.2я7

Лабораторная работа №137

Изучение оборотного маятника

Цель работы

Измерение ускорения свободного падения g.

Теоретическое введение

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. Рассмотрим *механические колебания***.** Простейшим типом колебаний являются *гармонические колебания* – колебания, при которых колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса).

Гармонические колебания величины x описываются уравнением типа

$$x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) \;, \qquad (1)$$

где x – смещение колеблющейся системы от положения равновесия;

A - максимальное значение колеблющейся величины, называемое *амплитудой колебаний*;

ω_0 - циклическая частота;

φ - начальная фаза колебаний в момент времени t = 0;

$(\omega_0 \cdot t + \varphi)$ - фаза колебаний в момент времени t.

Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени Т, называемый *периодом колебания,* за который система совершает одно полное колебание и фаза колебания получает приращение 2π, т.е.

$$\omega_0(t+T) + \varphi = (\omega_0 t + \varphi) + 2\pi$$

откуда

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0}.$$

(2)

Величина, обратная периоду колебаний

$$\gamma = \frac{1}{T},$$

(3)

т.е. число полных колебаний, совершаемых в единицу времени, называется *частотой колебания.*
Сравнивая (2) и (3), получим

$$\omega_0 = 2\pi\gamma = \frac{2\pi}{T}, \tag{4}$$

т.е. циклическая частота ω_0 равна числу полных колебаний, совершаемых за 2π секунд. Единица измерения частоты - *герц.* 1Гц – частота периодического процесса, при которой за 1с совершается одно полное колебание.
Скорость колеблющейся точки находится дифференцированием выражения (1) по времени. В результате получим скорость:

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} = -\omega_0 \cdot A \cdot \sin(\omega_0 \cdot t + \varphi) = A \cdot \omega_0 \cdot \cos \cdot (\omega_0 \cdot t + \varphi + \frac{\pi}{2}). \tag{5}$$

Дифференцируя вторично выражение (1), получаем ускорение:

$$a = \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d\upsilon}{dt} = -\omega_0{}^2 \cdot A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi) = A \cdot \omega_0{}^2 \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi + \pi). \tag{6}$$

т.е. скорость и ускорение точки изменяются по гармоническому закону с той же циклической частотой ω_0, что и смещение x. Амплитуды скорости (5) и ускорения (6) соответственно равны $A \cdot \omega_0$ и $A \cdot \omega_0{}^2$. Фаза скорости (5) отличается от фазы смещения x (1) на $\frac{\pi}{2}$, а фаза ускорения (6) отличается от фазы смещения x (1) на π. Следовательно, в момент времени, когда $x = 0$, $\upsilon = \frac{dx}{dt}$ приобретает наибольшие значения; когда же x достигает максимального отрицательного значения, ускорение $a = \frac{d^2x}{dt^2}$ приобретает наибольшее положительное значение.

Из выражения (6) следует дифференциальное уравнение гармонических колебаний

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0{}^2 x = 0,$$

(7)

где $x = A \cdot \cos(\omega_0 \cdot t + \varphi)$.

Система, совершающая колебания, описываемые уравнением вида (7) называется *гармоническим осциллятором.* Колебания гармонического осциллятора являются важным примером периодического движения.

Примерами горизонтального гармонического осциллятора являются физический и математический маятники.

Физический маятник – это твёрдое тело, совершающее под действием силы тяжести колебания вокруг неподвижной горизонтальной оси подвеса, не проходящей через центр масс С тела (рисунок 1).

Положение тела в любой момент времени характеризуется углом отклонения его от положения равновесия φ.

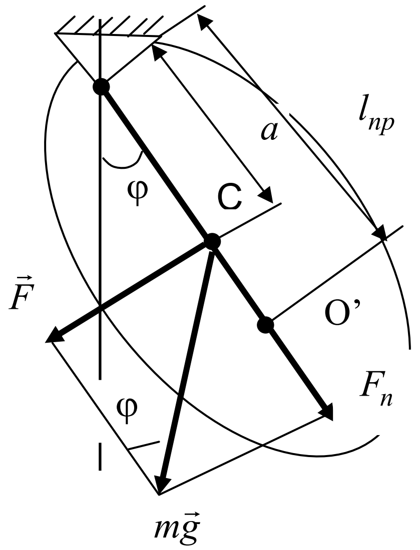

Рисунок 1 – физический маятник

Если маятник отклонить на угол φ, то появляется момент M возвращающей силы F, равный
$$M = I \cdot \varepsilon = I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2},$$

где I - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через точку подвеса О;

$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$ - угловое ускорение.

С другой стороны возвращающий момент

$$M = F \cdot h = F \cdot a = -mga\varphi,$$

где a - длина физического маятника (расстояние между точкой подвеса О и центром масс С);

h - плечо силы F, равное a;

$F = -mg\sin\varphi = -mg\varphi$ - возвращающая сила (знак минус обусловлен тем, что направления F и φ противоположны);

$\sin\varphi = \varphi$ при малых колебаниях маятника.

Приравнивая моменты, получим

$$I \cdot \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -mga\varphi$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mga}{I}\varphi = 0.$$

Принимая

$$\omega_0^2 = \frac{mga}{I}, \qquad (8)$$

получим уравнение гармонического осциллятора

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \omega_0^2\varphi = 0,$$

идентичное с уравнением (7), решение которого можно записать в виде

$$\varphi = \varphi_0\cos(\omega_0 t + \varphi). \qquad (9)$$

Из выражения (9) следует, что при малых отклонениях маятника из положения равновесия физический маятник совершает гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mga}{I}}$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mga}} = 2\pi\sqrt{\frac{l_{np}}{g}}, \qquad (10)$$

где

$l_{np} = \dfrac{I}{ma}$ - *приведенная длина физического маятника*,

g - ускорение свободного падения;

m - масса маятника.

Частным случаем физического маятника является математический маятник. *Математический маятник – это идеализированная система, состоящая из материальной точки массой* m*, подвешенной на нерастяжимой невесомой нити, и колеблющаяся под действием силы тяжести.*

Примером математического маятника может служить тяжелый шарик, подвешенный на длинной нити. Вся масса его практически сосредоточена в одной точке – в центре масс С маятника. Момент инерции математического маятника

$$I = ml^2, \qquad (11)$$

где l - длина маятника.

Подставляя в формулу (10) выражение (11) и значение $l = a$, получим выражение для периода малых колебаний математического маятника.

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \ . \qquad (12)$$

Сравнивая формулы (10) и (12), делаем вывод, что если приведенная длина $l_{пр}$ физического маятника равна длине l математического маятника, то их периоды колебаний одинаковы. Следовательно, *приведенная длина физического маятника – это длина такого математического маятника, период колебаний которого совпадает с периодом колебаний данного физического маятника.*

Точка О' на продолжении прямой ОС (рисунок 1), отстоящая от оси подвеса О на расстоянии приведенной длины $l_{пр}$, называется *центром качаний* физического маятника. По теореме Штейнера: *момент инерции тела относительно какой - либо оси вращения равен моменту инерции относительно параллельной оси, проходящей центр масс С, сложенному с произведением массы* m *тела на квадрат расстояния* a *между осями:*

$$I = I_C + ma^2, \qquad (13)$$

где I_C - момент инерции маятника относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной оси подвеса О.

Применяя теорему Штейнера (13), получим

$$l_{пр} = \frac{I}{ma} = \frac{I_C + ma}{ma} = a + \frac{I_C}{ma} \succ a. \qquad (14)$$

Отсюда следует, во – первых, что $l_{пр} \succ a$, т.е. точка подвеса О и центр качания О' лежат по разные стороны от центра масс С, и, во – вторых, что всем точкам подвеса, одинаково удаленным от центра масс маятника, соответствует одна и та же длина $l_{пр}$, следовательно, один и тот же период колебаний T.

Точка подвеса О и центр качаний О' обладают свойством взаимозаменяемости: если ось подвеса перенести в центр качаний, то точка О прежней оси подвеса станет новым центром качаний и период колебаний физического маятника не изменится. Часто маятниковые приборы используются для определения абсолютного значения g. В этом случае измерения проводятся таким образом, чтобы исключить из окончательных формул величину момента инерции маятника. Используя теорему Штейнера, представим выражение (10) для периода колебаний физического маятника в следующем виде:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ma^2}{mga}}. \tag{15}$$

Предположим, что мы определили периоды колебаний маятника, подвешивая его в двух разных точках, находящихся на расстояниях a_1 и a_2 от центра масс С. Из уравнений

$$\begin{aligned} T_1 &= 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ma_1^2}{mga_1}}, \\ T_2 &= 2\pi\sqrt{\frac{I_C + ma_2^2}{mga_2}} \end{aligned} \tag{16}$$

получаем

$$T_1^2 ga_1 - T_2^2 ga_2 = 4\pi\left(a_1^2 - a_2\right)^2, \tag{17}$$

откуда

$$g = 4\pi^2 \frac{a_1^2 - a_2^2}{a_1 T_1^2 - a_2 T_2} \tag{18}$$

Если периоды равны между собой $\left(T_1 = T_2 = T\right)$,

то

$$g = \frac{4\pi^2(a_1 + a_2)}{T^2} = 4\pi^2 \frac{l_{np}}{T^2}, \qquad (19)$$

где $a_1 + a_2 = l_{np}$ - приведенная длина физического маятника.

Экспериментальная установка

В данной работе используется оборотный маятник, изображенный на рисунке 2. На металлическом стержне опорные призмы B_1 и B_2 жестко закреплены и не перемещаются. Расстояние между ними l = 800 мм фиксировано.

Также фиксировано и положение чечевицы C. Вторая чечевица D находится на конце стержня (не между призмами) и может перемещаться по нему, причем ее положение определяется по шкале сквозь прозрачный глазок на чечевице (расстояние между рисками шкалы на стержне 10мм). Центр масс маятника на схеме обозначен точкой O.

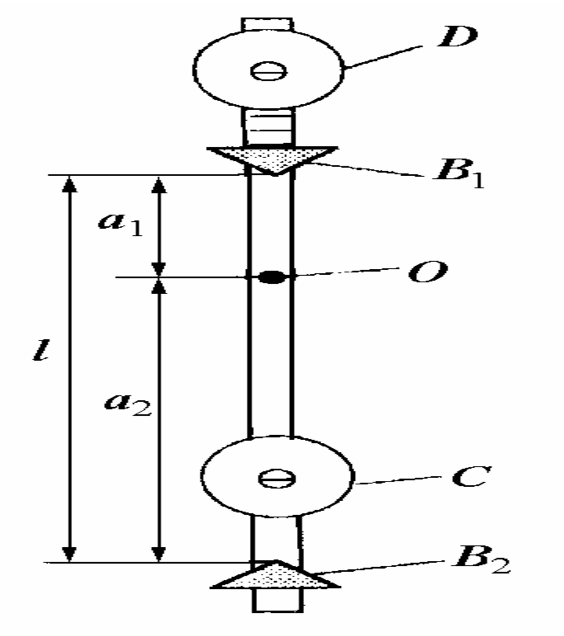

Рисунок 2 - Устройство оборотного маятника

Проведение эксперимента

Измерение и обработка результатов

1. Подвесьте маятник на призме B_1 (прямое положение маятника) и закрепите чечевицу D на расстоянии 9см от призмы.

2. Отклоните маятник от положения равновесия на 5 - 10° (нижний конец стержня — на 5 - 10см от вертикали) и измерьте время t_1, за которое происходят n = 20 периодов колебаний. Результат занесите в таблицу 1.

3. Перевернув маятник и подвесив его на призме B_2 (обратное положение маятника), повторите измерения по п. 2 измеряя время t_2. Результаты также занесите в таблицу 1.

4. Изменяя четыре раза положение чечевицы D с шагом 10мм, повторите измерения по п. 2 и 3.

5. По экспериментальным данным рассчитайте значения T_1 и T_2 для всех рассмотренных случаев по формуле:

$$T = \frac{t}{n}.$$

Результаты занесите в таблицу 1.

6. Постройте на миллиметровой бумаге графики зависимости периодов T_1 и T_2 от координаты чечевицы D . Положения чечевицы откладывайте по оси абсцисс, а значения периодов – по оси ординат. Получите на графике две пересекающиеся линии. Точка их пересечения даст координату чечевицы, для которой периоды колебаний маятника на каждой из опорных призм будут одинаковы

$$T_1 = T_2 = T ,$$

сам маятник будет оборотным.

7. Вычислите ускорение свободного падения $g, м/с^2$ по формуле:

$$g = 4\pi^2 \frac{l_{пр}}{T^2},$$

подставив период, найденный графически. Расстояние между опорными призмами равно приведенной длине маятника $l_{пр}$ = 800 мм.

8. Оцените погрешность косвенных измерений $\Delta g, м/с^2$ величины g,

$$\Delta g = g \cdot \sqrt{\left(\frac{\Delta l}{l_{пр}}\right)^2 + 4\left(\frac{\Delta T}{T}\right)^2},$$

где абсолютная погрешность Δl = 0,5 мм (половине цены деления используемой миллиметровой линейки), абсолютная погрешность ΔT = 0,01с.

9. Результат запишите в виде:

$$g = \overline{g} \pm \Delta g,$$

где $\overline{g} = g$, вычисленный по формуле (19).

Таблица 1

Координаты чечевицы D	Прямое положение маятника		Обратное положение маятника	
$x, см$	t_1, c	T_1, c	t_2, c	T_2, c
9				
10				
11				
12				
13				

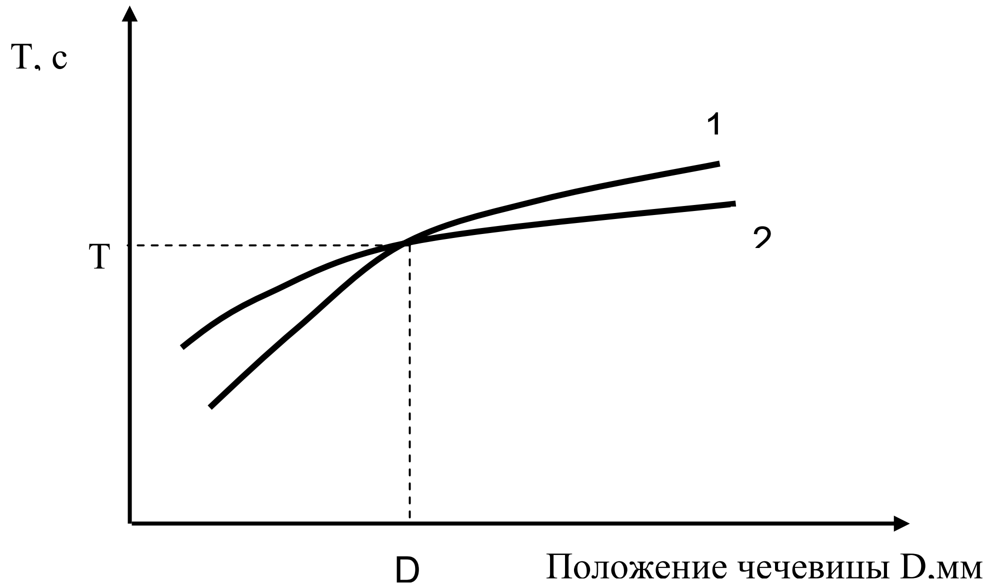

Рисунок 3 - Зависимость периода колебаний физического маятника от положения чечевицы D при прямом (1) и обратном (2) положениях маятника

Контрольные вопросы

1. Какие колебания называются гармоническими?
2. Что называется амплитудой, периодом, фазой и частотой колебаний?
3. Каким уравнением описываются колебания гармонического осциллятора?

4. Какой маятник называется физическим? Сделайте вывод уравнения колебаний физического маятника и его периода.
5. Дайте определение математического маятника и сделайте вывод выражения для периода малых колебаний математического маятника.
6. Что называется приведенной длиной физического маятника?
7. В каких положениях колеблющегося маятника максимальна его скорость и ускорение?
8. Сформулируйте теорему Штейнера.
9. Дайте вывод упрощенной формулы (19) для расчета ускорения свободного падения.

Список использованных источников

1. **Сивухин Д.В.** Общий курс физики. Том 1: Механика / Д.В.Сивухин. М.: Наука, 1989.- 700с.
2. **Трофимова Т.И.** Курс физики: учебное пособие для вузов- Т.И.Трофимова.- М.: Высшая школа, 2001. - 542с.