МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Оренбургский государственный университет»

Е.И.АНАНЬЕВА

ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА В ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКЕ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов очно-заочного обучения, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности 230101 «Вычислительные машины, комплексы, системы и сети»

Оренбург 2008

УДК 519.1 (07)
ББК 22.176 я 7
А 64

Рецензент
кандидат технических наук Ю. Н. Пивоваров

Ананьева Е.И.

А 64 **Дискретная математика в вычислительной технике: учебное пособие / Е.И. Ананьева - Оренбург, ГОУ ОГУ, 2008. – 229 с.**
ISBN

В учебном пособии рассматриваются современные методы и средства для решения задач дискретной математики при проектировании вычислительных систем и сетей. Пособие содержит методические материалы для проведения лабораторных работ и практических занятий по дисциплине «Дискретная математика».

Пособие предназначено для студентов специальностей направления «Информатика и вычислительная техника», может быть полезно преподавателям и аспирантам соответствующего профиля.

ББК 22.176 я 7

$$\text{А}\ \frac{2404090000}{}$$

ISBN

Содержание

Введение

Дискретная математика (ДМ), или дискретный анализ - область математики, которая занимается исследованием структур и задач на конечном множестве. Поэтому в качестве синонима иногда используется термин конечная математика. Общепринятым считается деление математики на непрерывную и дискретную. Дискретная математика представляет собой очень важное направление, имеющее характерные для него предмет исследований, методы и задачи. Специфика задач дискретной математики в первую очередь предполагает отказ от основных понятий классической математики - предела и непрерывности. Поэтому для задач ДМ обычные средства классического анализа являются вспомогательными. ДМ - самостоятельное направление современной математики. ДМ изучает математические модели объектов, процессов, зависимостей, существующих в реальном мире, с которыми имеют дело в технике, информатике и других областях знаний. Дискретная и непрерывная математика взаимно дополняют друг друга. Понятия и методы в одной часто используются в другой. Один и тот же объект может рассматриваться с двух точек зрения и в зависимости от этого выбирается непрерывная или дискретная модель. Сегодня ДМ является важным звеном математического образования. Умение проводить анализ, композицию и декомпозицию информационных комплексов и информационных процессов - обязательное квалификационное требование к специалистам в области информатики. Знание дискретной математики необходимо для создания и эксплуатации интегрированных систем обработки информации и их компонент (математического обеспечения, пакетов прикладных программ, распределенных банков данных, сетей передачи данных, систем с разделением ресурсов и распределенной обработкой информации). ДМ включает в себя такие сложившиеся математические разделы, как теория множеств и отношений, комбинаторный анализ, теория булевых функций, теория графов. Основным поставщиком задач и идей для ДМ в XX в. становится Кибернетика, а универсальным вычислительным средством - ЭВМ. Задачи анализа и конструирования сложных систем послужили стимулом для разработки теории графов; задачи хранения, обработки и передачи информации привели к теории кодирования (дискретной теории информации); задачи оптимизации вызвали появление дискретного программирования (методы исследования и решения экстремальных задач на конечных множествах); исследование основных понятий вычислительной математики - вычислимости и алгоритма - стимулировало появление теории алгоритмов и теории сложности.

1. Модуль теория множеств

1.1 Понятие множества

Множество - основное фундаментальное понятие в математике.
Оно не определяется. Его можно проиллюстрировать.

Пример 1

Множество студентов в данной аудитории.

Пример 2

Множество корней квадратного уравнения.

Пример 3

N - множество натуральных чисел.

Пример 4

Z - множество целых чисел.

Пример 5

Q - множество рациональных чисел.

Пример 6

R - множество действительных чисел.

Пример 7

C - множество комплексных чисел.

Пример 8

Множество прямых на плоскости.

Пример 9

Множество треугольников на плоскости.

Пример 10

Множество окружностей на плоскости.

Множество задают двумя способами:

- перечислением всех элементов множества (список студентов данной группы; перечень школьных принадлежностей, лежащих в портфеле т.д.).

- указанием характеристического свойства элементов данного множества, т.е. такого свойства; которым обладают элементы данного множества, и только они.

Обозначения:

1) {} - знак множества;

2) $a \in A$ - элемент a принадлежит множеству A;

3) $a \notin A$ - элемент a не принадлежит множеству A.

Определение 1: Два множества называются равными, если они состоят из одних и тех же элементов.

Замечание: Одно и то же множество может быть задано разными характеристическими свойствами.

Пример 11

A - столицы всех государств, расположенных на земном шаре;

B - столицы европейских государств.

Замечаем, множество B - является частью множества A. В этом случае говорят, что B - подмножество A и пишут $B \subseteq A$. Среди подмножеств данного множества A особо отметим следующие два подмножества:

1) множество A, $A \subseteq A$.

2) пустое множество $\varnothing$, т.е. множество не содержащее ни одного элемента. При этом $\varnothing \subseteq A$.

Пример 12

Найти все подмножества двухэлементного множества $A = \{a,b\}$.

Ответ: Множество A имеет четыре подмножества, а именно: $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$.

Записи a и $\{a\}$ имеют разный математический смысл: a - элемент множества A, $a \in A$; $\{a\}$ - одноэлементное подмножество, $\{a\} \subseteq A$.

Запись $B \subseteq A$ означает, что подмножество B включено в A или с ним совпадает.

1.2 Операции над множествами

1.2.1 Пересечение множеств

Определение 2: Пересечением множеств A и B называют новое множество C, состоящее из тех и только тех элементов, которые одновременно входят в A и B . Это множество обозначают $A \cap B$, т.е. $C = A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$.

Пример 13

Пусть: $A = \{x \mid x \in R \text{ и } 2 \le x \le 7\}$, $B = \{x \mid x \in R \text{ и } -1 \le x \le 5\}$. Тогда получим: $A \cap B = \{x \mid x \in R \text{ и } 2 \le x \le 5\}$ (рисунок 1).

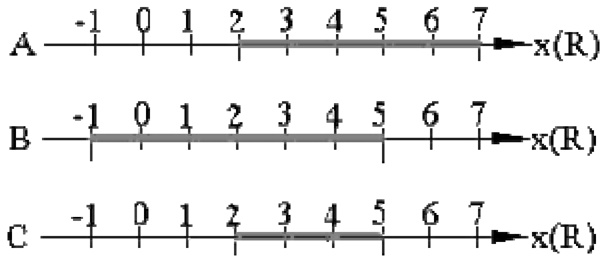


Рисунок 1 - Иллюстрация пересечения множеств А и В

Пример 14

Пусть А - множество треугольников на плоскости. В - множество правильных многоугольников на плоскости. Тогда $A \cap B$ - множество правильных треугольников на плоскости.

Пример 15

Пусть А - множество прямоугольников. В - множество ромбов. Тогда $A \cap B$ - множество квадратов.

Пример 16

Пусть А - множество точек круга. В - множество точек прямой, пересекающей круг. Тогда $A \cap B$ - хорда.

Свойства операции пересечения множеств

1) $A \cap B = B \cap A$ - коммутативность пересечения.

На рисунке 2 - круги Эйлера, или диаграммы Венна - прямоугольник U - универсальное множество, $A \cap B$ - заштрихованная часть.

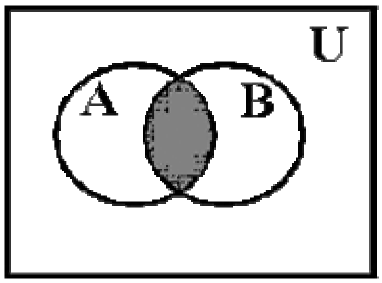


Рисунок 2 - Коммутативность пересечения

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ - ассоциативное свойство пересечения.

Ассоциативность операции пересечения множеств видна на диаграммах (кругах) Эйлера-Венна в соответствии с рисунком 3.

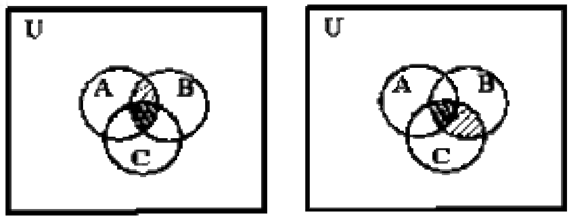


Рисунок 3 - Ассоциативность пересечения

Замечание: Свойства 1 и 2 операции пересечения схожи со свойствами умножения в числовом множестве.

3) Если $B \subset A$, то $A \cap B = B$.

Данный закон проиллюстрирован на диаграмме (круге) Эйлера-Венна в соответствии с рисунком 4.

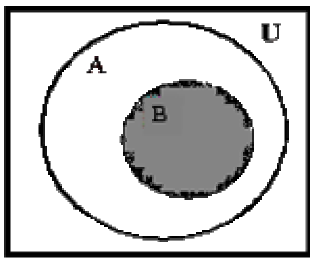


Рисунок 4 - Включение множества B во множество A

4) $A \cap \varnothing = \varnothing$.

5) $A \cap A = A$.

Замечание: Пустое множество Ø играет роль нулевого элемента.

1.2.2 Объединение множеств

Определение 3: Объединением двух множеств A и B называется третье множество C, состоящее из таких элементов, которые входят хотя бы в одно из данных множеств (а может быть в оба одновременно). Это множество обозначают: $C = A \cup B$, т.е. $C = A \cup B = \{x \mid x \in A$ или $x \in B\}$.

Пример 17

$A = \{2,3,4\}$, $B = \{3,4,5,6\}$.

$C = A \cup B = \{2,3,4,5,6\}$.

Замечание: Числа 3 и 4 входят в $A \cup B$ по одному разу.

Свойства операции объединения множеств

1) $A \cup B = B \cup A$ - коммутативное свойство;

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ - ассоциативное свойство;

3) Если $B \cup A$, то $A \cup B = A$ (рисунок 5);

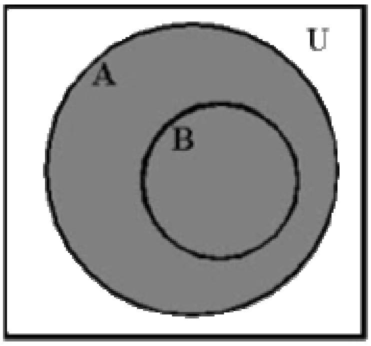


Рисунок 5 - Объединение множеств A и B

1) $A \cup \varnothing = A$;

2) $A \cup A = A$;

3) $(A \cup B) \cup C = (A \cup C) \cup (B \cup C)$ - свойство дистрибутивности.

Свойство дистрибутивности проиллюстрировали на кругах Эйлера-Венна (рисунок 6).

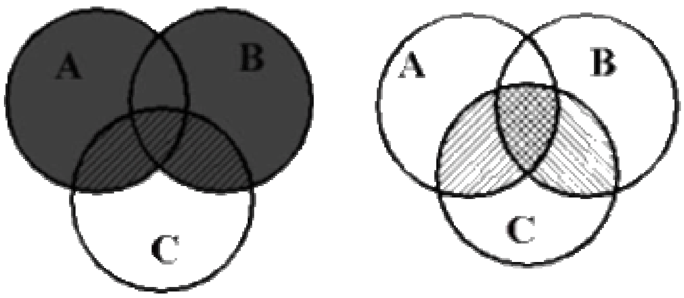


Рисунок 6 - Дистрибутивность множеств A, B, C

Докажем рассмотренное свойство.

Напомним, чтобы доказать равенство двух множеств, нужно показать, что каждый элемент первого множества принадлежит второму и обратно: каждый элемент второго множества принадлежит первому.

1) Пусть $x \in (A \cup B) \cap C \Rightarrow x \in A \cup B$ и $x \in C \Rightarrow (x \in A$ или $x \in B)$ и $x \in C \Rightarrow (x \in A \cap C)$ или $(x \in B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap C)$ или $(x \in B \cap C) \Rightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$.

Вывод: Всякий элемент x из левого множества одновременно принадлежит и правому множеству.

2) Если стрелки «повернуть», то мы увидим, что каждый элемент правого множества одновременно принадлежит и левому множеству. Из (1) и (2) следует, что теорема доказана.

Замечание: Союз «или» в данном случае в математике понимается в неразделительном смысле (хотя бы одно из двух).

3) Аналогично можно доказать двойственную формулу $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

Дополнение

Заметим, что операция дополнения определена лишь в случае, когда все изучаемые множества рассматриваются как подмножества некоторого универсального множества U.

Определение 4: Пусть $A \cup U$. Дополнением к A называют множество всех элементов из U, не принадлежащих A. Дополнение обозначают A'.

$A' = \{x \mid x \in U \text{ и } x \notin A\}$

Пример 18

Пусть U - множество целых чисел, т.е. U = Z, A - множество чётных чисел. Тогда A' - множество нечётных чисел.

Пример 19

Пусть U - множество всех треугольников, A - множество равнобедренных треугольников. Тогда A' - множество разносторонних треугольников.

Пример 20

Пусть U - множество точек круга, A - множество точек окружности. Тогда A' - открытый круг (рисунок 7).

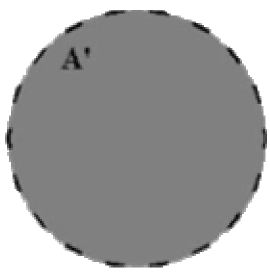


Рисунок 7 - Открытый круг

Свойства операций дополнения

1) (A')' =A (рисунок 8);

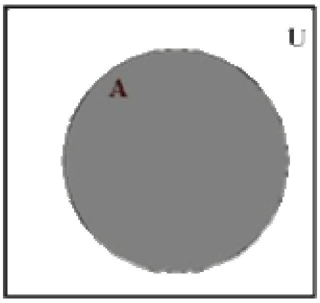


Рисунок 8 - Дополнение до дополнения множества А

2) $B \subset A \Rightarrow A' \subset B'$;

Доказательство:

Если $x \in A' \Rightarrow x \notin A \Rightarrow x \in B$ (т. к. $B \subset A$) $\Rightarrow x \in B'$;

3) Ø' = U;

4) U' = Ø;

5) $(A \cap B)' = A' \cup B'$;

6) $(A \cup B)' = A' \cap B'$;

7) $A \cup A' = U$.

Определение 5: Под разностью двух множеств А и В понимают новое множество А\В элементов х таких, что х принадлежит А и не принадлежит В (рисунок 9).

$A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$

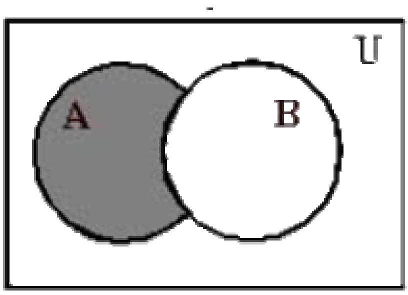


Рисунок 9 - Разность двух множеств

Пример 21

A = {-1,0,1,2,4,7,9}, B = {-1,0,4,5,6}.

A\B = {1,2,7,9}.

1.3 Декартово произведение

Понятие кортежа

Пусть даны множества A_1, A_2, …, A_n. Выберем из первого множества элемент a_1, из второго - a_2 и т.д. Из множества A_n выберем элемент a_n. Расположим элементы в порядке их извлечения. Получим упорядоченную последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$.

Определение 6: Упорядоченная последовательность $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ составленная из элементов множеств A_1, A_2, …, A_n, где $a_i \in A_i$, i = 1, 2, ..n, - называется кортежем длины n.

Заметим, что множества A_1, A_2, …, A_n могут иметь общие элемента или даже совпадать. Поэтому элементы в кортеже могут повторяться.

Определение 7: Два кортежа, составленные из элементов одного и того же множества A считаются равными, если их длины равны и элементы стоящие на соответствующих местах, равны, т.е.

$$(a_1,a_2,\ldots,a_m)=(b_1,b_2,\ldots,b_m)\leftrightarrow\begin{cases}m=n,\\ a_k=b_k,\\ 1\le k\le n\end{cases}$$

где $a_i \in A$, $b_i \in A$, i = 1, 2, …, m, j = 1, 2, …, n.

Таким образом, когда мы говорим:

1) о кортеже, то

- учитываем порядок расположения элементов;
- элементы в кортеже могут повторяться.

2) о множестве, то

- не учитываем порядок расположения элементов;
- ни один элемент множества не должен повторятся.

Определение 8: Элементы a_1, a_2, …, a_n кортеже $(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ называются его компонентами, или координатами.

Декартово произведение множеств

Определение 9: Декартовым произведением множества A_1, A_2, ..., A_n называется множество, элементами которого являются все кортежи длины n, составленные из элементов этих множеств.

Декартово произведение обозначают

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1,a_2,\ldots,a_n) \mid a_k \in A_k,\ 1 \le k \le n$

Пример 22

A = {б,и,г}, B = {а,д}.

A×B = {(б,а);(б,д);(и,а);(и,д);(г,а);(г,д)}.

Пример 23

$(A\times B)\times C \ne A\times(B\times C)$. Так как $((a,b),c) \ne (a,(b,c))$, то декартово произведение множеств не ассоциативно.

Пример 24

Пусть $A = B = R$, где R - множество действительных чисел, тогда $A \times B = R \times R = R^2 = \{(a,b) \mid a,b \in R$, (рисунок 10). Каждую пару (a,b) можно изобразить точкой M(a;b) на координатной плоскости (рисунок 10). Связь с декартовой системой координат и объясняет название "декартово произведение множеств".

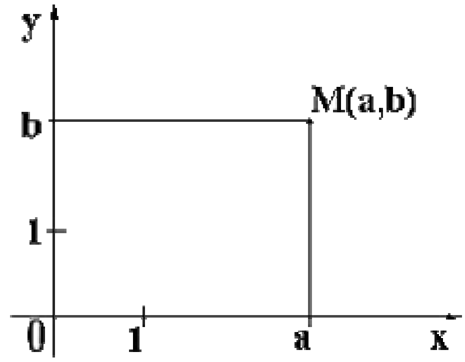


Рисунок 10 - Декартово произведение множеств

Очевидно, что плоскость можно рассматривать как декартово произведение двух прямых линий (оси абсцисс и оси ординат) - каждая точка плоскости задаётся парой точек этих прямых.

Декартово произведение n элементов множества R называют n-мерным арифметическим пространством и обозначают $R^n = R \times R \times \ldots \times R$.

1.4 Алгебра

Алгебра - не только математическая дисциплина. Тот же термин обозначает вполне определенную структуру.

Определение 10: Алгеброй называется множество M вместе с заданной на нем системой операций $\Omega = (\varphi_i)$. Ω называется сигнатурой алгебры, а M - носителем. Обозначение:

$A=(M;\Omega)=(M; (\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k))$.

Примеры 25

$(R;+,\cdot)$, $(N;+,\cdot)$, $(Z;+,\cdot)$ - алгебры на множестве соответственно, действительных, натуральных и целых чисел с операциями сложения и умножения.

$(F;D)$ и $(F_э;D)$ F - множество дифференцируемых функций действительной переменной, $F_э$ элементарных функций; D - оператор дифференцирования, ставящий в соответствие каждой функции ее производную.

Подобно изоморфизму отношений рассматривается **изоморфизм двух алгебр** $A = (M;\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_k)$ и $B = (N;\Psi_1,\Psi_2,\ldots,\Psi_k)$ - взаимно однозначное соответствие Г между множествами M и N и операциями и φ_i, Ψ_i, при котором выполнено: $\Gamma(\varphi_i(m)) = \Psi_i(\Gamma(m))$ для всех m, φ_i, Ψ_i.

Подчеркнем, что изоморфизм - это не просто взаимно однозначное соответствие (его - для конечных множеств - можно установить между любыми двумя множествами с одинаковым числом элементов). Смысл этого понятия состоит в том, что если выполнить в алгебре A какие-либо операции над определенными элементами множества M и соответствующие операции в алгебре B над соответствующими элементами множества N, то результаты операций также будут соответствовать друг другу.

Пример 26

Алгебры (Z;+) и (Z_3;+), где Z_3 - множество целых чисел, кратных трем, изоморфны, в силу соответствия $\Gamma = n \rightarrow 3n$. Так, например, сложению 5+8 = 13 будет соответствовать сложение 15+24 = 39, что можно проиллюстрировать схемой

n: 5+8 = 13

3n: 15 + 24 = 39

Пример 27

Алгебры (R_+;·) и (R;+), где R_+ - множество положительных действительных чисел, изоморфны, в силу соответствия $\Gamma = a \rightarrow \log a$ (ввиду тождества $\log ab = \log a + \log b$). Это также проиллюстрируем схемой

a: 8·64 = 512

$\log_2 a$: 3+6 = 9 ($3 = \log_2 8$; $6 = \log_2 64$; $9 = \log_2 512$)

В этом примере только для наглядности участвуют целые степени числа 2, чтобы их двоичные логарифмы были целыми числами.

Пример 28

Алгебры ($M;\cup$) и ($M;\cap$) на булеане B(M) произвольного множества M изоморфны. Изоморфизм устанавливается соответствием $\Gamma(L) = \neg L, L \subseteq M$. В самом деле,

$\Gamma(L_1 \cup L_2) = \neg(L_1 \cup L_2)$ = [в силу закона де Моргана] = $\neg L_1 \cap \neg L_2 = \Gamma(L_1) \cap (L_2)$.

Противоположный пример: алгебры (Z;+) и (Z^2;+), где Z^2 - множество целочисленных двумерных векторов, не изоморфны. Хотя оба множества Z^2 и Z счетны, т.е. между ними можно (многими способами) установить взаимно-однозначное соответствие, но не удастся сделать это так, чтобы сумма векторов, поставленных в соответствие двум числам всегда соответствовала сумме этих чисел. Конечно, это требует доказательства, но мы его здесь не приводим.

Особое значение имеет следующий пример.

Пример 29

Алгебра $(B(E);\cup,\cap,-)$, т.е. алгебра на булеане B(E) с операциями объединения, пересечения и дополнения называется **алгеброй множеств на множестве E**, или **алгеброй Кантора**.

Частично упорядоченное множество элементов булеана B(E) имеет наименьший элемент Ø и наибольший E. Для системы подмножеств множества E выполняются ряд свойств.

Изоморфизм между отношением $M\subseteq N$ на булеане B (E) n - элементного множества E и отношением делимости на множестве D_H делителей натурального числа H, если H есть произведение n **различных** простых чисел, можно распространить на изоморфизм между алгебрами. Для этого достаточно определить на множестве делителей H операции НОК (a,b) - наименьшее общее кратное чисел a и b, НОД (a,b) - наибольший общий делитель чисел a и b и поставить в соответствие простым делителям числа H одноэлементные подмножества множества E (для простоты будем обозначать их теми же символами: a, b, …). Тогда для соответствия (обозначаемого символом $\leftrightarrow$) между подмножествами E и произведениями различных простых делителей H выполнены соотношения:

$E\leftrightarrow D_H$, $a\cup b\leftrightarrow$НОК(a,b), $a\cap b\leftrightarrow$НОД(a,b), $\neg\, a\leftrightarrow H/a$

и это соответствие есть изоморфизм.

Как видно из рассмотренных примеров, если алгебры A и B изоморфны, то элементы и операции B можно переименовать так, что B совпадет с A. Из основного равенства в определении изоморфизма следует, что любое эквивалентное соотношение в алгебре A - сохраняется в каждой изоморфной ей алгебре B. Это позволяет, получив такие соотношения в алгебре A, автоматически распространить их на все алгебры, изоморфные A. Распространенное в математике выражение «рассматривать объекты с точностью до изоморфизма» означает, что рассматриваются только те свойства объектов, которые сохраняются при изоморфизме, т.е. являются общими для всех изоморфных объектов. В частности, изоморфизм сохраняет ассоциативность, коммутативность и дистрибутивность.

Установление изоморфизма между какими-либо системами имеет большое практическое значение. Оно сродни точному переводу на другой язык описания явлений. Когда, например, аналитическая геометрия устанавливает соотношения между геометрическими объектами - линиями или поверхностями и их аналитическими представлениями в виде уравнений, или в курсе математического анализа мы выясняем геометрический смысл производной, дифференциала или интеграла, мы получаем возможность выбирать и использовать при исследованиях и в прикладных задачах наиболее удобное для данного случая представление. В некоторых задачах изоморфизм систем служит основанием для моделирования объектов и их взаимодействия.

1.5 Суперпозиция функций

n-местная функция (функция n переменных) - функция типа $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \rightarrow B$; другая форма записи: $f(a_1,a_2,\ldots,a_n) = b$, где $a_i \in A_i$, $b \in B$, где $A_i b \in B$.

Сложение, вычитание, умножение, деление, возведение в степень являются двуместными функциями. Двуместными функциями являются также max(X,Y) и min(X,Y):

max(X,Y) = X, если $X \geq Y$ и max (X,Y) = Y, если $X < Y$.

min(X,Y) = X, если $X \leq Y$ и min (X,Y) = Y, если $X > Y$.

Определение 11: Суперпозиция функций - функция, полученная из системы функций f, f_1, f_2, .., f_k некоторой подстановкой функций f_1, f_2, .., f_k во внешнюю функцию f вместо переменных и переименованиями переменных.

Пример 30

Суперпозицией внешней функции $f(X,Y) = X/Y$ и функцией $t_1(X) = \sqrt{X}$ и $t_2(X)= a^x$ является функция $h(X) = f(t_1(X), t_2(X)) = \sqrt{X}/a^x$ или функция $k(Y,Z) = \sqrt{Y}/a^z$.

Пример 31

Суперпозициями внешней функции $f(X,Y,Z) = 3X+5Y^2-Z$ и функций $g_1(X,Y) = X-Y$ и $g_2(X) = \ln(X)$ являются, например:

1. $h_1(X,Z) = 3(X-Z)+5\ln^2(Z)-Z$ [вместо X в функцию f подставляется $g_1(X,Z) = X-Z$, а вместо Y - функция $g_2(Z) = \ln(Z)$];

2. $h_2(X,Y,Z,S) = 3\ln(Y)+5(Z-X)^2-\ln(S-Z)$ [вместо X в функцию f подставляется $g_2(Y) = \ln(Y)$; вместо Y - функция $g_1(X,Z) = X-Z$; вместо Z - суперпозиция функций $g_2(g_1(S,Z)) = \ln(S-Z)$].

Пример 32

Класс элементарных функций есть множество всех суперпозиций так называемых основных элементарных функций (одноместных: степенных, показательных, логарифмических, тригометрических и обратных тригометрических) и двуместных функций, представляющих арифметические операции.

Замечание. Среди основных элементарных функций нет двуместной функции $Z = X^Y$. Ее можно выразить суперпозицией других функций: логарифмической $S = \ln(X)$, показательной $T = e^x$ и умножения в силу тождества $X^Y = e^{Y\ln X}$.

Как видно из примеров, в суперпозиции функции могут измениться как сами переменные, так и их число. Заметим также, что, выполняя подстановки, мы преобразовывали формулы, выражающие функции. **Формула** - это выражение, описывающее суперпозицию и содержащее функциональные знаки, символы независимых переменных (аргументов) и констант (параметров). Формула с использованием скобок определяет порядок действий при вычислении значений функции. Специальные договоренности, позволяющие упростить вид формулы, освобождает ее от некоторых скобок: так в арифметике принято, что умножение и деление связывают сильнее, чем сложение и вычитание, и одночленные сомножители не заключаются в скобки.

Суперпозицию удобно представлять в виде символической схемы вычисления. Если рассмотреть n-местную функцию $Z = f(X_1,X_2,...,X_n)$ как вычислительный элемент с n входами и одним выходом (рисунок 12), то суперпозиция представляет собой соединение таких элементов в схему. Определим индуктивно понятие вычислительной схемы (обратите внимание на то, как строится определение: вводятся некоторые начальные объекты, и задаются способ образования из них других, более сложных объектов; такой тип определения называют **индуктивным**).

Пусть имеется конечное множество объектов $\{S_i\}$, которые будем называть **структурными** элементами. Каждый элемент имеет n_i входов и 1 выход. Графически элемент S_i изображается треугольником, в основание которого входят n_i занумерованных стрелок, а из вершины исходит одна (рисунок 11). **Сеть** из структурных элементов определяется следующим образом.

1) каждый элемент S_i является сетью, входы и выходы сети - соответственно, входы и выходы элемента S.

2) пусть S - структурный элемент с m входами и $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_m$ - сети из структурных элементов. Тогда соединение $\sum$ этих сетей, изображено на рисунке 12, является сетью: ее входы - объединение входов сетей $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_m$, выходы сетей $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_m$ присоединены в определенном порядке к элементу S в качестве входов. Заметим, что у сетей $\sum_i$ и $\sum_j$ могут быть пересекающиеся множества входов. Выходом сети $\sum$ считается выход элемента S. Сети $\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_m$ называются подсетями, а их элементы вместе с элементом S - элементами сети $\sum$.

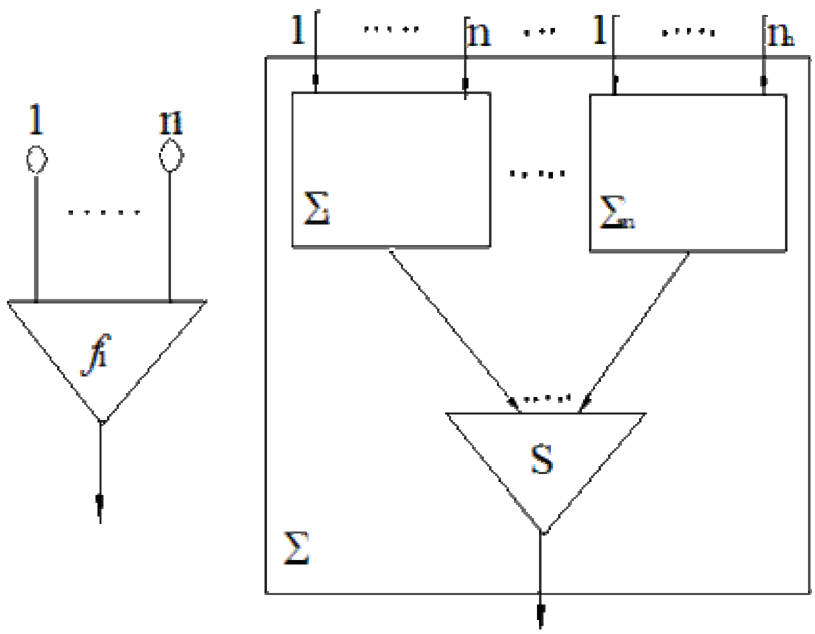


Рисунок 11 - Структурные элементы

Определение 12: Схемой из функциональных элементов называется сеть, элементам которой приписаны (сопоставлены) функции, так что элементу S с k входами соответствует k-местная функция $f_S(X_1,\ldots,X_k)$. Будем говорить, что элемент S реализует функцию $f_S(X_1,\ldots,X_k)$. Значения выходов одних элементов служат значениями аргументов для функций других элементов в соответствии со структурой схемы, причем важен порядок аргументов. Если функция f_S, сопоставленная некоторому элементу S, не определена на каком-либо наборе значений своих аргументов, то не определены значения выхода S и не определенны все функции элементов, на входы которых поступают значения f_S.

Рисунок 12 демонстрирует разницу в реализуемых функциях при различном порядке присоединения.

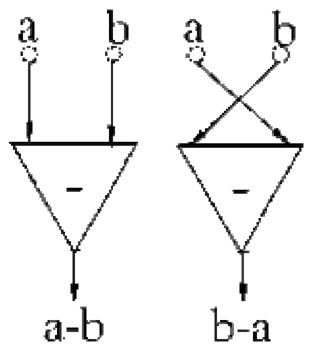


Рисунок 12 - Разница реализуемых функций

На рисунке 13 приведен пример схемы, состоящей из 7 элементов четырех типов: 1-местная f_4, 2-местные f_1 и f_3 и 3-местная f_2. Обратите внимание, что элемент S_3 реализует, в отличие от элемента S_7, функцию f_3 от совпадающих аргументов $f_3(Z,Z)$. В целом схема реализует следующую суперпозицию:

$$W(X,Y,Z,T) = f_3\{f_1[f_1(X,Z),\ f_2(X,Y,T)],\ f_2[f_2(X,Y,T),\ f_4(T),\ f_3(Z,Z)]\}.$$

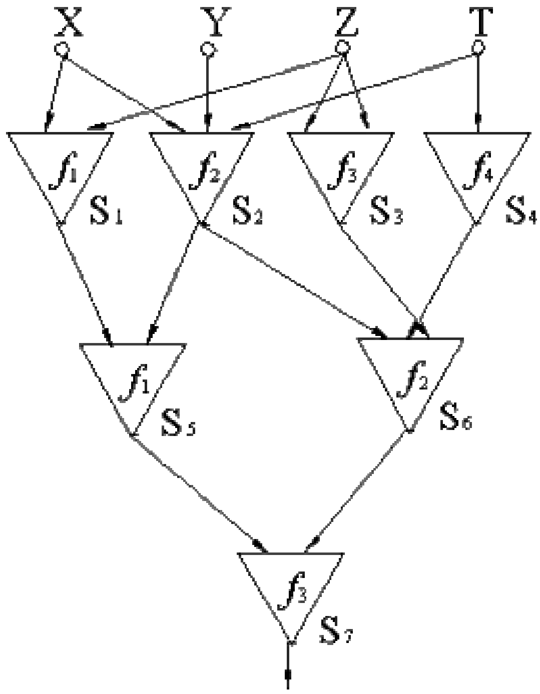


Рисунок 13 – Схема функциональных элементов

Разберем конкретные примеры.

Пример 33

Пусть Z = sin(√(3XY)+ln(X–Y)). На рисунке 14 изображена схема из одно- и двухвходовых элементов, реализующих одноместные функции: sin(t), √t, ln(t) и двуместные функции: сумму, разность, произведение.

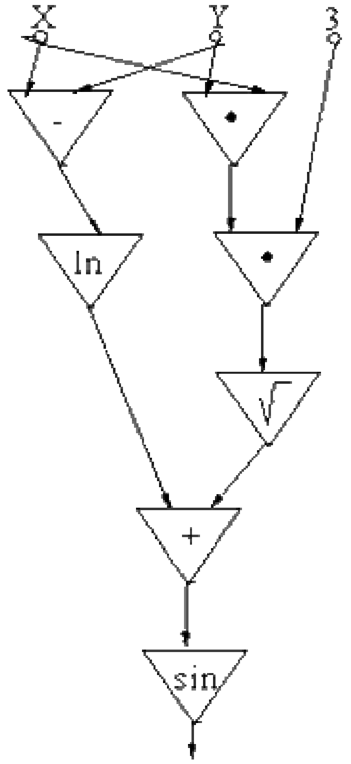


Рисунок 14 – Схема одно- и двухвходовых элементов

Вычислительная процедура определяется, вообще говоря, неоднозначно, и зависит от того, какие функции приняты за исходные. Так, функция $Z = X^3$ может рассматриваться как элементарная функция (рисунок 15 а), как каскад из двух умножений $Z = (X \cdot X) \cdot X$ (рисунок 15 б), или как частный случай двуместной функции $Z = X^Y$ при $Y = 3$ (рисунок 15 в). В последнем случае мы встречаемся с функцией константой $g = 3$.

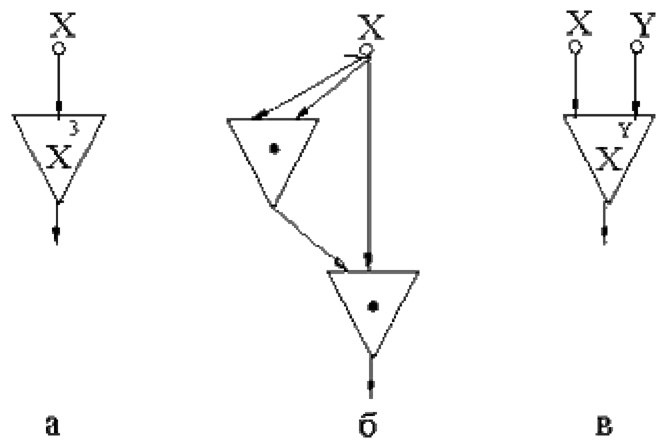


Рисунок 15 – Схема элементарной (а), каскадной (б) и двуместной (в) функций

Пример 34

Построим схему вычисления выборочного среднего Mx и выборочной дисперсии Dx для статистической выборки X = (a,b,c) объема 3. Из математической статистики известно, что $Mx = (a+b+c)/3$, $Dx = M(x^2)–(Mx)^2 = (a^2+b^2+c^2)/3–((a+b+c)/3)^2$. Схема вычисления представлена на рисунке 16. Строго говоря, в условии требуется построить 2 схемы: Mx и Dx. Однако вычисление Mx является промежуточным результатом при вычислении Dx; поэтому мы построили одну схему с 2 выходами, что, конечно, не вполне соответствует данному нами определению схемы из функциональных элементов.

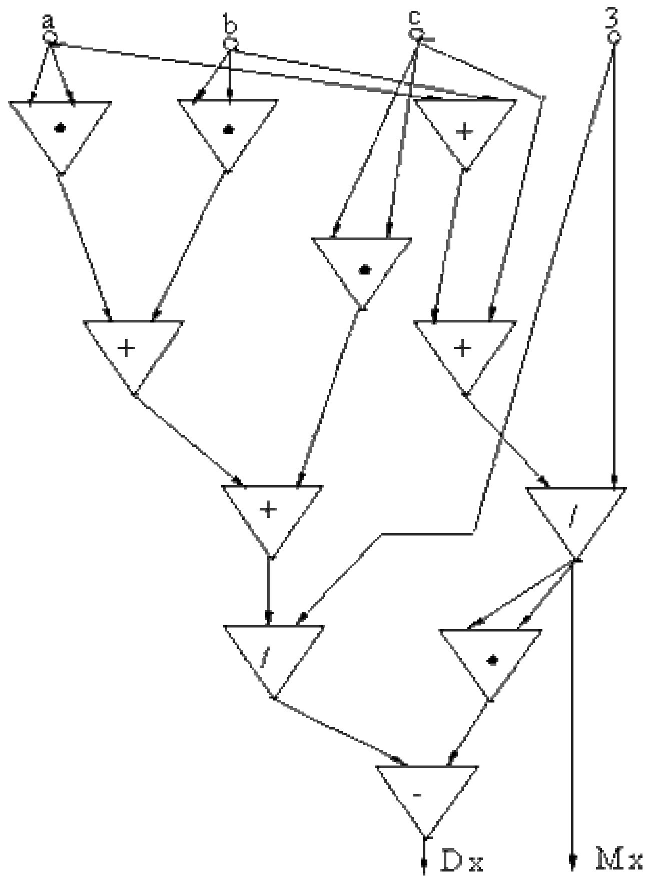


Рисунок 16 – Схема Mx и Dx

Рассмотрим еще один пример функционального соответствия.

Пример 35

Пусть U - универсальное множество; $M \subseteq U$ - некоторое его подмножество, B={0,1} - множество из двух чисел 0 и 1.

Характеристическая функция множества $M \subseteq U$ – отображение χ_M: $U \to B$, ставящая в соответствие элементам множества M единицу, а элементам дополнения $\neg M$ - ноль. Легко проверяются следующие свойства характеристической функции множеств, получаемых из множеств M, N операциями дополнения, пересечения, объединения и разности:

$$\chi_M = 1 - \chi_{\overline{M}}$$

$$\chi_{M \cap N} = \chi_M \cdot \chi_N$$

$$\chi_{M \cup N} = \chi_M + \chi_N - \chi_M \cdot \chi_N$$

$$\chi_{M \setminus N} = \chi_M - \chi_M \cdot \chi_N$$

С помощью характеристической функции удобно устанавливать некоторые соотношения между множествами.

Пример 36

Доказать, что $M \cup (M \cap N) = M$. Обозначим $\chi_M = A$, $\chi_N = B$ и докажем соответствующее числовое равенство: $\chi_{M \cup (M \cap N)} = A + AB - A \cdot AB$ [поскольку $A = 0$ или 1, то $A \cdot A = A$] $= A + AB - AB = A = \chi_M$.

1.6 Кванторы

В формулировках различных математических предложений часто встречаются слова «некоторые», «все», «каждый» и их синонимы.

Рассматривая понятие высказательной формы (предиката), мы указали один из способов получения высказываний. Для этого достаточно в высказывательную форму F(x) подставить какое-нибудь значение переменной. Например, если дана высказывательная форма F(x): «x - четное число», то подставив в неё x = 6 получим высказывание F(6): «6 - четное число», которое является истинным высказыванием, а высказывание F(5): «5 - четное число» - ложное высказывание.

Однако существуют и другие способы получения высказывательных форм (предикатов). Рассмотрим их.

1) пусть имеем предикат F(x), $x \in X$. Тогда предложение «Для всех $x \in X$ истинно F(x)» является высказыванием. Это высказывание обозначается $(\forall x \in X)$ F(x).

Замечание: Если заранее оговорено, для элементов какого множества X рассматривают предикат F(x), то обозначение этого множества опускают и пишут $(\forall x)$ F(x).

2) символ $\forall$ (его обозначение связано с перевернутой первой буквой английского слова All – «все») называют квантором всеобщности, а присоединение этого символа к предикату F(x) – «навешиванием квантора

всеобщности (или общности)». Квантор общности выражается с помощью слов «каждый», «всякий», «любой», «ни один».

3) из предиката F(x), $x \in X$ можно получить другое высказывание. В множестве X существует такой элемент а, что F(а) - истинное высказывание. Это высказывание обозначают: $(\exists x \in X)$ F(x) или $(\exists x)$ F(x).

Символ $\exists$ называют квантором существования (такое обозначение происходит от перевернутой первой буквы английского слова Exist – «существовать»). Квантор существования выражается словами «некоторые», «найдется», «существует», «хотя бы один» и др.

Если воспользоваться принятыми обозначениями, то высказывание «Все целые числа кратны 3» можно записать так: $(\exists x \in Z)$ F(x), где F(x) – «число, кратное 3», а высказывание «некоторые целые числа кратны 3» будет иметь вид: $(\exists x \in Z)$ F(x).

- на переменную x «навесили существования» или переменную x «связали квантором существования».

- можно составить и такое высказывание «В множестве X есть один и только один элемент а, такой что F(а) - истинное высказывание». Это высказывание обозначают: $(\exists ! x \in X)$ F(x).

Символ $\exists !$ - называют квантором единственности.

Рассмотренные примеры получения высказываний с помощью кванторов относились к одноместным высказывательным формам (одноместным предикатам). Все сказанное остается справедливым и для многоместных высказывательных форм, но при этим надо иметь в виду, что в подобных случаях для получения высказываний надо связать квантором каждую переменную.

При «навешивании» кванторов на переменные многоместных предикатов каждая переменная может быть связана своим квантором. При этом два квантора одного наименования: $(\forall x)$ $(\forall y)$ F(x,y) или $(\exists x)$ $(\exists y)$ F(x,y) - можно менять местами, при этом не меняется истинность высказывания. При «навешивании» разноименных кванторов нельзя менять их порядок, так как может измениться истинность высказывания.

Пример 37

F(x,y) - «человек x родился в году y».

Тогда $(\forall x)$ $(\exists y)$ F(x,y) - истинное высказывание, так как для каждого человека x есть год y, в котором он родился.

А высказывание $(\exists x)$ $(\forall y)$ F(x,y) - ложное, так как оно означает, что существует год y, в котором родился любой человек x.

Уже говорилось, что в математике одной из важнейших задач является установление значения истинности высказываний. Выясним, как устанавливают значения истинности высказываний с кванторами.

В высказывании $(\forall x \in X)$ F(x) утверждается, что для любого x из множества X истинно F(x), поэтому чтобы убедиться в истинности этого высказывания, надо показать, что множество T истинности высказывательной формы F(x) совпадает с множеством X. Чтобы убедиться в ложности высказывания $(\forall x \in X)$ F(x) достаточно показать, что $T \neq X$, то есть доказать, что существует такое значение x, при котором высказывательная форма обращается в желаемое высказывание.

Вообще, истинность высказывания с квантором общности устанавливается путем доказательства. Показать ложность таких высказываний можно, приведя контрпример.

Выясним, как устанавливается значение истинности высказываний с квантором существования.

В высказывании $(\exists x)$ F(x) утверждается, что в множестве X есть такой элемент x, который обладает свойством F. Поэтому оно будет истинно, если множество истинности высказывательной формы F(x) не пусто. Для того чтобы показать это, достаточно найти такое значение переменной x, при котором высказывательная форма F(x) обращается в истинное высказывание, то есть привести пример. Так, высказывание «некоторые натуральные числа двузначные» можно считать истинным, так как 36 действительно двузначное число.

Высказывание $(\exists x)$ F(x) ложно в том случае, когда $T = \varnothing$ убедиться в этом можно лишь путем доказательства.

Таким образом, истинность высказывания с квантором существования устанавливается при помощи конкретного приема. Чтобы убедиться в ложности такого высказывания, необходимо провести доказательство.

1.7 Соответствия и отношения

1.7.1 Соответствия между множествами

Установление связей между двумя множествами X и Y связано с рассмотрением пар объектов, образованных из элементов первого множества и соответствующих элементов второго множества.

Поэтому говорят, что соответствие между множествами X и Y есть множество пар, которое является подмножеством декартова произведения $X \times Y$.

Определение 13: Соответствием между множествами X и Y называется всякое подмножество декартова произведения X и У.

Пример 38

Пусть X - множество прямых на плоскости, Y - множество окружностей на той же плоскости. В элементарной геометрии рассматривают следующие соответствия между прямыми и окружностями:

- прямая x пересекает окружность y;
- прямая x касается окружности y;
- прямая x не пересекает окружность y;
- прямая x проходит через центр окружности y.

Пример 39

Пусть X и Y - множества треугольников на плоскости. Между элементами X и Y можно рассматривать такие соответствия:

- треугольник x конгруэнтен треугольнику y;
- треугольник x подобен треугольнику У;
- треугольники x и y имеют общую сторону.

Пример 40

Пусть X и Y - множества действительных чисел. Можно рассмотреть такие соответствия: $x = y$; $x \neq y$; $x > y$; $x < y$; $x \geq y$; $x \leq y$.

Пример 41

Пусть X и Y - множества прямых на плоскости. Рассматриваю соответственно: $x \parallel y$; $x \perp y$.

Соответствия встречаются не только в математике. Если X - множество людей, Y - множество предприятий, то рассматривают соответствие: «человек x работает на предприятии y»; «человек x руководит предприятием y».

Пусть между двумя множествами X и Y установлено некоторое соответствие. Рассмотрим декартово произведение X и Y, то есть совокупность всех пар (x, y), где $x \in X$, $y \in У$. Для некоторых из этих пар наше соответствие имеет место, для других - не имеет места. Совокупность всех пар (x,y), для которых данное соответствие имеет место, образует подмножество Г в $X \times Y$, называемое графиком этого соответствия.

Может случиться, что два соответствия между множествами X и Y имеют один и тот же график. Например, такими будут соответствия «треугольники x и y подобны» и «треугольники x и y имеют соответственно равные углы». Мы не будем различать эти соответствия, подобно тому, как не различаем множества, заданные разными характеристическими свойствами, но состоящие из одних и тех же элементов. Поэтому дадим следующее формальное определение соответствия между множествами:

Определение 14: Соответствием между множествами X и Y называется тройка множеств, $< X, Y, Г>$, где $Г \subseteq X \times Y$, при этом Г - подмножество декартова произведения $X \times Y$ называется графиком соответствия.

Если $(x, y) \in Г$, то говорят, что между элементами x и y имеется данное соответствие R и пишут xRy (здесь R - знак соответствия), например, x // y; $x \perp y$; x : y.

Множество X называют областью отправления соответствия R, а Y - областью прибытия этого соответствия. Множество A элементов $a \in X$, для которых существует хотя бы один элемент $y \in Y$ такой, что aRy, называют областью определения соответствия R. Множество B элементов $b \in Y$. для которых существует хотя бы один элемент $x \in X$ такой, что xRb, называется множеством значений этого соответствия.

$A = \{a \mid (y \in Y)\ aRy\}$, $B = \{b \mid (\exists x \in X)\ xRb\}$.

Если R - соответствие между X и Y, то любому элементу $a \in X$ соответствует множество $R(a) \subset Y$, состоящее из всех таких элементов $y \in У$, что aRy. Это множество называют образом элемента a при соответствии R. Прообразом элемента $b \in Y$ называют множество $R^{-1}(b) \subset X$ всех элементов $x \in X$ таких, что xRb:

$R(a) = \{y \in Y \mid aRy\}$ $R^{-1}(b) = \{x \in X \mid xRb\}$

Если графиком соответствия между X и Y является все декартово произведение $X \times Y$, то соответствие называют полным соответствием между X и Y.

Для конечных множеств, наряду с графиками, используют другой способ задания соответствий - с помощью графов.

Определение 15: Графом называют множество точек, некоторые пары из которых соединены линиями (пара точек может быть соединена лишь одной линией). Если на линиях указаны направления, то граф называют ориентированным.

Пусть S - соответствие между конечными множествами X и Y. Изобразим элементы этих множеств точками (отдельно X и отдельно Y) и проведем стрелки с началом x и концом y для всех пар (x,y) таких, что xSy. Получим ориентированный граф, изображающий соответствие S.

Пример 42

Рассмотрим соответствие «x делится на y» для множеств X = {20,25,30,35,40} и Y = {2,3,4,5}. Граф этого соответствия имеет следующий вид (рисунок 17):

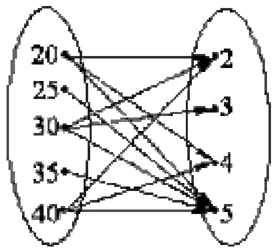


Рисунок 17 - Граф соответствия

Если соответствие задано графом, то образ x - множество концов всех стрелок, начинающихся в этой точке. Прообраз y - множество начал всех стрелок, кончающихся в y.

1.7.2 Операции над соответствиями

Понятие бинарного соответствия тесно связано с понятием двухместного предиката. Если F(x,y) - двуместный предикат, в котором переменная x пробегает множество X, переменная y - множество Y, а T -множество истинности этого предиката, то тройка множеств, <X,Y,T> задает соответствие xTy между X и Y. При этом равным предикатам отвечает одно и то же соответствие. Связь между понятиями двуместного предиката и бинарного соответствия та же, что между характеристическим свойством множества (одноместным предикатом) и множеством. При этом может случиться, что предикаты, задающие одно и тоже соответствие, определяются по разному.

Соответствия S и Q между множествами X и Y называются противоположными, если соответствующие им предикаты являются друг для друга отрицаниями. Графики противоположных соответствий - взаимно дополнительные множества в X×У. Например, для соответствия «x < y» противоположным будет соответствие «x ≥ y».

Определение 16: Объединением соответствий S и Q называют соответствие, отвечающее дизъюнкции предикатов xSy и xQy. Графиком этого соответствия S Q является объединение графиков для соответствий S и Q.

Аналогично определяется пересечение соответствий, отвечающих конъюнкции предикатов xSy и xQy. Его график - пересечение графиков для xSy и xQy.

Соответствие S называют следствием соответствия Q, если предикат xSy - следствие предиката xQy. В этом случае график соответствия Q - подмножество графика соответствия S. Например, соответствие «треугольники x и y имеют равные площади» - следствие соответствия «треугольники x и y конгруэнтны».

Для каждого соответствия S между X и Y можно определить обратное соответствие следующим образом: $yS^{-1}x$ в том и только том случае, когда xSy. Иными словами, пара (y,x) входит в график соответствия S^{-1} в том и только том случае, когда пара (x,y) входит в график соответствия S. Можно сказать, что график S получается из графика S^{-1} перестановкой множеств X и Y. Граф соответствия S^{-1} получается из графа соответствия S изменением направления всех стрелок.

Пример 43

Если S - соответствие «прямая x касается окружности y», то S^{-1} - соответствие «окружность y касается прямой x».

Пример 44

Если S - соответствие «число x является площадью треугольника y», то S^{-1} - соответствие «площадь треугольника y равна числу x».

Определим операцию композиции двух соответствий.

Пусть заданы соответствия S между множествами X и Y и Q между множествами Y и Z. Установим соответствие SQ между множествами X и Z следующим образом. Графику SQ принадлежат те и только те пары (x, z), для которых можно найти такое $y \in Y$, что xSy и yQz.

Если соответствия S и Q изображены графами, то это правило можно сформулировать так: точки x и z соединяются стрелкой в случае, если можно перейти из точки x в точку z по стрелкам графов S и Q (рисунок 18).

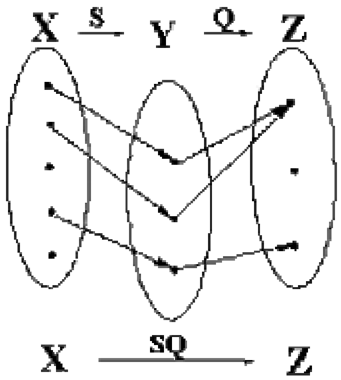


Рисунок 18 - Композиция двух соответствий

1.7.3 Виды соответствий

Определение 17: Соответствие R между X и Y называется всюду определенным на X, если его область отправления совпадает с областью определения, то есть, если для любого aX найдется $y \in Y$, что aRy.

Определение 18: Соответствие R называется сюръективным, если его область прибытия совпадает с множеством значений, то есть, если для любого $b \in Y$ найдется такое $x \in X$, что xRb.

Если R определено всюду на X, то R^{-1} - сюръективное отображение Y на X, а если R - сюръективно, то R^{-1} всюду определено на Y.

Легко показать, что если соответствия R и S сюръективны, то и сквозное соответствие RS тоже сюръективно. Точно так же, если R и S всюду определены, то RS всюду определено.

Определение 19: Соответствие R между множествами X и Y называется функциональным, если образ любого элемента $a \in X$ или пуст, или содержит лишь один элемент. Иными словами, соответствие R функционально, если из aRy_1 и aRy_2 следует $y_1 = y_2$.

Граф функционального соответствия не содержит стрелок, расходящихся из одной точки в разные стороны, то есть стрелок вида (рисунок 19).

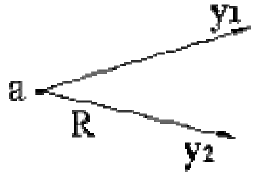


Рисунок 19 - Расходящаяся стрелка

Определение 20: Соответствие R между X и Y называется инъективным, если прообраз любого элемента $b \in Y$ либо пуст, либо содержит лишь один элемент. Иными словами, из x_1Rb и x_2Rb следует $x_1 = x_2$.

Граф инъективного соответствия не содержит стрелок, сходящихся в одной точке, то есть стрелок вида (рисунок 20).

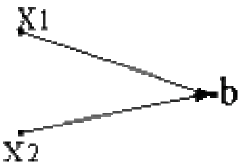


Рисунок 20 - Сходящаяся стрелка

Рассмотрим на рисунке 21 некоторые виды соответствий:

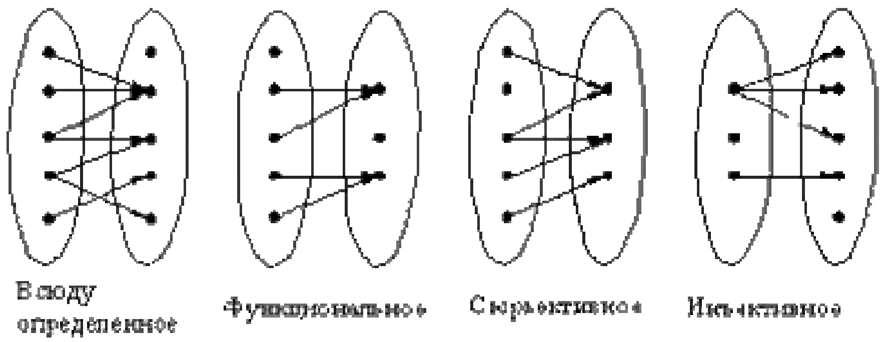


Рисунок 21 - Соответствия

Можно показать, что соответствие, обратное функциональному, инъективно, а обратное иинъективному, функционально. Если соответствия R и S функциональны (соответственно инъективны), то и сквозное соответствие RS функционально (соответственно инъективно).

1.7.4 Отображения

Всюду определенное функциональное соответствие R между множествами X и Y называют отображением X в Y и обозначают $R:X \rightarrow Y$. Применяют также обозначение X R Y. Чаще отображения обозначают буквами f, q, F. Образ элемента x при отображении f обозначают f(x). Пишут также x f y или f: $x \rightarrow y$. Итак, чтобы задать отображение f множества X в множество Y, надо каждому элементу $x \in X$ поставить в соответствие один и только один элемент $y \in Y$.

При этом, вообще говоря, не все элементы из Y являются образами элементов из X, а некоторые элементы могут быть образами нескольких (и даже бесконечного множества) элементов из X. Поэтому соответствие f^{-1}, обратное отображению f, не является всюду определенным на Y и может не быть функциональным.

Пусть отображение f множества X в Y инъективное. Тогда никакие две стрелки не встречаются ни на одном элементе y из Y. Поэтому, если повернуть направления стрелок, то ни из одной точки $y \in Y$ не будет выходить более одной стрелки. Иными словами, в этом случае f^{--1} - функциональное соответствие между Y и X.

Если отображение f сюрьективно, то в любой точке y из Y кончается хотя бы одна стрелка. Если повернуть направления стрелок, то получим, что из каждой точки $y \in Y$ выходит хотя бы одна стрелка. Значит в этом случае f^{-1} определено всюду на Y.

В случае, когда отображение f множества X в Y инъективно и сюрьективно, f^{-1} функционально и определено всюду на Y, то есть является отображением Y на X. В этом случае говорят, что f - взаимно однозначное соответствие между множествами X и Y или f - взаимно однозначное отображение X на Y. В математике взаимно однозначные отображения называют биективными или биекциями. Сюръективное отображение XfY называют также отображением X на Y. Виды отображений приведены на рисунке 22.

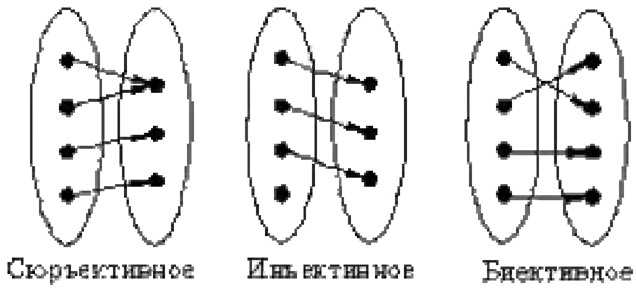


Рисунок 22 - Виды отображений

Если f - отображение X в Y, а q - отображение Y в Z, то их композиция X f Y q Z - является сквозным отображением X в Z. Это отображение обозначают qf или fq. Образ элемента x при отображении qf равен q[f(x)], (qf)(x) = q[f(x)].

1.7.5 Отношения во множествах

Определение 21: Если область отправления и область прибытия соответствия R совпадают, X = Y, то R называют отношением в множестве X.

Пример 45

Отношениями могут служить: $x = y$; $x \neq y$; $x > y$; $x < y$ в множестве X действительных чисел.

Пример 46

$x \parallel y$, $x \perp y$ в множестве прямых плоскости;

В каждом множестве X определены отношения тождества и различия. Отношение тождества $x = y$ задается графиком, состоящим из всех пар (x,x), $x \in X$.

Если представить декартово произведение $X \in Y$ в виде таблицы, этот график будет диагональю таблицы. Отношение различия $x \neq y$ противоположно отношению тождества. Его график получается удалением диагонали из декартова произведения.

При изображении отношения R в множестве X с помощью графа каждый элемент множества X изображают точкой и проводят стрелку от точки a к точке b, если aRb.

Пример 47

Отношение R в множестве $X = \{a,b,c,d\}$, имеющее график $\Gamma = \{(a,b);(b,c);(b,d);(c,b);(d,b);(d,a)\}$, изображается графом (рисунок 23).

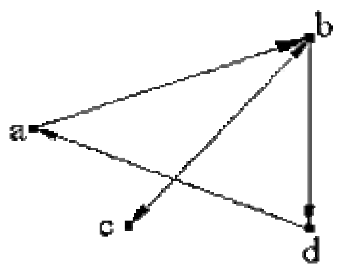


Рисунок 23 - Граф множества X

Так как для отношений область отправления и область прибытия совпадают, то соответствие R^{-1}, обратное отношению R в множестве X, само является отношением в том же множестве.

Заметим, если R и S - отношения в X, то RS - тоже отношение в X. Отношением в X является и SR, однако, вообще говоря, $RS \neq SR$.

Свойства отношений

Пусть задано бинарное отношение L в множестве A, $L \subseteq A \times A$.

Определение 22: Отношение L в множестве A называют рефлексивным, если для всех $x \in A$ имеет место отношение xLx.Если ни для одного $x \in A$ отношение xLx не имеет места, то L называют антирефлексивным отношением.

Определение 23: Отношение L называют симметричным, если $L = L^{-1}$. Это означает, что из xLy вытекает yLx. График симметричного отношения вместе с каждой парой (x,y) содержит симметричную ей пару (y,x).

Определение 24: Отношение L называют асимметричным, если ни для каких двух элементов x и y не выполняются одновременно xLy и yLx.

Более слабым является требование антисимметричности отношения L. Оно состоит в том, что если xLy и yLx, то x = y. Всякое ассимметричное отношение антисимметрично, но не наоборот.

Определение 25: Отношение L называют транзитивным, если из xLy и yLz следует xLz. Если для любой тройки элементов a, b, $c \in A$ таких, что aLb и bLc не имеет место aLc, то L называют антитранзитивным отношением.

Определение 26: Отношение L называют связным, если для любых двух элементов a и b из A выполняется одно из трех отношений: aLb, a = b, bLa.

1.8 Отношения порядка

Отношения $x < y$, $x > y$ в множестве действительных чисел, «человек x меньше человека y» в множестве людей, «яблоко x тяжелее яблока y» в множестве яблок и многие другие отношения обладают общими свойствами, а именно: они транзитивны, асимметричны. Асимметричные и транзитивные отношения встречаются во многих случаях. Поэтому их выделяют в особый класс отношений, называемых отношениями строгого порядка.

Определение 27: Отношением строгого порядка называется любое транзитивное и асимметричное отношение.

Если L - отношение строгого порядка в множестве A, то обратное ему отношение L^{-1} тоже является отношением строгого порядка. Для $x < y$ обратным является $y > x$.

Определение 28: Если отношение порядка связно, то есть если для любых двух элементов x и y из A выполнено одно из трех отношений xLy, x = y, yLx, то L называют отношением линейного порядка. Например, $x < y$ - отношение линейного порядка в множестве действительных чисел.

С каждым отношением строгого порядка можно рассматривать его объединение с отношением тождества $x = y$. Полученное отношение является транзитивным, рефлексивным, но не является асимметричным, оно лишь антисимметрично.

Определение 29: Рефлексивные, транзитивные и антисимметричные отношения называются отношениями нестрогого порядка.

Из каждого отношения нестрогого порядка можно получить отношение строгого порядка, накладывая дополнительные требования, что $x \neq y$.

Определение 30: Множество, в котором определено отношение строгого порядка, называют упорядоченным множеством. Если отношение порядка в A линейно, то A называют линейно упорядоченным множеством. Любое подмножество B упорядоченного множества A само упорядоченно.

Рассмотрим еще пример. Пусть X - множество всех подмножеств универсального множества U. Оно упорядочено отношением включения $A \subset B$. Начальным элементом в X является пустое множество, а конечным - все множество U.

Определение 31: Линейно упорядоченное множество A называется вполне упорядоченным, если любое его подмножество имеет начальный (или, что в данном случае одно и то же, наименьший) элемент.

Примером вполне упорядоченного множества может служить множество N натуральных чисел с отношением порядка $a < b$. В любом множестве натуральных чисел есть наименьший элемент.

Определение 32: Натуральным рядом называется множество, для которого выполнены условия:

- это множество бесконечно;
- оно вполне упорядочено;
- всякое непустое подмножество, имеющее наибольший элемент, является;
- конечным множеством.

1.9 Отношения эквивалентности

Отношение тождества на множестве X обладает свойствами рефлексивности ($x = y$), симметричности (если $x = y$, то $y = x$), транзитивности (если $x = y$ и $y = z$, то $x = z$). Этими же свойствами обладают отношения конгруэнтности геометрических фигур, подобия и многие другие.

Определение 33: Отношение L в множестве X, обладающее свойствами рефлексивности, транзитивности, симметричности, называется отношением эквивалентности в X.

Определение 34: Классом эквивалентности, построенным с помощью элемента $a \in A$ (обозначается $[x]_a$), называется множество тех и только тех элементов x, для которых выполняется условие xLa, т.е. $[x]_a = \{x \mid xLa, x \in A, a \in A\}$, где L - отношение эквивалентности на множестве A. Условимся в данном случае считать элемент a представителем класса эквивалентности $[x]_a$, (говорят: элемент $a \in A$ порождает класс $[x]_a$).

Свойства классов эквивалентности

1) представитель класса эквивалентности принадлежит этому классу, т. е. $\forall a \in A$, $a \in [x]_a$.

Доказательство:

Пусть на множестве A задано бинарное отношение эквивалентности L. Имеем: L - отношение эквивалентности $\Rightarrow a \in A$, $aLa \Rightarrow a \in [x]_a$ (по определению класса эквивалентности).

2) $b \in [x]_a \Rightarrow a \in [x]_b$.

Доказательство:

Пусть L - отношение эквивалентности (т.е.рефлексивно, симметрично и транзитивно). По условию $b \in [x]_a \Rightarrow a \in [x]_b \Rightarrow aLb \Rightarrow a \in [x]_b$.

3) $b \in [x]_a \Rightarrow [x]_a = [x]_b$.

Доказательство:

Заметим, что если $b \in [x]_a \Rightarrow a \in [x]_b \Rightarrow aLb \Rightarrow bLa$.

- пусть $c \in [x]_a \Rightarrow La \cap aLb \Rightarrow cLb \Rightarrow c \in [x]_b \Rightarrow [x]_a \subseteq [x]_b$;

- пусть $d \in [x]_b \Rightarrow dLb \cap bla \Rightarrow dLa \Rightarrow d \in [x]_a \Rightarrow [x]_b \subseteq [x]_a$.

Из выше сказанного имеем

$$\begin{cases} [x]_b \subseteq [x]_b \\ [x]_b \subseteq [x]_a \end{cases} \Rightarrow [x]_a = [x]_b$$

Следствие: Любой элемент данного класса можно взять в качестве его представителя.

4) различные классы эквивалентности не содержат одинаковых элементов.

Доказательство (от противного):

Убедимся, что $[x]_a \cap [x]_b = \varnothing$. Предположим, что классы $[x]_a$ и $[x]_b$ содержат общий элемент c, то есть $C \in [x]_a \cap c \in [x]_b \Rightarrow [x]_c = [x]_a = [x]_b \Rightarrow [x]_a = [x]_b$, что противоречит условию (классы разные). Остается принять, что различные классы не содержат одинаковых элементов, то есть они не пересекаются (их пересечение - пустое множество).

Определение 35: Если задано множество А, то разбиением этого множества называется образование системы $S = \{A_1, A_2, \ldots, A_i, A_j, \ldots\}$ непустых подмножеств, для которых выполняются два условия:

1) $U\ A_i$ - А.

2) $A_i \neq A_{ji} \neq j$, $A_i \cap A_j = \varnothing$.

Теорема (прямая): Если на множестве А задано бинарное отношение эквивалентности L, то классы эквивалентности образуют разбиение множества А.

Доказательство:

Очевидно, что если воспользоваться свойствами классов эквивалентности, а именно:

$\forall [x]_a \neq \varnothing$, так как $a \in [x]_a$;

$a \in A$, $\cup [x]_a = A$;

$[X]_a \neq [x]_b \Rightarrow [x]_a \cap [x]_b = \varnothing$.

Замечаем, что классы эквивалентности играют роль слоев разбиения, так как все условия разбиения выполнены.

Итак, если на множестве А задано бинарное отношение эквивалентности L, то оно порождает некоторое разбиение множества А.

Теорема (обратная): Если произведено разбиение множества А, то на этом множестве А можно определить некоторое бинарное отношение, которое является от ношением эквивалентности.

Доказательство:

Действительно, пусть задано множество А, для которого построена система непустых непересекающихся подмножеств (слоев) S - $\{A_1, A_2, \ldots, A_i, \ldots\}$. Определим бинарное отношение L следующим образом: L – «принадлежат одному слою», то есть $\forall a,b \in A$ $a,b \in A_i \leftrightarrow aLb$. Нетрудно заметить, что отношение L является отношением эквивалентности (рефлексивно, симметрично, транзитивно), а следовательно, L - есть бинарное отношение эквивалентности.

Вывод: Из этих теорем следует, что между множеством всевозможных отношений эквивалентности, определенных на множестве А, и множеством всех разбиений данного множества А можно установить взаимоднозначное соответствие.

Условимся элементы разбиения A_1, A_2, ..., A_i, A_j, ... считать смежными классами или слоями разбиения. Тогда классы эквивалентности как раз и будут являться смежными классами или слоями разбиения.

Введем понятие фактор-множества.

Определение 36: Фактор-множеством множества A по отношению эквивалентности L называют новое множество, элементами которого служат классы эквивалентности. Это множество обозначают A/L.

Например, если L - отношение в множестве Z целых чисел «иметь одну и ту же четность», то A/L состоит из двух элементов - множества чётных чисел и множества нечетных чисел.

1.10 Комбинаторика

1.10.1 Основные комбинаторные конфигурации

Среди основных задач комбинаторики выделяют следующие: пересчет, перечисление, классификация и оптимизация. Если требуется определить количество элементов, обладающих некоторым свойством или совокупностью свойств, то это задача пересчета. Если при этом необходимо указать список элементов, то это задача перечисления. Если пересчет приводит к слишком большим числам, то отказываются от соответствующего перечисления и только классифицируют элементы с помощью какого-нибудь соотношения, - и тогда это задача классификации. В некоторых задачах на множестве решений можно ввести функцию величины и относительно этой функции рассматривать задачу оптимизации: найти экстремум функции на определенном множестве объектов, либо указать все или некоторые объекты, для которых достигается экстремальное значение.

Комбинаторная конфигурация - это расположение конечного множества элементов, удовлетворяющее ряду специальных свойств. К основным комбинаторным конфигурациям относятся сочетания, размещения и перестановки. Ряд других конфигураций может быть сведен к ним. Набор (множество или кортеж) элементов $(x_{i1},x_{i2},\ldots,x_{ik})$, составленный из элементов множества $X = (x_1,x_2,\ldots,x_n)$, называется **выборкой объема k из n элементов**, или **(n,k)-выборкой**. Выборки, различающиеся составом элементов, всегда считаются различными. Выборка называется **упорядоченной**, если порядок элементов в ней задан (т. е. она представляет из себя кортеж). Две упорядоченные выборки, различающиеся только порядком следования элементов, считаются различными. Если порядок элементов в выборке несуществен, то выборка называется **неупорядоченной**.

Упорядоченная (n,k)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется **(n,k) - размещением с повторениями**, или **размещением с повторениями из n элементов по k**. Если элементы (n,k) - выборки попарно различны, то она называется **(n,k)-размещением без повторений**, или **размещением без повторений из n элементов по k**. **(n,n)-размещения без повторений** называются **n-перестановками**, или **перестановками из n элементов**.

Неупорядоченные (n,k)-выборки называются **сочетаниями: с повторениями** или **без повторений**. Заметим, что (n,k)-сочетание без повторений - это k-элементное подмножество n-элементного множества. Если элементы в (n,k)-выборке не могут повторяться, то, очевидно, выполнено неравенство $k \leq n$. Для выборки с повторениями возможно условие $k > n$.

Замечание. Когда мы говорим о выборках с повторениями, это не значит, что в ней обязательно есть повторяющиеся элементы; размещения (соответственно, сочетания) без повторений составляют подмножество множества размещений (соответственно, сочетаний) с повторениями.

Пример 48

Выборка (b,d,e) может рассматриваться как (n,3)-выборка с повторениями, так и без них при любом $n \geq 3$; выборка (b,d,e,d) -только как (n,4)-выборка с повторениями при $n \geq 3$.

В комбинаторике можно выделить два основных правила: правило суммы и правило произведения. Пусть X - конечное множество из n элементов. Тогда говорят, что один объект из X можно выбрать n способами, и пишут $|X| = n$. Если X и Y - непересекающиеся множества и $|X| = n$, $|Y| = m$, то $|X \cup Y| = m+n$. Свойство может быть распространено на большее число множеств.

Пусть $\{X_i\}$ - система попарно не пересекающихся множеств: $X_i \cap X_j = \varnothing$, если $i \neq j$. Тогда

$$\left|\bigcup_{i=1}^{n} X_i\right| = \sum_{i=1}^{n} X_i \qquad \textbf{(1)}$$

Это правило суммы, или правило альтернатив. Если объект $x \geq X$ может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект $y \geq Y$ может быть выбран m способами, то выбор упорядоченной пары (x, y) может быть осуществлен m*n способами. Это **правило произ-**

ведения. Оно также распространяется на большее число множеств. Для системы множеств $\{X_i\}$, $i = 1, 2,\ldots, k$, где $|X_i| = m_i$, выбор упорядоченной последовательности из k объектов $(x_1,x_2,\ldots,x_k)$, $x_i \geq X_i$, может быть осуществлен $m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_k$ способами.

Пример 49

Автомобильные номера имеют формат AZZZZAA (A - любая буква русского алфавита, кроме Ё, И, Ъ, Ы, Ь, которые не употребляются в номерах; Z - произвольная цифра). Число различных возможных номеров равно произведению $28 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 28 \cdot 28 = 219520000$. Для пересекающихся множеств выполнены более сложные соотношения. Нетрудно убедиться, что для двух множеств X, Y число элементов, принадлежащих хотя бы одному из них, т.е. их объединению, равно

$$|X \cup Y| = |X|+|Y|-|X \cap Y| \qquad \textbf{(2)}$$

(ср. формулу вероятности суммы двух событий в теории вероятностей). Для трех множеств X, Y, Z число элементов, принадлежащих их объединению, равно

$$|X \cup Y \cup Z| = |X|+|Y|+|Z|-|X \cap Y|-|X| \cap |Z| = |Y| \cap |Z|+|X| \cap |Y| \cap |Z| \qquad \textbf{(3)}$$

Соотношениям (2) и (3) можно придать другую форму. Если рассмотреть множества X, Y, Z как подмножества универсального множества U, то $\left|\overline{X \cup Y}\right| = |U| - |X \cup Y|$, откуда

$$\left|\overline{X \cup Y}\right| = |U| - \left(|X| + |Y|\right) + |X \cap Y| \qquad \textbf{(4)}$$

Аналогично:

$$\left|\overline{X \cup Y \cup Z}\right| = |U| - \left(|X| + |Y| + |Z|\right) + \left(|X \cap Y| + |X \cap Z| + |Y \cap Z|\right) - |X \cap Y \cap Z|.$$

Последние два равенства представляют частные случаи **принципа включения и исключения**, называемого также принципом решета. Пусть рассматриваются n свойств P(1), P(2), …, P(n) и N - число элементов некоторого N-элементного множества, обладающих свойством P(i), N_{ij} - число элементов, обладающих свойствами P(i) и P(j), и вообще $X_{i1i2\ldots is}$ - число элементов, обладающих свойствами (P_{i1}),(P_{i2}), …, (P_{is}). Тогда число N(0) элементов, не обладающих ни одним из этих свойств, задается знакопеременной алгебраической суммой:

$$N(0) = N - \sum_i N_i + \sum_{i<j} N_{ij} - \ldots + (-1)^S$$

$$\sum_{i_1<i_2<\ldots<i_S} N_{i_1 i_2 \ldots i_S} + (-1)^n \cdot N_{12\ldots n} \qquad \textbf{(5)}$$

1.10.2 Формулы пересчета числа комбинаторных конфигураций

Число (n, k)-размещений без повторений A^k_n может быть определено с помощью правила произведения. Первый из k элементов размещения может быть выбран n способами, второй - (n–1) способами, поскольку элемент, выбранный первым, не должен быть повторен; аналогично, для третьего (если k > 2) элемента остается (n-2) способов и тд. Всего k элементов могут быть выбраны $A^k_n = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)$ способами: произведение k убывающих на 1 сомножителей, начиная с n. По-другому, используя обозначение $n!=1\cdot2\cdot\ldots\cdot n$, можно записать: $A^k_n = n!/(n-k)!$

Пример 50

$A^3_7 = 7!/4! = 7\cdot6\cdot5 = 210$; $A^4_7 = 7!/3! = 7\cdot6\cdot5\cdot4 = 840$; $A^5_7 = 7!/2! = 7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3 = 2520$.Если k = 1, то $A^1_n = n!/(n-1)! = n$; если k = n–1, то $A^{n-1}_n = n!/1! = n!$. Если k = n, то $A^n_n = n!/0! =$ [для единообразия формул удобно считать, что 0! = 1!] = n!.

Равенство чисел A^{n-1}_n и A^n_n естественно: если выбраны (n–1) элементов из n, то единственный оставшийся элемент может быть выбран одним способом, и это не изменяет числа A^{n-1}_n по сравнению с A^n_n. Таким образом, число n перестановок P_n равно n!. (n, k)-размещения с повторениями - это кортежи (по-другому, слова) длины k в n-элементном алфавите. Используя правило произведения, нетрудно показать, что число различных (n,k)-размещений с повторениями $A^k_n = n^k$. Действительно, каждый из n членов упорядоченной последовательности может быть выбран n способами, независимо от других, а число их равно k.

Пример 51

1) Число слов длины k в алфавите {0,1} равно 2^k; таково же число всех подмножеств k-элементного множества, поскольку множество однозначно задается своей характеристической функцией. Число k-значных двоичных чисел равно 2^{k-1} т.к. первая цифра должна равняться 1.

2) Число k-значных десятичных чисел (т.е. имеющих ровно k знаков) равно $9 \cdot 10^{k-1}$: 1. их можно рассматривать как слова в алфавите {0,1,2,…,9}, причем первая цифра должна быть отлична от 0.

3) Числа (n,k)-сочетаний без повторений обозначаются символами C^k_n или (n,k) и называются также **биномиальными коэффициентами**, поскольку совпадают с коэффициентами формулы бинома Ньютона для n-й степени двучлена

$$X + Y : (X+Y)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot X^k \cdot Y^{n-k} \qquad \textbf{(6)}$$

Действительно, коэффициент при члене $x^k \cdot y^{n-k}$ равен числу способов, которыми из n одинаковых сомножителей $(x+y)\cdot(x+y)\cdot\ldots\cdot(x+y)$ можно выбрать k (в них выбирается x, а в остальных y -произведение выбранных так множителей равно как раз $x^k \cdot y^{n-k}$).

Для пересчета (n,k)-сочетаний без повторений удобно рассмотреть разбиение множества всех (n,k)-размещений без повторений на классы эквивалентности по отношению "иметь одинаковый состав элементов"; сочетания, отличающиеся составом элементов, попадают в различные классы. В каждом из классов содержатся упорядоченные конфигурации из одних и тех же k различных элементов, т.е. они представляют k-перестановки, и в каждом классе их число равно k!. Отсюда число C^k_n (n,k)-сочетаний без повторений равно $A^k_n/k!$, т.е.

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k} \qquad \textbf{(7)}$$

Для небольших значений k удобнее последнее выражение для C^k_n, поскольку в нем и в числителе, и в знаменателе - по k сомножителей: в числителе - отрезок натурального ряда, начиная с n, по убыванию; в знаменателе - отрезок натурального ряда [1,k], начиная с 1, по возрастанию.

В частности, $C^0_n = 1$, $C^1_n = n$, $C^2_n = n\cdot(n–l)/2$. Удобно также считать, что $C^k_n = 0$, если $k > n$.

Пример 52

$$C_8^3 = \frac{8\cdot 7\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 56; C_{10}^4 = \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} = 210$$

Приведем некоторые свойства биномиальных коэффициентов.

1) $C^k_n = C^{n-k}_n$. Это следует как из формулы (7), так и из того, что выборка k элементов из n однозначно определяет дополнение: выборку (n–k) оставшихся элементов из n. Отсюда и из предыдущих равенств следуют,

$C^n_n = C^n_0 = 1, C^n_{n-1} = C^n_1 = n$.

Например, $C_2^6 = \frac{6\cdot 5}{1\cdot 2} = 15, C_6^4 = \frac{6\cdot 5\cdot(4\cdot 3)}{1\cdot 2\cdot(3\cdot 4)} = 15$.

В последнем равенстве в числителе и в знаменателе выделены скобками одинаковые сомножители.

2) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n$ - следует из подстановки x = y = 1 в формулу (6).

1+5+10+10+5+1 = 32 = 25.

1+6+15+20+15+6+1 = 64 = 26.

3) $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k = 0$ - следует из подстановки x = 1, y = –1 в формулу (6). Например, для n = 6: 1–6+15–20+15–6+1 = 0. Используя свойство 3, покажем справедливость формулы (5) - принципа включения и исключения. Действительно, объект считается один раз в N, если не обладает никаким свойством, и совсем не учитывается во всех остальных слагаемых. Объект, имеющий t > 0 свойств, принимается за 1 в общем числе N, за (–t) в –ΣN_i, за C^2_t в $\sum_{i<j} N_{ij}$ и вообще за $(-1)^s$–C^s_t в сумме $(-1)^s$ $\sum_{i<j} N_{i_1 i_2 \dots i_j}$. Но для t>1 из свойства 3 имеем:

$$1-t+C_t^{\,2}+\ldots+(-1)^s\, C_t^{\,s}+\ldots = 0.$$

Таким образом, всякий объект, не обладающий никаким из свойств, вносит 1 в правую часть формулы (5), а объект, обладающий t > 1 свойствами, вносит 0. Это доказывает формулу (5).

4) $\sum_{k=0}^{n} C_n^k \cdot k = n \cdot 2^{n-1}$.

Чтобы убедиться в справедливости равенства, представим, что для каждого сочетания из n элементов $\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$ выписаны на отдельную карточку символы $a_{i1},a_{i2},\dots,a_{ik}$, соответствующие элементам этого (k-элементного) сочетания: всего карточек - 2^n (по свойству 2). Тогда суммарное число символов на всех карточках можно подсчитать двояко:

а) суммарное число символов на C^k_n карточках, содержащих ровно k символов, равно $k \cdot C^k_n$; в левой части рассматриваемого равенства - общее число символов на всех карточках для k = 0, 1, …, n;

б) Если зачеркнуть некоторый символ a, на всех карточках, на которых он написан, то на них останутся всевозможные сочетания из остальных (n - 1) элементов (их число - 2^{n-1}); значит символ a_i, написан ровно на 2^{n-1} карточках. Общее число символов $n \cdot 2^{n-1}$ - в правой части равенства.

Например, для n = 5:

$$0\cdot1+1\cdot5+2\cdot10+3\cdot10+4\cdot5+5\cdot1 = 80 = 5–24.$$

Для n = 6:

$$0\cdot1+1–6+2–15+3\cdot20+4–15+5–6+6–1 = 192= i6\cdot25.$$

5) $C^k_n = C^{k-1}_{n-1}+C^k_{n-1}$. Равенство следует из такого рассуждения. Зафиксируем некоторый элемент x n-элементного множества. Совокупность всех k-элементных подмножеств последнего (их число - левая часть равенства) разбивается на два непересекающихся класса: содержащих и не содержащих элемент x. В первом классе C^{k-1}_{n-1} подмножеств: они содержат x

и (k–1) из остальных (n–1) элементов. Во втором классе, очевидно, C^k_{n-1} элементов. Последнее тождество связано со схемой, называемой **треугольником Паскаля** (рисунок 24). Если перенумеровать по порядку строки этого треугольника числами 0, 1, 2,…, то i-я строка окажется состоящей из чисел C^0_i , C^1_i ,…, C^i_i . В силу свойства 5 каждое число строки, кроме крайних, равных единице, можно получить как сумму двух ближайших чисел, находящихся над ним в предыдущем ряду. Это дает простой метод построения треугольника Паскаля и, тем самым, нахождения биномиальных коэффициентов: n-я строка задает коэффициенты бинома (x+y)n. Замечание. Свойство (5) представляет собой пример **рекуррентного (возвратного) соотношения**: величина C^k_n рассматриваемая как функция двух аргументов n, k, выражается через значения этой же функций при других (здесь - меньших) значениях переменных.

0	1
1	1 1
2	1 2 1
3	1 3 3 1
4	1 4 6 4 1
5	1 5 10 10 5 1
6	1 6 15 20 15 6 1
7	1 7 21 35 35 21 7 1
8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
11	1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

Рисунок 24 – Треугольник Паскаля

$C^k_{m+n} = \sum_{s=0}^{n} C^k_m C^{k-s}_n$ (тождество Коши). Для доказательства удобно рассмотреть такую интерпретацию. Пусть из группы, состоящей из m мужчин и n женщин, выбирается делегация k человек. Это можно сделать C^{m+n}_k способами. Все k-элементные подмножества нашего (m+n)–J элементного множества можно классифицировать по числу мужчин в делегации, kэлементную делегацию, содержащую s мужчин, можно получить, выбирая сначала s мужчин одним из C^5_m способов, а затем (k–s) женщин одним из C^{k-s}_n способов. По правилу произведения число таких делегаций равно C^s_m–C^{k-1}_n, а по правилу суммы общее число k-элементных делегаций такое, как в правой части равенства. Чтобы получить число (n,k)-сочетаний с повторениями C^k_n. поставим в соответствие каждому такому сочетанию (т.е. неупорядоченной k-выборке из n-элементного множества) кортеж в двухбуквенном алфавите (0,1} следующим образом. Составим сначала кортеж из n натуральных чисел $\{a_i\}$, так что а равно числу i-х элементов n-множества, входящих в данную k-выборку. Некоторые а, могут быть равны 0. Сумма n компонент этого кортежа равна k. Далее составим кортеж из нулей и единиц, заменив каждое число a_i на a_i единиц, перемежая их нулями: 11..101...10...00... Если некоторое $a_i = 0$, то между соответствующими нулями не будет ни одной единицы. Говоря по-другому, кортеж из (n–1) нулей определяет n мест: слева от всего кортежа и справа от каждого из нулей. На место i вставим а, единиц (некоторые a_i, как сказано выше, могут равняться 0).

Пример 53

(4,7)-сочетанию (1,1,3,4,4,4,4) соответствует кортеж (2,0,1,4), а ему, в свою очередь, - кортеж 1100101111; (4,7)-сочетанию(1, 2, 2, 2, 3, 3, 3) соответствует сначала кортеж (1,3,3,0), а затем кортеж 1011101110. В результате получаем набор из (n–1) нулей k единиц, т.е. вектор длины (n–k+1). Обратно, каждому такому вектору соответствует (n,k)-сочетание: серии идущих подряд единиц определяют числа a_i - их сумма равна k. Поэтому:

$$C^k_n = C^k_{n+k-1} = C^k_n = C^{n-1}_{n+k}-1 \qquad \textbf{(9)}$$

Равенство (9) можно получить и другим способом. Пусть $(c_1,c_2,\ldots,c_k)$ - (n,k)-сочетание с повторениями, причем $c_1 < c_2 < \ldots < c_k$. Сопоставим ему выборку $(d_1,d_2,\ldots,d_k)$, где $d_1 = c_1+0$, $d_2 = c_2+1$, $d_3 = c_3+2$, …, $d_k = c_k+k-1$. Все числа d различны - поэтому выборка $(d_1,d_2,\ldots,d_k)$ может рассматриваться как (n+k–1,k)-сочетание без повторений. Обратно, каждому (n+k–1,k)-сочетанию без повторений соответствует (n,k)-сочетание, возможно с повторениями, откуда следует равенство (9).

Рассмотрим всевозможные размещения с повторениями $a_1a_2\ldots a_n$ из n элементов с дополнительным условием: в каждом из них b_1, элементов первого рода, b_2 элементов второго рода и вообще b_i, элементов i-го рода

(1=1, 2,..., r). Естественно, выполнено равенство $b_1+b_2+\ldots+b_r = n$. Заменим b_i элементов i-го рода различающимися элементами $b_{i1}, \ldots, b_{ib}$ так, чтобы все элементы стали различными, и получим n! перестановок. Каждое исходное размещение дает $b_{1!}\ b_{2!}\ \ldots\ b_{r!}$ перестановок. Следовательно, число исходных размещений равно

$$\frac{n!}{b_1!\cdot b_2!\cdot\ldots\cdot b_r!},\text{ где } b_1+b_2+\ldots b_r = n.$$

Это число называется **полиномиальным коэффициентом**: оно равно коэффициенту при произведении $x^{b1}{}_1\ x^{b2}{}_1\ x^{br}{}_r$ в разложении по степеням переменных полинома $(x_1+x_2+\ldots+x_r)^n$. Биномиальные коэффициенты представляют частный случай при r = 2.

Одна из классических задач комбинаторики - определить число способов разместить некоторое множество объектов в каком-то количестве "ящиков" так, чтобы были выполнены заданные ограничения.

Если даны два множества X, Y, причем X = n, Y = n, то всякая функция f: X→Y задает такое размещение, если считать X объектами, а Y - ящиками и трактовать $f(x_i) = y_i$ как помещение объекта x в ящик y. Другая интерпретация - раскраска: Y - множество "цветов" и f(x) - цвет объекта x. Тогда задачу можно сформулировать как определение количества раскрасок с соблюдением некоторых ограничений. Заметим, что без потери общности можно всегда считать, что X = {1,2,…,n}, а Y = {1,2,…,m}. Если не накладывать никаких ограничений на размещения, то число всех функций f: X→Y равно m^n, ибо это просто (m,n)-размещения с повторениями.

Если каждый ящик содержит не более одного объекта, то мы имеем (m, n)-размещения без повторений; при этом m > n. Их число равно $A^n{}_m$: из m упорядоченных ящиков мы выбираем n и кладем в них одному объекту. Если же n > m, то такое размещение, очевидно, невозможно. Здесь вступает в силу так называемый **принцип Дирихле**, или принцип ящиков - если в m ящиках находятся (m+1) или больше камней, то хотя бы в одном из ящиков больше одного камня. Если мы размещаем n объектов по m ящикам так, чтобы каждый и ящик содержал упорядоченную последовательность, а не просто неупорядоченное множество помещенных в него объектов, то будем называть такое размещение упорядоченным размещением т объектов по m ящикам. Их число - обозначим его $[m]^{lnl}$ - равно, полагая (для n = 0) $[m]^0 = 1$:

$$[m]_{[n]} = m\cdot(m+1)\cdot\ldots\cdot(m+n-1) = A^n{}_{m+n-1.}$$

1.10.3 Перечисление перестановок

Рассмотрим некоторые алгоритмы порождения (перечисления) последовательности всех перестановок n элементов.

1) лексикографическая (алфавитная). Последовательность определяется индуктивно: для каждой перестановки указан первый элемент, далее - все следующие за ним.

- все перестановки из (2,…,n} в алфавитном порядке;
- все перестановки из {1,3,…,n} в алфавитном порядке;
- все перестановки из {1,2,4,…,n} в алфавитном порядке;
- все перестановки из {1,2,…,k–1,k+1,…,n} в алфавитном порядке;
- все перестановки из {1,2,…,n–1} в алфавитном порядке.

2) конфигурации (перестановки) располагаются в такой последовательности, что каждая (начиная со второй) отличается от предыдущей тем, что в ней поменялись местами ровно два элемента (такая ситуация и вместе с тем операция такой замены называется **транспозицией**). Такая последовательность перестановок может оказаться полезной, если при решении какой-то (например, комбинаторной) задачи с каждой перестановкой связаны некоторые вычисления и существует возможность использования частичных результатов, полученных для предыдущей перестановки, если последовательные перестановки мало отличаются друг от друга. Существуют различные алгоритмы построения таких последовательностей, удобные в тех или иных отношениях, в частности для программирования.

3) частным случаем предыдущего можно считать последовательность, в которой разница между двумя соседними перестановками еще меньше: они различаются транспозицией двух соседних элементов. Идея такого алгоритма - **индуктивное построение**. Пусть уже построена обладающая этим свойством последовательность элементов 1, 2,...,(n–1). Тогда требуемую последовательность перестановок элементов 1, 2,..., n получим, вставляя т всеми возможными способами (их число равно n) в каждую из перестановок элементов 1, 2,...,(n–1) на различные места, передвигая n попеременно вперед и назад (n–1)! раз. Ниже идея алгоритма проиллюстрирована для n = 2, 3, 4 и (начало последовательности) для n = 5; элемент n выделен жирным шрифтом; в каждом столбце отмечены транспозиции элементов 1,2,…,(n–1).

1.10.4 Приложения к теории вероятностей и теоретической физике

Предположим, что в некоторой ситуации имеется n возможных взаимно исключающих исходов, которые мы обозначим через x_1, x_2, …, x_n. Припишем исходу x_i некоторое число $p_i = p(x_i)$, где $p_i > 0$ - действительное число, $p_i > 0$, $p_1+p_2+\ldots+p_n = 1$. Если некоторое событие E случается при одном из исходов x_i, …, x_{im} и не происходит в других случаях, то определим вероятность события E равенством $p(E) = p_{ii}+\ldots+p_{im}$.

Приписывание начальных вероятностей p_1, p_n является оценкой относительного правдоподобия различных исходов.

Существует много практических ситуаций, в которых представляется разумным рассматривать n исходов как равновозможные. Тогда мы принимаем $p_1 = p_2 = ... = p_n = 1/n$. В этом случае вероятность события E, происходящего только при m возможных исходах, равна $p(E) = m/n$. В такой ситуации вычисление p(E) становится чисто комбинаторной задачей на подсчет m - числа возможных исходов, дающих событие E.

Пусть имеется N урн, пронумерованных от 1 до N. Разместим в урны произвольным образом n шаров, где $n < N$. Найдем вероятность того, что каждая из урн с номерами от 1 до n содержит точно по одному шару. Эта вероятность зависит от двух условий:

1) различимы ли шары или нет;

2) имеет ли место принцип исключения (или несовместности), который не позволяет положить второй шар в урну, уже содержащую один шар.

Если n шаров различимы и принцип исключения не имеет места, то существует N^n способов размещения n шаров в N урнах и n! способов размещения их по одному в каждую из урн с номерами 1, …, n. Из этих условий и определяется вероятность

$$p(E)=n!/N^n$$

Если шары различимы и принцип исключения имеет место, то первый шар может быть помещен в любую из N урн, следующий - в любую из (N–1) урн, 1-й - в любую из (N–i+1) урн; следовательно, число способов размещения n шаров в N урнах равно $A^n_N = N\cdot(N-1)\cdot\ldots\cdot(N-n+1)$. Эти шары могут быть размещены n! способами в урнах с номерами 1, …, n, и тогда искомая вероятность равна

$$p(E)=n!/A^n_N=1/C^n_N.$$

Если шары неразличимы и принцип исключения не имеет места, то задача сводится к подсчету числа неотрицательных целочисленных решений уравнения $x_1+x_2+\ldots+x_n = n$, где x_i - число шаров в i-й урне. Оно равно числу сочетаний с повторениями из N элементов по n, т.е. C^n_{N+n+1}. Одно из решений: x_1, $= x_2 = \ldots = x_n = 1$, $x_{n+1} = \ldots = X_N = 0$. В этом случае искомая вероятность равна

$$p(E) = 1/ C^n_{N+n-1}.$$

С физической точки зрения "неразличимость" означает, что все сочетания равновозможны.

Если шары неразличимы и имеет место принцип исключения, то число способов размещения шаров есть не что иное, как число сочетаний без повторений из N элементов по т, т.е. C^n_N,. Выбор первых n урн является единственно возможным и, следовательно, вероятность равна

$$p(E) = 1/C^n_N.$$

Таким образом, если имеет место принцип исключения, то вероятность не зависит от различимости шаров.

В статистической физике рассматривается некоторая совокупность т частиц (это могут быть протоны, электроны, мезоны, нейтроны, нейтрино или фотоны); каждая из них может находиться в любом из N "состояний" (это могут быть энергетические уровни). Макроскопическое состояние этой системы из n частиц задается вектором $x = (x_1,x_2,\ldots,x_N)$, где x - число частиц, находящихся в i-ом состоянии. Вероятность Р любого отдельного макроскопического состояния зависит от того, различимы ли эти частицы и подчиняются ли они принципу исключения Паули, который гласит, что никакие две (неразличимые) частицы не могут, находиться в одном и том же состоянии. Если рассматриваемые частицы различимы и не подчиняются принципу исключения, то вероятность Р дается формулой $p(E) = n!/N^n$, и тогда говорят, что частицы подчиняются классической статистике Максвелла-Больцмана. Если частицы неразличимы и не подчиняются принципу исключения, то вероятность Р дается формулой $p(E) = 1/C^n_{N+n-1}$, и тогда говорят, что частицы подчиняются статистике Бозе-Эйнштейна. Таковы фотоны и пи-мезоны.

Если частицы неразличимы и подчиняются принципу исключения, то вероятность Р дается формулой $p(E) = 1/C^n_N$, и при этом говорят, что они подчиняются статистике Ферми-Дирака. Таковы электроны, протоны, нейтроны. Случай $p(E) = n!/A^n_N = 1/C^n_N$ различимых частиц, подчиняющихся принципу, исключения, в физике не встречается.

При достаточно высоких температурах, когда число состояний N велико и различные макроскопические состояния почти равновозможны, статистики Ферми-Дирака и Бозе-Эйнштейна практически совпадают со статистикой Максвелла-Больцмана. При низких температурах низкие энергетические уровни возможны чаще, чем высокие, и тогда приведенные модели следует различать.

1.11 Применение теории множеств в базах данных

1.11.1 Система с базой знаний

Экспертная система создается с целью подменить собой специалистов в данной области. Это достигается накоплением *базы знаний* известных фактов вместе с определением фактов вместе набора *правил вывода*. Вследствие чего ответы на запросы системы могут быть выведены логическим путем из базы знаний.

Мы построим простую экспертную систему «Королевская династия» для ответа на вопросы об английских королях и королевах и их семьях, начиная с Георга I. Прежде всего, мы подготовим список фактов, используя предикаты *родитель* и *жена*.

родитель(Георг I, Георг II)	*жена*(София, Георг I)
родитель(Георг III, Георг IV)	*жена*(Вильгельмина, Георг II)
родитель(Георг III, Вильгельм IV)	*жена*(Шарлотта, Георг III)
родитель(Георг III, Эдвард)	*жена*(Каролина, Георг IV)
родитель(Эдвард, Виктория)	*жена*(Аделаида, Вильгельм IV)
родитель(Виктория, Эдвард VII)	*жена*(Виктория, Альберт)
родитель(Эдвард VII, Георг V)	*жена*(Александра, Эдвард VII)
родитель(Георг V, Эдвард VIII)	*жена*(Виктория Мари, Георг V)
родитель(Георг V, Георг VI)	*жена*(Елизавета, Георг VI)
родитель(Георг VI, Елизавета II)	*жена*(Елизавета II, Филипп)
родитель(Виктория, Элис)	
родитель(Элис, Виктория Альберта)	
родитель(Виктория Альберта, Элис-Моунтбаттен)	
родитель(Элис-Моунтбаттен, Филипп)	

Условимся, что *родитель*(x, y) означает, что x является родителем y, а *жена*(x, y) означает, что x – жена y. Это стандартное чтение предикатов, используемых языками программирования, такими, как, например, PROLOG.

Чтобы извлечь информацию, мы будем ставить вопросы перед базой данных. Например, если мы спрашиваем: «является ли Георг I отцом Георга III?», то ответ будет отрицательным, поскольку предикат *родитель*(Георг I, Георг III) отсутствует в нашем списке фактов.

Запросы записываются в виде: «? – предикат». Кроме того, предполагается, что наличие переменной в предикате равносильно вопросу о существовании. Например, запрос «? – *жена*(x, Георг IV) понимается как «была ли жена у Георга IV?». В этом случае ответ положителен, так как, заменяя x на «Каролина», мы получим высказывание, присутствующее в списке фактов.

Пример 54

Найдите ответы на следующие запросы:

(а) ? – *жена*(Елизавета II, Филипп);

(б) ? – *родитель*(София, Георг II);

(в) ? – *женщина*(Каролина);

(г) ? – *жена*(Филипп, Елизавета II).

Решение: положительный ответ будет выдан только на первый запрос, так как только для него в списке фактов есть соответствующий предикат. Напомним, что отрицательный ответ на запрос дается в том случае, если список фактов не содержит предиката из запроса.

Чтобы система с базой знаний могла решать более сложные задачи, мы введем так называемые правила вывода. Правило вывода определяет новый предикат в терминах тех, которые присутствуют в исходном списке фактов. Ответы на запросы о новых предикатах могут быть логически выведены из списка фактов, генерируя, таким образом, новую информацию.

В системе «Королевская династия» кажется очевидным, что переменная x, попавшая в *жена*(x, y), соответствует женщине. В правиле (1) определим новый предикат, который будет означать, что «если x – жена y, то x – женщина».

(1) *женщина*(x) **from** *жена*(x, y)

Аналогично введем правило (2), определяющее предикат *муж*. Он означает, что «если x – жена y, то y – муж x».

(2) *муж*(y, x) **from** *жена*(x, y)

Пример 55

Как изменятся ответы на запросы из задачи 1? Ответьте на следующие дополнительные запросы:

(д) ? – *женщина*(Элис-Моунтбаттен);

(е) ? – *муж*(Альберт, Виктория);

(ж) ? – *мужчина*(Альберт).

Решение: теперь на запрос (в) из задачи 1 будет дан положительный ответ, согласно правилу (1), примененному к основному факту: *жена*(Каролина, Георг IV).

На запрос (д) ответ будет отрицателен, так как Элис-Моунтбаттен в основном списке не упомянута в качестве чьей-либо жены.

Ответ в случае (е) положителен ввиду наличия в списке предиката *жена*(Виктория, Альберт) и правила (2).

Отрицательный ответ будет дан на запрос (ж), так как предикат *мужчина* пока еще не определен.

Подходящее правило вывода, дающее информацию о принадлежности к мужской половине человечества, аналогично правилу (1):

(3) *мужчина*(y) **from** *жена*(x, y)

Можно сформулировать правило, представляющее информацию о сыновьях:

(3) *сын*(x,y) **from** (*мужчина*(x) **и** *родитель*(y, x))

Пример 56

Ответьте на следующие запросы:

(а) ? – *мужчина*(Вильгельм IV);

(б) ? – *сын*(Вильгельм IV, Георг III);

(в) ? – *сын*(Вильгельм IV, Шарлотта);

(г) ? – *сын*(Эдвард VIII, Георг V).

Решение:

(а) положительный ответ следует из предиката *жена*(Аделаида, Вильгельм IV) по правилу (3).

(б) Положительный ответ следует из предиката *родитель*(Георг III, Вильгельм IV) ввиду положительного ответа на запрос (а) и правила вывода (4).

Ответы на последние два запроса – отрицательны.

Обратите внимание, что при ответах на (в) и (г) необходимо твердо придерживаться фактов и правил вывода ввиду ограничений, наложенных на систему. Только монархи считаются родителями, в то время как их супруги появляются только в предикате *жена*. Так, хотя Шарлотта была замужем за Георгом III, и Вильгельм IV – один из их сыновей, база данных считает его родителем только Георга III. Следовательно, правило вывода (4) не может дать положительный ответ на запрос (в). Причина отрицательного ответа в случае (г) заключается в том, что в списке отсутствует жена у Эдварда VIII. Поэтому правило (3) дает ответ «Нет» на запрос «? – *мужчина*(Эдвард VIII)».

Как мы увидели, в случае неполной информации, содержащейся в системе данных, как это часто бывает в реальных экспертных системах, то отрицательный ответ на запрос может означать, что нам просто ничего не известно. Должное внимание к формулировке правил вывода и выбору исходных предикатов базы данных может частично решить эту проблему. К сожалению, при неопределенности отрицательных ответов мы не можем полностью доверять и положительным, если в предикатах участвует операция **не**.

Рассмотрим, например, следующие, разумные на первый взгляд правила вывода (A) и (B):

(A) *мужчина*(х) **from** *жена*(x, y);

(B) *женщина*(x) **from** (**не** *мужчина*(x)).

Попробуем ответить на запрос: «? – *женщина*(Эдвард VIII)», основываясь на исходном списке фактов, но пользуясь только правилами (A) и (B). На запрос «? – *женщина*(Эдвард VIII)» будет получен отрицательный ответ. Поэтому высказывание «не женщина (Эдвард VIII)» становится выведенным истинным фактом. По правилу (B) на запрос «? – *женщина*(Эдвард VIII)» будет дан положительный ответ! Следовательно, прежде чем разрешать употребление отрицаний в правилах вывода, необходимо убедиться в полноте исходной информации.

Пример 57

Сформулируйте правило вывода для извлечения информации о матерях из экспертной системы «Королевская династия». Определите правило *мать*(х) так, чтобы положительный ответ на соответствующий запрос выдавался в том случае, если x – жена чьего-то родителя или x – женщина и чей-то родитель. Примените новое правило совместно с правилом (1) к исходной базе данных для определения максимально возможного числа матерей. Удовлетворительным ли получилось новое правило вывода?

Решение: требуемое правило вывода может быть определено так:

мать(x) **from** ([*жена*(x, y) **и** *родитель*(z, y)] **или**

или [*женщина*(x) **и** *родитель*(x, y)]).

Часть [*жена*(x, y) **и** *родитель*(z, y)] нашего правила определит как «мать» следующих королев: Александра, Шарлотта, Елизавета, София и Виктория Мари. Вторая часть [*женщина*(x) **и** *родитель*(x, y)] выявит Викторию.

Однако сформулированное правило вывода найдет не всех матерей, поскольку база данных неполна. В ней, например, не записаны дети Елизаветы II.

Первая часть правила будет считать матерями и мачех. Кроме того, проблема будет возникать и тогда, когда у монарха было несколько жен. Это показывает трудности, возникающие при попытке ограничить реальный мир рамками простой математической модели.

1.11.2 Системы управления базами данных

Данные, хранящиеся в компьютере, называются *базой данных*. Программы, с помощью которых пользователь извлекает информацию из базы данных или вносит в нее изменения, называются *системами управления базами данных* (СУБД).

Данные в компьютере, как правило, организованы в виде таблиц. Например, таблица 1 содержит информацию о группе студентов: личный номер студента, фамилию, пол, дату рождения, семейное положение и адрес. В таблице 2 занесена информация об успеваемости некоторых студентов по отдельным курсам. Эти таблицы составят основу для наших обсуждений, хотя и не представляют практического интереса. Например, проблемы при работе с таблицей 1 могут возникнуть при попытке извлечь информацию о двух различных Смитах, а в таблице 1 отсутствует детальная информация о некоторых из студентов, появляющихся в таблице 2.

Строки таблицы с n колонками, помеченными множествами A_1, A_2, ..., A_n можно представить как подмножество в прямом произведении $A_1 \times A_2 \times ... \times A_n$. Строки образуют список из n элементов, по одному из каждого A_i, а вся таблица представляет собой **n-арное отношение**.

Например, таблицу 2 можно рассматривать как подмножество $T2$ в $A_1 \times A_2 \times A_3 \times A_4 \times A_5$, где A_1 – множество фамилий студентов, а $A_2 = A_3 = A_4 = A_5 =$ {отл, хор, удовл, неуд}. Один из элементов этого пятинарного отношения – строка (Джонс, хор, удовл, хор, неуд), в которой записаны оценки Джонса, полученные им за четыре предмета.

Таблица 1 - Персональные данные

Личный номер	Фамилия	Пол	Дата рождения	Семейное положение	Адрес
4000123	Джонс	Ж	1.2.83	не замужем	2 Мотт, Ньютон
5001476	Сингх	М	4.5.84	женат	4А Ньюраод, Сифорт
5112391	Смит	Ж	21.3.84	не замужем	17 Кренст, Сифорт
5072411	Смит	М	12.12.84	холост	21 Паддинг Лэйн, Витэм
5532289	Чинг	М	15.8.83	холост	4А Ньюраод, Сифорт
5083001	Грант	М	9.7.83	холост	18 Иффлейроад, Сифорт
5196236	Маккай	Ж	21.3.84	не замужем	133 Уффроад, Реадинг
4936201	Френк	Ж	7.10.77	замужем	11 Финнроад, Ньютон

Таблица 2 - Успеваемость

	Основы матем.	Прогр.	Дискр. матем.	Вычисл. системы
Каммингс	отл	хор	удовл	отл
Джонс	хор	удовл	хор	неуд
Грант	удовл	хор	отл	удовл
Сингх	удовл	хор	отл	неуд
Френк	неуд	неуд	удовл	удовл
Маккай	отл	отл	хор	отл
Куксон	удовл	отл	отл	хор

Для извлечения информации и изменения содержания таблиц, соответствующих набору отношений, мы определим несколько основных операций над ними, а именно: **проект, соединение и выбор**. Это только три из многочисленных операций, созданных для манипулирования базами данных, теория которых опирается на язык множеств, отношений и функций.

Операция **проект** формирует новую таблицу из определенных столбцов старой. Например, **проект**({**Фамилия**, **Адрес**}) создается в таблице 3.

Пример 58

Найти проект({Фамилия, Основы матем., Дискр. матем.}).

Решение: смотри таблицу 4.

Таблица 3 - Проект({Фамилия, Адрес})

Фамилия	Адрес
Джонс	2 Мотт, Ньютон
Сингх	4А Ньюраод, Сифорт
Смит	17 Кренст, Сифорт
Смит	21 Паддинг Лэйн, Витэм
Чинг	4А Ньюраод, Сифорт
Грант	18 Иффлейроад, Сифорт
Маккай	133 Уффроад, Реадинг
Френк	11 Финнроад, Ньютон

Таблица 4 – Проект ({Фамилия, Основы матем., Дискр. матем.}).

Фамилия	Основы матем.	Дискр. матем.
Каммингс	отл	удовл
Джонс	хор	хор
Грант	удовл	отл
Сингх	удовл	отл
Френк	неуд	удовл
Маккай	отл	хор
Куксон	удовл	отл

Операция **соединение** объединяет две таблицы в большую, выписывая в одну строку информацию, соответствующую общему атрибуту. предположим, что R и S – отношения, представленные двумя таблицами, причем R – подмножество в прямом произведении $A_1 \times \ldots \times A_m \times B_1 \ldots \times B_n$, а S – в прямом $A_1 \times \ldots \times A_m \times C_1 \ldots \times C_p$. В этом случае общие атрибуты представлены множествами $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Соединение R и S – это подмножество в $A_1 \times \ldots \times A_m \times B_1 \ldots \times B_n \times C_1 \ldots \times C_p$, состоящее из элементов вида (a_1, a_2,

..., a_m, b_1, b_2, ..., b_m, c_1, c_2, ..., c_p), где (a_1, ..., a_m, b_1, ..., b_m) лежит в R, а (a_1, ..., a_m, c_1, ..., c_p) – в подмножестве S.

Например, соединение проектов дает таблицу 5.

Таблица 5 – Соединение проектов

Фамилия	Адрес	Основы матем.	Прогр.	Дискр. матем.	Вычисл. системы
Джонс	2 Мотт, Ньютон	хор	удовл	хор	неуд
Грант	18 Иффлейроад, Сифорт	удовл	хор	отл	удовл
Сингх	4А Ньюраод, Сифорт	удовл	хор	отл	неуд
Френк	11 Финнроад, Ньютон	неуд	неуд	удовл	удовл
Маккай	133 Уффроад, Реадинг	отл	отл	хор	отл

Операция **выбор** отбирает строки таблицы, удовлетворяющие подходящему критерию. Например, **выбор**(**Пол** = М и **Семейное положение** = Женат) представлено в таблица 6.

Таблица 6 – Проект (Пол = М и Семейное положение = Женат)

Личный номер	Фамилия	Пол	Дата рождения	Семейное положение	Адрес
5001476	Сингх	М	4.5.84	женат	4А Ньюраод, Сифорт
5083001	Грант	М	9.7.83	холост	18 Иффлейроад, Сифорт

Как иллюстрируют следующий пример, комбинация трех операций позволит нам извлекать различную информацию из баз данных.

Пример 59

Найдите таблицу, которая получится в результате операций:

R1 = **проект**(T2, {**Фамилия**, **Прогр.**, **Вычисл. системы**});

R2 = **выбор**(R1, **Вычисл. системы** = отл или **Прогр.** = отл).

Решение: во-первых, все столбцы таблицы Т2, отличные от **Фамилия**, **Прогр.** и **Вычисл. системы**, удаляются. В результате получится таблица R1. Затем, в новой таблице нужно оставить только те строки, в которых есть хотя бы одна оценка «отл», а остальные отбросить. Это даст нам требуемую таблицу R2 (таблица 7).

Таблица 7 – Таблица R2

Фамилия	Прогр.	Вычисл. системы
Каммингс	хор	отл
Маккай	отл	отл
Куксон	отл	хор

Пример 60

Найдите результат действий следующих операций:

R1 = **выбор**(T1, **пол** = Ж);

R2 = **проект**(T2,{**Фамилия**, **Дискр. матем.**});

R3 = **соединение**(R1, R2).

Решение: прежде всего выберем из таблицы T1 строки, соответствующие студенткам, и составим из них таблицу R1. Затем удалим из T2 все столбцы, кроме двух выбранных, и получим таблицу R2. Общим атрибутом таблиц R1 и R2 является **Фамилия**. Соединив R1 и R2, получим искомую таблицу (таблица 8).

Таблица 8 – Таблица соединение

Личный номер	Фамилия	Пол	Дата рождения	Семейное положение	Адрес	Дискр. матем.
4000123	Джонс	Ж	1.2.83	не замужем	2 Мотт, Ньютон	хор
5196236	Маккай	Ж	21.3.84	не замужем	133 Уффроад, Реадинг	хор
4936201	Френк	Ж	7.10.77	замужем	11 Финнроад, Ньютон	удовл

Пример 61

Выпишите последовательность операций (**выбор**, **проект** и **соединение**) для определения имен и адресов всех тех студенток, которые получили оценку не ниже «хор» по обоим предметам: основы математики и дискретная математика.

Решение: одна их последовательностей операций выглядит следующим образом.

R1 = **выбор**(T1, **пол** = Ж);

R2 = **выбор**(T2, **Дискр. матем.** = «отл» или **Дискр. матем.** = «хор»);

R3 = **выбор**(R2, **Основы матем.** = «отл» или **Основы матем.** = «хор»);

R4 = **соединение**(R1,R3);

R = **проект**(R4,{**Фамилия**, **Адрес**}).

1.12 Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение понятию алгебра. Приведите примеры.

2) Сформулируйте определение изоморфизма двух алгебр.

3) Дайте определение понятию алгебра Кантора. Приведите примеры.

4) Дайте определение понятиям образ и прообраз. Приведите примеры.

5) Сформулируйте определение функционального соответствия A→B. Самостоятельно изучите соответствия: биекцию, сюръекцию, инъекцию, в чем их различие.

6) Объясните понятие суперпозиции функций.

7) Изобразите структурные элементы.

8) Как определяется сеть? Изобразите простейшую сеть.

9) Дайте определение понятию характеристическая функция.

10) Дайте определение отношений строгого и нестрогого порядка. Приведите примеры.

11) Сформулируйте определение частично и полностью упорядоченного множества. Приведите примеры.

12) Объясните на примерах понятие алфавитного порядка.

13) Сформулируйте определения наибольшего и максимального элемента; минимального и наименьшего элемента.

14) Дайте определение отношения эквивалентности. Приведите примеры, свойства.

15) Укажите свойства классов эквивалентности.

16) Изучите самостоятельно такие понятия, как: фактор - множество, ядро функции.

17) Для чего служит треугольник Паскаля?

18) Запишите основные комбинаторные формулы.

19) Где и как применяется комбинаторика в теории вероятностей и физике?

20) Сформулируйте правила суммы, произведения.

1.13 Практические задания

Задание 1

Пусть X - множество {1,2}, а Y - множество $\{x: x = y+z;\ y,z \in X\}$. Определить в явном виде (списком) множество Y.

Каковы множества $Y' = \{y: y = x+z;\ x,y \in X\}$ и $Y'' = \{y: x = y+z;\ x,z \in X\}$?

Задание 2

Задать различными способами множество M_2^n всех чисел, являющихся степенями двойки: 2, 4, 8, 16, ..., не превышающих 300?

Задание 3

Задать различными способами множество натуральных чисел, кратных пяти: 5, 10, 15, 20, …

Задание 4

Задать в явном виде (списком) множество $\beta(U)$ всех подмножеств множества U, если U = {1,2,5,7}. Какова мощность множества $\beta(U)$.

Задание 5

Нарисуйте диаграммы Эйлера - Венна для иллюстрации каждого из следующих тождеств.

1) $A–B = A \cap \neg B$;

2) $\neg (A–B) = B \cup \neg A$;

3) $(A–B) \cup (B–A) = (A \cup B)–(A \cap B)$.

Задание 6

Доказать или опровергнуть, что:

1) $A–B \cup C = (A \cup C)–(B \cup C)$;

2) $(A–B)–C = (A–C)–B$;

3) $A–B = A \cap \neg B$.

Задание 7

Проиллюстрировать на содержательном примере некоммутативность операции разности множеств: $A \backslash B \neq B \backslash A$.

Задание 8

Осуществить операции над множествами A, $B \subseteq U$, если:

$A = \{a,b,d\}$; $B = \{b,d,e,h\}$; $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$.

Задание 9

Даны два произвольных множества A и B, таких, что $A \cap B = \varnothing$. Что представляют собой $A \backslash B$ и $B \backslash A$?

Задание 10

Пусть $A = \{1,2\}$, $B = \{2,3\}$, $C = \{1,3\}$. Найти

1) $A \cup B \cup C$;

2) $A \backslash (B \cup C)$;

3) $(A \cup B) \backslash (A \cap B)$;

4) $A \cap B \cap C$;

5) $(A \backslash B) \cup C$.

Задание 11

Верно ли утверждение $A \times B = B \times A$?

Задание 12

Найти $A \times B \times C$:

1) где $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\alpha,\beta\}$;

2) где $A = \{1,4\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\alpha,\beta\}$;

3) где $A = \{3,1\}$, $B = \{b,a\}$, $C = \{\alpha,\beta\}$.

Задание 13

Какие из следующих подмножеств множества $Z \times Z$ являются функциями $Z \to Z$?

1) $\{(n,2n): n \in Z\}$;

2) $\{(2n,n): n \in Z\}$;

3) $\{(n,2^n): n \in Z\}$.

Задание 14

Задайте каждое из следующих множеств описанием свойств входящих в него элементов:

1) $\{1,2,3,4,5,6\}$;

2) $\{2,4,6,8,10\}$;

3) $\{1,4,9,16,25\}$;

4) $\{23,5,7,11,13,19,23,29\}$.

Задание 15

Перечислите элементы множеств

1) $\{x \mid x^2-5x+6 = 0\}$;

2) $\{x \mid (x-1)(x^3-1) = 0\}$;

3) $\{x \mid x^2+10x+24 = 0\}$.

Задание 16

Проиллюстрировать на содержательном примере некоммутативность операции разности множеств: $A \setminus B \neq B \setminus A$.

Задание 17

Осуществить операции над множествами $A = \{2,4,6,8\}$, $B = \{3,6,9\}$, если $U=\{1,2,3,\ldots,10\}$.

Задание 18

Осуществить операции над множествами $A,B \subseteq U$, если: $A = \{a,b,d\}$; $D = \{b,d,e,h\}$; $U = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$.

Задание 19

Даны два произвольных множества A и B такие, что $A \cap B = \varnothing$. Что представляют собой $A \setminus B$ и $B \setminus A$?

Задание 20

Указать, какие из следующих утверждений справедливы:

1) $0 \in \varnothing$;

2) $\varnothing = \{0\}$;

3) $|\{\varnothing\}| = 0$;

4) $|\varnothing| = 0$?

Задание 21

Найти $A \times B \times C$, где $A = \{1,2\}$, $B = \{a,b\}$, $C = \{\alpha,\beta\}$.

Задание 22

Доказать или опровергнуть, что

1) $(A \setminus B) \cup C = (A \cup C) \setminus (B \cup C)$;

2) $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus B$;

3) $A \setminus B = A \cap \neg B$.

Задание 23

Какие из следующих подмножеств множества ZxZ являются функциями $Z \to Z$?

1) $\{(n,2n)\colon n \leq Z\}$;

2) $\{(2n,n)\colon n \leq Z\}$;

3) $\{(n,2n)\colon n \leq Z\}$;

4) $\{(n,m)\colon n \leq Z$ и $m = an$, для $a \leq Z\}$.

Задание 24

Построить схемы из функциональных элементов для логических функций f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7. Значения приведены в таблицах 9 и 10:

Таблица 9 – Значения функции

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
0	0	1	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	1	0	1	0	1

Таблица 10 – Значения функции

x	y	z	f_6	f_7
0	0	0	1	0
0	1	0	0	0
1	0	0	1	0
1	1	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	1	1	0
1	0	1	0	1
1	1	1	1	1

Задание 25

Записать предикатной формулой предложение "Любой человек имеет отца".

Задание 26

Рассмотреть варианты навешивания кванторов на предикат P(x), определенный на множестве натуральных чисел с нулем N_0. Дать словесную формулировку исходных и полученных высказываний и определить их истинность, если:

1) $P(x) = \exists S(y,y,x)$;
2) $P(x) = \exists \Pi(y,y,x)$;
3) $P(x) = \exists \Pi(x,y,y)$;
4) $P(x) = \exists S(x,y,y)$.

Примечание. S и П - предикаты суммы и произведения соответственно.

Задание 27

Пусть $Q(x,y)$ - предикат порядка "$x \le y$", определенный на конечном множестве натуральных чисел $M = \{0,1,2,\ldots,9\}$. Рассмотреть различные варианты квантификации его переменных. Определить истинность получаемых выражений.

Задание 28

Пусть $S(x,y,z)$ и $\Pi(x,y,z)$ - предикаты суммы и произведения, определенные:

1) На множестве Z всех целых чисел;

2) На множестве N_0 натуральных чисел с нулем.

Какой смысл имеют формулы:

1) $\exists y\ \forall x\ S(x,y,z)$;

2) $\exists y\ \forall x\ \Pi(x,y,z)$;

3) $\forall z\ \forall x\ \exists y\ S(x,y,z)$;

4) $\forall z\ \forall x\ \exists y\ \Pi(x,y,z)$.

Задание 29

Чему равна композиция функций $f(x) = 2x$ и $g(x) = 1+x$.

Задание 30

Задать несколько возможных типов для функции $f(x) = 2^n$. Для каждого типа определить:

1) свойства функции f;

2) является ли f отображением и, если является, то каким.

Задание 31

Являются ли коммутативными следующие операции:

1) арифметические на множестве натуральных чисел N;

2) бинарные над множествами.

Проиллюстрировать ответы на примерах.

Задание 32

Показать дистрибутивность справа и слева операции умножения относительно сложения на множестве N. Является ли дистрибутивной справа (слева) операция возведения в степень относительно умножения, операция сложения относительно умножения?

Задание 33

Доказать дистрибутивность справа и слева операций пересечения и объединения относительно друг друга на системе множеств:

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ - дистрибутивность слева $\cap$ относительно $\cup$;

2) $A\cup(B\cap C) = (A\cup B)\cap(A\cup C)$ - дистрибутивность слева $\cup$относительно $\cap$;

3) $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(A\cap C)$ - дистрибутивность справа $\cap$относительно $\cup$;

4) $(A\cap B)\cup C = (A\cup C)\cap(A\cup C)$ - дистрибутивность справа $\cup$относительно $\cap$.

Задание 34

Указать каким из отношений, приведенных в таблице 11, являются порядком:

Таблица 11 - Отношения

	Множество S	Отношение ρ
1	Произвольное	(a,b) ≤ ρ, если a = b
2	Произвольное	(a,b) ≤ ρ, если a и b лежат в одном смежном классе данного раз. ∑ множества S
3	Z	(m,n) ≤ ρ, если m ≤ n
4	Z	(m,n) ≤ ρ, если m делит n (считается, что 0 делит 0)
5	Z+U{0}	(m,n) ≤ ρ, если m делит n
6	Все подмножество данного множества	(A,B) ≤ ρ, если A с B
7	Все подмножество данного множества	(A,B) ≤ ρ, если A B не пусто
8	Множество действительных функций	(f,g) ≤ ρ, если f(x) ≤ g(x) для любого x

Задание 35

Указать какие из отношений являются порядком

1) множество S - произвольное, (a,b) ≤ ρ , если a = b;

2) множество S - произвольное, (a,b) ≤ ρ , если a и b лежат в одном смежном классе данного разбиения;

3) множество S - множество целых чисел, (m,n) ≤ ρ, если m ≤ n;

4) Z+U{0}, (m,n) ≤ ρ, если m делит n;

5) все подмножество данного множества, (A,B) ≤ ρ,если A в B;

6) все подмножества данного множества, (A,B) ≤ ρ, если A∩B ≠ Ø;

7) S - множество действительных функций (f,g) ≤ ρ, если f(x) ≤ g(x), для любого x;

8) S - множество действительных функций $(f,g) \le \rho$, если $f(x) \le g(x)$, для некоторого x.

Задание 36

Доказать, что S и $\neg$ S задают разбиением множества υ. Проиллюстрировать это на диаграмме Венна.

Задание 37

Приведите пример множеств с зафиксированными на них различными порядками.

Задание 38

Привести примеры частично упорядоченных множеств:

1) без 0;

2) без 1;

3) без 0 и 1.

Задание 39

Доказать, что во всяком конечном частично упорядоченном множестве существуют как максимальные, так и минимальные элементы.

Задание 40

Пусть $M = \beta(A)$, $A = \{1, 2, 3, 4\}$. Найти все элементы (пары) отношения R на M, если R означает:

1) $\subset$;

2) $\subseteq$;

3) "пересекаться с";

4) "быть дополнением к".

Задание 41

Пусть отношение R задано на $M = \{1,2,3,\ldots,9\}$. Выписать все элементы множества R, если:

1) $R = \{(a, b)\}$: $a,b \in M$; $(a+1)$ - делитель $(a+b)\}$;

2) $R = \{(a, b)\}$: $a,b \in M$; a - делитель $(a+b)$, $a \ne 1\}$.

Задание 42

Какими свойствами характеризуются следующие отношения на $M = \{1,2,3,\ldots,9\}$:

1) $R_1 = \{(a, b)\}$: $(a–b)$ - четное$\}$;

2) $R_2 = \{(a, b)\}$: $(a+b)$ - четное$\}$;

3) $R_3 = \{(a, b)\}$: $(a+1)$ - делитель $(a+b)\}$;

4) $R_4 = \{(a, b)\}$: a - делитель $(a+b)$, $a \ne 1\}$.

Задание 43

Показать, что R, определенное на множество Z n R m, n = 2k m для некоторого k Z является отношением эквивалентности.

Задание 44

Являются ли следующие отношения отношениями эквивалентности

1) отношения на множестве слов n слово R синонимы слова S;

2) отношение на множестве спорт "A и B имеют одинаковый спортивный разряд";

3) отношение на множестве людей "X отец Y";

4) отношение на множестве студентов "быть на одном курсе".

Задание 45

Доказать, что совокупность смежных классов эквивалентности ρ на множестве P является разбиением.

Задание 46

Пусть M - конечное множество. Какие отношения эквивалентности дают наибольший и наименьший индекс разбиения.

Задание 47

Пусть R_1 и R_2 - отношения на N^2, определяемые следующим образом: (a,b) R_1 (c,d) тогда и только тогда, когда $a \leq c$ и $b \leq d$; (a,b) R_1 (c,d) тогда и только тогда, когда $a \leq c$ и $b \geq d$. Являются ли R_1 и R_2 отношениями порядка?

Задание 48

Пять школьников – Иванов (a), Сидоров (b), Петров (c), Дроздов (d), Егоров (e) из 5 городов – Киева (a1), Новгорода (b1), Тольятти (c1), Донецка (d1), Жигулевска (e1) – ответили на вопрос: «откуда вы приехали?». Каждый дал ответ.

Задание 49

После обсуждения состава участников предполагаемой экспедиции было решено, что должны выполниться два условия.

Если поедет Арбузов(X), то должен поехать Быков(Y) или Воинов(Z). Если поедут X и Z, то поедет и Y.

Задание 50

Известно, что из 100 студентов живописью увлекаются - 28, спортом - 42, музыкой - 30, живописью и спортом 10, живописью и музыкой - 8, спортом и музыкой - 5, живописью, спортом и музыкой - 3. Определить: Количество студентов, увлекающихся только спортом.

1.14 Примеры решения задач

1) Задать различными способами множество N всех натуральных чисел: 1, 2, 3, ….

Списком задать множество N нельзя ввиду его бесконечности.

Порождающая процедура содержит два правила:

а) $1 \in N$;

б) если $n \in N$, то $n+1 \in N$.

Описание характеристического свойства элементов множества N: N = {x: x - целое положительное число}.

2) Задать различными способами множество M всех четных чисел 2,4,6,..., не превышающих 100.

$M_{2n} = \{2,4,6,\ldots,100\}$.

а) $2 \in M_{2n}$;

б) если $n \in N$, то $n+2 \in M_{2n}$;

в) $n \leq 98$.

M_{2n} = {n: n - целое положительное число, не превышающее 100} или M_{2n} = {n: $n \in N$ и $n/2 \in N$, $n \leq 100$}.

3) Найти все подмножества двух элементного множества A = {a,b}. Множество A имеет четыре подмножества, а именно: Ø, {a}, {b}, {a,b}.

4) Найти соотношения между множествами: A - столицы всех государств, расположенных на земном шаре; B - столицы европейских государств.

В этом случае говорят, что B - подмножество A и пишут $B \subseteq A$. Среди подмножеств данного множества A особо отметим следующие два подмножества: множество A, $A \subseteq A$, пустое множество Ø, т.е. множество не содержащее ни одного элемента. При этом $\varnothing \subseteq A$.

5) Найти пересечение данных множеств

$A = \{x \mid x \in R \text{ и } 2 \leq x \leq 7\}$

$B = \{x \mid x \in R \text{ и } -1 \leq x \leq 5\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in R \text{ и } 2 \leq x \leq 5\}$

6) Пусть A - множество треугольников на плоскости. B - множество правильных многоугольников на плоскости. Найти пересечение множеств.

$A \cap B$ - множество правильных треугольников на плоскости.

7.) Найти A\B

$A = \{-1,0,1,2,4,7,9\}$

$B = \{-1,0,4,5,6\}$

$A \setminus B = \{1,2,7,9\}$

8) Найти A×B, B×A

A={1,2};

B={3,4,5};

AXB={(1,3);(1,4);(1,5);(2,3);(2,4);(2,5)};

BXA={(3,1);(4,1);(5,1);(3,2);(4,2);(5,2)}.

9) Доказать: $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

Доказательство: Рассмотрим отдельно левую и правую части равенства

$A \Rightarrow B = \overline{A} \vee B; \overline{B} \Rightarrow \overline{A} = \overline{\overline{B}} \vee \overline{A} = B \vee \overline{A} = \overline{A} \vee B$.

Результаты преобразований левой и правой частей совпадают. Следовательно, $A \Rightarrow B = \overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

10) Доказать, что совокупность смежных классов эквивалентности ρ на множестве P является разбиением (в этом случае смежные классы обычно называются классами эквивалентности).

Ввиду рефлексивности каждый элемент множества P содержится в определенном им смежном классе. Рассмотрим теперь смежные классы A и B, определяемые эквивалентами соответственно a и b. Если x ≥ A, y ≥ B и z ≥ A∩B, то имеем x ρ a, z ρ a, z ρ b, y ρ b. Симметричность отношения ρ позволяет записать цепочки: x ρ a, a ρ z, z ρ b и y ρ b, b ρ z, z ρ a, из которых в силу транзитивности вытекает, что x ρ b и y ρ a, т.е. A⊂B⊂A. Таким образом, несовпадающие смежные классы не пересекаются.

Проверьте, что высказывание «число a меньше числа b» задает бинарное отношение между множествами A = R и B = R. Дайте геометрическую интерпретацию этому отношению в декартовой системе координат на плоскости.

Подмножеством R(α) для данного отношения является множество пар (a,b), где a < b. Следовательно, отношение является бинарным. Геометрически множество пар (a,b) соответствует множеству точек, лежащих над биссектрисой 1-го и 3-го координатных углов (A считаем совпадающим с осью абсцисс в декартовой системе координат на плоскости, а B - с осью ординат). Два числа a и b будут находится в отношении α (отношении «меньше»), если точка M с координатами (a;b) лежит над биссектрисой. Если точка M с координатами (a;b) лежит под биссектрисой, то числа a и b не находятся в отношении α.

Пусть x определен на множестве людей M, а P(x) - предикат "x - смертен". Дать словесную формулировку предикатной формулы ∀x P(x).

Выражение $\forall x\ P(x)$ означает "все люди смертны". Оно не зависит от переменной x, а характеризует всех людей в целом, т.е. выражает суждение относительно всех x множества M.

11) Осуществить операции над множествами A = {a,b,c,d} и B = {c,d,e,f,g,h}.

$A \cup B = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$; $A \cap B = \{c,d\}$.

Универсальное множество U не определено, поэтому, строго говоря, операции дополнения над множествами A и B не могут быть выполнены. Дополним условие.

Пусть U = {a,b,c,d,e,f,g,h}, тогда $\neg A = U \backslash A = \{e,f,g,h\}$, $\neg B = \{a,b\}$. $A \backslash B = \{e,f,g,h\}$.

12) Пусть R - отношение на N: R = {(a,b): a > b} - "быть больше". Выполнить операции над R.

$R \cup R = R$;

$R \cap R = R$;

$R \backslash R = \varnothing$;

$R^{-1} = \{(a,b): a < b\}$ - "быть меньше";

R€ $= U \backslash R = \{(a,b): a \le b\} = R^{-1} \cup E$ - "быть не больше", где E - тождественное отношение, E = {(a,b): a = b};

$R \cdot R = R^{(2)} = \{(a,b): a-1 > b\}$ - "быть больше по крайней мере на 2";

$R^{\circ} = R$ (так как R транзитивно);

$R^{*} = R^{\circ} \cup E = \{(a,b): a > b$ или $a = b\} = \{(a,b): a \ge b\}$ - "быть не меньше".

13) Пусть X = {0,1}, Y = {a,b}. Найти $X \times Y$, $Y \times X$, X^2, $X \times Y \times X$.

$X \times Y = \{(0,a),(0,b),(1,a),(1,b)\}$.

$Y \times X = \{(a,0),(a,1),(b,0),(b,1)\}$.

Таким образом, $X \times Y \ne Y \times X$.

$X^2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$.

$X \times Y \times X = \{(0,a,0),(0,a,1),(0,b,0),(0,b,1),(1,a,0),(1,a,1),(1,b,0),(1,b,1)\}$.

14) Пусть M - множество клеток шахматной доски, $M = X \times Y$, где X = {a,b,c,d,e,f,g,h}, Y = {1,2,3,4,5,6,7,8}.

15) Определить бинарное отношение $R_Л$ на M для ладьи так, что $(m_1,m_2) \in R_Л$ тогда и только тогда, когда m_1 и m_2 - элементы M и ладья может пройти от m_1 к m_2 одним ходом а пустой доске (Задать $R_Л$ описанием его характеристического свойства).

Ладья за один ход на шахматном поле может изменить либо горизонтальную координату, либо вертикальную, но не обе координаты вместе.

Обозначим $m_1, m_2 \in M$: $m_1 = (x_1, y_1)$, $m_2 = (x_2, y_2)$, где $x_1, x_2 \in X$, $y_1, y_2 \in Y$. Тогда $R_Л = \{((x_1,y_1),(x_2,y_2)): (x_1 = x_2$ и $y_1 \neq y_2)\}$ или $(x_1 \neq x_2$ и $y_1 = y_2)\}$.

1.15 Лабораторные работы

Лабораторная работа 1

Задание: Составить алгоритм и написать программу реализации операции над множествами.

$A = [-50; 50]$;

$B = (-10; 100]$;

$C = (-\infty; 30)$;

$D = (50; +\infty)$;

$E = [30; 100)$.

$A \cap B \backslash C \cup E$;

$E \cup A \backslash C \cup B \cap D$;

Дополнение A до $U = [-100; 100]$;

Вычислить декартово произведение $A \times B$. $A = \{a,b,c,d,e,f\}$. $B = \{(1,2),(2,4),(4,5)\}$.

Вычислить булеан множества M. $M = \{1,2,3\}$. $B = 2n$, n - число элементов множества.

Лабораторная работа 2

Задание: Составить алгоритм и написать программу, позволяющую по данным двум множествам произвести декартово произведение и проверить выполняемость свойств:

- рефлексивность;
- симметричность;
- транзитивность.

Лабораторная работа 3

Задание: Пусть даны соответствия:

"x делится на y";

"x делится на y с остатком 1".

Построить граф соответствия. Определить, каким свойством обладает соответствие.

- всюду определенное;
- функциональное.
- сюрьективное.

- инъективное.

Лабораторная работа 4

Задание: Дано n (n ≥ 2) произвольных цифр: $a_1, a_2, \ldots, a_n$, где $ai \in \{1,2,\ldots,9\}$ и произвольное число m.

Написать программу, которая расставляла бы между каждой парой цифр $a_1, a_2, \ldots, a_n$, записанных именно в таком порядке, знаки "+" и "–" так, чтобы значение получившегося выражения было равно m.

Лабораторная работа 5

Задание: Составить алгоритм и написать программу, реализующую Akn, ┐Akn, Ckn, ┐Ckn, Pn и бином Ньютона. Посчитать количество элементов и вывести их на экран.

1.16 Тест для самоконтроля

1) Образует ли $(R;+,\cdot)$ алгебру?

а)Да.

б) Нет.

2) Определите, можно ли установить взаимнооднозначное соответствие между алгебрами (Z;+) и (Z3;+)

а) Да.

б) Нет.

3) Изоморфны ли алгебры $(M;\cup)$ и $(M;\cap)$?

а) Да

б) Нет

4) Изоморфны ли алгебры (Z;+) и (Z2;+), где Z2 - множество целочисленных двухмерных векторов?

а) Да

б) Нет

5) Если $(a,b) \in G$, $G \subseteq A \times B$, $b \to a$, то $b \in B$ называется ...

а) Образом

б) Прообразом

6) Если $(a,b) \in G$, $G \subseteq A \times B$, $b \to a$, то $a \in A$ называется ...

а) Образом

б) Прообразом

7) Если A, B - числовые множества, то соответствие A→B называется...

а) Функцией

б) Отношением

8) Какое соответствие изображено на рисунке 25?

а) Всюду определённое;

б) Функциональное;

в) Сюръективное;

г) Инъективное.

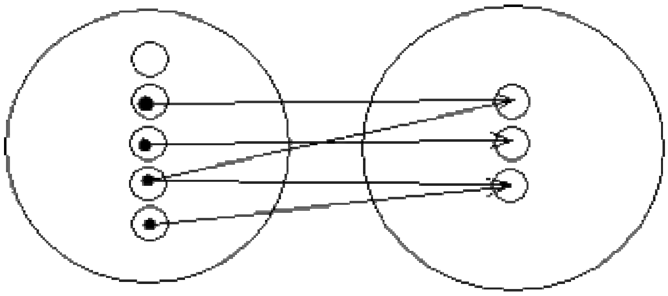


Рисунок 25 - Соответствие

9) Отношение, которое является и инъективным и сюръективным называется ...

а) Биекцией;

б) Всюду определённым;

в) Функциональным.

10) Бинарное отношение, являющееся антирефлексивным, антисимметричным и транзитивным, называется...

а) Отношение строгого порядка;

б) Отношение нестрогого порядка;

в) Отношение эквивалентности.

11) Бинарное рефлексивное, антисимметричное и транзитивное отношение называется ...

а) Отношение строгого порядка

б) Отношение нестрогого порядка

в) Отношение эквивалентности

12) Как называется множество на котором задано отношение порядка, причём любые два элемента множества сравнимы?

а) Частично упорядоченное множество.

б) Линейно упорядоченное множество.

13) Определите сколько наибольших элементов и максимальных элементов на схеме (рисунок 26):

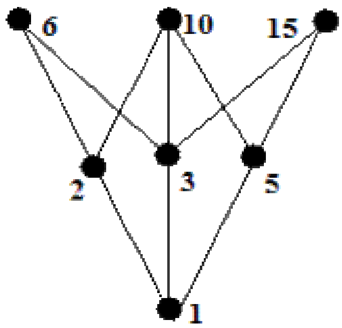


Рисунок 26 – Схема элементов

а) Максимальных - 3. Наибольшего нет.

б) Максимальных - 3. Наибольший - 1.

в) Максимальный - 1. Наибольший - 1.

г) Максимальных нет. Наибольших - 3.

14) Определите сколько наименьших элементов и минимальных элементов на схеме из предыдущего вопроса.

а) Наименьших - 1. Минимальных - 1.

б) Наименьших - 1. Минимальных нет.

в) Наименьших нет. Минимальных - 1.

15) Укажите свойство классов эквивалентности.

а) $[a] \cap [b] = \varnothing$

б) $[a] \cup [b] = \varnothing$

в) $[a] = [b]$

16) Отношением эквивалентности называется ...

а) Рефлексивное, симметричное, транзитивное отношение.

б) Антирефлексивное, симметричное, транзитивное отношение.

в) Рефлексивное, антисимметричное, транзитивное отношение.

г) Рефлексивное, симметричное, антитранзитивное отношение.

17) Верно ли, что $a \equiv b \Rightarrow [a] = [b]$?

а) Да

б) Нет

18) Вычислите C_4^3.

а) 20.

б) 15.

в) 4.

г) 7.

19) Определите число перестановок Р5.

а) 5.

б) 1/5.

в) 32.

г) 1/32.

20) Определите, какая формула соответствует размещению без повторений.

а) $\frac{n!}{(n-k)!}$

б) nk

в) $\frac{n!}{(n-k)!k!}$

г) n!

21) Установите название формулы $\frac{n!}{(n-k)!k!}$.

а) A_n^k

б) A_n^k

в) C_n^k

г) C_n^k

2. Модуль булевы функции

2.1 Представление логических функций

В базовом курсе содержались элементы математической логики: истинные и ложные высказывания и операции над ними. Теперь рассмотрим те же и другие понятия и соотношения, используя функциональный язык. Будем считать простые высказывания независимыми переменными, сопоставив истинным высказываниям значение 1, а ложным - значение 0. Тогда операции над высказываниями представляют собой функции этих переменных. Введем необходимые понятия.

Определение 37: Логические переменные - это переменные, принимающие значения из двухэлементного множества B{0;1}. Они называются также булевыми, или двоичными переменными.

Опеределение 38: Булева функция (логическая функция, функция алгебры логики) - это функция одной или нескольких переменных $Z = f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$, где X_1, X_2, …, X_n, Z - логические переменные, т. е. и значения аргументов, и значение функции - ноль или единица. Тем самым, булева функция n переменных есть функция на B^n - множестве n - мерных векторов $\sigma = (\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$, компоненты которых равны 0 или 1: $\sigma_i \leq B$. Можно применять векторные обозначения ~X, f(~X) для сокращения записи. Пользуясь другими терминами, можно считать областью определения булевой функции множество вершин n - мерного единичного куба E^n.

На рисунке 27 изображена функция 3 переменных f(X,Y,Z), принимающая значение 1 на наборах (001),(011),(100). Обратите внимание на допустимую форму записи: можно не разделять запятыми значения аргументов - все они однозначные числа.

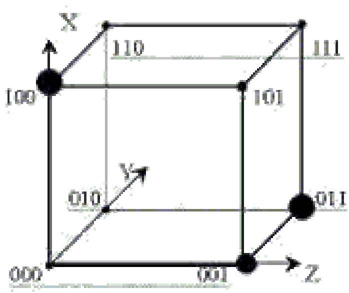


Рисунок 27 – Единичный куб

Если число переменных равно n и любая из них может независимо от других принимать 2 значения, то число различных n - векторов равно 2^n.

Относительно каждой функции $Z = f\{X_1,X_2,...,X_n)$ все множество B^n разбивается на два класса n-векторов: прообраз значения 0 и прообраз значения 1 функции Z . Мы будем рассматривать только всюду определенные функции.

Если считать, что переменные $X_1,X_2,...,X_n$ обозначают истинность (значение 1) или ложность (значение 0) высказываний-аргументов, то функция Z выражает истинность или ложность определенного сложного высказывания при различных сочетаниях значений аргументов. Например, конъюнкция двух высказываний - это сложное высказывание, истинное тогда и только тогда, когда истинны оба составляющих простых высказывания. С функциональной точки зрения конъюнкцию можно рассматривать как булеву функцию двух логических переменных, принимающую значение 1 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1.

Для задания логической функции нужно указать каким-либо образом, какое значение принимает функция на тех или иных наборах значений аргументов. Поэтому естественным является табличное представление булевых функций - для функции $Z = f(X_1,X_2,...,X_n)$ - таблица из 2^n строк - n-мерных булевых векторов в алфавитном порядке, каждому из которых сопоставлено значение функции Z, равное 0 или 1. Заметим, что булева функция Z является на B^n характеристической функцией того множества точек B^n, для которых Z = 1.

В таблице 12 представлены все функции одной переменной - их 4. В 1-м столбце - значения переменной X; в каждом из последующих - значения соответствующей функции, обозначение функции - в 1-й строке. Во 2-м столбце - функция-константа $Z \equiv 0$, в 5-м - функция-константа $Z \equiv 1$. В 3-м столбце тождественная функция Z = X , в 4-м - функция $Z = \neg X$, которую называют отрицанием. Второй способ обозначения подчеркивает, что отрицание - одноместная функция аргумента X.

Аналогично могут быть заданы функции нескольких переменных. Некоторые из них - для двух переменных - в таблице 13. Сравните их (столбцы 3 – 5) с таблицами истинности основных логических операций: конъюнкции, дизъюнкции, импликации, эквивалентности, для которых значения аргументов и результатов операций обозначались буквами И, Л. Отметим также, что с арифметической точки зрения, т.е. если рассматривать 0 и 1 как натуральные числа с обычными операциями арифметики, выполнены равенства:

$\neg X = 1 \backslash X$; $X \cap Y = X \times Y = \min(X,Y)$;

$X \cup Y = X+Y-XY = \max(X,Y)$.

Поэтому конъюнкцию $X \cap Y$ называют умножением и записывают со знаком произведения: $X \times Y$ или вообще - как в алгебре - без знака: XY. Дизъюнкцию иногда удобно называть логическим сложением, а связываемые ею члены - логическими, или дизъюнктивными слагаемыми. Однако следует иметь в виду, что, во-первых, на наборе (1,1) значение дизъюнкции не совпадает с арифметической суммой, а, во-вторых, термин "сумма" для логических переменных употребляется и в другом значении, представленном в той же таблице 5. В двух последних столбцах таблицы 2 представлены функции, которые не встречались раньше, а именно:

Определение 39: Сумма по модулю 2 - функция двух переменных, равная 0, если значения аргументов совпадают, и 1 в противном случае; ее обозначение - $X \oplus Y$. Арифметическое значение $(X \oplus Y)$ - остаток от деления числа $(X+Y)$ на 2, - отсюда название. Другое название - неэквивалентность, поскольку выполнено тождество: $X \oplus Y = \neg(X \leftrightarrow Y)$.

Сумма по модулю 2 как бинарная операция обладает свойствами коммутативности и ассоциативности $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$, и поэтому ее можно записывать без скобок $a \oplus b \oplus c$ и переставлять слагаемые.

Опеределение 40: Штрих Шеффера - функция двух переменных, равная 0 тогда и только тогда, когда оба аргумента равны 1. Обозначение: $X \mid Y$, условное название "X несовместно с Y". Выполнены тождества:

$X \mid Y = \neg(X \cap Y) = \neg X \cup \neg Y$.

Если принять, что всевозможные наборы значений двух аргументов (как легко видеть, их 4) расположены в таблице в алфавитном порядке, то каждая функция двух переменных полностью задается столбцом значений длины 4. Так же, булевым вектором длины 2^n задается логическая функция n переменных. Для удобства записи можно транспонировать столбец значений в строку и таким сокращенным способом задавать булевы функции. Например, $(0001)^T$ представляет конъюнкцию, $(0111)^T$ - дизъюнкцию, $(1101)^T$-импликацию; $(11001100)^T$ представляет функцию трех переменных g_2 , заданную в последнем столбце таблицы 14. Для получения таблицы нужно приписать слева к столбцу значений стандартный (для каждого n) перечень всех n-наборов, расположенных в алфавитном порядке.

Для задания булевой функции наряду с транспонированным столбцом значений функции можно использовать сокращенную запись: кортеж номеров тех строк таблицы, где функция равна 1 (номера могут быть записаны в десятичной системе в возрастающем порядке). Например, функцию

m_3 из таблицы 6 можно задать кортежем: [3,5,6,7], а функцию g_2 из той же таблицы - [0,1,4,5]. Это особенно удобно, если функция принимает значение 1 на небольшом числе наборов, по сравнению с их общим количеством.

Важный пример применения булевых функций дают арифметические действия над двоичными числами: поскольку возможные знаки в двоичной системе суть 0 и 1, то зависимости знаков результата от знаков слагаемых/сомножителей выражаются булевыми функциями. При сложении двух однозначных двоичных чисел A и B знак суммы в младшем разряде равен $(A \oplus B)$, а знак переноса возникает, только если оба слагаемых равны 1, т.е. $\sigma = A \cap B$. Умножение однозначных двоичных чисел тождественно конъюнкции, что фактически отмечено выше.

Таблица 12 – Таблица истинности тождественной операции и противоречия

X	0	X	$\neg$X	1
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Таблица 13 – Таблица истинности основных операций

X	Y	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$X \rightarrow Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \oplus Y$	X | Y
0	0	0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	1
1	1	1	1	1	1	0	0

Таблица 14 – Таблица истинности функций

X	Y	Z	m_3	g_1	g_2
0	0	0	0	0	1
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0

В таблице 14 представлены 3 функции трех переменных. Первую из них - m_3 (X,Y,Z) называют иногда функцией большинства - ее значение равно значению, которое принимает большинство аргументов (т.е. два или три): если в наборе больше единиц, чем нулей, то и значение функции равно 1. Заметим, что при сложении двух многозначных двоичных чисел в каждом разряде, кроме самого младшего, складываются 3 однозначных числа: знаки двух слагаемых в этом разряде и знак переноса из предыдущего разряда. Таким образом, знак суммы как логическая функция есть сумма по модулю 2 трех булевых переменных. Знак переноса 1 возникает, если при таком сложении знаков число единиц равно 2 или 3, т.е. он равняется значению функции большинства от тех же 3 переменных.

В той же таблице заданы две другие функции, обозначенные g_1 и g_2 . По форме - это функции трех переменных, однако нетрудно убедиться, что $g_1 = X \cup Z$, $g_2 = \neg Y$. Как видим, функция g_1 не зависит от аргумента Y, а функция g_2 от аргументов X, Z . Действительно, если, например, X = 0, Z = 1, то и при Y = 0 (набор 001), и при Y = 1 (набор 011) выполнено равенство $g_1 = 1$. Таким же образом проверяются остальные 3 сочетания переменных X и Z. Введем определение.

Несущественные (фиктивные) переменные: для функции $Z = f(X_1,X_2,...,X_{k-1},X_k,X_{k+1},...,X_n)$ переменная X_k называется несущественной, если выполнено $f(X_1,X_2,...,X_{k-1},0,X_{k+1},...,X_n) = f(X_1,X_2,...,X_{k-1},1,X_{k+1},\dots,X_n)$ при всех значениях $X_1, X_2, \dots, X_{k-1}, X_{k+1}, \dots, X_n$.

Таким образом, для функции g_1 - несущественной переменной является Y, а для функции g_1 - несущественные переменные X и Z. Если относить к функциям n переменных и функции, существенно зависящие не от всех своих переменных (т.е. являющиеся по существу функциями меньшего числа переменных), то общее число функций n переменных равно числу булевых векторов длины 2^n, т.е. 2^{2n}. Для одной переменной это число равно 4 (таблица 1); для двух переменных - $2^4 = 16$; для трех переменных - $2^8 = 256$; четырех переменных -$2^{16} = 65536$ и т.д.

Множество всех логических функций, от любого конечного числа переменных обозначается P_2.

Если X_1 - фиктивная переменная функции $Z = f(X_1,X_2,\dots,X_n)$, то первая половина задающего ее столбца значений совпадает со второй, и если отбросить вторую половину таблицы этой функции и затем удалить 1-й столбец (состоящий из нулей), то останется таблица некоторой функции (n–1) переменных $X_2, ..., X_n$. Аналогично, если X_k - фиктивная переменная функции $Z = f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ и вычеркнуть из таблицы столбец переменной X_k и все строки с единичным значением X_k (т.е. строки, в которых $X_k = 1$), то останется таблица функции $g(X_1,X_2,\ldots,X_{k-1},X_{k+1},\ldots,X_n)$. Будем говорить, что g получается из f удалением, а f из g - введением фиктивной переменной X_k.

Функции, которые могут быть получены друг из друга удалением и введением фиктивных переменных, считаются *равными*. Очевидно, равенство функций есть отношение эквивалентности на P_2, поэтому множество всех булевых функций разбивается на классы равных функций. В этом смысле, использованные выше записи $g_1 = X \cup Z$, $g_2 = \neg Y$ - правильны, т.е. функция g_1 равна функции двух переменных $X \cup Z$, имеющей столбец значений $(0111)^T$, а функция g_2 равна функции одной переменной Y , имеющей столбец значений $(10)^T$.

Понятно, что удаление фиктивных переменных делает задание функции таблицей более компактным. Однако и введение фиктивных переменных может быть полезным: некоторую совокупность функций от разных множеств переменных можно рассматривать как зависящую от одного и того же множества переменных - объединения множеств переменных всех функций совокупности, если это объединение конечно.

Высказывания и предикаты

Основным понятием математической логики является понятие высказывания.

Определение 41: Высказыванием называется повествовательное предложение, которое может быть либо истинным, либо ложным.

Пример 62:

$x+3 = 7$ - не является высказыванием, так как истинность этого равенства зависит от значения x.

1) $x = 4$, $4+3 = 7$ - истинное высказывание;

2) $x = 9$, $9+3 = 7$ - ложное высказывание.

Предложения, в которые входят переменные и которые при замене этих переменных их значениями становятся высказываниями, называют высказывательными формами или предикатами. При этом должно быть задано множество X, которое может принимать переменная x, если предикат с одной переменной (одноместный предикат).

Определение 42: Множество T значений переменной при подстановке которых в предикат получается истинное высказывание, называют множеством истинности предиката.

Если предикат двуместный (с двумя переменными), трехместный и т.д., то для каждого переменного должно быть указано множество его значений.

Определение 43: Если в предикат входят переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$, пробегающие соответственно множества $X_1, X_2, \ldots, X_n$, то декартово произведение $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ является областью определения этого предиката, а множество T кортежей $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ таких, что при замене x_1 на a_1, x_2 на a_2, …, x_n на a_n получается истинное высказывание - называют областью истинности предиката.

Будем обозначать: A, B, … - высказывания; $A(x)$, $x \in X$ - одноместный предикат; $B(x,y)$, $x \times X$, $y \times Y$ - двуместным предикатом и т.д., $A(a)$ - высказывание, получающиеся при замене в предикате $A(x)$ переменной x на её значение a.

2.2 Логические формулы. Булева алгебра

Задание функций непосредственно таблицей удобно лишь при небольшом числе переменных. Другим средством представления функций является суперпозиция, символическим (аналитическим) выражением которой служат формулы. Применение формул связано с использованием функциональных знаков - символов булевых функций. Некоторые из них уже встречались. Применение формул позволяет представить функции большого числа переменных суперпозициями функций меньшего числа переменных, прежде всего через функции 1 и 2 переменных.

Определение 44: Формулы алгебры логики (пропозициональные формулы) - формулы, построенные из знаков переменных и знаков функциональных операций с соблюдением определенных правил построения формул. Поскольку мы будем рассматривать формулы, использующие исключительно одноместные и двуместные операции, приведем соответствующее индуктивное определение:

1) булевы константы 0, 1 - формулы;

2) переменные X, Y, Z и т.д. - формулы;

3) если F и G - формулы, то $\neg F$ и $(F \circ C)$ - формулы, где $\neg$ -знак унарной операции (функции) отрицания, а $\circ$ - знак некоторой бинарной функциональной операции; F и G называются подформулами.

Согласно этому определению $(X \cup Y)$, $(X \to Z)$, $(Y \cap Y)$ - формулы: переменные, связанные знаками функциональных операций $\cap$, $\cup$, $(X \to (\neg Y \cup Z))$, $((X \mid Y) \oplus (X \leftrightarrow Z))$ - также формулы, поскольку $(X \mid Y)$,

$(X\oplus Z)$, $(X\leftrightarrow Z)$, $\neg Y$, $(\neg Y\cup Z)$ - формулы, и$\rightarrow$, $\oplus$, $\leftrightarrow$, суть функциональные знаки. Однако для сокращения формул принято использовать следующую иерархию (частичный порядок) функциональных символов. Знак $\neg$ связывает теснее знака $\cap$, знак $\cap$ - теснее знаков $\cup$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\oplus$, а последние - теснее знака равенства =, связывающего равные формулы. Символически:

"$\neg$" >"$\cap$">("$\cup$" , "$\rightarrow$" , "$\leftrightarrow$" , "$\oplus$")>" = ".

Кроме того, знак конъюнкции можно опускать подобно знаку умножения в алгебре; знак отрицания $\neg X$, отнесенный к отдельной переменной удобнее записывать как надстрочное отрицание. Это соглашение, а также ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$ позволяют устранять излишние скобки, в том числе, внешние. Например, выражение

$$((\neg A\cap(B\rightarrow C))\cup(A\cap(B\leftrightarrow C))) = (((\neg A\cap\neg B)\cup(\neg B\cap\neg C))\cup(B\cap C))$$

может быть записано короче:

$$A(B\rightarrow C)\cup A(B\leftrightarrow C) = \neg A\neg B\cup\neg B\neg C\cup BC$$

Формулам естественным образом соответствуют функции: знакам переменных - булевы переменные, а подформулам, соединенным функциональными знаками - булевы функции. При этом каждая формула задает единственную функцию, но обратное не верно: для любой функции существует много различных представляющих ее формул. Например, приведенное выше равенство $\neg(X\cap У) = \neg X\cup\neg Y$, предлагает две разные записи одной и той же функции. Другие примеры встречались при определении функции $X \mid Y$. Мы приходим к следующему понятию.

Определение 45: Эквивалентные (равносильные) формулы - формулы, представляющие одну и ту же функцию.

Проверить равенство $F_1 = F_2$ двух булевых функций, представленных разными формулами, можно с помощью вычисления их значений на всех наборах значений переменных. Однако это трудоемкая процедура, и удобнее избрать другой путь: эквивалентные преобразования. Прежде всего приведем равенства для формул, содержащих операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания (X,Y,Z - логические переменные).

1) $X\cup Y = Y\cup X$

2) $X\cap Y = Y\cap X$

3) $(X\cup Y)\cup Z = X\cup(Y\cup Z)$

4) $(X\cap Y)\cap Z = X\cap(Y\cap Z)$

5) $(X\cup Y)\cap Z = (X\cap Z)\cup(Y\cap Z)$

6) $(X\cap Y)\cup Z = (X\cup Z)\cap(Y\cup Z)$

7) $X\cup X = X$

8) $X \cap X = X$

9) $X \cup (X \cap Y) = X$

10) $X \cap (X \cup Y) = X$

11) $\neg (X \cap Y) = \neg X \cap \neg Y$

12) $\neg (X \cap Y) = \neg X \cup \neg Y$

13) $X \cup \neg X = l$

14) $X \cap \neg X = 0$

15) $X \cup 0 = X$

16) $X \cap 0 = 01$

17) $X \cup 1 = 1$

18) $X \cap 1 = X$

19) $\neg 1 = 0$

20) $\neg 0 = 1$

21) $\neg (\neg X) = X$

Конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание можно рассматривать как алгебраические операции над булевыми функциями. Свойства 1 - 2 выражают коммутативность, свойства 3 - 4 - ассоциативность операций $\cup$ и $\cap$; свойства 5 - 6 - взаимную дистрибутивность этих операций, что дает возможность раскрывать скобки в формулах. Свойства 7 - 8 -устранение кратности ; свойства 9 - 10 называют правилами поглощения; они являются следствиями остальных свойств, что показано ниже. Свойства 11 - 12 - законы де Моргана. Свойство 13 называют законом исключенного третьего; свойство 14 - законом противоречия. Свойства 15 - 20 характеризуют основные операции над переменной и константами 0 и 1. Свойство 21 - снятие двойного отрицания.

Совокупность всех булевых функций P_2 с тремя данными операциями есть алгебра (P_2; $\cap, \cup$ $, \neg$). Она называется алгеброй булевых функций, алгеброй логики, а также булевой алгеброй. Сравнивая свойства 1 - 21 для булевых функций со свойствами 1 - 21 пункт 1 главы 1 для алгебры множеств, приходим к следующему результату.

Соотношение между булевой алгеброй и алгеброй Кантора есть изоморфизм, порождаемый соответствием между подмножествами конечного n -элементного множества M и n -мерными булевыми векторами вместе с соответствием между операциями объединения, пересечения, дополнения для множеств и операциями дизъюнкции, конъюнкции и отрицания для векторов. При этом соответствии сохраняются все свойства операций, их определяющие.

Вследствие описанного изоморфизма всякую алгебру, которая обладает свойствами 1 - 21, называют булевой алгеброй. Кроме алгебры Кантора и алгебры логических функций, булевой алгеброй является, например, алгебра случайных событий в теории вероятностей.

Некоторые рассмотренные выше функции выражаются через $\cap, \cup, \neg$, и эти выражения тоже представляют эквивалентности:

$X \oplus Y = \neg X \cdot Y \cup X \cdot \neg Y$;

$X \rightarrow Y = \neg X \cup Y$;

$X \mid Y = \neg X \cup \neg Y$;

$X \leftrightarrow Y = \neg X \cdot \cap \neg Y \cup X \cdot Y$.

Для функций $X \oplus Y$, $X \leftrightarrow Y$, $X \rightarrow Y$ справедливы также соотношения:

$X \oplus 0 = X$;

$X \oplus 1 = \neg X$;

$X \oplus X = 0$;

$X \leftrightarrow Y = (X \rightarrow Y) \cap (Y \rightarrow X)$;

$X \leftrightarrow 1 = X$;

$X \leftrightarrow 0 = \neg X$;

$X \leftrightarrow X = 1$;

$X \rightarrow 1 = 1$;

$X \rightarrow 0 = \neg X$;

$1 \rightarrow X = X$;

$0 \rightarrow X = 1$;

$X \rightarrow X = 1$.

Важнейшее свойство равенства булевых функций состоит в том, что если в суперпозиции $f(g_1(x), g_2(x), ..., g_n(x))$ заменить какую-либо функцию $g_i(x)$ на равную ей, то это не повлияет на результат. Указанная процедура представляет правило замены подформул.

С другой стороны, если в формуле $F_1 = F_2$, выражающей равенство (эквивалентность формул) двух булевых функций заменить какую-либо переменную X на произвольную формулу f, то полученные формулы F_1' и F_2' представляют уже две другие функции ($F_1' \neq F_1$, $F_2' \neq F_2$), но равенство между ними сохраняется: $F_1' = F_2'$. Подчеркнем, что должны одновременно заменяться все вхождения переменной X. Так, из равенства (13) получается равенство $F \cup \neg F = 1$, верное для любой формулы F. Однако частичная замена $F \cup \neg X = 1$ уже не дает верного равенства.

Правильная подстановка и замена подформул приводит к новым эквивалентным соотношениям. Несколько следствий основных равенств:

1) поглощение:

а) свойство 9: $X \cup X \cdot Y = X$;

Доказательство: $X \cup X \cdot Y$ = [в силу свойства 18] = $X \cdot 1 \cup X \cdot Y$ = [выносим X за скобки] = $X \cdot (1 \cup Y)$ = [в силу свойств 17, 18] = $X \cdot 1 = X$;

б) свойство 10: $X \cdot (X \cup Y) = X$;

Доказательство: $X \cdot (X \cup Y)$ = [раскрываем скобки] = $X \cdot X \cup X \cdot Y$ = [в силу свойств 8, 9] = $X \cup X \cdot Y = X$.

2) склеивание:

а) $X \cdot Y \cup X \cdot \neg Y = X$;

Доказательство: $X \cdot Y \cup X \cdot \neg У$ = [выносим X за скобки] = $X \cdot (Y \cup \neg Y)$ = [в силу свойств 13, 18] = $X \cdot 1 = X$;

б) $\neg X \cup \neg X \cdot \neg Y = X \cup Y$;

Доказательство: $X \cup X \cdot Y$ = [заменяем X на левую часть равенства (*)] = $X \cup X \cdot Y \cup X \cdot Y$ = [выносим Y за скобки из двух последних слагаемых] = $X \cup Y \cdot (X \cup \neg X)$ = [в силу свойства 13] = $X \cup Y \cdot 1 = X \cup Y$.

Обратите внимание, что равенства 7 - 10, 13 - 18 и указанные следствия содержат в правой части меньше символов (более короткие формулы), чем в левой. Поэтому применение этих эквивалентностей позволяет осуществлять преобразования, в частности, упрощения формул, выражать одни из функций через другие; некоторые примеры такого рода уже встречались.

Возникают естественные вопросы: (1) можно ли суперпозициями функций одной-двух переменных выразить любую функцию большего числа переменных; (2) как это сделать, если это возможно. Ответ на эти вопросы - в следующем разделе.

2.3 Совершенные нормальные формы

Дизъюнктивные нормальные формы

Важным примером эквивалентности является разложение булевой функции по переменной - представление функции $Z = f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ в виде $f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = \neg X_1 \cap f(0,X_2,\ldots,X_n) \cup X_1\ f(1,X_2,\ldots,X_n)$.

Справедливость этого тождества следует из того, что оба слагаемых, связанных знаком дизъюнкции, не могут одновременно равняться 1, так как один из сомножителей $\neg X$ или X равняется 0. При подстановке в левую часть равенства константы 0 на место X_1 второе слагаемое в правой части обращается в 0, а при подстановке константы 1 - первое.

Функции (n–1) переменных $f(0,X_2,\ldots,X_n)$ и $f(1,X_2,\ldots,X_n)$ имеют в качестве столбцов значений соответственно верхнюю и нижнюю половины столбца значений $f(X_1, X_2,\ldots,X_n)$.

Пример 63:

Функция $m_3(X,Y,Z)$, имеющая столбец значений $[00010111]^T$, при разложении по первой переменной может быть представлена: $m_3(X,Y,Z) = \neg X[0001]^T \cup X[0111]^T$, и поскольку $[0001]^T$ - таблица для конъюнкции, а $[0111]^T$ - для дизъюнкции, то $m_3(X,Y,Z) = \neg X\cdot(Y\cap Z)\cup X\cdot(Y\cup Z)= \neg XYZ\cup XY\cup XZ$.

В каждом из слагаемых функции от переменных $X_2,\ldots,X_n$ могут быть таким же образом разложены по переменному X_2 и т.д.

Пример 64:

Для функции одной переменной $f(X)$ разложение имеет вид $f(X) = \neg X\cdot f(0) \cup X\cdot f\{1\}$. Обозначим $\alpha = f(0)$, $\beta = f(1)$. Тогда $f(X) = \alpha\cdot X\cup\beta\cdot X$; α и β- константы, равные значениям функции f при X = 0,1. В этих обозначениях таблица функции $f(X)$ есть $[\alpha,\beta]^T$.

Пример 65:

Для функции 3 переменных $f(X,Y,Z)$ разложение по переменной X дает:

$f(X, Y, Z) = \neg X\cdot f(0, Y, Z)\cap X\cdot f(1, Y, Z)$. Далее, обозначая $f(0, Y, Z)$ через $g_0(Y, Z)$, а $f(1, Y, Z)$ - через $g_1(Y,Z)$, разложим их по переменной Y:

$f(0, Y, Z) = g_1(Y, Z) = \neg Y\cdot g_0(0,Z)\cup Y\cdot g_1(l,Z) = \neg Y\cdot f(0,0,Z)\cup Y\cdot f(0,1,Z)$; $f(1,Y,Z) = g1(Y,Z) = \neg Y\cdot g1(0,Z)\cup Y\cdot g1(l,Z) = \neg Y\cdot f(l,0,Z)\cup Y\cdot f(1,1,Z)$.

Тем самым, получаем разложение исходной функции на 4 логических слагаемых:

$f(X,Y,Z) = \neg X\cdot(Y\cdot g_0(0,Z)\cup Y\cdot g_0(l,Z))\cup X\cdot\neg Y\cdot g_0(0,Z)\cup X\cdot\neg Y\cdot g_1(0,Z)\cup Y\cdot g_1(1,Z))$ = [раскрывая скобки] = $\neg X\cdot\neg Y\cdot g_0(0,Z)\cup\neg X\cdot Y\cdot g_0(l,Z)\cup X\cdot\neg Y\cdot g_1(0,Z)\cup X\cdot Y\cdot g_1(l,Z)$.

Далее, вводя новые обозначения, $h_{00} = g_0(0,Z)$; $h_{01} = g_0(l,Z)$; $h_{10} =g_1(0,Z)$; $h_{11} = g_1(l,Z)$, разложим эти 4 функции по их единственной переменной Z:

$h_{00}(Z) = \neg Z\cdot h_{00}(0)\cup Z\cdot h_{00}(1) = \neg Z\cdot f(0,0,0)\cup Z\cdot f(0,0,1)$;

$h_{01}(Z) = \neg Z\cdot h_{01}(0)\cup Z\cdot h_{01}(1) = \neg Z\cdot f(0,1,0)\cup Z\cdot f(0,1,1)$;

$h_{10}(Z) = \neg Z\cdot h_{10}(0)\cup Z\cdot h_{10}(1) = \neg Z\cdot f(1,0,0)\cup Z\cdot f(1,0,1)$;

$h_{11}(Z) = \neg Z\cdot h_{11}(0)\cup Z\cdot h_{11}(1) = \neg Z\cdot f(1,1,0)\cup Z\cdot f(1,1,1)$.

Окончательно подставляя эти выражения в предыдущую формулу и раскрывая скобки, получаем разложение f{X, Y, Z) по всем трем переменным в виде дизъюнкции 8 логических слагаемых:

f(X,Y,Z) = ┐X┐Y┐Z f(0,0,0)∪┐X┐YZ f(0,0,1)∪┐XY┐Z f(0,1,0)∪┐XYZ f(0,1,1)∪X┐Y┐Z f(1,0,0)∪X┐YZ f(1,0,1)∪XY┐Z f(1,1,0)∪XYZ f(1,1,1).

Каждое слагаемое представляет здесь конъюнкцию переменных и их отрицаний и некоторой константы, определяемой значением функции f на определенном наборе своих переменных, причем переменная входит в конъюнкцию с отрицанием только, если ее значение в этом наборе равно 0. В связи с этим введем понятие:

Определение 46: Элементарная конъюнкция - конъюнкция нескольких переменных и их отрицаний, в которую каждая переменная входит не более одного раза. Примеры элементарных конъюнкций: X, ┐XY, ┐X┐Y, X┐ZS┐T, YZT. Формулы ┐XZX и XZX не являются элементарными конъюнкциями: первая содержит одновременно переменную X и ее отрицание, во вторую переменная X входит дважды.

Для дальнейшего введем удобное обозначение: X^{σ} - форма записи функции X↔σ , где X - переменная, а σ - двоичный параметр. Рассмотрим подробнее: если подставить константу вместо обеих переменных, получим равенства: $0^1 = 0$; $0^0 = 0$; $1^1 = 1$; $1^0 = 0$; подстановка констант вместо X дает:

0^{σ} = ┐σ; 1^{σ} = σ наконец, при подстановке констант вместо σ получаем X^0 = ┐X, X^1 = X.

Приведенные выше примеры элементарных конъюнкций можно в новых обозначениях записать так:

X =X^1; ┐XY = X^0Y^1; ┐X┐Y = X^0Y^0; X┐ZS┐T = $X^1Z^0S^1T^0$ и т. п.

Элементарная конъюнкция, соответствующая набору = $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_3)$ - конъюнкция $X_1{}^{\sigma}{}_1\&X_2{}^{\sigma}{}_2\&...\&X_n{}^{\sigma}{}_n$. Для n-мерного набора конъюнкция содержит ровно n множителей с отрицаниями или без них. Как функция n переменных она принимает значение 1 только на наборе $(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$.

Используя введенные обозначения, можно записать предыдущее разложение функции f(X,Y,Z) по-другому: f(X,Y,Z) = V $X^{\sigma 1}$ $Y^{\sigma 2}$ $Z^{\sigma 3}f(\sigma 1,\sigma 2,\sigma 3)_{\sigma 1,\sigma 2,\sigma 3=0,1}$.

Теперь можно удалить из этой логической суммы те слагаемые, для которых $f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 0$ (пользуясь свойствами 16 и 15). Логическую сумму оставшихся членов можно записать так:

$f(X,Y,Z) = V\ X^{\sigma 1}\ Y^{\sigma 2}\ Z^{\sigma 3}$, или короче: $V_{f(\sigma 1,\sigma 2,\sigma 3)=1}\ X^{\sigma 1}\ Y^{\sigma 2}\ Z^{\sigma 3}$ $\{\sigma 1,\sigma 2,\sigma 3: f(\sigma 1,\sigma 2,\sigma 3) = 1\}$.

Имеется в виду, что в логической сумме участвуют только те элементарные конъюнкции, которые соответствуют наборам констант $(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3)$, для которых $f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 1$.

Подобное представление возможно для любой булевой функции, и мы приходим к важному понятию.

Определение 47: Совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ) - представление функции $Z = f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ в виде дизъюнкции всех элементарных конъюнкций, соответствующих наборам значений $\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n$ на которых $Z = 1$:

$f(X_1,X_2,\ldots,X_n) = V\ X_1{}^{\sigma}{}_1\ X_2{}^{\sigma}{}_2{:}\ X_n{}^{\sigma}{}_n$

$f(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3) = 1$

СДНФ содержит ровно столько n-членных элементарных конъюнкций, сколько единиц в столбце значений функции $f(X_1,X_2,\ldots,X_n)$. На каждом из 2^n наборов либо все логические слагаемые СДНФ обращаются в 0 (если функция f на этом наборе равна 0), либо ровно одна конъюнкция обращается в 1 (если f равна 1). Не имеет СДНФ единственная функция - тождественно равная нулю (константа 0).

Отсюда - простой способ выражения любой функции (кроме константы 0), заданной таблично, в виде СДНФ. По таблице значений составляются соответствующие элементарные конъюнкции и связываются знаком дизъюнкции.

Пример 66:

Выражения

$X\oplus Y = \neg XY\cup X\neg Y$, $X\leftrightarrow Y = \neg X\neg Y\cup XY$, $X\rightarrow Y = \neg X\neg Y\cup\neg XY\cup XY$, $X\,|Y = \neg X\neg Y\cup\neg XY\cup X\neg Y$ суть СДНФ этих функций; а $X\rightarrow Y = \neg X\cup Y$, $X \mid Y = \neg X\cup\neg Y$ не СДНФ.

Пример 67:

СДНФ для функции большинства $m_3(X,Y,Z)$ содержит 4 элементарные конъюнкции: $m_3(X,Y,Z) = \neg XYZ\cup X\neg YZ\cup XY\neg Z\cup XYZ$.

Пример 68:

СДНФ для функции 4 переменных $g(X,Y,Z,T)$ со столбцом значений $[0100100100011001]^T$ содержит 6 элементарных конъюнкций $g(X,Y,Z,T) = \neg X\neg Y\neg ZT\cup\neg XY\neg Z\neg T\cup\neg XYZ\neg T\cup X\neg YZT\cup XY\neg ZT\cup XYZT$.

Совершенная дизъюнктивная нормальная форма является частным случаем более общего вида формул.

Определение 48: Дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ) - дизъюнкция нескольких элементарных конъюнкций. Подчеркнем, что ДНФ - это не всякая формула, выражающая функцию через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания: например, $X\cdot(\neg Y \cup Z)$ - не ДНФ; однако ее можно привести к ДНФ, раскрывая скобки: $X\cdot\neg Y \cup X\cdot Z$.

Используя некоторые из эквивалентностей, прежде всего, 1 - 6, можно выносить за скобки общие множители, а применяя равенства 7 - 10, 13 - 18, а также приемы склеивания, упрощать формулы, поскольку, как уже отмечалось, в этих равенствах правые части короче левых.

Пример 69:

Докажем тождество: $X\cdot(X\oplus 1) = 0$. $X\cdot(X\oplus 1)$ = [раскрываем скобки] = $X\cdot X\oplus X)$ = [устраняем кратность] = $X\oplus X = 0$.

Пример 70:

Докажем тождество: $Y\rightarrow Z = \neg Z\rightarrow\neg Y$. Преобразуем обе части равенства, выражая импликацию через дизъюнкцию: $A\rightarrow B\neg A\cup B$; получаем: $\neg Y\cup\neg Z = \neg(\neg Z)\cup\neg Y$ = [снимаем двойное отрицание] = $Z\cup\neg Y$. Равенство доказано, поскольку дизъюнкция - коммутативная операция.

Пример 71:

Упростить формулу $f = \neg X\cdot Y\cdot\neg Z\cup X\cdot\neg Z$. Выносим за скобки общий множитель: $f = \neg Z\cdot(\neg X\cdot Y\cup X) = \neg Z\cdot(X\cup Y)$.

2.4 Минимизация СДНФ

2.4.1 Карты Карно

Пусть дана некоторая переключательная функция от четырёх аргументов. Таблица истинности для неё имеет следующий вид (таблица 15).

Назовём таблицу 12 исходной таблицей истинности. Подумаем над тем, как можно преобразовать эту таблицу, чтобы она выглядела компактнее.

Очевидно, что 16 значений этой функции, которые она принимает в 16 различных случаях в зависимости от аргументов, можно записать в таблице, состоящей из 4 строк и 4 столбцов, в клетках которой будут размещены исключительно только одни значения функции. Такую таблицу 4×4 назовём преобразованной таблицей.

Способ, установления соответствия между строками исходной таблицы и клетками преобразованной таблицы назовём способом преобразования.

Таблица 15 – Таблица истинности

x1	x2	x3	x4	F(x1,x2,x3,x4)
0	0	0	0	F(0,0,0,0)
0	0	0	1	F(0,0,0,1)
0	0	1	0	F(0,0,1,0)
0	0	1	1	F(0,0,1,1)
0	1	0	0	F(0,1,0,0)
0	1	0	1	F(0,1,0,1)
0	1	1	0	F(0,1,1,0)
0	1	1	1	F(0,1,1,1)
1	0	0	0	F(1,0,0,0)
1	0	0	1	F(1,0,0,1)
1	0	1	0	F(1,0,1,0)
1	0	1	1	F(1,0,1,1)
1	1	0	0	F(1,1,0,0)
1	1	0	1	F(1,1,0,1)
1	1	1	0	F(1,1,1,0)
1	1	1	1	F(1,1,1,1)

Понятно, что множество клеток преобразованной таблицы соответствует множеству позиций в столбце значений. Способ преобразования таблицы определяет, каким образом осуществляется это соответствие. Этот способ своеобразно как бы заменяет собой тело таблицы истинности. В самом деле, тело таблицы определяет, каким образом при тех или иных значениях аргумента функция принимает значение, стоящее в той или иной позиции столбца значений.

А теперь представим себе, что нам дана не только некоторая переключательная функция от четырёх аргументов, но и некоторое логическое выражение.

1) Исходная таблица.

2) Преобразованная таблица.

3) Способ преобразования.

4) Строками истинных значений в исходной таблице для некоторого логического выражения называется множество тех строк в теле исходной таблицы истинности, для каждой из которых при этих значениях аргументов это логическое выражение принимает значение логической единицы. Важное примечание: речь идёт не о том, что сама функция F(x1,x2,x3,x4)

принимает значение логической единицы при значениях аргументов, указанных в этих строках, а всего лишь на всего вот это самое логическое выражение принимает значение логической единицы при значениях аргументов, указанных в этих строках.

5) Областью истинных значений в преобразованной таблице для некоторого логического выражения называется множество тех клеток в преобразованной таблице истинности, которые соответствуют при данном способе преобразования тем позициям столбца значений исходной таблицы, которые соответствуют строкам истинных значений в исходной таблице для данного логического выражения.

Пример 72:

Употреблять мы можем в том и только том случае, когда мы имеем некоторую логическую функцию F(x1,x2,x3,x4), заданную своей таблицей истинности, и некоторое логическое выражение. Пусть функция F(x1,x2,x3,x4) задана таблицей 16:

Таблица 16 – Таблица истинности

x1	x2	x3	x4	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

И пусть ещё дано некоторое логическое выражение: G(x1,x2,x3,x4) = x1&x2&x3&(┐x4), где (┐x4)- это отрицание аргумента x4.

Таблица 17 – Исходная таблица

x1	x2	x3	x4	0
0	0	0	0	1
0	0	0	1	0
0	0	1	0	0
0	0	1	1	0
0	1	0	0	0
0	1	0	1	0
0	1	1	0	0
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	0	0	1	0
1	0	1	0	0
1	0	1	1	0
1	1	0	0	0
1	1	0	1	0
1	1	1	0	0
1	1	1	1	0

Таблица 18 - Преобразованная таблица

0	1	1	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Ясно, что одной и той же исходной таблице может соответствовать много разных преобразованных таблиц. И это - одна из них.

Способ преобразования. Сначала мы должны были задать способ преобразования, а потом уже преобразовывать по этому способу. Мы хотели наглядно показать, что для данной функции одной и той же преобразованной таблице соответствует много разных способов преобразования. Как было сказано выше, одной и той же исходной таблице может соответствовать много разных преобразованных таблиц. Ещё больше одной и той же преобразованной таблице соответствует способов преобразования, которыми её можно получить из исходной таблицы. Допустим, мы будем располагать позиции столбца значений, например так как в таблице 19:

Таблица 19 – Таблица истинности

F(0,0,0,0)	F(0,0,0,1)	F(1,0,0,0)	F(0,0,1,1)
F(0,1,0,0)	F(0,1,0,1)	F(0,1,1,0)	F(0,1,1,1)
F(0,0,1,0)	F(1,0,0,1)	F(1,0,1,0)	F(1,0,1,1)
F(1,1,0,0)	F(1,1,0,1)	F(1,1,1,0)	F(1,1,1,1)

Это и называется способом преобразования таблицы. Таких способов много, и это - один из них. Действительно, давшись таким способом преобразования, мы получим из исходной таблицы (см. пункт. 1) ту самую преобразованную таблицу (см. пункт 2).F(0,0,0,1) = F(1,0,0,0) = 1, а все остальные значения функции равны нулю. Следует особо отметить, что одной позиции в столбце значений исходной таблицы соответствует одна и только одна клетка преобразованной таблицы; и одной клетке преобразованной таблицы соответствует одна и только одна позиция в столбце значений исходной таблицы. Т.е. установлено взаимнооднозначное соответствие между позициями в столбце значений исходной таблицы и клетками преобразованной таблицы.

Строки истинных значений для логического выражения G(x1,x2,x3,x4) = x1&x2&x3&(┐x4), где (┐x4)- это отрицание аргумента x4. Для того чтобы найти в исходной таблице истинности для функции F(x1,x2,x3,x4) строки истинных значений для функции G(x1,x2,x3,x4), мы должны определить, при каких аргументах G(x1,x2,x3,x4) = 1. Выражение G(x1,x2,x3,x4) представляет собой конъюнкцию четырёх аргументов. Конъюнкция истинна тогда и только тогда, когда истинны все её операнды. В данном случае должны быть справедливы следующие формулы:

x1 = 1

x2 = 1

x3 = 1

┐x4 = 1

А это возможно, если:

x1 = 1

x2 = 1

x3 = 1

x4 = 0

Множество строк истинных значений для выражения G(x1,x2,x3,x4) состоит из единственной строки: 1 1 1 0. Это предпоследняя строка в теле таблицы истинности.

Область истинных значений для логического выражения G(x1,x2,x3,x4) должна состоять из такого же количества клеток, сколько строк содержит множество строк истинных значений. А поскольку строк истинных значений у нас всего только одна таковая имеется, то и область истинных значений будет из одной клетки состоять. И где же эта клетка находится? Да там, где у нас размещается в соответствии с нашим способом преобразования позиция из столбца значений для строки 1 1 1 0, т.е. там, где стоит F(1,1,1,0), а это четвёртая строка, третья позиция. Преобразовывать таблицу истинности (таблица 20), чтобы получить карту Карно.

Таблица 20 – Таблица истинности функции

x1	x2	x3	x4	F(x1,x2,x3,x4)
0	0	0	0	F(0,0,0,0)
0	0	0	1	F(0,0,0,1)
0	0	1	0	F(0,0,1,0)
0	0	1	1	F(0,0,1,1)
0	1	0	0	F(0,1,0,0)
0	1	0	1	F(0,1,0,1)
0	1	1	0	F(0,1,1,0)
0	1	1	1	F(0,1,1,1)
1	0	0	0	F(1,0,0,0)
1	0	0	1	F(1,0,0,1)
1	0	1	0	F(1,0,1,0)
1	0	1	1	F(1,0,1,1)
1	1	0	0	F(1,1,0,0)
1	1	0	1	F(1,1,0,1)
1	1	1	0	F(1,1,1,0)
1	1	1	1	F(1,1,1,1)

А теперь изберём для неё такой способ преобразования, чтобы в преобразованной таблице два последних столбца представляли собой область истинных значений для выражения G1(x1,x2,x3,x4) = x1, два средних столбца представляли собой область истинных значений для выражения G2(x1,x2,x3,x4) = x2, две нижних строки представляли собой область истинных значений для выражения G3(x1,x2,x3,x4) = x3, две средних строки представляли собой область истинных значений для выражения G4(x1,x2,x3,x4) = x4.

Только для того, чтобы нам не спутать, что областью истинных значений чего является, пометим сами выражения над своими областями истинных значений в виде отрезочков: помечаем сверху над таблицей x1 и x2 и слева от таблицы x3 и x4 (таблица 21):

Таблица 21 – Карта Карно

				F(0,0,0,0)	F(0,1,0,0)	F(1,1,0,0)	F(1,0,0,0)
x4	|			F(0,0,0,1)	F(0,1,0,1)	F(1,1,0,1)	F(1,0,0,1)
	|	|		F(0,0,1,1)	F(0,1,1,1)	F(1,1,1,1)	F(1,0,1,1)
	x3	|		F(0,0,1,0)	F(0,1,1,0)	F(1,1,1,0)	F(1,0,1,0)

Как функцию мы задаём таблицей истинности, так мы её можем задать и своей картой Карно.

Формы бывают двух видов: дизъюнктивная нормальная форма и конъюнктивная нормальная форма.

Первая представляет собой логическую сумму логических произведений. Напоминаю, что логическая сумма - это дизъюнкция, потому и форма называется дизъюнктивной.

Вторая представляет собой логическое произведение логических сумм. Напоминаю, что логическое произведение- это конъюнкция, потому и форма называется конъюнктивной.

Теорема:

Пусть некоторая функция от четырёх аргументов F(x1,x2,x3,x4) задана своей картой Карно. И пусть имеется некоторое множество логических выражений: G1(x1,x2,x3,x4), G2(x1,x2,x3,x4), ..., GN(x1,x2,x3,x4), таких, что:

1) в области истинных значений каждого из этих логических выражений в карте Карно, которой задана функция F(x1,x2,x3,x4), стоят единицы.

2) во всех клетках карты Карно, которой задана функция F(x1,x2,x3,x4), не принадлежащих области истинных значений ни одной из этих функций стоят нули.

Тогда для функции F(x1,x2,x3,x4), справедлива следующая формула: F(x1,x2,x3,x4) = G1(x1,x2,x3,x4)+G2(x1,x2,x3,x4)+...+GN(x1,x2,x3,x4).

Конъюнкция ранга 1 имеет область истинных значений, состоящую из 8 рядом стоящих клеток; Конъюнкция ранга 2 имеет область истинных значений, состоящую из 4 рядом стоящих клеток; Конъюнкция ранга 3 имеет область истинных значений, состоящую из 2 рядом стоящих клеток; Конъюнкция ранга 4 имеет область истинных значений, состоящую из 1 "рядом стоящих" клеток (т.е. из одной клетки).

Минимизации функции методом карт Карно.

Итак, пусть некоторая функция задана своей картой Карно. Нам нужно найти как можно меньшее количество выражений G1(x1,x2,x3,x4), G2(x1,x2,x3,x4), ..., GN(x1,x2,x3,x4), представляющих собой логические произведения как можно меньших рангов, причем ни в коем случае ранг ни оного из них не должен быть выше четырёх, удовлетворяющих двум условиям (тем, которые написаны выше; я эти условия продублирую здесь):

1) в области истинных значений каждого из этих логических произведений в карте Карно, которой задана функция F(x1,x2,x3,x4), стоят единицы.

2) во всех клетках карты Карно, которой задана функция F(x1,x2,x3,x4), не принадлежащих области истинных значений ни одного из этих логических произведений, стоят нули.

В нахождении таких произведений и состоит метод минимизации по картам Карно. Как такие произведения по карте находить? 8 рядом стоящих единиц - это область истинных значений для конъюнкции ранга 1. 4 рядом стоящих единицы - это область истинных значений для конъюнкции ранга 2. 2 рядом стоящих единицы - это область истинных значений для конъюнкции ранга 3. 1 "рядом стоящую" единицу (т.е. одинокую, обособленную)- это область истинных значений для конъюнкции ранга 4.

Теперь ищите минимальное их количество произведений. Потом расписывайте дизъюнкцию этих конъюнкций. Получаете тупиковую дизъюнктивную нормальную форму для функции, которую уже невозможно будет более упростить (таблица 22).

Например:

Таблица 22 – Карта Карно

			0	0	0	0
x4	|		1	1	0	0
	|	|	0	0	1	1
	x3	|	0	0	1	1

Всегда начинайте от x1 к x2, x3 и x4 по порядку индекса при переменной. Если единицы, рядом стоящие, не находятся одновременно все в области истинных значений ни для переменной xi (где i = 1,2,3,4- последовательно пробегая значения), ни для её отрицания, то переменную xi пропускаем.

Посмотрите здесь на конкретном примере. Для первого произведения мы берём x1 с отрицанием, пропускаем x2, берём x3 с отрицанием и x4 без отрицания.

Почему пропустили x2? Потому что одна из единиц стоит в области истинных значений для x1, а другая - в области истинных значений для (не x1).

Второе произведение пусть проверит сам читатель. Таким образом, если здесь всё чисто, то этой карте Карно соответствует функция F(x1,x2,x3,x4) = ┐(x1)·┐(x3)·x4+x1·x3.

И ещё одно очень важно замечание: первый и последний столбец- это два рядом стоящих столбца. Точно также верхняя и нижняя строка - это две соседних строки. Вот такой пример (таблица 23):

Таблица 23 – Карта Карно

				0	0	1	0
x4	|			0	0	0	0
	|	|		0	0	0	0
	x3	|		0	0	1	1

Объединяем здесь верхнюю и нижнюю единицы. Они нам дают x1·x2·(┐x4). Объединяем в нижней строке две крайние правые единицы. Они нам дают x1·x3·(┐x4). Формула для функции: x1·x2· (┐x4)+ x1·x3·(┐x4). Эту же формулу можно переписать так: x1· (x2+x3)·(┐x4). По карте Карно мы получили тупиковую дизъюнктивную нормальную форму, а после преобразования - тупиковую конъюнктивную нормальную форму.

На самом деле можно при помощи карт Карно получить и тупиковую конъюнктивную нормальную форму для функции. Для этого нужно составлять уравнение не для самой функции, а для её отрицания. Что представляет собой карта Карно для отрицания функции? Это карта Карно, получаемая из карты Карно самой функции замещения единиц на нули и нулей на единицы.

Получив тупиковую дизъюнктивную нормальную форму для отрицания функции, мы должны применить законы де Моргана и получить тупиковую уже конъюнктивную нормальную форму для самой функции.

Минимизация ФАЛ методом Квайна-Мак-Класски.

Данный метод основывается на задании входящих в ДСНФ функции элементарных произведений в виде двоичных чисел, называемых номерами соответствующих наборов. Кроме номера каждому произведению присваевается определенный индекс, под которым понимается число единиц в двоичном представлении данного набора. Например:

набор $\bar{a}b\bar{c}$; номер 010(2); индекс 1;

набор $ab\bar{c}$; номер 110(6); индекс 2.

В результате реализации данного метода ФАЛ разлагается на простые импликанты. Под простой импликантой функции понимается всякое элементарное произведение, принимающее единичное значение на всех наборах аргументов, что и исходная ФАЛ, при исключении из которого хотя бы одного аргумента, уже не будет выполнятся данное условие.

Алгоритм Квайна-Мак-Класски формулируется следующим образом: для того, чтобы два числа m и n являлись номерами двух склеивающихся между собой наборов, необходимо и достаточно, чтобы индексы данных чисел отличались на единицу, сами числа отличались на степень числа два и число с большим индексом было больше числа с меньшим индексом.

Реализацию алгоритма рассмотрим на примере минимизации ФАЛ

$f=\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d\vee\bar{a}\cdot b\cdot\bar{c}\cdot d\vee a\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot d\vee\bar{a}\cdot b\cdot c\cdot d\vee a\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d\vee\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot c\cdot d$.

На первом этапе минимизации определяем номера и индексы каждого набора, записывая ФАЛ в виде

$$f=\underset{1(\mathrm{I})}{0001}\vee\underset{5(\mathrm{II})}{0101}\vee\underset{9(\mathrm{III})}{1001}\vee\underset{7(\mathrm{III})}{0111}\vee\underset{11(\mathrm{III})}{1011}\vee\underset{3(\mathrm{II})}{0011}$$

Группируем наборы располагая их в порядке возрастания индексов (таблица 24).

На следующем этапе производим склеивание различных наборов, руководствуясь приведенной выше формулировкой алгоритма. Подлежащие склеиванию пары чисел указаны стрелками. При склеивании не совпадающие в числах разряды отмечаются прочерками. Например склеивание чисел 0001 и 0011 дает число 00-1. Результат склеивания выписывается в следующий столбец таблицы 16, так же разделяемый на строки с индекса-ми, отличающимися на единицу. После склеивания всех групп первого столбца таблицы переходят ко второму столбцу, вписывая результат склеивания в третий столбец. При объединении наборов второго и последующих столбцов таблицы, возможно склевать только числа содержащие прочерки в одноименных разрядах. Склеивание продолжается до тех пор, пока образование нового столбца станет невозможным.

Таблица 24 - Минимизация ФАЛ методом Квайна-Мак-Класски

Индексы	Номера	Результат склеивания		
I	0001(1)	00-1 0-01 -001	0--1 -0-1 0--1 -0-1	
II	0011(3) 0101(5) 1001(9)	0-11 -011 01-1 10-1		
III	0111(7) 1011(11)			

По окончании склеивания приступают к построению импликантной таблицы (таблица 19), записывая в нее в качестве простых импликант наборы, содержащиеся в последнем столбце таблицы 24. В качестве простых импликант в таблице 25 так же вписываются наборы из других столбцов таблицы 25, не принимавшие участия в склеивании. Если импликанта, содержащаяся в I-той строке таблицы, составляет некоторую часть конституенты I-го столбца на пересечении I-той строки и I-го столбца ставится символ *. С целью получения минимальной формы ФАЛ из таблицы 25 необходимо выбрать минимальное число строк, чтобы для каждого столбца, среди выбранных строк нашлась хотя бы одна, содержащая в этом столбце символ *.

Таблица 25 - Импликантная таблица минимизируемой ФАЛ

наборы / импликанты	$\bar{a}\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}b\bar{c}d$	$a\bar{b}\bar{c}d$	$\bar{a}bcd$	$a\bar{b}cd$	$\bar{a}\bar{b}cd$
$\bar{a}d$	*	*		*		*
$\bar{b}d$	*		*		*	*

Полученная после минимизации ФАЛ записывается в следующем виде:

$$y = \bar{a}d \vee \bar{b}d \; .$$

2.4.2 Метод Квайна-Мак'Класки

Основным недостатком метода Квайна является необходимость полного по парного сравнения ЭК на этапе нахождения первичных импликант. Поэтому при большом числе ЭК применение метода Квайна становится весьма затруднительным.

Мак-Класки (Mc Cluskey E.) предложил модернизацию алгоритма Квайна, которая заключается в том, что все ЭК, входящие в СДНФ записывается в виде двоичных чисел (номеров наборов), которые группируются по числу входящих в них единиц в непересекающиеся классы. В класс с номером i войдут все ЭК содержащие в своей двоичной записи i единиц. По парное сравнение следует производить между соседними по номеру классами, так как только в них могут находиться склеивающиеся ЭК.

При образовании ЭК ранга меньше n вместо исключенных переменных ставится символ стирания x.

ЭТАП 1. Нахождение первичных импликант.

Исходная функция

$f = \sum(1,3,7,8,11,12,13,18,19,24,25,26,27)$.

Разбивая ЭК на классы по числу единиц, получим:

$К_1$ = (00001*,01000*);

$К_2$ = (00011*,10010*,11000*,01100*);

$К_3$ = (00111*,01011*,01101*,10011*,11001*,11010*);

$К_4$ = (11011*).

Образуем новые классы путем склеивания ЭК в соседних классах К1...К4:

$К_1$* = (000x1,x1000,01x00*);

$К_2$* = (00x11,0x011*,x0011*,1001x*,1x010*,1100x*,110x0*,0110x);

$К_3$* = (x1011*,1x011*,110x1*,1101x*).

Строим ЭК 3-го ранга:

$К_1$** = (000x1,x1000,01x00);

$К_2$** = (00x11,xx011,1x01x,110xx,0110x).

Дальнейшие склеивания не возможны, поэтому переходим ко второму этапу (таблица 26).

После вычеркивания избыточных столбцов и избыточных первичных импликант получим следующую таблицу (таблица 19).

Полученная МДНФ примет вид:

000x1,01x00,00x11,xx011,1x01x,110xx,0110x.

Нетрудно убедиться, что МДНФ, полученная двумя методами совпадают.

Таблица 26 – Карта покрытий

ЭК / Первичные импликанты	00001	00011	00111	01000	01011	01100	01101	10010	10011	11000	11001	11010	11011
000x1	✓	✓											
x1000				✓						✓			
01x00				✓		✓							
00x11		✓	✓										
xx011		✓			✓				✓				✓
1x01x								✓	✓			✓	✓
110xx										✓	✓	✓	✓
0110x						✓	✓						

Таблица 27 – Минимальное покрытие

ЭК / Первичные импликанты	01000
x1000	✓
01x00	✓

2.4.3 Системы функций алгебры логики

Рассмотрим теорему Жегалкина, которая играет важную роль в алгебре логики. Теорема Жегалкина. Любая булева функция может быть представлена многочленом вида

$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = k_0 \oplus k_1x_1 \oplus k_2x_2 \oplus \dots \oplus k_{n+1}x_1x_2 \oplus k_{n+2}x_1x_3 \oplus \dots \oplus k_{n+m}x_1x_2x_n$,

где k - коэффициенты, принимающие значения 0 или 1.

Теорема Жегалкина даёт возможность представить любую логическую функцию в виде полиномов разной степени.

Существует несколько классов ФАЛ, которые также важны для логического анализа.

Определение 49: Класс линейных функций (К л). Булева функция называется линейной, если она представляется полиномом первой степени:

$f(x_1,x_2,\dots,x_n) = k_0 \oplus k_1x_1 \oplus k_2x_2 \oplus \dots \oplus k_nx_n$.

Количество линейных функций равно 2^ (n+1). Например, для n = 2 количество линейных функций равно восьми,т. е.

1) $f_1(x_1,x_2) = 0$;

2) $f_2(x_1,x_2) = x_1$;

3) $f_3(x_1,x_2) = x_2$;

4) $f_4(x_1,x_2) = x_1 \oplus x_2$

5) $f_5(x_1,x_2) = 1 \oplus x$

6) $f_6(x_1,x_2) = 1 \oplus x_2$

7) $f_7(x_1,x_2) = 1 \oplus x_1 \oplus x_2$

8) $f_4(x1,x2) = 1$

Определение 50: Класс функций, сохраняющих нуль (К нуль). Если функция на нулевом наборе переменных равна нулю, то говорят, что функция сохраняет нуль: $f(0,0,...,0) = 0$.

Для двух переменных (таблица 20) такими функциями являются f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8.

Класс функций, сохраняющих единицу (К единица). Если функция на единичном наборе переменных равна единице, то говорят, что такая функция сохраняет единицу: $f(1,1,...,1) = 1$.

Для двух переменных такими функциями являются f_2, f_4, f_6, f_8, f_{10}, f_{12}, f_{14}, f_{16}.

Определение 51: Класс монотонных функций (К м). Функция алгебры логики называется монотонной, если при любом возрастании набора значения этой функции не убывают. Примером таких функций для двух переменных являются функции f_1, f_2, f_4, f_6, f_8, f_{14}.

Определение 52: Класс самодвойственных функций (К с). Функция алгебры логики является самодвойственной, если на каждой паре противоположных наборов она принимает противоположные значения, т. е.

$$f(x_1,x_2,...,x_n) = f\urcorner(\urcorner x_1,\urcorner x_2,...,\urcorner x_n)).$$

Для двух переменных такими функциями являются f_4, f_6, f_{11}, f_{13}. Все названные выше классы функций обладают замечательным свойством: любая функций алгебры логики, полученная с помощью операции суперпозиции и подстановки из функций одного класса, обязательно будет принадлежать этому же классу.

Определение 53: Базисом называется полная система ФАЛ, с помощью которой любая ФАЛ может быть представлена суперпозицией исходных функций.

Теорема Поста-Яблонского. Для того чтобы система ФАЛ была полной, необходимо и достаточно, чтобы она содержала хотя бы одну функцию: не сохраняющую нуль, не сохраняющую единицу, не являющуюся линейной, не являющуюся монотонной, не являющуюся самодвойственной.

В таблице представлены свойства функции двух переменных (таблица 28).

Таблица 28 – Распределение по классам

Функция	00^{x1x2}	01	10	11	Классы				
					$К_л$	$К_0$	$К_1$	$К_м$	$К_С$
f_1	0	0	0	0	v	v		v	
f_2	0	0	0	1		v	v	v	
f_3	0	0	1	0		v			
f_4	0	0	1	1	v	v	v	v	v
f_5	0	1	0	0		v			
f_6	0	1	0	1	v	v	v		v
f_7	0	1	1	0	v	v			
f_8	0	1	1	1	-	v	v	v	
f_9	1	0	0	0		-	-	-	-
f_{10}	1	0	0	1	v		v		
f_{11}	1	0	1	0	v				v
f_{12}	1	0	1	1			v		
f_{13}	1	1	0	0	v				v
f_{14}	1	1	0	1			v		
f_{15}	1	1	1	0	-	-	-	-	-
f_{16}	1	1	1	1			v	v	

К базису относится система функций И, ИЛИ, НЕ (базис 1), свойства которых были изучены Дж. Булем. Поэтому алгебра высказываний, построенная на основе этих функций, названа булевой алгеброй. Базисами являются также системы, содержащие функции И, НЕ (базис 2), ИЛИ, НЕ (базис 3), состоящие из функции Шеффера (базис 4) и функции Пирса (Вебба) (базис 5). Это перечисление показывает, что базисы могут быть избыточными (базис 1) и минимальными (базис 4 и 5).

Базис минимальный, если удаление хотя бы одной функции превращает систему ФАЛ в неполную.

Проблема простейшего представления логических функций сводится к выбору не только базиса, но и формы наиболее экономного представления этих функций.

Базис И, ИЛИ, НЕ является избыточной системой, так как возможно удаление из него некоторых функций. Например, используя законы де Моргана, можно удалить либо функцию И, заменив её на функции ИЛИ и НЕ, либо функцию ИЛИ, заменяв её на функции И и НЕ.

Построение логических схем

Техническая реализация логических функций может быть различна, но существует единая система графического представления логических функциональных элементов. Каждый элемент представляет собой прямоугольник со входами и одним выходом, инверсные входы и выходы соответствуют незакрашенным кружочкам. Сам элемент обозначается: единицей, если он реализует логическое сложение; знаком конъюнкции &? Если реализует логическое умножение; знаком отрицания –, если реализует логическое отрицание; mod, если соответствует сложению по модулю 2; =, если реализует функцию эквивалентности. На рисунке 28 представлен набор логических элементов.

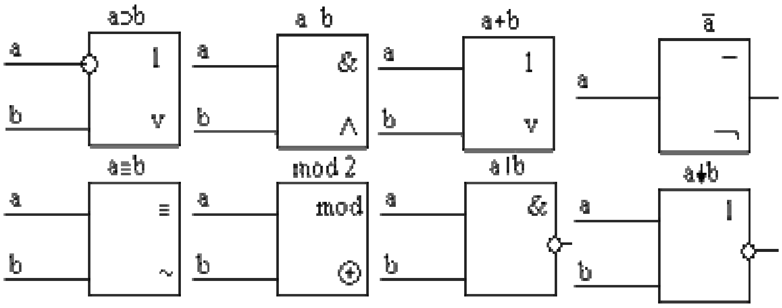


Рисунок 28 – Функциональные элементы

Для построения схемы в заданном базисе логическая функция в начале минимизируется и преобразуется к виду, удобному для реализации на логических элементах заданного типа.

В качестве примера составим логическую цепь в базисе Шеффера для функции, заданной следующей таблицей истинности:

Пользуясь таблицей истинности, запишем логическую функцию в виде СНДФ:

$F = \neg x_1x_2x_3+x_1x_2\neg x_3+x_1x_2x_3+\neg x_1x_2x_3$

Упрощая эту функцию с помощью диаграммы Вейча, найдём минимизированное выражение:

$F = x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$

Таблица 29 – Таблица истинности функции

x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Для построения логической цепи на элементах Шеффера преобразуем функцию к виду

$F = \neg(\neg(x1x2) + \neg(x1x3) + \neg(x2x3));$

$F = (x1 \mid x2) \mid (x1 \mid x3) \mid (x2 \mid x3).$

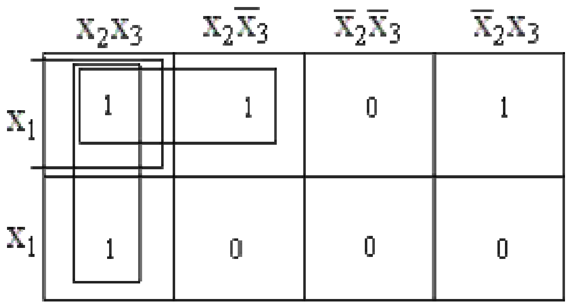


Рисунок 29 – Карта Карно

Из последнего выражения видно, что для построения логической схемы в данном случае потребуется три двухвходовых и один трёхвходовый элемент Шеффера.

2.5 Замкнутые классы булевых функций

Выше показано, что любая функция может быть выражена в виде ДНФ, т.е. формулой, использующей функциональные знаки $\cap$, $\cup$, $\neg$ и символы переменных. Еще один интересный пример дает система функций

$$\{1, X \oplus Y, X \cap Y\}$$

Выше показано, что $\neg X = X \oplus 1$. Используя это равенство и закон де Моргана (свойство 11), выразим дизъюнкцию $X \cup Y$ через функции системы $\{1, X \oplus Y, X \cap Y\}$.

$$X\cup Y = \neg(\neg X\cap\neg Y) = (X\oplus 2)\cdot(Y\oplus 1)\oplus 1 = XY\oplus X\oplus Y\oplus 1\oplus 1 = XY\oplus X\oplus Y$$

Поэтому в любой ДНФ можно выразить дизъюнкцию и отрицание через функции системы $\{1, X\oplus Y, X\cap Y\}$.

Пример 73:

$\neg X\cup YZ$ = [заменяем знак отрицания] = $(X\oplus 1)\cup YZ$ = [заменяем знак дизъюнкции] = $(X\oplus 1)\cdot YZ\oplus(X\oplus 1)\oplus YZ$ = [раскрываем скобки] = $XYZ\oplus YZ\oplus X\oplus 1\oplus YZ = XYZ\oplus X\oplus 1$.

Пример 74:

$XY\cup XZ$ = [заменяем знак дизъюнкции] = $XY\cdot XZ\oplus XY\oplus XZ$ = [используем поглощение $X\cdot X = X$] = $XYZ\oplus XY\oplus XZ$.

Пример 75:

$$XY\cup XZ = XY\cdot(X\oplus 1)\cdot Z\oplus XY\oplus(X\oplus 1)\cdot Z = XYZ\oplus XYZ\oplus XY\oplus XZ\oplus Z = XY\oplus XZ\oplus Z.$$

То же преобразование можно выполнить проще, заменяя сначала знак дизъюнкции:

$$XY\cup\neg XZ = XY\cdot\neg XZ\oplus XY\oplus\neg XZ.$$

Первое слагаемое равно 0, так как содержит произведение $X\cdot\neg X$, и его можно из формулы удалить. Оставшуюся часть преобразуем, заменяя знак отрицания:

$$XY\oplus XZ = XY\oplus(X\oplus 1)\cdot Z = \text{[раскрываем скобки]} = XY\oplus XZ\oplus Z.$$

Как видно из рассмотренных примеров, если в формуле после произведенных замен раскрыть скобки и выполнить умножения и сложения, а также поглощение по правилам эквивалентных преобразований, то получится формула, представляющая сумму но модулю 2 некоторых конъюнкций переменных (в каждой конъюнкции переменные не повторяются, но, в отличие от элементарных конъюнкций - без отрицаний) и, быть может, константы 1.

Определение 54: Полученная формула, порожденная логическими константами 0 и 1 и функциями $X\oplus Y$ и $X\cap Y$ называется многочленом Жегалкина. Можно показать, что различные (с точностью до перестановки слагаемых в сумме и сомножителей в конъюнкциях) многочлены представляют различные функции, т.е. имеет место единственность представления булевой функции многочленом Жегалкина.

В самом деле, пусть два многочлена $P(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ и $Q(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ равны как функции, т.е. на одинаковых наборах принимают одинаковые значения. Тогда для какого-нибудь существенного переменного (пусть это

X_1), вынеся X_1 за скобки из всех содержащих его членов, P и Q можно представить в виде

$$P(X_1,X_2,...,X_n) = X_1 \cap R_1(X_2,...,X_n) \oplus S_1(X_2,...,X_n); \ (*)$$
$$Q(X_1,X_2,...,X_n) = X_1 \cap R_2(X_2,...,X_n) \oplus S_2(X_2,...,X_n). \ (**)$$

где R_i, S_i - многочлены, зависящие от переменных $(X_2,...,X_n)$. Достаточно показать, что $R_1 = R_2$, $S_1 = S_2$ как многочлены. Легко проверить, что для n = 1 утверждение о единственности многочлена верно: все функции одной переменной - в таблице 1. Тем самым выполнено базовое условие для применения метода математической индукции по числу переменных n. Выполним индукционный шаг: предположим, что утверждение справедливо для функций (n–1) переменных и докажем его для n. Поскольку P и Q тождественно равны, то при $X_1 = 0$ они также равны. Но при этом $P = S_1(X_2,...,X_n)$, а $Q = S_2(X_2,...,X_n)$.Значит, S_1 и S_2 совпадают как многочлены, по предположению индукции, и, прибавив S_1, к обеим частям (*) и, соответственно, S_2 к (**), получим

$$P \oplus S_1 = X_1 \cap R_1;$$
$$Q \oplus S_2 = X_1 \cap R_2.$$

Левые части этих равенств равны, следовательно, равны и правые, в том числе, при X = 1, откуда R_1 и R_2 равны как функции. Тогда, по предположению индукции, они совпадают и как многочлены, что завершает доказательство.

Возникает вопрос: как определить для системы функций, можно ли с ее помощью выразить любую логическую функцию. В связи с этим рассмотрим несколько понятий.

Замыкание системы булевых функций D - класс всех суперпозиций функций системы D.

Пример 76:

Если система D - множество из двух функций: конъюнкции и дизъюнкции, то ее замыкание - всевозможные ДНФ такие, что входящие в них элементарные конъюнкции не содержат отрицаний переменных (например, $XZT \cup YS \cup YSTW \cup XYT$). Любую другую суперпозицию конъюнкции и дизъюнкции можно привести к такому виду: во всякой формуле, представляющей собой конъюнкцию дизъюнкций можно раскрыть скобки и преобразовать ее в дизъюнкцию конъюнкций. Так, $X \cup (XZ \cup Y)(XT \cup XYZ) = Z \cup XXZT \cup XYT \cup XXYYZ \cup XYYZ$ = [используем поглощение $X \cdot X = X$] = $X \cup XZT \cup XYT \cup XYZ$.

Пример 77:

Если система D состоит из одной функции $X \oplus Y$, то ее замыкание - всевозможные суммы различных переменных. Замкнутый класс булевых функций - множество функций K, любая суперпозиция которых принадлежит K, т.е. замкнутый класс представляет собой множество булевых функций, замкнутое относительно операции суперпозиции.

Пример 78:

1) Замыкание любой системы функций - замкнутый класс.

2) 4 функции одной переменной - замкнутый класс.

3) 2 функции $\neg X$ и X образуют замкнутый класс.

4) Множество сумм по модулю 2 нечетного числа переменных является замкнутым классом, поскольку подстановка в такую функцию вместо переменной функции этого класса увеличивает число вхождений переменных в формулу на четное число; при этом некоторые слагаемые могут взаимно сократиться ввиду эквивалентности $X \oplus X = 0$, и число переменных остается нечетным, поскольку при сокращениях в формуле переменные устраняются парами.

Функционально полная система функций - система, замыкание которой составляет P_2 - множество всех логических функций.

Как показано выше, системы функций $\{X \cap Y, X \cup Y, \neg X\}$ и $\{1, X \cap Y, X \oplus Y\}$ полны.

Можно обобщить построения, примененные при рассмотрении полноты систем многочленов Жегалкина, и сформулировать следующее утверждение.

Пусть система $\{f_1,...,f_k\}$ - полная и пусть каждая из функций f_i может быть выражена суперпозицией через функции $g_1,...,g_m$.

Тогда система $\{g_1,...,g_m\}$ тоже полная, потому что в формуле, составленной из функциональных знаков системы $\{f_1,...,f_k\}$, можно заменить каждое вхождение символа функции f на ее выражение через символы функций $\{g_1,...,g_m\}$.

Вот несколько примеров.

1) Система $\{\neg, \cup\}$ полна, так как $X \cap Y = \neg(\neg X \cup \neg Y)$ (закон де Моргана).

2) Аналогично показывается полнота системы $\{\neg, \cap\}$.

3) Система $\{->, \neg\}$ полна, поскольку $X \cup Y = \neg X -> Y$.

Предполные классы

Здесь мы рассмотрим 5 замкнутых классов, играющих особую роль в вопросе о функциональной полноте. Они называются предполными: причина будет выявлена ниже.

1) Класс T_0 - класс функций, сохраняющих 0, т.е. функций, для которых $f(0,0,...,0) = 0$. Замкнутость класса T_0 очевидна: если в функцию Z = $f(X_1,X_2,...,X_n)$ вместо некоторых переменных подставить функции, принадлежащие T_0, то на нулевом наборе аргументов все они имеют значение 0, и для внешней функции f набор ее переменных будет также нулевым, откуда Z = 0.

2) Класс T_1 - класс функций, сохраняющих 1, т.е. функций, для которых $f(1,1,...,1) = 1$. Замкнутость T_1, устанавливается аналогично предыдущему. Примерами функций, принадлежащих классам T_0 и T_1, служат функции $X \cap Y$ и $X \cup Y$; отрицание $\neg X$ не принадлежит ни T_1 ни T_0; функция $X \oplus Y$ принадлежит T_0, но не принадлежит T_1, импликация X -> Y напротив, не принадлежит T_1, но принадлежит T_0.

3) Для определения следующего класса введем понятие двойственности.

Определение 55: Двойственная функция для функции Z = $f(X_1, X_2,...,X_n)$ - функция $Z^* = \neg f(\neg X_1, \neg X_2, ..., \neg X_n)$. Если на наборе $\tilde{\sigma} = (\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ функция f принимает значение α, то двойственная ей функция f^* на противоположном наборе $\neg\tilde{\sigma} = (\neg\sigma_1,\neg\sigma_2,...,\neg\sigma_n)$ принимает противоположное значение $\neg\alpha$.

Для булевых функций справедлив принцип двойственности - если в формуле F , представляющей функцию f, все знаки функций заменить соответственно на знаки двойственных функций, то полученная формула F* будет представлять функцию f^*, двойственную f.

Класс S самодвойственных функций - то есть функций таких, что $f(X_1,X_2,...,X_n) = f^*(X_1,X_2,...,X_n)$. Из определения следует, что двоичный набор значений самодвойственной функции антисимметричен относительно своей середины. Таким способом удобно проверять по таблице самодвойственность функции. Например, можно убедиться, что одноместные функции X и $\neg X$ - самодвойственные, а среди функций двух переменных самодвойственными являются только функции с одной несущественной переменной. Функция большинства $m_3(X, Y, Z)$ является самодвойственно.

Из определения нетрудно вывести, что класс самодвойственных функций - замкнутый, поскольку в любой суперпозиции на противоположных наборах внутренние подформулы принимают противоположные значения, и, тем самым, наборы значений аргументов внешней функции также противоположны.

Пусть $f(X_1,X_2,...,X_n)$, $\varphi_1(t_1,t_2,...,t_m)$, ..., $\varphi_n(t_1,t_2,...,t_m) \geq S$ и $F(t_1,t_2,...,t_m) = f(\varphi_1(t_1,t_2,...,t_m),...,\varphi_n(t_1,t_2,...,t_m))$ - суперпозиция этих самодвойственных функций. Тогда $\neg F(t_1,t_2,...,t_m) = \neg f(\varphi_1(t_1,t_2,...,t_m),...,\varphi n(t_1,t_2,...,t_m))$ = [поскольку $f \geq S$] = $f(\neg \varphi_1(t_1,t_2,...,t_m),..., \neg \varphi_n(t_1,t_2,...,t_m))$ = [поскольку $\varphi_1(t_1,t_2,...,t_m),...,\varphi_n(t_1,t_2,...,t_m) \geq S$] = $f(\varphi_1(\neg t_1,...,\neg t_m),...,\varphi_n(\neg t_1,...,\neg t_m))$ = $F(\neg t_1,...,\neg t_m)$.

4) Мы убедились в возможности представления любой функции многочленом Жегалкина.

Подмножеством множества многочленов является класс L линейных функций - функции вида $X_{i1} \oplus X_{i2} \oplus ... \oplus X_{in} \oplus \sigma$. Здесь X_{i1} , X_{i2} , X_{in} - переменные, σ - булева константа (0 или 1).

Очевидно, что класс линейных функций - замкнутый: подстановка сумм вместо переменных представляет собой сумму, при этом некоторые пары слагаемых могут взаимно сократиться ввиду эквивалентности $X \oplus X=0$.

Пример 79:

Пусть $f(X,Y,Z) = X \oplus Y \oplus Z \oplus 1$, $\varphi_1 = X \oplus Y \oplus S \oplus T$, $\varphi_2 = S \oplus Z \oplus 1$. Тогда суперпозиция $F(X,Y,Z,S,T) = f(\varphi_1\ \varphi_2,Z)$ [в функцию f подставляем функцию φ_1 вместо X и функцию φ_2 вместо Y] представляет собой линейную функцию:

$$F(X,Y,Z,S,T) = (X \oplus Y \oplus S \oplus T) \oplus (S \oplus Z \oplus 1) \oplus Z \oplus 1 = X \oplus Y \oplus T.$$

5) Введем отношение частичного порядка для булевых векторов: $X \leq Y$ (где $X = (\alpha_1,\alpha_{2\text{В начале}},...,\alpha_n)$, $Y = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$) - если $\alpha_i \leq \beta_i$, для I = 1,2,...,n. Заметим, что для булевых переменных строгое неравенство $\alpha < \beta$ означает, что $\alpha = 0$, $\beta = 1$, поскольку других возможностей нет. Равенство $\alpha = \beta$ добавляет варианты $\alpha = \beta = 0$ и $\alpha = \beta = 1$. Поэтому неравенству $\alpha \leq \beta$ удовлетворяют 3 пары (α, β); (0,0); (0,1); (1,1) и не удовлетворяет только пара (1,0). Можно заметить, что ($\alpha \leq \beta$) эквивалентно (α->β).

Определение 56: Класс M монотонных функций - это класс функций таких, что если $X \leq Y$, то $f(X) \leq f(Y)$, т.е. функция на большем наборе принимает не меньшее значение. Среди заданных в таблице 6 функций двух существенных переменных монотонными являются конъюнкция и дизъюнкция.

Покажем, что класс монотонных функций - замкнутый.

Пусть функции $f(X_1,X_2,...,X_n)$, $\varphi_1(t_1,t_2,...,t_m)$, ..., φ_n $(t_1,t_2,...,t_m) \geq M$ и $F(t_1,t_2,...,t_m) = f(\varphi_1(t_1,t_2,...,t_m),...,\varphi_n(t_1,t_2,...,t_m))$ суперпозиция этих монотонных функций. Пусть также $\alpha \leq \beta$ ($\alpha = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$). Тогда $\varphi_i(\alpha) \leq \varphi_i(\beta)$ для $i = 1,2,...,m$, так как $\varphi_i \geq M$. Поэтому $F(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m) = f(\varphi_1(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m),...,\varphi_n(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m)) \leq$ [поскольку $f \geq M$] $\leq f(\varphi_1(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m), ..., \varphi_n(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m)) = F(\beta_1,\beta_2,...,\beta_m)$ что и требовалось доказать.

Отметим, что для каждой упорядоченной пары (A, B) различных классов из пяти рассмотренных предполных T_0, T_1, S, L, M существует функция, входящая в A и не входящая в B. Таблица 1 содержит такие примеры: каждая функция таблицы входит в класс, соответствующий строке и не входит в класс, соответствующий столбцу. Например, входит в M , но не входит в S функция-константа 0; входит в S , но не входит в L функция $m_3(X,Y,Z)$. Из этого замечания можно сделать важный вывод: никакой из пяти классов T_0, T_1, S, L, M не входит целиком ни в какой из остальных четырех (таблица 30).

Таблица 30 – Классы функций

A: B:	T_0	T_1	S	L	M
T	*	0	0	$X \cap Y$	$X \oplus Y$
T_1	1	*	1	$X \cap Y$	$X \sim Y$
S	$\neg X$	$\neg X$	*	$m_3(X,Y,Z)$	$\neg X$
L	$\neg X$	$\neg X$	$X \oplus Y$	*	$X \oplus Y$
M	1	0	0	$X \cap Y$	*

2.6 Критерий полноты системы булевых функций

Рассмотренные 5 классов функций используются при решении вопроса о функциональной полноте.

Критерий полноты системы булевых функций (теорема Поста) - система $\sum$ полна в том и только в том случае, если для каждого из классов T_0,T_1,S,L,M в системе существует функция, не принадлежащая этому классу; иначе говоря, система $\sum$ полна, если выполнены 5 условий:

1) в системе $\sum$ есть $f_1 \notin T_0$,
2) в системе $\sum$ есть $f_2 \notin T_1$,
3) в системе $\sum$ есть $f_3 \notin S$,
4) в системе $\sum$ есть $f_4 \notin L$,
5) в системе $\sum$ есть $f_5 \notin M$.

Функции f_1 - f_5 - не обязательно различные.

Предварительно рассмотрим 3 утверждения, которые демонстрируют, как суперпозициями функций системы, удовлетворяющей условию теоремы Поста, выразить функции известных полных систем.

Лемма 1. Суперпозициями несамодвойственной функции $f(X_1,X_2,...,X_n)$ и функции $\neg X$ можно получить функцию-константу. Если $f \notin S$, то существует набор $\tilde{\sigma}(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ такой, что

$$f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n) = f(\neg\sigma_1,\neg\sigma_2,...,\neg\sigma_n). \quad (*)$$

Построим суперпозицию $\varphi(X) = f(X^{\sigma 1},X^{\sigma 2},...,X^{\sigma n})$, где вместо каждого переменного функции f подставляется либо X, либо $\neg X$. Тогда $\varphi(0) = f(0^{\sigma 1},0^{\sigma 2},...,0^{\sigma n})$ = [поскольку $0^{\sigma} = \neg\sigma$] = $f(\neg\sigma_1,\neg\sigma_2,...,\neg\sigma_n)$ = [ввиду (*)] = $f(\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n)$ = [поскольку $1^{\sigma} = \sigma$] = $f(1^{\sigma 1},1^{\sigma 2},1^{\sigma n}) = \varphi(1)$. Таким образом, $\varphi(0) = \varphi(1)$, а это означает, что $\varphi(X)$ - константа.

Следствие. Из функции $\neg X$ и константы можно получить другую константу.

Лемма 2. Суперпозициями немонотонной функцию $\neg X$. $f(X_1,X_2,...,X_n)$ и функций-констант 0 и 1 можно получить функцию Если $f \notin M$, то существуют наборы $\tilde{\alpha} = (\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$ и $\tilde{\beta} = (\beta_1,\beta_2,...,\beta_n)$ такие, что $\tilde{\alpha} < \tilde{\beta}$, (т.е. $\alpha_i < \beta_i$ для i = l,2,...,n) и $f(\tilde{\alpha}) > f(\tilde{\beta})$, т.е. $f(\tilde{\alpha}) = 1$, $f(\tilde{\beta}) = 0$. Пусть $\tilde{\gamma}(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$ -набор, где каждое γ_i - либо переменная X , либо константа и определяется следующим образом

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha, если\, a_i = \beta_i, \\ X, если\, a_i < \beta_i, т.е. если\, a_i = 1, \beta_i = 1. \end{cases}$$

Отметим, что если X = 0, то $\tilde{\gamma} = \tilde{\alpha}$; если X = 1, то $\tilde{\gamma} = \tilde{\beta}$. Пусть $\Psi(X) = f(\gamma_1,\gamma_2,...,\gamma_n)$. Тогда $\Psi(0) = f(\neg\alpha) = l$; $\Psi(1) = f(\neg\beta) = 0$, т.е. $\Psi(X) = \neg X$.

Лемма 3. Суперпозициями нелинейной функции $f(X_l,X_2,...,X_n)$, функции $\neg X$ и функций-констант 0 и 1 можно получить конъюнкцию $X \cap Y$.

Построим для функции f многочлен Жегалкина. В силу нелинейности f среди слагаемых найдется содержащее не менее 2 множителей. Пусть это переменные X_1 и X_2. Тогда все слагаемые разбиваются на 4 группы: содержащие обе переменные X_1 и X_2 , только одну из них X_1 или X_2 и не содержащие ни одной. Объединяя слагаемые и вынося за скобки соответствующие множители в каждой из трех первых групп, получим:

$$f(X_1,X_2,X_3,...,X_n) =$$
$$X_1 \cdot X_2 g_1(X_3,...,X_n) \oplus X_1 \cdot g_2(X_3,...,X_n) \oplus X_2 g_3(X_3,...,X_n) \oplus g_4(X_3,...,X_n).$$

Функции g_1 - g_4 зависят от переменных $X_3,...,X_n$, причем g_1 не равна тождественно 0, - иначе не было бы ни одного слагаемого с произведением $X_1 \cdot X_2$. Подставим в функцию f вместо переменных $X_3,...,X_n$ тот набор констант $\sigma_3,...,\sigma_n$, для которого $g_1(X_3,...,X_n\} = 1$; при этом функции g_2, g_3, g_4 обращаются в некоторые константы; обозначим их соответственно α, β, γ. Получим функцию двух переменных

$$\varphi(X_1,X_2) = f(X_1,X_2,\sigma_3,...,\sigma_n) = X_1 \cdot X_2 \oplus \alpha X_1 \oplus \beta X_2 \oplus \gamma.$$

Теперь произведем еще одну подстановку: в функцию $\varphi(X_1,X_2)$ подставим функцию $(X_1 \oplus \beta\ )$ вместо X_1 и $(X_2 \oplus \alpha)$ вместо X_2. В зависимости от значений α и β каждая из этих функций представляет собой либо X_i, либо $\neg X_i$, так что фактически мы подставляем либо переменную, либо ее отрицание. Получаем функцию $\psi(X_1,X_2)$, равную $(X_1 \oplus \beta)(X_2 \oplus \alpha) \oplus \alpha(X_1 \oplus \beta) \oplus \beta(X_2 \oplus \alpha) \oplus \gamma$ = [после раскрытия скобок] = $X_1 \cdot X_2 \oplus \beta X_2 \oplus \alpha X_1 \oplus \alpha\beta \oplus \alpha X_1 \oplus \alpha\beta \oplus \beta X_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma$ = [после сокращений] = $X_1 \cdot X_2 \oplus \alpha\beta \oplus \gamma$, т.е. сумму по модулю 2 конъюнкции и константы $(\alpha\beta \oplus \gamma)$. Если последняя равна 0, то построение закончено; в противном случае, т.е. если $\psi(X_1,X_2) = X_1 \cdot X_2 \oplus 1$, то нужно подставиты $\psi(X_1,X_2)$ в функцию $\neg X$: $\neg (X_1 \cdot X_2 \oplus 1) = X_1 \cdot X_2$.

Теперь доказательство теоремы Поста уже достаточно просто. Необходимость следует из сделанного выше замечания: если все функции системы принадлежат какому-нибудь из 5 классов (обозначим его Q), то в силу замкнутости класса Q все суперпозиции функций системы также принадлежат ему; в то же время в P_2 есть функции, которые не принадлежат Q, что означает неполноту системы.

Достаточность выводится из лемм 1 - 3. Пусть в системе есть функции $f_1 \notin T_0$, $f_2 \notin T_1$, $f_3 \notin S$, $f_4 \notin L$, $f_5 \notin M$ (некоторые из них могут совпадать). Суперпозиция h1(X) = f1(X,X,...,X) - функция одной переменной, имеющая столбец значений $(1,\alpha)^T$; аналогично, $h_2(X) = f_2(X,X,...,X)$ - функция со столбцом значений $(\beta,0)^T$. Возможны два случая:

1) $\alpha = 0$ или $\beta = 1$. Тогда $h_1(X)$ или $h_2(X)$ - функция $\neg X$. По лемме 1, из функций $f_3 \notin S$ и $\neg X$ можно получить константы 0 и 1.

2) в противном случае $\alpha = 1$ и $\beta = 0$. Тогда $h_1(X) \equiv 1$, $h_2(X) \equiv 0$.

По лемме 2, из функций $f_5 \notin M$ и констант можно получить функцию $\neg$ M.

Как видим, в обоих случаях из функций системы могут быть построены обе константы и отрицание.

По лемме 3, из функций $f_4 \notin L$, отрицания $\neg X$ и констант 0 и 1 можно получить конъюнкцию $X \cap Y$. В свою очередь, конъюнкция и отрицание образуют полную систему, чем и завершается доказательство теоремы Поста.

Для проверки конкретной системы на полноту можно заполнить для функций системы так называемую таблицу Поста: (таблица 31), в которой исследуется система $\{X \oplus Y, X \cup Y\}$ ("+" означает принадлежность функции данному предполному классу).

Таблица 31 – Принадлежность функции классу

	T_0	T_1	S	L	M
$X \oplus Y$	+	–	–	+	–
$X \cup Y$	+	+	–	–	+
1	–	+	–	+	+

Таблица 32 - Принадлежность функции классу

	T_0	T_1	L
$X \oplus Y$	+	–	+
$X \cup Y$	+	+	–
1	–	+	+

Принадлежность трех данных функций классам T_0 и T_1 проверяется по их таблицам очень просто. Также несложно проверить принадлежность их классу M (заметим, что если $f \notin T_1$ и не равна 0 тождественно, то она не монотонна). Очевидно также, что $(X \oplus Y) \geq L$, свойство $(X \oplus Y) \notin S$ следует из соотношения

$$(X \oplus Y)^* = \neg(\neg X \oplus \neg Y) = (X \oplus 1) \oplus (Y \oplus 1) \oplus 1 = X \oplus Y \oplus 1 \neq X \oplus Y.$$

Функция $(X \cup Y)$ не самодвойственна, поскольку двойственная ей, как мы знаем, другая функция - конъюнкция. Далее, $(X \cup Y)$ нелинейна, так как ее многочлен Жегалкина $XY \oplus X \oplus Y$ содержит произведение $X \cdot Y$. Легко проверяется также заполнение последней строки таблицы 1 - для функции-константы 1. Наконец, согласно теореме Поста, для полноты системы в каждом столбце таблицы Поста должен быть хотя бы один минус.

В таблице 30 для каждого из пяти рассмотренных выше классов T_0, T_1, S, L, M знаками "+" и "–" показана принадлежность ему ряда известных функций: всех 4 функций одной переменной, 6 функций двух переменных и 2 функций трех переменных. В отличие от предыдущей таблицы функции здесь представлены столбцами. Заметим, что в каждой строке таблицы имеется знак "–"; другими словами, для каждого из пяти классов есть не принадлежащая ему функция и, следовательно, ни один из них не совпадает с множеством всех логических функций P_2.

Таблица 33 – Таблица принадлежности функций полным классам

	0	1	X	–X	$X \cap Y$	$X \cup Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$	$X \oplus Y$	X|Y	$X \oplus Y \oplus Z$
T_0	+	–	+	–	+	+	–	–	+	–	+
T_1	–	+	+	–	+	+	+	+	–	–	+
S	–	–	+	+	–	–	–	–	–	–	+
L	+	+	+	+	–	–	–	+	+	–	+
M	+	+	+	–	+	+	–	–	–	–	–

Из таблицы 33 можно заключить, что система, состоящая из одной функции, - штриха Шеффера X|Y - полна.

Определение 57: Система функций G называется независимой, если никакая функция f этой системы не выражается через остальные, т.е. f не принадлежит замыканию системы $G \setminus \{f\}$.

Определение 58: Независимая система функций G называется базисом замкнутого класса К, если всякая функция $F \geq K$ есть суперпозиция функций из G . Можно определить понятие базиса и так: базис замкнутого класса К - система функций, замыкание которой равно К, причем любое подмножество К (кроме самого К) уже не обладает этим свойством.

Пример 80:

Система $\{\neg, \cap\}$ -независимая.

Пример 81:

Система $\{\neg, \cup, \cap\}$ не является независимой, поскольку, как мы знаем, $\cup$ можно выразить через $\cap$ и $\neg$ или, наоборот, $\cap$ - через $\cup$ и $\neg$.

Пример 82:

Система $\{\cap, \oplus, 1\}$ независима, в чем можно убедиться, построив для нее фрагмент таблицы Поста. Действительно, для каждой из трех функций в этой таблице имеется класс, которому она не принадлежит, но принадлежат две остальные и, следовательно, все их суперпозиции. В примерах 1 - 3 представлены полные системы функций. Теперь рассмотрим пример независимой системы для замкнутого класса, не совпадающего с P_2.

Система $\{0, \leftrightarrow\}$ не полная, так как обе функции линейны, и представляет базис класса L. Действительно, $\neg X = X \leftrightarrow O$, $\neg 0 = 1$, $X \oplus Y = \neg (X \leftrightarrow Y) = (X \leftrightarrow Y) \leftrightarrow 0$, а каждая линейная функция выражается через

$(X \oplus Y)$ и $\neg X$. Независимость функций системы также легко проверить ($0 \notin T_0$, $0 \notin T_1$, $\geq T_0$, $\geq T_1$).

Некоторые следствия теоремы Поста (таблица 34).

Таблица 34 – Следствия теоремы Поста

Следствие 1	Всякий замкнутый класс $Q \neq P_2$ содержится целиком хотя бы в одном из 5 предполных классов T_0, T_1, S, L, M: иначе онпредставлял бы полную систему и, в силу замкнутости, равнялся бы P_2 .
Следствие 2	объясняет название **предполных** классов: если к какому-нибудь из них, допустим S , (для других классов рассмотрение аналогичное) добавить любую не принадлежащую ему функцию h, то замыкание системы S U {h} совпадает с P_2. Действительно, система S U {h} шире, чем S и, в то же время, не может входить в какой-либо из остальных 4 классов, так как тогда в нем содержался бы целиком класс S , что противоречит замечанию в конце предыдущего параграфа.Иначе говоря, между предполным классом и P_2 не может существовать промежуточный замкнутый класс. Отсюда
Следствие 3	В P_2 существуют лишь 5 предполных классов, т.е. обладающих свойством, сформулированным в следствии 2. Это рассмотренные нами T_0, T_1, S, L, M.
Следствие 4	Из лемм 1-3 и доказательства теоремы можно заключить, что если в системе функций присутствуют константы 0 и 1, то для ее полноты достаточно, чтобы в ней содержались немонотонная функция и нелинейная функция.

2.7 Применение булевых функций при проектирование 2-битного сумматора

2-битный сумматор – это устройство, которое вычисляет сумму двузначных двоичных чисел, выдавая в качестве ответа трехзначное двоичное число. Например, $10+_2 11 = 101$. Для создания функциональной схемы 2-битного сумматора мы сначала построим *полубитный сумматор*, предназначенный для сложения двух двоичных цифр. Ответ при этом представляется двузначным двоичным числом. Например, $1+_2 1 = 10$.

Полубитный сумматор

Пусть x и y обозначают двоичные цифры, которые предстоит сложить, а u и v – двоичные цифры суммы, получающейся на выходе сумматора, как показано на рисунке 30.

Рисунок 30 – Полубитный сумматор

Таблица истинности (таблица 35) проясняет связь между вводимыми и выводимыми цифрами. Следовательно, (разряд переноса) и

$v = j$ (*сложение по модулю 2*).

Таблица 35 – Таблица истинности

x	y	u	v
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Пример 83

Проверьте, что функциональная схема, изображенная на рисунке 31, реализует полубитный сумматор.

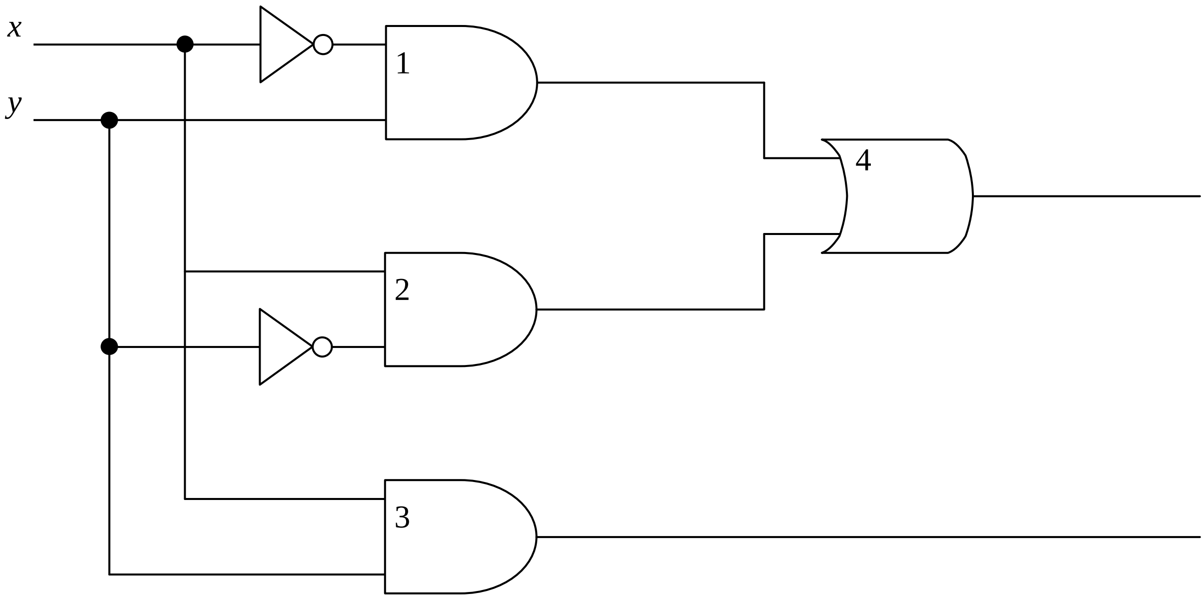


Рисунок 31 - Схема полубитного сумматора

Решение: входными данными элементов 3 и 4 являются разряд переноса и сумма по модулю 2 соответственно (таблица 36).

Таблица 36 – Таблица логических элементов

Логический элемент	Ввод	Вывод
1	$\bar{x}, y$	$\bar{x}y$
2	$x, \bar{y}$	$x\bar{y}$
3	x, y	xy
4	$\bar{x}y, x\bar{y}$	$\bar{x}y \vee x\bar{y}$

2-битный сумматор

На входе 2-битный сумматор получает два двузначных двоичных числа, а на выходе у него оказывается трехзначное число, равное сумме вводимых чисел. Иными словами, 2-битный сумматор складывает числа в двоичной системе счисления, например: $11 +_2 10 = 101$.

Обозначим через a и b цифры первого вводимого в сумматор числа, а через c и d – цифры второго (рисунок 32). Пусть e, f и g – цифры вычисляемой суммы.

Рисунок 32 - 2- битный сумматор

Далее мы могли бы, как и в случае с полубитным сумматором, заполнить таблицы истинности цифр e, f и g, считая их булевыми функциями от вводимых цифр, упростить полученные выражения с помощью карты

Карно и начертить функциональную схему. Однако мы поступим иначе: используем полубитный сумматор в качестве блока функциональной схемы. Схема, представленная на рисунке 33, использует два полубитных сумматора для вычисления сумм: $a+_2c$ и $b+_2d$.

Сумма по модулю 2 (переменная v_2) дает нам цифру g. Складывая разряд переноса u_2 с v_1 с помощью третьего полубитного сумматора, мы получаем двузначное число с цифрами u_3 и f. Наконец, последняя цифра суммы, e, может быть получена из u_1 и u_3 с помощью функционального элемента **ИЛИ**.

Пример 84

Проверьте описанные действия 2-битного сумматора на примере суммы $11_2+10 = 101$.

Решение. Нам дано: $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$, $d = 0$.

Так как $a+_2c = 1+_21 = 10$, то $u_1 = 1$ и $v_1 = 0$. Ввиду того, что $b+_2d = 1+_20 = 01$, мы получаем: $u_2 = 0$ и $v_2 = 01$, откуда $g = 1$.

Далее, $u_2+_2v_1 = 0+_20 = 00$, т. е. $u_3 = 0$. Значит, $f = 0$.

Наконец, $u_1 \vee u_3 = 1 \vee 0 = 1$, что дает равенство $e = 1$.

Итак, $11+_210 = 101$, как и ожидалось.

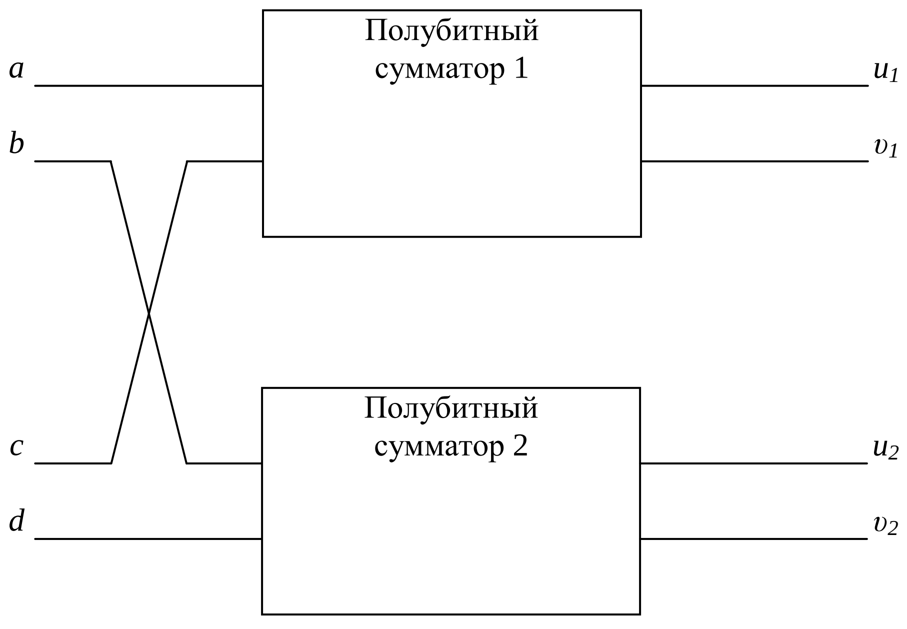


Рисунок 33 - Действия 2-битного сумматора

Разработанная функциональная схема 2-битного сумматора представлена на рисунке 34.

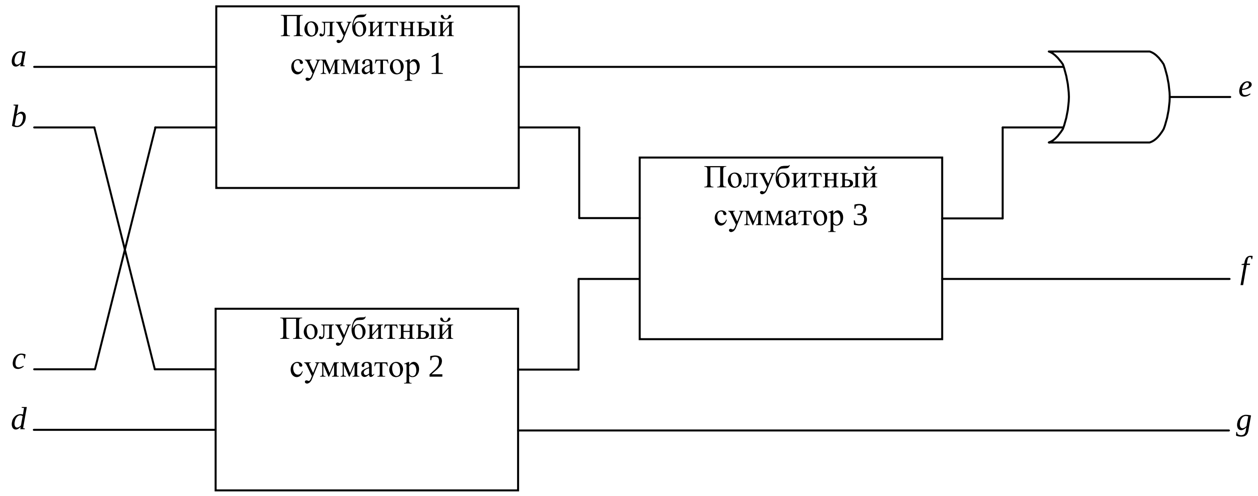


Рисунок 34 - Функциональная схема 2-битного сумматора

Пример 85

Проследите процесс сложения двоичных чисел 11 и 01 функциональной схемой из рисунка 34.

Решение. Обозначим через u_{i} и v_{i} цифры, генерируемые полубитным сумматором i при i = 1, 2 и 3. Так как $a = 1$, $b = 1$, $c = 0$ и $d = 1$, то

$a+_2c = 1+_20 = 01$ $\quad$ $u_1 = 0$ и $v_1 = 1$;

$b+_2d = 1+_21 = 10$ $\quad$ $u_2 = 1$ и $v_2 = 0$ (откуда $g = 0$).

Теперь в качестве входных данных третьего полубитного сумматора мы имеем $v_1 = 1$ и $u_2 = 1$. Значит,

$v_1+_2u_2 = 1+_21 = 10$ $\quad$ $u_3 = 1$ и $v_3 = 0$ (откуда $f = 0$).

Наконец,

$u_1 \vee u_3 = 0 \vee 1 = 1$ (откуда $e = 1$).

Итак, окончательная сумма, генерируемая сумматором, равна $100 = 11+_201$, что соответствует истине.

На рисунке 35 изображена функциональная схема 3-битного сумматора, складывающего два трехзначных двоичных числа с цифрами a, b, c и d, e, f соответственно. В качестве суммы получается четырехзначное число с цифрами g, h, i и j.

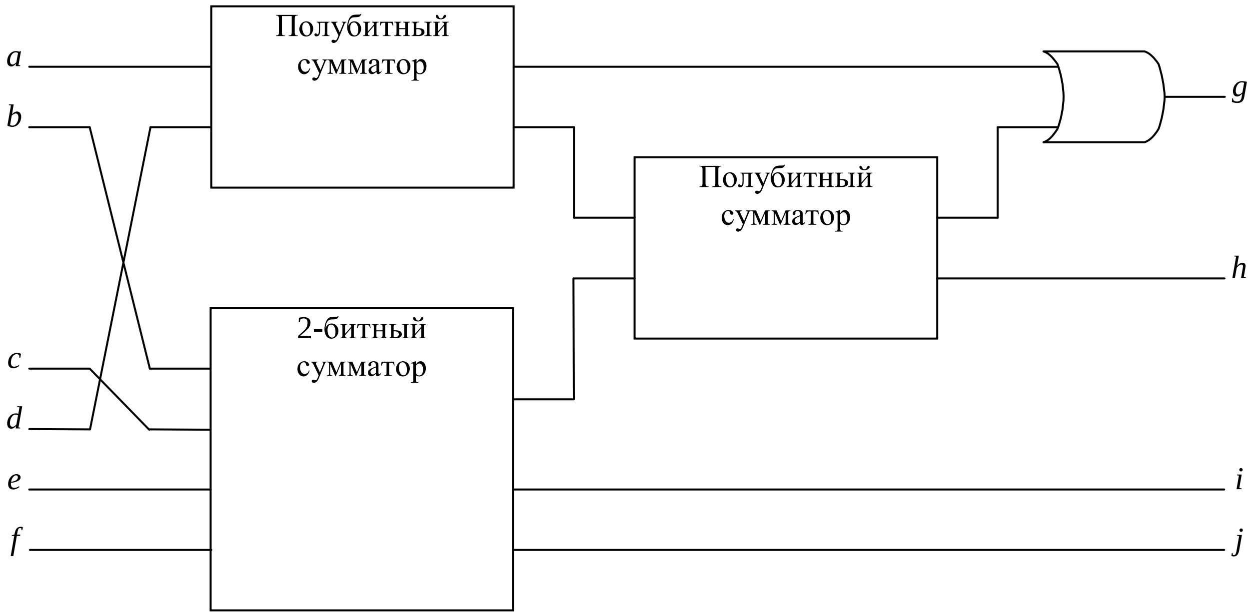


Рисунок 35 - Функциональная схема 3-битного сумматора

2.8 Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение истинного и ложного высказывания. Приведите примеры.

2) Сформулируйте определение дизъюнкции, конъюнкции.

3) Перечислите 16 логических функций, запишите их обозначения и истинность на различных наборах значений.

4) Объясните, в чём различие действительной и фиктивной функций.

5) Сформулируйте и запишите 8 основных аксиом.

6) Запишите законы: Де Моргана и следствие из него, закон склеивания, закон поглощения.

7) Воспризведите основные свойства функции сложения по модулю 2, функции импликации, функции Шеффера, функции Пирса.

8) Дайте определение булевой функции.

9) Сформулируйте принцип табличного представления функций.

10) Дайте определение функций: Сумма по модулю 2, штрих Шеффера.

11) Дайте определение формулы алгебры логики. Пиведите примеры.

12) Сформулируйте определение равносильных формул.

13) Укажите равенства для формул, содержащих операции $\neg$, $\cup$, $\cap$ (прописать).

14) Проговорите и запишите правило замены подформул.

15) Дайте определение элементарной конъюнкции, СДНФ, ДНФ.

16) Сформулируйте определение элементарной дизъюнкции, СКНФ, КНФ.

17) Приведите примеры представления функции СДНФ, СКНФ.

18) Дайте определение дизъюктивного терма, конъюктивного терма.

19) Сформулируйте определения НДФ, ДНФ, КНФ.

20) Приведите примеры преобразования функции к ДНФ и КНФ.

21) Проведите минимизацию какой-либо функции методом Квайна и методом карт Карно. Сравните результаты. Запомните основные шаги методов.

22) Сформулируйте теорему Жегалкина.

23) Перечислите классы функций.

24) Дайте определение базиса.

25) Сформулируйте теорему Поста-Яблонского.

26) Нарисуйте основные логические элементы.

27) Дайте определение многочлена Жегалкина.

28) Сформулируйте определение замкнутого класса булевых функций. Приведие примеры.

29) Определите основные предполные классы. Приведите примеры.

30) Объясните название - предполные классы.

31) Сформулируйте принцип двойственности.

32) Сформулируйте критерий полноты системы булевых функций Лемму 1, Лемму 2, Лемму 3.

2.9 Практические задания

Задание 1

Проверить справедливость равенства

$x = \neg x \oplus 1$

Задание 2

Проверить справедливость следующих равенств:

$\neg(\neg x1 \neg x2) = x1 \cup x2$, $x1 \rightarrow x2 = x1 \cup x2$, $x1 | x2 = x1 \cap x2$

Задание 3

Построить таблицу истинности

а) $(z \rightarrow x) \cup (y \leftrightarrow z \cup y \cap x)$

б) $(\neg z \leftrightarrow x) \rightarrow \neg y \rightarrow z \rightarrow x$

в) $(x \leftrightarrow \neg y \rightarrow x) \cup z \leftrightarrow \neg y \cap x \cap z$

Задание 4

С помощью преобразований преобразовать формулу так, чтобы она содержала лишь ($\cap$ и $\neg$), ($\cup$ и $\neg$)

а) $(x \leftrightarrow y) \rightarrow z \cup t$

б) $(x \cup y) \leftrightarrow (x \rightarrow z)$

Задание 5

Запишите с помощью логических операций следующие выражения:

а) идет дождь и дует ветер;

б) нет дождя и нет ветра;

в) нет дождя, но дует ветер;

г) идет дождь, но нет ветра;

д) идет дождь или дует ветер;

е) неверно, что идет дождь или нет ветра;

ж) если идет дождь, то дует ветер;

з) дождь идет тогда и только тогда, когда дует ветер.

Задание 6

Как с помощью логических операций записать следующие выражения:

а) X достаточное условие для Y;

б) X необходимое условие для Y;

в) X, только если Y;

г) X необходимое и достаточное условие Y?

Задание 7

Пусть X означает <сейчас жарко>, а Y означает <температура поднимается>. Сформулируйте словесно каждое из следующих высказываний:

а) $X \cap Y$;

б) $X \cap \neg Y$;

в) $\neg X \cap \neg Y$;

г) $X \cup \neg Y$;

д) $\neg (X \cap Y)$;

е) $\neg (X \cup Y)$.

Задание 8

Составить таблицы истинности для каждого из следующих высказываний:

а) $X \rightarrow (X \rightarrow Y)$;

б) $(X \cup Y) \leftrightarrow (Y \cup X)$;

в) $X \rightarrow (Y \cup Z)$.

Задание 9

Доказать, что формула тождественно истина

а) $(P \to Q) \to ((P \to (Q \to R)) \to (P \to R)$;

б) $P \to (Q \to (P \cap Q))$;

в) $P \to P \cup Q$;

г) $P \cap Q \to P$;

д) $(P \to Q \cap R) \leftrightarrow ((P \to Q) \cap (P \to R))$;

е) $((P \to Q) \cap (P \to Q)) \to \neg P$.

Задание 10

Найти более простые формулы

а) $(x \cup y) \cap (x \cup y) \cap (x \cup y)$;

б) $x \cap y \cap z \cup x \cap y \cap z \cup x \cap y \cap z$.

Задание 11

Пусть высказывания X, Y, Z, υ, ν, W имеют значения соответственно 1, 0, 0, 1, 1, 1. Определить истинностные значения каждого из следующих высказываний:

а) $W \to (Y \cup Z)$;

б) $\neg (X \leftrightarrow Y)$;

в) $\neg (X \to Y) \to (X \leftrightarrow (\upsilon \cap \nu))$;

г) $\neg (X \cup Y) \cap (Z \to (\upsilon \to (\upsilon \leftrightarrow W)$.

Задание 12

Для каждого из предлагаемых высказываний определить, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить истинное значение высказывания. Если достаточно, то указать значение высказывания:

а) $(X \to Y) \to Z$, где Z истинно;

б) $X \cap (Y \to Z)$, где импликация истинна;

в) $X \cup (Y \to Z)$, где импликация истинна;

г) $(X \cap Y) \to (Z \cup Z)$, где конъюнкция истинна, а дизъюнкция ложна.

Задание 13

Верны ли равенства:

а) $(X \cap Y) = X$;

б) $X \to Y = \neg X \cup Y$;

в) $X \leftrightarrow Y = (\neg X \cup Y) \cap (\neg Y \cup X)$;

г) $X \cap (Y \cup X) = X$;

д) $\neg X = X$;

е) $\neg (A \to B) = A \cap \neg B$?

Задание 14

Дано высказывание: "Для того, чтобы матрица имела обратную матрицу, необходимо, чтобы ее определитель был отличен от нуля". Какие из следующих высказываний являются его следствиями:

а) для того, чтобы матрица имела обратную, достаточно, чтобы ее определитель был равен 0;

б) для того, чтобы определитель матрицы был отличен от нуля, достаточно, чтобы эта матрица имела обратную;

в) для того, чтобы определитель матрицы был равен 0, необходимо, чтобы эта матрица не имела обратной;

г) определитель матрицы равен 0 только тогда, когда эта матрица не имеет обратной.

Задание 15

Исходя из определения логической формулы, определить, являются ли формулами следующие выражения:

а) $(((A \vee B) \to \neg C) \sim D) \,\&\, ((A \oplus C) \to \neg D)$;

б) $((A \oplus \neg B) \to C) \sim (D \,\&\, \to B)$.

Задание 16

Записать логическими формулами следующие сложные высказывания:

а) "Этот человек студент или предприниматель";

б) "Петров женат на Марье Ивановне или Лукерии Ильиничне";

в) "Если при выполнении программы отклонение контролируемых параметров превышает предусмотренные нормы (стандарты), то требуется оперативная корректировка программы или уточнение стандартов".

Задание 17

Представить формулами логики высказываний следующие суждения (сложные высказывания):

а) "Если темпы роста рынка продукта корпорации высокие и размер контролируемой ею доли рынка также высок, то в соответствии с матрицей портфельного анализа этот продукт относится к категории 'звезда'; он дает большой доход, но требует значительных вложений";

б) "Стратегическая хозяйственная единица корпорации занимает сильные позиции на рынке и работает в привлекательной отрасли, следовательно, имеет наиболее высокий приоритет при распределении ресурсов";

в) "Если стратегическая хозяйственная единица корпорации - лидер в непривлекагельной (возможно, старой) отрасли, ее стратегией может быть максимизация прибыли на уже вложенный капитал, но не вложение нового";

г) "Если при высокой доле рынка темпы роста рынка низкие, то продукт относится к категории 'денежного мешка', или 'дойной коровы'; он дает большие доходы и характеризуется малыми затратами в связи со стабильностью рынка";

д) "Если прогноз показывает, что можно получить крупную прибыль на выпуске новых товаров, то при разработке стратегии развития фирме следует сделать упор на маркетинг и сеть распределения, а также целесообразно открыть более крупные магазины и расширить торговую сеть";

Задание 18

Записать логической формулой следующий текст: "Если компьютер при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то она исправна. Если при запуске он выдает ошибку при проверке оперативной памяти и память установлена правильно, то либо оперативная память дефектна, либо дефектна материнская плата. Тогда если эта оперативная память правильно установлена в другой (контрольный) компьютер и он при запуске не выдает ошибку при проверке оперативной памяти, то оперативная память исправна".

Задание 19

Записать логической формулой следующую пословицу: "Не ел - не мог, поел - без ног".

Задание 20

Составить таблицы Кэли для основных логических связок - бинарных логических операций.

Задание 21

С помощью равносильных преобразований построить ДНФ и проверить критерий ложности.

а) $x \to (y \to z \cap x) \cup (x \leftrightarrow (y \to x))$;

б) $(x \cup y \cap z) \to (x \cap \neg z)$;

в) $(x \leftrightarrow y \cap z) \to \neg x$.

Задание 22

Построить СДНФ и СКНФ двумя способами, по таблице истинности и с помощью равносильных преобразований.

$(x \leftrightarrow y) \to \neg x$

Задание 23

Доказать, что $\neg((A \cap C) \cup (B \cap C)) = (\neg A \cap \neg B \cap C) \cup \neg C$.

Задание 24

Доказать:

а) $\neg(X \cup \neg Y) = XY$;

б) $(X \cup Y)(Z \cup V) = XZ \cup YZ \cup XV \cup YV$;

в) $XY \cup ZV = (X \cup Z)(Y \cup Z)(X \cup Z)(Y \cup V)$;

г) $X \cup XY = X$;

д) $X(X \cup Y) = X$;

е) $X(\neg X \cup Y) = XY$;

ж) $\neg(X \to (Y \to Z)) = X \cup \neg Z$.

Задание 25

Упростить формулы:

а) $X \cup XY \cup YZ \cup \neg XZ$;

б) $(X \leftrightarrow Y)(\neg X \to Y)$;

в) $X(X \to Y) \to Y$

г) $(X \to Y)(Y \to Z) \to (X \to Z)$.

Задание 26

С помощью равносильных преобразований построить ДНФ и проверить критерий ложности. $X \cup Y \cup Z \to (X \leftrightarrow Z)$.

Задание 27

Построить СКНФ двумя способами. $(X \to Y) \to \neg X \cap \neg Y$.

Задание 28

Найти СДНФ и СКНФ для функции, заданной таблицей 37.

Таблица 37 – Таблица истинности функции

x_1	x_2	x_3	$F(x_1,x_2,x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

Задание 29

Найти минимизацю ДНФ функции $y = f(x1,x2,x3,x4,x5)$, принимающей значение 1 на наборах с номерами от 0 до 7, от 11 до 21 и от 26 до 31.

Задание 30

Функция $y = f(x1,x2,x3)$ равна 1 на наборах 1,3,4 и не определена на наборе с номером 5. Найти ее минимальную ДНФ.

Задание 31

Найти минимальную ДНФ булевой функции

$$f(x_1, x_2, ..., x_5) = \begin{cases} 1, на: 01-0-, 001-0, -010- \\ 0, на: 110-1, 000-1, 1001- \end{cases}$$

Задание 32

Функциональной полнотой обладают "усеченные" наборы булевых операций $\{\&, \vee, \neg\}$:

а) $\{\&, \neg\}$;

б) $\{\vee, \neg\}$.

Для подтверждения их функциональной полноты достаточно выразить дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание через функции этих наборов. Проверить (стандартным методом) справедливость подтверждающих это соотношений относительно "недостающих" операций:

а) $x_1 \vee x_2 = \neg(\neg x_1 \& \neg x_2)$;

б) $x_1 \& x_2 = \neg(\neg x_1 \vee \neg x_2)$.

Задание 33

Найти СДНФ логических функций трех переменных f_1-f_4, заданных в таблице 38.

Таблица 38 – Таблица истинности функций

x y z	f_1	f_2	f_3	f_4
0 0 0	0	0	1	0
0 0 1	0	0	0	1
0 1 0	0	1	0	0
0 1 1	1	1	1	1
1 0 0	1	0	1	1
1 0 1	0	1	0	0
1 1 0	1	1	1	1
1 1 1	1	1	0	0

Задание 34

Логическая функция $f(x_1,x_2,x_3)$ представлена формулой $f(x_1,x_2,x_3) = x_2\neg x_3 \cup x_1x_2 \cup \neg x_1x_2x_3$. Упростить формулу и получить СДНФ, используя:

1) табличное представление функции f;

2) расщепление (обратное склеивание).

Задание 35

Построить СДНФ и СКНФ для функций $X_1 \to X_2$.

Задание 36

С помощью равносильных преобразований построить ДНФ и проверить критерий ложности.

а) $X \cup Y \cup Z \to (X \leftrightarrow Z)$;

б) $X \to (Y \to Z \cap X) \cup (X \leftrightarrow (Y \to X))$.

Задание 37

Построить контактную схему

а) $(\neg x \cup y) \cap (z \cap y \cup x) \cup {}^{\gamma}$;

б) $(x \to (y \to z)) \to (y \to x)$.

Задание 38

Упростить следующую функцию и построить контактную схему

а) $(((\neg x \cap \neg y) \cup y) \cup (x \cap y)) \cap x$;

б) $(z \cup (x \cap \neg y)) \cap (\neg x \cup y) \cap \neg z$.

Задание 39

Для данных схем построить более простые схемы, реализующие ту же логическую функцию:

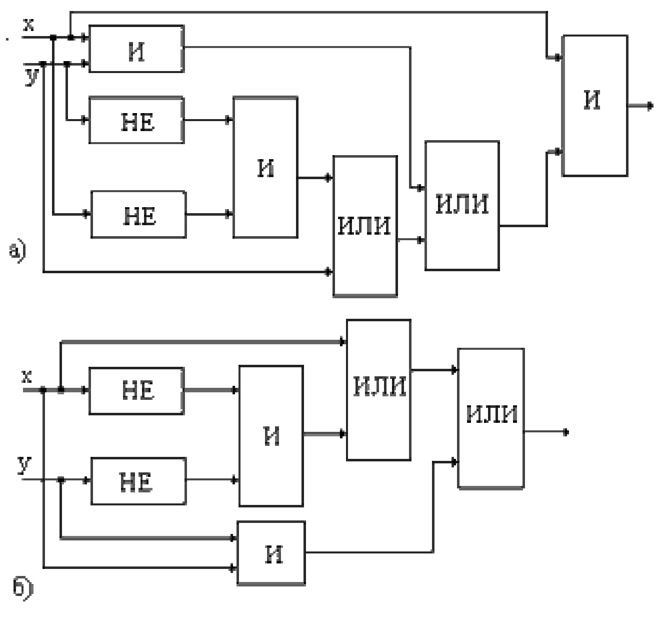


Рисунок 36 – Функциональная схема

Задание 40

Доказать полноту системы булевой функции, состоящей из дизъюнкции, константы 0 и эквивалентности. Образует ли эта система базис?

Задание 41

Установить, является ли полной система, состоящая из дизъюнкции, импликации и конъюкции.

Задание 42

Образует ли полную систему функция $x_1x_2 \cup x_1x_3 \cup x_2x_3$ и отрицание?

2.10 Примеры решения задач

1) Доказать тождество $a \to (b \cap c) = a|(b|c)$.
Доказательство: $\neg a + \neg(b \cap c) = \neg a \cup \neg(b \cap c) = a \cup (b|c) = a|(b|c)$.

2) Доказать тождество: $a+(b \cap c) = (a \to b) \leftrightarrow (a+c)$.
Доказательство: $(a \to b) \leftrightarrow ((a+c) \cap b) = (1+a+a \cap b) \leftrightarrow (a \cap b + b \cap c) =$
$1+(1+a+a \cap b)+(a \cap b+b \cap c) = a+(b \cap c)$.

3)Доказать тождество: $(a \cap b \cap c) \to (a \cup b \cup c) = (a \to b) \cup (b \to c) \cup (c \to a)$.
Доказательство: $\neg(a \cap b \cap c) \cup (a \cup b \cup c) = (\neg a \cup \neg b \cup \neg c) \cup (a \cup b \cup c) = (\neg a \cup b) \cup (\neg b \cup c) \cup (\neg c \cup a) = (a \to b) \cup (b \to c) \cup (c \to a)$.

4) Доказать тождество: $((a \downarrow b) \to (a+b)) \cap ((a-b)(a|b)) = a \cup b$.
Доказательство: $((\neg a \downarrow \neg b) \to (a+b)) \cap ((a-b)(a|b)) =$
$((a \cup b) \cup ((a \cap b) \cup (a \cap \neg b))) \cap ((a \cup \neg b) \cup (a \cup \neg b)) = ((a \cup \neg b) \cap$
$((\neg a \cup b) \cup (a \cup b))) \cap (a \cup 1) = (x \cap (x \cup y)) \cap 1 = x$, где $a = a \cup b$, $y = \neg a \cup \neg b$.

5) Преобразовать в СДНФ функцию:

Решение: Правильность нахождения СДНФ проверим с помощью таблицы истинности 39.

Таблица 39 – Таблица истинности

x	y	z	$x+\neg z$	$x \to y$	f
0	0	0	1	1	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	1	1	0
0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	1	0

6) С помощью равносильных преобразований преобразовать формулу так, чтобы она содержала лишь ($\cap$ и $\neg$), ($\cup$ и $\neg$).

Решение:
$(x \to y) \to x \cap z \equiv \neg(\neg x \cup y) \cup (x \cap z) \equiv (x \cap \neg y) \cup (x \cap z) \equiv \neg(\neg(x \cap \neg y) \cap \neg(x \cap z))$.
$(x \to y) \to x \cap z \equiv \neg(\neg x \cup y) \cup (x \cap z) \equiv (\neg x \cup y) \cap \neg(\neg x \cup \neg z)$.

7) С помощью равносильных преобразований построить ДНФ и проверить критерий ложности.

Решение: $x \cup y \cup z \to (x \leftrightarrow z) \equiv x \cup y \cup z \to ((x \to z) \cap (z \to x)) \equiv (x \cap y \cap z) \cup ((x \cup z)(z \cup x)) \equiv (x \cap y \cap z) \cup (x \cap z) \cup (z \cap x) \neq 0$ СДНФ.

8) Доказать, что формула тождественно истина

$P \to (Q \to \neg P) \equiv \neg P \cup Q \cup P \equiv 1$.

Решение: $P \cup P \equiv 1$.

9) Построить таблицу истинности: $(x \leftrightarrow y) \cap (x \to y \cup z \cap x)$

Решение: Строим таблицу истинности 40.

Таблица 40 – Таблица истинности

1	2	3	4	5	6	7	8
x	y	z	$3 \cap 1$	$2 \cup 4$	$1 \to 5$	$1 \leftrightarrow 2$	$7 \cap 6$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	0	1	1	1
0	0	0	0	0	1	1	1

10) Построить СДНФ и СКНФ двумя способами, по таблице истинности и с помощью равносильных преобразований.

$(x \to y) \to x \cap \neg y \equiv \neg(\neg x \cup \neg y) \cup (\neg x \cap \neg y) \equiv (x \cap \neg y) \cup (\neg x \cap \neg y)$.

Решение: $(x \to y) \to x \cap \neg y \equiv (\neg x \cup \neg y) \cup (\neg x \cap \neg y) \equiv (x \cap \neg y) \cup (\neg x \cap \neg y) \equiv \neg y \cap (x \cup \neg x) \equiv \neg y \cup (x \cap \neg x) \equiv (x \cup \neg y) \cap (\neg x \cup \neg y)$

Таблица 41 – Таблица истинности

X	Y	X	Y	12	34	56
1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	0	1
0	1	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1	1

СКДНФ = $(\neg x \cap \neg y) \cup (\neg x \cap y)$; СКНФ = $(\neg x \cap \neg y) \cup (\neg x \cap y)$.

11) Составить контактную схему $\neg x \cap (y \cap z \cup x \cup y)$.

12) Найти более простые формулы

$x \cap y \cup \neg x \cap \neg y \cup x \cap y \equiv \neg x \cup x \cap y \equiv (\neg x \cup x) \cap (x \cup y) \equiv x \cup y$.

13) Проверить равносильность формул $X \to Y$ и $\neg X \cap Y$.

Решение: Построим таблицы истинности для этих формул:

Таблица 42 – Таблица истинности

x	y	$x \to y$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Таблица 43 – Таблица истинности

x	y	$\neg x$	$\neg x \cup y$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	0	1

14) Из сравнения таблиц следует, что формулы являются равносильными.Представить логическими формулами следующие высказывания:

1) "Сегодня понедельник или вторник".

2) "Идет дождь или снег".

3) "Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые".

4) "Что в лоб, что по лбу".

Решение: Составное (сложное) высказывание "Сегодня понедельник или вторник" состоит из двух простых: А - "Сегодня понедельник"; В - "Сегодня вторник".

Высказывания А, В соединены связкой "или" очевидно в разделительном смысле, т.е. $\oplus$. Таким образом, данное высказывание представимо логической формулой: $A \oplus B$. Примечание. Внешние скобки в логической формуле принято опускать.

Высказывание "Идет дождь или снег" также состоит из двух простых, соединенных связкой "или": А - "Идет дождь"; В - "Идет снег".

Но в отличие от предыдущего связка "или" использована не в разделительном смысле, поэтому - v и логическая формула имеет вид: A v B.

Сложное высказывание "Если идет дождь, то крыши мокрые. Дождя нет, а крыши мокрые" включает два простых высказывания: А - "Идет дождь"; В - "Крыши мокрые".

В первом предложении "Если идет дождь, то крыши мокрые" высказывания А, В соединены связкой "если ..., то ...": $A \to B$.

Во втором "Дождя нет, а крыши мокрые" союз "а" здесь имеет смысл связки "и" (&), и кроме того высказывание А следует взять с отрицанием ($\neg A$):$\neg A \& B$.

Остается объединить представленные выше два высказывания в одно связкой &: $(A \to B) \& (\neg A \& B)$.

Высказывание "Что в лоб, что по лбу", если обозначить: А - "В лоб", В - "По лбу", представимо логической формулой $A \sim B$.

15) Записать логическими формулами следующие сложные высказывания:

1) "Если допоздна работаешь с компьютером и при этом пьешь много кофе, то утром просыпаешься в дурном расположении духа или с головной болью".

2) "Если социологические исследования показывают, что потребитель отдает предпочтение удобству и многообразию выбора, то фирме следует сделать упор на усовершенствование товара или увеличение многообразия новых форм".

Сравнить логические формулы и сделать выводы.

Решение: Первое составное высказывание состоит из следующих простых: X - "Допоздна работаешь с компьютером". У - "Пьешь много кофе". Z - "Утром встаешь в дурном расположении духа". U- "Утром встаешь с головной болью".

С учетом введенных обозначений простых высказываний и определенных выше логических связок сложное высказывание может быть представлено символьно в виде следующей логической формулы: $(X \& Y) \to (Z \vee U)$.

Второе составное высказывание состоит из следующих простых: X - "Социологические исследования показывают, что потребитель отдает предпочтение удобству". У - "Социологические исследования показывают, что потребитель отдает предпочтение многообразию выбора". Z - "Фирме следует сделать упор на усовершенствование товара". U - "Фирме следует сделать упор на увеличение многообразия новых форм".

Логическая формула второго составного высказывания: $(X \& Y) \to (Z \vee U)$.

Как видим из примеров, оба составных высказывания описываются одной и той же формулой, хотя имеют различное содержание (символы высказываний X, У, Z, U содержательно различным образом интерпретируются).

В логике изучается строение сложных логических высказываний, выраженных формулами, вне зависимости от содержания составляющих их простых высказываний. Поэтому данные высказывания логически неразличимы. Истинностное значение этих и любых других сложных высказываний, описываемых данной логической формулой (X&У)→(ZvU), будет определяться только тем, истинно или ложно каждое входящее в них высказывание X, У, Z, U. Поскольку каждое из этих высказываний может быть либо истинным, либо ложным, т.е. может иметь одно из двух значений, то нетрудно видеть, что данная формула (составное высказывание), включающая четыре символа простых высказываний, имеет $4^2 = 16$ различающихся логических интерпретаций (наборов значений составляющих ее высказываний). При этом содержательных интерпретаций этой формулы, очевидно, бесконечное множество.

16) Представить логической формулой следующий текст (составное высказывание): "Если фирма продолжает выпуск существующего продукта и ориентирована на существующий рынок, то для нее целесообразна стратегия "малого корабля", или экономии издержек. Такая стратегия привлекательна, если интенсивный маркетинг - стратегический хозяйственный фактор, но слабая сторона организации. Если интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором и сильной стороной фирмы, то фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта."

Решение: Введем обозначения простых высказываний, содержащихся в первом предложении:

A - "Фирма продолжает выпуск существующего продукта".

B - "Фирма ориентирована на существующий рынок".

C - "Для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия "малого корабля"".

D - "Для фирмы целесообразна (привлекательна) стратегия экономии издержек".

С учетом введенных обозначений логическая формула для первого предложения примет вид: (A&B)→(C~D).

Второе предложение содержит новые простые высказывания: K - "Интенсивный маркетинг является стратегическим хозяйственным фактором организации". L - "Интенсивный маркетинг является слабой стороной организации".

Логическая формула, представляющая второе предложение:

$$(K\&L)\rightarrow(C\sim D).$$

В третьем предложении содержатся новые простые высказывания: M - "Интенсивный маркетинг является сильной стороной организации". N - "Фирме следует придерживаться стратегии захвата новых рынков для существующего продукта".

Логическая формула для третьего предложения: $(K\&M)\rightarrow N$.

Окончательно текст записывается следующей логической формулой:

$$((A\&B)\rightarrow(C\sim D))\&((K\&L)\rightarrow(C\sim D))\&((K\&M)\rightarrow N).$$

17) Логическую функцию трех переменных $f(x_1,x_2,x_3) = (x_1\sim\neg x_2)\rightarrow((x_1 v x_3)\&x_2)$ представить булевой формулой - в виде СДНФ.

Решение: Для того, чтобы воспользоваться процедурой построения СДНФ логической функции, заданной небулевой формулой, восстановим по исходной формуле ее таблицу истинности (таблица 44).

Таблица 44 – Таблица истинности

$x_1x_2x_3$	$\neg x_2$	$x_1 \sim \neg x_2$	x_1 v x_3	x_1 v x_3 & x_3	$(x_1 \sim \neg x_2)\rightarrow(x_1 \& x_3) \& x_2$
0 0 0	1	0	0	0	1
0 0 1	1	0	1	0	1
0 1 0	0	1	0	0	0
0 1 1	0	1	1	1	1
1 0 0	1	1	1	0	0
1 0 1	1	1	1	0	0
1 1 0	0	0	1	1	1
1 1 1	0	0	1	1	1

Искомая СДНФ логической функции (опуская символ конъюнкции) $f(x_1,x_2,x_3) = \neg x_1\neg x_2\neg x_3$ v $\neg x_1\neg x_2x_3$ v $\neg x_1x_2x_3$ v $x_1x_2\neg x_3$ v $x_1x_2x_3$.

2.11 Лабораторная работа 6

Задание: Составить алгоритм и написать программу генерации таблицы истинности. Построить СДНФ, СКНФ по таблице истинности.

2.12 Тест для самоконтроля

1) Определите какое из предложений является высказыванием.

а) Вечереет.

б) Привет!

в) Земля - планета солнечной системы.

2) Как называется функция, которая ложна тогда и только тогда, когда X_1 и X_2 истинны.

а) Сложение по модулю 2.

б) Функция Пирса.

в) Штрих Шеффера.

г) Эквивалентность.

3) Как по другому называется функция исключительное или?

а) Сложение по модулю 2.

б) Функция Пирса.

в) Штрих Шеффера.

г) Импликация.

4) Переменная X_i...,если значение функции $f\ (X_1,...,X_i,...,X_n)$ не изменяется при изменении X_i

а) Фиктивна.

б) Действительна.

5) Определите аксиому, означающую возможность исключения из логического выражения всех членов, имеющих двойное отрицание.

а) $\neg(\neg X) = X$.

б) $X_1X_2 = \neg(\neg X_1X_2)$.

в) $X_1+X_2 = \neg(\neg X_1\neg X_2)$.

6) Установите закон отрицания.

а) $X_1+X_2 = \neg(\neg X_1\neg X_2)$.

б) $\neg(\neg X) = X$.

в) $X+\neg X = 1$.

г) $X\cdot\neg X = 0$.

7) Определите закон: $(X_1+X_2)(X_1+\neg X_2) = X_1$.

а) Склеивание.

б) Поглощение.

в) Закон отрицания.

г) Закон де Моргана.

8) Верно ли выражена конъюкция через импликацию? $X_1X_2 = \neg(X_1 \rightarrow X_2)$

а) Да.

б) Нет.

9) Верно ли выражена дизъюнкция через функцию сложение по модулю 2? $X_1+X_2 = \neg X_1 \oplus \neg X_2 \oplus X_1X_2$.

а) Да.

б) Нет.

10) Сколько будет строк в таблице при табличном представлении булевых функций n-переменных?

а) 2^n.

б) 3^n.

в) n.

11) Как называется функция, если она равна: 0, если значения аргументов совпадают; 1 - в противном случае.

а) Штрих Шеффера.

б) Сумма по модулю 2.

в) Дизъюнкция.

г) Конъюнкция.

12) Какая функция 2-х переменных принимает значение 0, при $X_1 = 1$, а $X_2 = 0$?

а) Конъюкция.

б) Штрих Шеффера.

в) Стрелка Пирса.

г) Импликация.

13) Функции, которые могут быть получены друг из друга удалением и введением фиктивных переменных, считаются ...

а) Равными.

б) Самодвойственными.

в) Взаимнообратными.

14) Формулы, представляющие одну и ту же функцию, называются ...

а) Взаимно обратными.

б) Эквивалентными.

в) Двойственными.

15) Как по другому называют формулу $X \cup \neg X$?

а) Закон противоречия.

б) Закон исключенного третьего.

в) Закон исключенного четвёртого.

16) Верно ли, что $X \sim Y = \neg X \cdot \neg Y \cup X \cdot Y$?

а) Да.

б) Нет.

17) Укажите правильный ответ. $X \oplus Y = \ldots$

а) $\neg X \cdot Y \cup X \cdot \neg Y$.

б) $X \cdot \neg Y \cup \neg X \cdot Y$.

в) $\neg X \cdot Y \cap \neg X \cdot Y$.

г) $X \cdot \neg Y \cap \neg X \cdot Y$.

18) Определите СДНФ функции $X \oplus Y$.

а) $\neg XY \cup X \neg Y$.

б) $X \neg Y \cup \neg XY$.

в) $(X \cup \neg Y) \cap (\neg X \cup Y)$.

г) $(\neg X \cup Y) \cap (X \cup \neg Y)$.

19) Найдите СДНФ функции $X|Y$.

а) $\neg X \neg Y \cup \neg XY \cup X \neg Y$.

б) $XY \cup \neg XY \cup X \neg Y$.

в) $(X \cup Y) \cap (\neg X \cup Y) \cap (X \cup \neg Y)$.

г) $(\neg X \cup \neg Y) \cap (\neg X \cup Y) \cap (X \cup \neg Y)$.

20) Является ли СДНФ $X \to Y = \neg X \cup Y$.

а) Да.

б) Нет.

21) Определите СКНФ функции $X \to Y$.

а) $\neg X \neg Y \cup \neg XY \cup XY$.

б) $X \cap \neg Y$.

в) $\neg X \cap Y$.

г) $(\neg X \cup \neg Y) \cap (\neg X \cup Y) \cap (X \cup Y)$.

22) Минимизируйте функцию и найдите ответ. $F = \neg(ab + \neg a \neg b) + \neg a \neg b$

а) $F = \neg a + \neg b$.

б) $F = a + b$.

в) $F = \neg ab + a \neg b + \neg a \neg b$.

г) $F = ab + \neg a \neg b$.

23) Минимизируйте функцию и найдите ответ.

$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,3,5,7,11,13,15) = 1$

а) $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \neg x_1x_4 + x_3x_4 + x_2x_4$.

б) $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 \neg x_4 + \neg x_3x_4 + x_2 \neg x_4$.

в) $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2x_3 + \neg x_2x_4 + x_1$.

г) $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+\neg\, x_2x_3+x_4$.

24) Функция, представленная многочленом первой степени, называется

а) Линейной.

б) Сохраняющей нуль.

в) Сохраняющей единицу.

г) Монотонной.

25) Функция, на каждой паре противоположных наборов которой она принимает противоположные значения, яляется ...

а) Линейной.

б) Монотонной.

в) Самодвойственной.

г) Сохраняющей единицу.

26) Какой элемент изображен на рисунке 31?

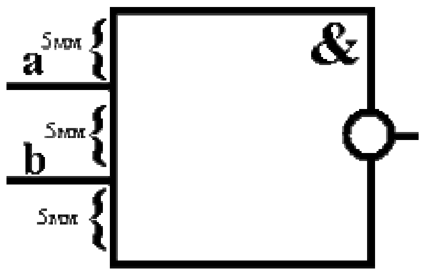


Рисунок 37- Функциональный элемент

а) $a|b$.

б) $a\downarrow b$.

в) ab.

г) $a+b$.

27) Преобразуйте функцию к базису Шеффера.

$F = \neg\,(\neg\,(X_1X_2)\cdot\neg\,(X_1X_3)\cdot\neg\,(X_2X_3))$

а) $(X_1|X_2)|(X_1|X_3)|(X_2|X_3)$.

б) $(X_1|X_2|X_1|X_3|X_2|X_3)$.

в) $(X_1|X_2|X_3)|(X_1|X_2|X_3)$.

28) Формула, порожденная логическими константами 0 и 1 и функциями ..., называются многочленом Жегалкина.

а) $X\oplus Y$ и $X\&Y$.

б) $X\oplus Y$ и $X \vee Y$.

в) X v Y и X&Y.

29) Определите замыкание множества из двух функций: конъюнкции и дизъюнкции.

а) Всевозможные ДНФ, такие, что входящие в них элементарные конъюнкции не содержат отрицаний переменных.

б) Всевозможные КНФ, такие, что входящие в них элементарные конъюнкции не содержат отрицаний переменных.

в) Всевозможные ДНФ.

г) Всевозможные КНФ.

30) Образуют ли замкнутый класс 2 функции X и ┐ X?

а) Да.

б) Нет.

31) Определите полна ли система {→,┐ }

а) Да.

б) Нет.

32) Определите функцию, двойственную функции X&Y.

а) ┐ X&┐ Y.

б) X v Y.

в) ┐ X v ┐ Y.

33) Какая из функций не принадлежит ни T_0 ни T_1?

а) X&Y.

б) X v Y.

в) X⊕Y.

г) ┐ X.

34) Можно ли утверждать, что никакой из пяти классов T_0, T_1, S, L, M не входит целиком ни в какой из остальных четырех?

а) Да.

б) Нет.

35) Система Σ полна в том и только том случае, если для каждого из классов T_0, T_1, S, L, M, в системе существует функция.

а) Принадлежащая этому классу.

б) Не принадлежащая этому классу.

в) Содержащаяся в каждом классе.

36) Штрих Шеффера X|Y - это ... система.

а) Полная.

б) Неполная.

37) Какому классу принадлежит функция X/Y?

а) S.

б) L.

в) M.

г) Никакому.

38) Какому классу принадлежит функция $X \to Y$?

а) T_0.

б) T_1.

в) S.

г) Никакому.

3. Модуль графы

3.1 Ориентированные и неориентированные графы. Способы задания графов

Определение 59: Граф - это система некоторых объектов вместе с некоторыми парами этих объектов, изображающая отношения связи между ними. Графами удобно изображаются сети коммуникаций, дискретные многошаговые процессы, системы бинарных отношений, химические структурные формулы, различные схемы и диаграммы и др.

Неориентированный граф (соответственно ориентированный граф, или орграф) G - система G = (V,E,Г), состоящая из множества элементов V = {v}, называемых вершинами графа, множества элементов E = {e}, называемых ребрами, и отображения Г: $E \rightarrow V^2$, ставящего в соответствие каждому элементу $e \geq E$ неупорядоченную (соответственно упорядоченную) пару элементов $v_1, v_2 \geq V$, называемых концами ребра e.

V U E образует множество элементов графа; при этом предполагается, что $E \cap V = \varnothing$. Отображение Г определяет отношение инцидентности ребра с каждым из своих концов. Для графа G = (V,E,Г) употребляется также более короткое обозначение G = (V,E) без указания инцидентностей, которые определяются контекстом. По количеству элементов графы делятся на конечные и бесконечные. Здесь мы будем рассматривать, в основном, конечные графы, не оговаривая этого специально.

Если $\Gamma(e) = (v_1, v_2)$ - упорядоченная пара (т.е. $(v_1, v_2) \neq (v_2, v_1)$ при $v_1 \neq v_2$), то ребро e называется ориентированной дугой, исходящей из вершины v, и входящей в вершину v_2; v_1 называется началом, а v_2 - концом дуги e. Если $\Gamma(e) = (v_1, v_2)$ - неупорядоченная пара, то ребро e называется неориентированным. Всякому графу G можно поставить в соответствие соотнесенный неориентированный граф $\tilde{G}$ с теми же множествами V и E и инцидентностями, но все пары неупорядоченные.

Вершина, не инцидентная ни одному ребру, называется изолированной. Вершина, инцидентная ровно одному ребру, и само это ребро называются концевыми, или висячими. Ребро с совпадающими концами называется петлей. Две вершины, инцидентные одному и тому же ребру, называются соседними (или смежными). Два ребра, инцидентные одной и той же вершине, называются смежными. Ребра, которым поставлена в соответствие одна и та же пара вершин, называются кратными, или параллельными. Для различных задач одному и тому же объекту можно сопоставить; граф по-разному. Так, фрагмент дорожной сети может быть, представлен неориентированным ребром, изображающим наличие связи между его концами (населенными пунктами, городскими площадями или перекрестками); одной или двумя дугами, передающими одностороннее или двустороннее движение транспорта; несколькими дугами - отдельно для каждого ряда движения. Ребрам могут быть, приписаны также числа, означающие длину, рядность, уклон и другие численные или иные характеристики.

Часто бывает важно определить, какие графы считаются различными, а какие не различаются. Обычно это связывают с понятием изоморфизма графов. Два графа $G_1= (V_1,E_1,\Gamma_1)$ и $G_2 = (V_2,E_2,\Gamma_2)$ называются изоморфными, если существуют взаимно однозначные отображения f: $V_1 <=> V_2$ и g: $E_1 <=> E_2$, сохраняющие инцидентность, т.е. такие, что для всякого $e \geq E$, равенство $\Gamma_1(e) = (v_1,v_2)$ влечет за собой равенство $\Gamma_2(ge) = (fv_1,fv_2)$.

Во многих случаях можно рассматривать графы с точностью до изоморфизма, т.е. не различать изоморфные графы; однако, если какие-то вершины или ребра графов обладают различной индивидуальностью, например, они занумерованы или им сопоставлены какие-либо численные характеристики (вес ребра, длина ребра и др.), то естественно при сравнении двух графов эту индивидуальность учитывать.

Существует несколько способов задания графов, связанных с различной формой задания функции Г. Вот некоторые из них для конечных:

1) Перечисление (список) ребер графа с указанием их концов и добавлением списка изолированных вершин.

2) Матрица инциденций графа с b вершинами и p ребрами - прямоугольная матрица $A = ||a_{ij}||$ с b строками и p столбцами, строку которой соответствуют вершинам графа, а столбцы - ребрам, причем для неориентированного графа элемент матрицы a_{ij} равен 1, если вершина V_i и ребро e_j инцидентны, и равен 0 в противном случае. Для ориентированного графа $a_{ij} = -1$, если V_i является началом дуги e_j, и a_{ij} +1, если V_1 - конец дуги e_j. В каждом столбце матрицы инциденций - два ненулевых элемента, если ребро - не петля. Петле соответствует элемент, равный 2.

3) Матрица соседства (смежности) вершин графа с b вершинами - квадратная матрица $B = ||b_{ij}||$ размерности b, строки и столбцы которой соответствуют вершинам графа, причем неотрицательный элемент b равен числу ребер, идущих из вершины v_i в вершину V_j (b_{ij} не равно, вообще говоря, b_{ji}, однако для неориентированных графов матрица соседства - сим-

метричная). Для несмежных вершин соответствующий элемент матрицы равен 0.

Если матрица инциденций задает граф однозначно, то матрица соседства вершин определяет граф с точностью до замены любого неориентированного ребра парой противоположно направленных дуг между теми же вершинами. Однако для графов без кратных ребер задание графа и этой матрицей однозначно, элементы матрицы соседства равны в этом случае 0 или 1.

4) Для наглядности граф часто представляют в виде геометрического объекта: вершинам соответствуют различные выделенные точки в пространстве (на плоскости), ребрам - отрезки кривых, связывающие соответствующие точки и не проходящие через выделенные точки, отличные от их концов. Отношению инцидентности вершин и ребер графа соответствует при этом геометрическая инцидентность выделенных точек и линий. Кроме того, предполагается, что кривые попарно не пересекаются во внутренних точках. Такое представление графа называется реализацией.

Можно показать, что всякий граф с конечным (и даже счетным) числом элементов может быть реализован в трехмерном пространстве, причем, если граф не содержит кратных ребер, то ребра можно реализовать прямолинейными отрезками. На плоскости реализуется не всякий граф, что порождает разделение графов на плоские и неплоские. Тем не менее даже неплоский граф бывает удобно изображать на плоскости, надо только отличать вершины от пересечений ребер на рисунке (например, изображать вершины кружками); ориентацию ребер показывают стрелками.

Если представить графом уличную (дорожную) сеть, где ребра изображают отрезки дорог, связывающие соседние вершины (площади и перекрестки), то для небольшого населенного пункта такой граф может быть плоским, но для города с путепроводами, мостами и транспортными развязками в разных уровнях, он скорее всего неплоский.

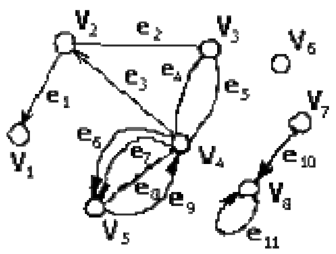


Рисунок 38 – Граф с 8 вершинами

На рисунке 38 изображен граф с 8 вершинами и 11 ребрами и проиллюстрированы некоторые введенные понятия: ребра e_1, e_3, e_6, e_7, e_9, e_{10} являются дугами; v_6 - изолированная вершина; e_4 и e_5 -параллельные ребра; e_6, e_7, e_8, e_9 - также параллельные ребра, e_{11} -петля; v_2 и v_3, v_2 и v_4 - пары соседних вершин; e_3 и e_4 - пара смежных ребер. Матрица инциденций A и матрица соседства вершин B этого графа таковы:

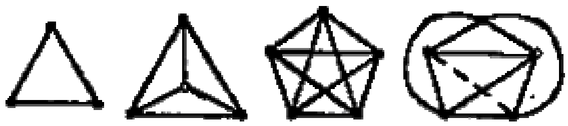
$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Рассмотрим несколько примеров графов, имеющих интересные применения.

Определение 60: Полным графом называется граф без кратных ребер (и иногда без петель), в котором любые две вершины соединены ребром (ориентированным или неориентированным). Полный неориентированный граф с b вершинами обозначается K_b. Очевидно, граф K_b содержит $C_b^2 = b \cdot (b-1)/2$ ребер. Полный ориентированный граф иногда называют турниром, поскольку он отражает результат состязания по круговой системе в один круг. Полный граф представляет бинарное отношение R: если R рефлексивно, то граф - с петлями; если R симметрично, то граф - неориентированный, если R антисимметрично, то - ориентированный.

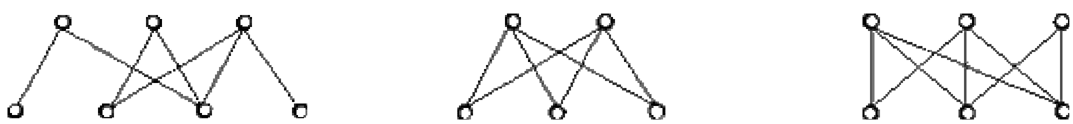
На рисунке 39 а, б, в изображены графы K_3, K_4, K_5. На рисунке 39 г граф K_5 представлен с минимальным числом пересечений изображений ребер: устранить их полностью нельзя.



а б в г

Рисунок 39 - Графы

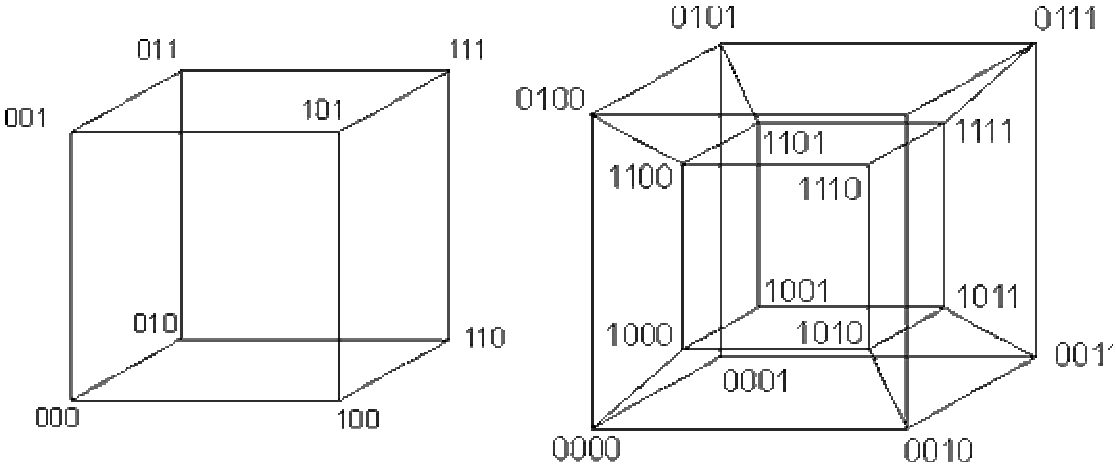
Определение 61: Двудольным графом называется граф, вершины которого разбиты на два непересекающихся класса: V = V1, U V2, а ребра связывают вершины только из разных классов - не обязательно все пары (рисунок 40). Если же каждая из вершин класса V, связана ребром с каждой вершиной класса V2, то граф называется полным двудольным и обозначается Km,n, где m = |V1|, n = |V2|. Очевидно, граф Km,n содержит (m+n) вершин и m · n ребер. На рисунке 40, а изображен двудольный граф, на рисунке 40 б, в - полные двудольные графы К32 и К33 (последний носит название "3 дома - 3 колодца"). Упражнение. Изобразите граф К33 с минимально возможным числом пересечений.



а б в

Рисунок 40 – Двудольные гафы

Определение 62: n-мерным единичным кубом называется граф En, вершинами которого являются все наборы длины n из нулей и единиц, а ребра соединяют вершины, различающиеся ровно в одной компоненте. Случаи n = 3 и n = 4 представлены на рисунке 41 а,б.



а б

Рисунок 41 – Еденичные кубы

Упражнение. Докажите, что графы En являются двудольными (указание: рассмотрите наборы с различным числом единиц).

Определение 63: Граф H = (V',E') называется подграфом графа G = (V,E), обозначение: $H \subseteq G$, если $V' \subseteq V$, $E' \subseteq E$ и для множеств V' и E' сохраняются инциденции графа G. При этом, очевидно, каждое ребро из E' входит в подграф H вместе со своими концами.

Иногда рассматриваются только подграфы без изолированных вершин или только подграфы, содержащие все вершины графа (и только часть ребер); такие подграфы полностью определяются множеством своих ребер. В этих случаях можно естественным образом определить теоретико-множественные операции над подграфами: пересечение, объединение, симметрическую разность (называемую также суммой по модулю 2 или просто суммой), дополнение до всего графа. Подграфом, натянутым на множество вершин $V' \subseteq V$ графа G, называется подграф, содержащий вершины из V и все ребра графа G, соединяющие пары вершин из V'.

Определение 64: Подграф Zα, состоящий из всех ребер, инцидентных вершине а, называется звездой вершины α. Для графов без петель степень s(α) вершины α есть число ребер в звезде Zα. Очевидно, что сумма степеней всех вершин графа без петель равна удвоенному числу ребер.

Для графа, изображенного на рисунке 1, $s(v_1) = 1$, $s(v_2) = s(v_3) = 3$, $s(v_4) = 7$, $s(v_6) = 0$.

Если все вершины графа имеют одинаковую степень s (такой граф называют однородным), то сумма степеней его вершин равна $b \cdot s$, а число ребер равно $b \cdot s/2$.

Пример 86:

Определите число ребер в графах E_3, E_4.

В неориентированном графе сумма степеней всех вершин равна удвоенному числу ребер m графа, т.е. четна.

Петля дает вклад 2 в степень вершины:

$$\sum_{\upsilon \in G} p(\upsilon) = 2m .$$

Отсюда следует, что в неориентированном графе число вершин нечетной степени четно.

Для вершин орграфа определяются две локальные степени:

1. $\rho_1(\nu)$ - число ребер с началом в вершине ν, или количество выходящих из ν ребер;

2. $\rho_2(\nu)$ - количество входящих в ν ребер, для которых эта вершина является концом.

Петля дает вклад 1 в обе эти степени.

В орграфе суммы степеней всех вершин $\rho_1(\nu)$ и $\rho_2(\nu)$ равны количеству ребер m этого графа, а значит, и равны между собой:

$$\sum_{\upsilon \in G} p_1(\upsilon) = \sum_{\upsilon \in G} p_2(\upsilon) = m .$$

Определение 65: Если степень вершины равна 0, т.е. d(ν) = 0, то вершина называется изолированной. Если степень вершины равна 1, d(ν) = 1, то вершина называется концевой или висячей.

Для орграфа число дуг, исходящих из вершины ν, называются полустепенью исхода, а а входящих - полустепенью захода. Обозначается так: $d^-(\nu)$ и $d^+(\nu)$.

Теорема Эйлера.

Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству ребер:

$$\sum_{\upsilon \in V} d(\upsilon) = 2g \cdot \sum_{\upsilon \in V} d^-(\upsilon) + \sum_{\upsilon \in V} d^+(\upsilon) = 2g .$$

Множество вершин графа называется независимым (внутренне устойчивым), если никакие две вершины из этого множества не смежны. Независимое множество вершин называется максимальным, если оно не является собственным подмножеством некоторого другого независимого множества. Наибольшее по мощности из максимальных независимых множеств называется наибольшим. Число вершин в наибольшем независимом множестве графа G называется числом независимости (числом внутренней устойчивости, неплотностью) и обозначается через $\alpha_0(G)$.

На рисунке 42 показан граф G, у которого число независимости $\alpha_0(G) = 4$. Множество вершин $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_7\}$; $\{\nu_1,\nu_2,\nu_3,\nu_8\}$; $\{\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_7\}$; $\{\nu_2,\nu_3,\nu_5,\nu_8\}$ являются наибольшими независимыми множествами. Множество вершин $\{v_4, v_7\}$ является максимальным независимым множеством, но не наибольшим.

Произвольное подмножество попарных несмежных ребер графа называется паросочетанием (независимым множеством ребер). Паросочетание графа G называется максимальным, если оно не содержится в паросочетании с большим числом ребер. Паросочетание является наибольшим, если число ребер в нем наибольшее среди всех паросочетаний графа G. Число ребер в наибольшем паросочетании называется числом паросочетаний и обозначается через $\alpha_1(G)$.

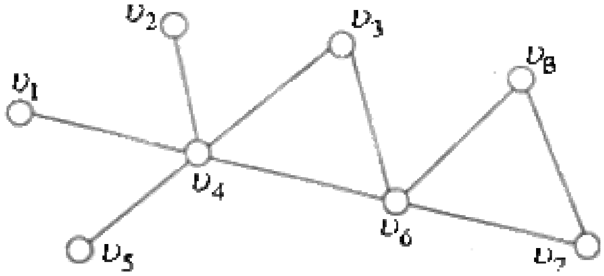


Рисунок 42 - Граф G с числом независимости, равным четырем

Независимые множества ребер графа G находятся во взаимно однозначном соответствии с независимым множеством вершин реберного графа L(G), т.е. $\alpha_1(G) = \alpha_0((L)G))$.

3.2 Унарные и бинарные операции над графами

Унарные операции

Все унарные операции над графами можно объединить в две группы. Первую группу составляют операции, с помощью которых из исходного графа G_1 можно построить граф G_2 с меньшим числом элементов. В группу входят операции удаления ребра или вершины, отождествления вершин, стягивания ребра. Вторую группу составляют операции, позволяющие строить графы с большим числом элементов - это операции расщепления вершин, добавления ребра.

Определение 66: Удаление ребра. В графе G_1 выделяют две смежные вершины u, v. Затем из G_1 удаляют ребро uv: $G_2 = G_1 - uv$. Говорят, что G_2 получен из G_1 удалением ребра uv.

Определение 67: Удаление вершины. В графе G_1 выделяются вершина г и смежные с ней вершины v_i = 1,2,3,... .Говорят, что граф G_2 получен из графа G_1 удалением вершины u.

Определение 68: Добавление ребра. В графе G_1 выделяют две несмежные вершины u, v. Затем к графу G_1 добавляют ребро uv. Говорят, что граф G_2 получен из G_1 добавлением ребра uv.

Определение 69: Отождествление вершин. В графе G_1 выделяют вершины u, v. Определяют окружение Q_1 вершины u и окружение Q_2 вершины v, вычисляют их объединение $Q = Q_1 \cup Q_2$. Затем над графом G_1 выполняются следующие преобразования:

1) из графа G_1 удаляют вершины u, v ($H_1 = G_1 - u - v$);

2) к графу H_1 присоединяют новую вершину z ($H_1 = H_1 + z$);

3) вершину z соединяют ребром с каждой из вершин $w_i \in Q(G_2 = H_2 + zw_i$, $i=1,2,3,...)$.

Определение 70: Стягивание ребра. Данная операция является операцией отождествления смежных вершин u, v в графе G_1.

Определение 71: Расщепление вершины. В графе G_1 выделяется вершина v. Окружение Q вершины v разбивается на две части M, N ($M \cup N = \varnothing$, $M \cap N = \varnothing$). После этого над графом G_1 выполняются следующие преобразования:

1) удаляют вершину v вместе с инцидентными ей ребрами ($H_1 = G_1 = v - vz_i$, $z_i \in Q$, $i = 1,2,3,...$);

2) добавляют новые вершины u,w и соединяющее их ребро uw($H_2 = H_1 + u + w + uw$);

3) вершину u соединяют ребром с каждой вершиной из множества M($H_3 = H_1 + uz_i$, $z_i \in M$);

4) вершину w соединяют ребром с каждой вершиной из множества N($G_2 = H_3 + uz_i$, $z_i \in M$).

Говорят, что граф G_2 получен из графа G_1 расщеплением вершины v.

Бинарные операции

Наиболее важными бинарными операциями являются: объединение, пересечение, декартово произведение и кольцевая сумма.

Определение 72: Объединение. Граф $G = G_1 \cup G_2$ называется объединением или наложением графов G_1 и G_2, если $V_G = V_1 \cup V_2$; $U_G = U_1 \cup U_2$ (рисунок 43).

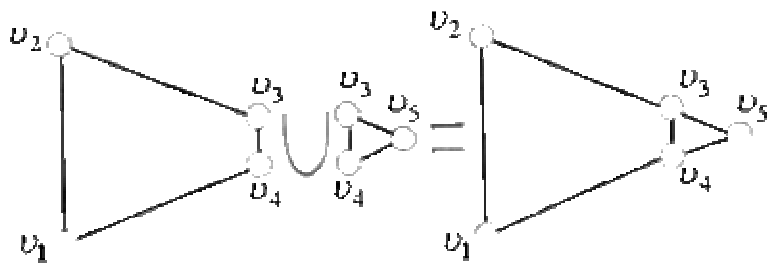


Рисунок 43 - Объединение графов G_1 и G_2

Определение 73: Объединение графов G_1 и G_2 называется дизъюнктным, если $V_1 \cap V_2 = \varnothing$. Аналогично определяются объединение и дизъюнктное объединение любого множества графов. При дизъюнктном объединении никакие два из объединяемых графов не должны иметь общие вершины.

Определение 74: Пересечение. Граф $G = G_1 \cap G_2$ называется пересечением графов G_1 и G_2, если $V_G = V_1 \cap V_2$ и $U_G = U_1 \cap U_2$ (рисунок 44).

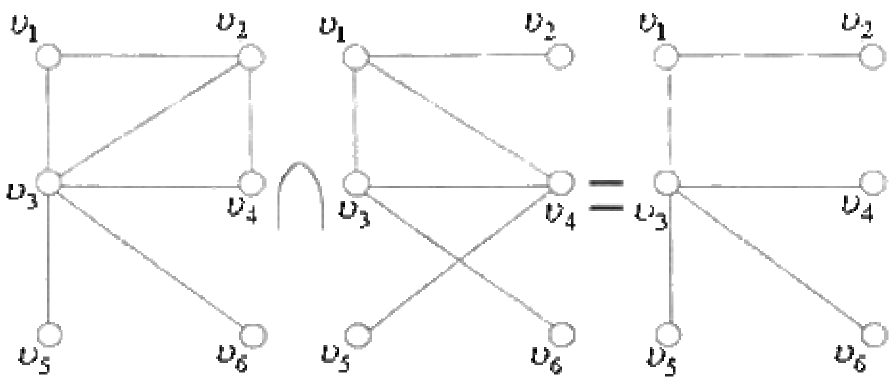


Рисунок 44 - Пересечение графов G_1, G_2

Определение 75: Декартово произведение. Граф G называется декартовым произведением графов G_1 и G_2, если $V_G = V_1 \times V_2$ - декартово произведение множеств вершин графов G_1, G_2, а множество ребер U_G задается следующим образом: вершины (z_i,ν_k) и (z_j,ν_l) смежны в графе G тогда и только тогда, когда $z_i = z_j (i = j)$, а ν_k и ν_l смежны в G_2 или $\nu_k = \nu_l (k = l)$, а z_i и z_j смежны в графе G_1 (рисунок 45).

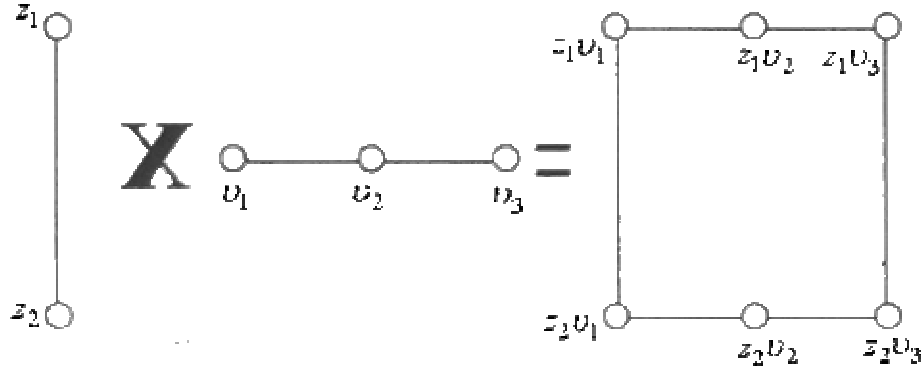


Рисунок 45 - Декартово произведение графов G_1,G_2

Для графов G_1, G_2, $G = G_1 \times G_2$ выполняются следующие соотношения:

$$/G_1 \text{ x } G_2/ = /G_1/ \cdot /G_1/$$

$$/U(G_1 \text{ x } G_2/ = /G_2/ \cdot /U_2/ + /G_1/ \cdot /U_1/$$

Определение 76: Кольцевая сумма графов представляет граф, который не имеет изолированных вершин и состоит из ребер, присутствующих либо в первом исходном графе, либо во втором. Кольцевая сумма определяется следующим соотношением: $G = G_1 \oplus G_1$ (рисунок 46).

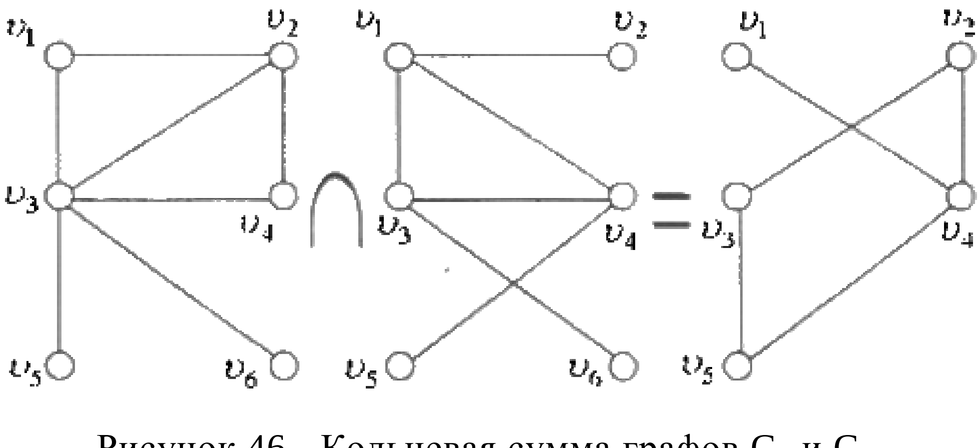


Рисунок 46 - Кольцевая сумма графов G_1 и G_2

3.3 Цепи. Циклы. Связность

Определение 77: Маршрутом в G называется такая последовательность ребер $M(l_1,l_2,...,l_n)$, в которой каждые два соседних ребра l_{i-1} и l_i имеют общую вершину. Начало маршрута - вершина ν_0, инцидентная ребру l_1 и неинцидентная l_2, конец маршрута ν_n инцедентен l_n и неинцедентен l_{n-1}.

Определение 78: Маршрут, в котором совпадают его начало и конец $\nu_0 = \nu_n$, называется циклическим.

Определение 79: Маршрут, в котором все ребра разные, называется цепью. Цепь, не пересекающая себя, т.е. не содержащая повторяющихся вершин, именуется простой цепью.

Определение 80: Циклический маршрут называется циклом, если он является цепью, и простым циклом, когда это простая цепь.

Определение 81: Вершины ν', $\nu'' \in G$, называется связанными, если существует маршрут M с началом ν' и концом ν''. Связанные маршрутом вершины связаны также и простой цепью. Отношение связанности вершин обладает свойствами эквивалентости и определяет разбиение множества вершин графа на непересекающиеся подмножества V^i, $i = 1, k$.

Определение 82: Граф G называется связным, если все его вершины связаны между собой. Поэтому все подграфы $G(V^i)$ связны и называются связными компонентами графа.

Каждый неориентированный граф распадается единственным образом в прямую сумму своих связных компонент $G = \bigcup_i G(V_i)$.

Определение 83: Вершинной связностью $\chi(G)$ графа G называется наименьшее число вершин, удаление которой делает граф несвязным или одновершинным. Для всех G $\chi(G) = 0$.

Определение 84: Реберной связностью $\lambda(G)$ графа G называется наименьшее число ребер, удаление которых приводит к несвязному графу. Для несвязного или одновершинного графа $\lambda(G) = 0$.

Удаление вершины из графа G приводит к подграфу G–V, содержащему все вершины графа G, кроме M и ребра графа G, неинцедентных V.

Определение 85: Вершина V графа G называется точкой соединения (разделяющей вершиной), если граф G–V имеет больше компонент, чем G. Следовательно, если граф G связен и V - точка сочленения, то граф G–V несвязен. Ребро графа называется мостом, если его удаление увеличивает число компонент.

Определение 86: Орграф называется сильносвязным, если любые две его вершины достижимы друг из друга. Орграф называется односторонне связным, если для любой пары его вершин по меньшей мере одна достижима из другой.

Определение 87: Длина кратчайшего маршрута (простой цепи) между ν_i и ν_j называется расстоянием между вершинами и обозначается $L(\nu_i\nu_j)$. Для фиксированной вершины x^i величина

$$E(\nu_i)= \max_j \ l(\nu_i)$$

называется эксцентриситетом вершины ν_i.

Определение 88: Максимальный среди всех эксцентриситетов эксцентриситет вершины называется диаметром графа G и обозначается через d(G). Следовательно,

$$d(G)=\max_i \max_j l(\nu_i \nu_j)$$

Определение 89: Вершина ν_i называется периферийной, елси $l(\nu_i)=d(G)$. Простая цепь длины d(G) называется диаметральной цепью.

Определение 90: Минимальный из эксцентриситетов вершин связного графа G называется его радиусом и обозначается r(G).

$$r(G)=\min_i l(\nu_i)=\min_i \max_j l(\nu_i), l(\nu_j)$$

Определение 91: Последовательность ребер, в которой конец любого предыдущего ребра l_{i-1} совпадает с началом следующего l_i, называется путем. Началом пути является начало ν_0 ребра l_1. Концом пути - конец ν_n ребра l_n. В пути одно и то же ребро может встречаться несколько раз.

Определение 92: Путь называется ориентированной цепью (просто цепью), если любое ребро встречается в нем не более одного раза и простой цепью, если любая вершина графа G инцидентна не более чем двум его ребрам.

Определение 93: Контур - путь, в котором $\nu_0 = \nu_n$. Контур называется циклом, если он является цепью и простым циклом, когда это простая цепь.

Определение 94: Граф, не содержащий циклов, называется ациклическим. Вершина $\nu'' \in G$ называется достижимой из вершины ν', если существует путь $d(\nu',\nu'')$ с началом ν' и концом ν''.

Определение 95: Орграф G именуется связным, если он связен без учета ориентации дуг, и сильно связен, если из любой вершины ν' в любую ν'' существует путь.

Определение 96: Число ребер маршрута (пути) называется его длиной.

Определение 97: Расстоянием $d(\nu',\nu'')$ между вершинами ν' и ν'' неориентированного графа G называется минимальная длина простой цепи с началом ν' и концом ν''. Центром называется вершина неориентированного графа, от которой максимальное из расстояний до других вершин являлось бы минимальным. Максимальное расстояние от центра G до его вершин называется радиусом графа r(G).

Определение 98: Эйлеров цикл - цикл графа, содержащий все ребра графа.

Определение 99: Эйлерова цепь - цепь, включающая все ребра данного конечного неориентированного графа G, но имеющая различные начало ν' и конец ν''.

Чтобы в конечном неориентированном графе G существовала эйлерова цепь, необходимы и достаточны его связность и четность степеней всех вершин, кроме начальной ν' и конечной ν'' (ν' и ν'' должны иметь конечные степени). Чтобы в конечном графе существовал эйлеров цикл, необходимы и достаточны его связность, а также равенство степеней вершин этого графа по входящим и выходящим ребрам, т.е. $\rho_1(\nu) = \rho_1(\nu)$, $\forall \nu \in G$.

Определение 100: Гамильтонов цикл - простой цикл, проходящий через все вершины рассматриваемого графа.

Определение 101: Гамильтонова цепь - простая цепь, проходящая через все вершины графа с началом и концом в разных вершинах $\nu_1, \nu_2 \in G$ (рисунок 47).

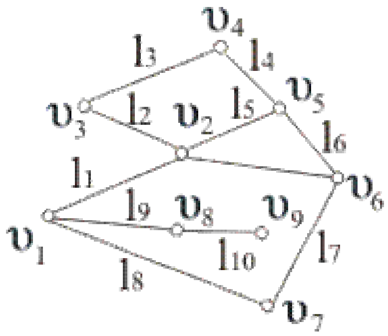


Рисунок 47- Граф

Для вершин ν_1, $\nu_2 \in G$ на рисунке 47.

- Маршрут является цепью (l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_1 l_8 l_7 l_6 l_1 l_8 l_7) или (l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_1 l_8 l_7).
- Цепь не является простой цепью (l_1 l_2 l_3 l_4 l_5 l_6).
- Простая цепь (l_1 l_6) или (l_8 l_7).

Для вершины ν_1

- циклический маршрут не является циклом ($l_1,l_2,l_3,l_4,l_5,l_2,l_3,l_4,l_5,l_6,l_7,l_8,l_1,l_6,l_7,l_8$)
- Цикл не являтся простым циклом. ($l_1,l_2,l_3,l_4,l_5,l_6,l_7,l_8$).
- Простой цикл (l_1,l_6,l_7,l_8).

- При описании цикла в качестве его начала и конца может быть выбрана любая вершина, поэтому последовательности (l_1,l_6,l_7,l_8), (l_6,l_7,l_8,l_1), (l_7,l_8,l_1,l_6), (l_8,l_1,l_7,l_6) представляют один и тот же цикл.

Свойства отношений связности вершин графа

Пример 87:

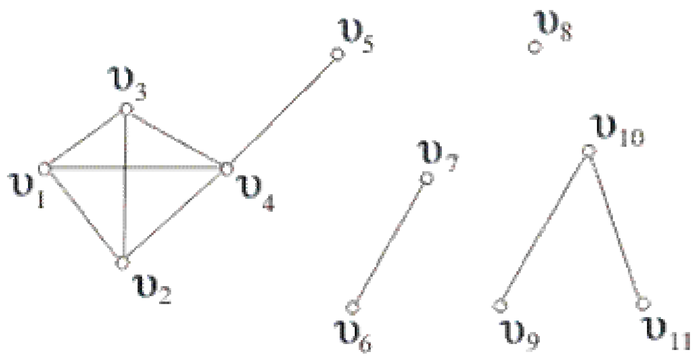


Рисунок 48 – Связные и не связные графы

- рефлективность: если вершина $\nu \in G$ связана с какой-либо другой вершиной ν', то она связана и сама с собой (изолированные вершины являются также связанными сами с собой);

- симметричность: если в графе G существует маршрут с началом ν' и концом ν'', то существует маршрут с началом ν'' и концом ν';

- транзитивность: если вершина ν' связана с ν'' маршрутом

$$(l^{\cdot}_1, ..., l^{\cdot}_n),$$

а ν'' и ν''' маршрутом

$$(l^{\cdot\cdot}_1, ..., l^{\cdot\cdot}_p),$$

то ν' связана с ν''' маршрутом

$$(l^{\cdot}_1, ..., l^{\cdot}_n, l^{\cdot}_1, ..., l^{\cdot\cdot}_p).$$

Если граф имеет простой цикл, содержащий все вершины графа, то такой цикл называется гамильтоновым циклом, а граф называется гамильтоновым графом.

Теорема (Дирака). Если в графе $G(\nu,E)$, $\forall \nu \in V$ $d(\nu) \geq p/2$, то G является гамильтоновым.

Определение 102: Подмножества вершин S графа G = (V,U) называется доминирующим (внешне устойчивым), если каждая вершина из V–S смежна с некоторой вершиной из S. Другими словами, каждая вершина графа находится на расстоянии не более единицы от доминирующего множества. Доминирующего множество называется минимальным, если нет другого доминирующего множества, содержащеюся в нём. Минимальных доминирующих множеств в графе может быть несколько, и они обязательно содержат одинаковое количество вершин. Минимальное доминирующее множество, имеющее наименьшую мощность, называется наименьшим.

Определение 103: Подмножество вершин графа, являющееся одновременно независимым и доминирующим, называется ядром графа.

Понятие доминирующего множества переносится и на случай ориентированных графов. Подмножество S вершин орграфа называется доминирующим, если для любой вершины $v_i \in V–S$ существует такая вершина $v_j \in S$, что $(v_i,v_j) \in A$, где A - множество дуг орграфа. Подмножество вершин S, являющееся одновременно и независимым, и доминирующим, называется ядром орграфа.

Например, орграф на рисунке 49а имеет два ядра $S_1 = \{1,3\}$; $S_2 = \{2,4\}$.

Орграф, изображенный на рисунке 49б не имеет ядра.

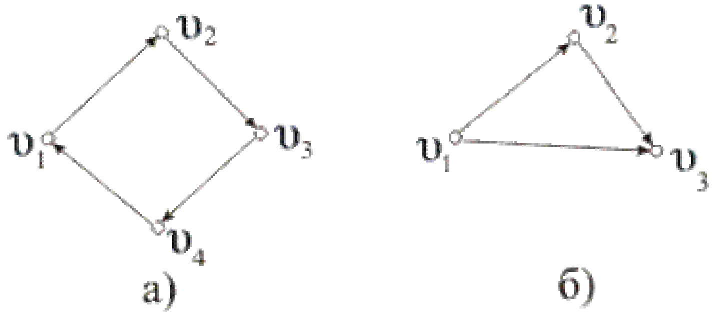


Рисунок 49 - Ориентированные графы

Вершина и ребро графа покрывают друг друга, если они инцидентны. Ребро (v_i,v_j) покрывает вершины v_i и v_j, а каждая из этих вершин покрывает это ребро. Подмножество $S \subseteq V$ называется покрытием (вершинным покрытием, опорой) графа G, если каждое ребро из V инцидентно хотя бы одной вершине из S. Покрытие графа G называется минимальным, если оно не содержит покрытия с меньшим числом вершин, и наименьшим, если число вершин в нём - наименьшее среди всех покрытий графа G.

Число вершин в наименьшем покрытии графа G называется числом покрытия (числом вершинного покрытия) графа G и обозначается через $\beta(G)$.

Определение104: Рёберным покрытием графа G называется такое подмножество рёбер $W \subseteq U$, которое покрывает все вершины графа. При этом каждая вершина в G инцидентна по крайней мере одному ребру из W. Рёберное покрытие графа называется минимальным, если в нём не содержится покрытие с меньшим числом рёбер, и наименьшим, если число рёбер в нём - наименьшее среди всех покрытий. Число рёбер в наименьшем рёберном покрытии графа G называется числом рёберного покрытия и обозначается через $\beta_1(G)$.

3.4 Деревья

Определение 105: Ребро с произвольного графа G называется циклическим, если оно принадлежит хотя бы одному элементарному циклу в графе, и ациклическим в противном случае. Примером ациклического ребра является висячее. Справедливы два простых утверждения:

1) при удалении из связного графа циклического ребра граф остается связным;

2) при удалении ациклического ребра граф становится несвязным.

Первое подтверждается возможностью для любой цепи заменить циклическое ребро цепью из остальных ребер цикла. Второе доказывается от противного: если бы граф оставался связным, то концы удаленного ребра были бы связаны элементарной цепью; возвратив удаленное ребро, получили бы элементарный цикл вопреки тому, что ребро ациклическое. Связный граф без циклов называется деревом. Иначе говоря, дерево - это граф, все ребра которого ациклические. Имеется несколько эквивалентных определений дерева, устанавливающих ряд его характеристических свойств, подробнее рассмотренных ниже:

1) связный граф, который становится несвязным при удалении любого ребра;

2) связный граф, у которого число ребер на единицу меньше числа вершин;

3) граф, любые две вершины которого связаны единственной; элементарной цепью;

4) граф без циклов, в котором после добавления ребра; связывающего две любые вершины, появляется цикл.

Выберем в дереве произвольную вершину a_0 и назовем корнем, или вершиной нулевого яруса. Соседние вершины назовем вершинами первого яруса и т.д. - вершины, соседние вершинам (i–1)-го яруса, не отнесенные еще ни к одному ярусу, назовем вершинами i-го яруса. Каждая вершина дерева принадлежит ровно одному ярусу.

Очевидно, что номер яруса совпадает с расстоянием между его вершинами и корнем дерева. В силу свойства (3) каждая вершина i-го яруса связана ребром ровно с одной вершиной (i–1)-го яруса и не вязана ребром ни с какой вершиной i-го яруса (рисунок 50). Такое представление дерева часто является удобным. Оно показывает, в частности, что в конечном дереве всегда существуют концевые вершины (например, вершины последнего яруса, но, возможно, и другие).

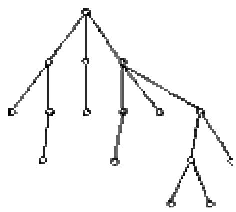


Рисунок 50- Дерево

Выделение корня в дереве D определяет на множестве его вершин частичный порядок: $\alpha < \beta$, если $\alpha \neq \beta$ и элементарная цепь из корня в вершину β содержит α. Корень α_0 является единственным минимальным элементом в этом частично упорядоченном множестве вершин, а все концевые вершины (исключая корень: он может быть, но может и не быть концевой вершиной) - максимальными.

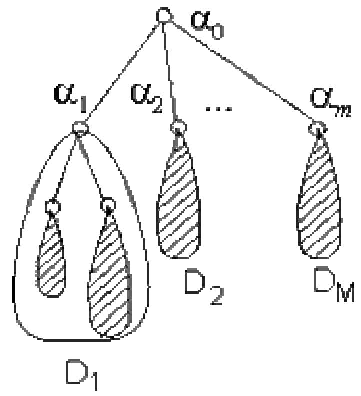


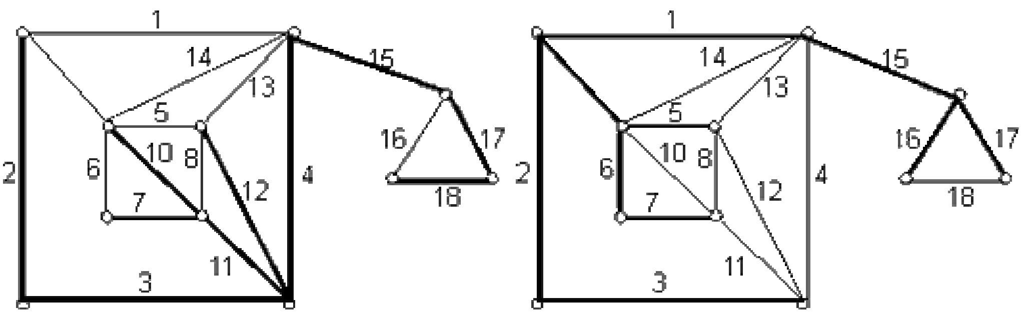
Рисунок 51 – Дерево с петлями

Каждая вершина α однозначно определяет корневое поддерево $D\alpha$, натянутое на множество таких вершин β, что $\alpha < \beta$ каждом таком поддереве Dα (в том числе в $D_{\alpha0}$ = D) можно выделить вершины, непосредственно подчиненные корню поддерева, т.е. такие вершины γ_i, что $\alpha < \gamma_i$ и не существует промежуточных вершин δ, для которых $\alpha < \delta_i < \gamma_i$.

Для каждой такой вершины δ i определим ветвь Dα γ_i дерева Dα как корневое поддерево с корнем α, натянутое на множество вершин $\{\alpha\} \cup \{\delta: \delta \geq \gamma\}$. Все поддерево Dα получается из своих ветвей склеиванием в корне α.

В связном графе G будем последовательно удалять циклические ребра до тех пор, пока это возможно, т.е. пока не останется ни одного циклического ребра. Мы придем к связному подграфу графа G с тем же множеством вершин, но без элементарных циклов, т.е. к дереву, называемому остовом графа G. Остов выбирается, вообще говоря, неоднозначно, однако все ациклические ребра обязательно входят в любой остов. Относительно остова D все ребра подграфа G\D называются хордами. Каждая хорда связывает две вершины остова.

На рисунке 52а - пример остова (его ребра выделены) графа с 11 вершинами и 18 ребрами. Последовательность циклов и удаляемых из них ребер представлены в таблице 45. Оставшиеся ребра, образующие, остов: 2, 3, 4, 7, 10, 11, 12, 15, 17, 18.



а б

Рисунок 52 – Остов графа

Таблица 45- Последовательность циклов

Цикл	Удаляемое ребро
[1,9,14]	1
[6,7,10]	6
[5,13,14]	5
[4,12,13]	13
[8,11,12]	8
[2,9,14,4,3]	9
[14,10,11,4]	14
[16,17,18]	16

Удобнее строить остов графа следующим образом. Упорядочив произвольно множество ребер графа, будем, начиная с первого из них, последовательно добавлять ребра, не образующие цикла вместе с какими-нибудь из ранее выбранных. Для этого достаточно выбирать очередное ребро e_i так, чтобы одна из его вершин была инцидентна какому-либо из ребер $e_1,...,e_{i-1}$, а другая - не инцидентна никакому из них. При этом всякий раз мы будем добавлять к строящемуся дереву новое концевое ребро.

Для того же графа на рисунке 52б - остов, построенный аналогичным образом. Обратите внимание на то, что ребра, первоначально не присоединенные, могут впоследствии войти в остов (таковы ребра 5, 6, 7).

Ребро 8 отвергается дважды по разным причинам. Ребра 4, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 18 - хорды.

Очевидно, что удаление из дерева концевого ребра вместе с концевой вершиной приводит к связному графу без элементарных циклов, т.е. к дереву, содержащему на одну вершину и на одно ребро меньше, чем. исходное дерево. Продолжая этот процесс, мы придем (если исходное дерево конечно) к дереву, состоящему из одного ребра (и двух его вершин). Поскольку из исходного дерева удалено одинаковое число ребер и вершин, то можно сделать вывод: в любом конечном дереве число ребер на единицу меньше числа вершин.

Обратно, пусто связный граф G с b вершинами содержит (b–1) ребер. Докажем, что G - дерево в соответствии с характеристическим свойством (2). Действительно, в противном случае, удалив некоторое число q циклических ребер, мы получили бы осгов с b вершинами и (b–1–q) ребрами, что невозможно (так как остов - дерево).

Если к дереву D добавить ребро (α, β), где $\alpha, \beta \in D$, то в графе появится (единственный!) элементарный цикл, составленный из этого ребра и (единственной) элементарной цепи $[\alpha,\beta] \subseteq D$. Если удалить из дерева D произвольное ребро (γ,δ), не удаляя вершин, то получится несвязный граф (так как любое ребро дерева - ациклическое), состоящий ровно из двух компонент связности (так как восстановление этого ребра превращает граф в связный). Любой подграф H дерева не содержит элементарных циклов, поэтому все компоненты связности подграфа H - деревья.

Таблица 46 – Выборка остова

Ребра остова		Комментарий
1		
2		
3		
	4	образует цикл с ребрами 1,2,3
	5	не смежно ни одному из ранее выбранных ребер
	6	--"--"--"--"--
	7	--"--"--"--"--
	8	--"--"--"--"--
9		
5		
6		
7		
	8	образует цикл с ребрами 5,6,7
	10	образует цикл с ребрами 6,7
	11	образует цикл с ребрами 2,3,6,7,9
	12	образует цикл с ребрами 2,3,5,9
	13	образует цикл с ребрами 1,9,5
	14	образует цикл с ребрами 1,9
15		
16		
17		
	18	образует цикл с ребрами 16,17

3.5 Игра двух лиц с открытой информацией

Как пример применения понятий графа и дерева рассмотрим дискретную игру двух лиц А и В с открытой информацией. Игра представляет собой:

- множество ситуаций $H = \{H_i\}$ (среди них - начальная ситуация H_0);

- правила игры, определяющие возможные переходы из одной ситуации в другую: для каждой ситуации Hi определено множество $T_i = \{H_{i1},H_{i2},...,H_{ik}\}$ ситуаций, в которые можно перейти ходом одного из игроков;

- для некоторых ситуаций H_j множество T_j пустое - такие ситуации называются заключительными; каждой из них приписан один из символов A или B, называемых результатом игры (возможен вариант: один из трех символов A, B, 0). Партия (тур) игры состоит в том, что игроки по очереди (будем считать что первый ход принадлежит игроку A) делают допустимые правилами ходы и, начиная с ситуации H_0, переводят игру в очередную ситуацию. При попадании в любую заключительную ситуацию игра заканчивается, и результат определяет, какой из игроков - A или B - выиграл в этой партии (результат 0, если он является допустимым, означает ничью).

Дискретная игра может быть представлена орграфом {H,T}: H - множество вершин, $T(H_i)$ задает множество дуг, исходящих из H_i. Партия (тур) представляет собой траекторию с началом в H_0 и концом в одном из заключительных состояний; однако возможен вариант, когда партия бесконечна, если, например, в графе имеется контур. В дальнейшем будем рассматривать только конечные игры.

Примером конечной игры (с возможностью ничейного исхода) являются шахматы. Правила шахматной игры определяют допустимые ходы и обеспечивают конечность игры: ничья после троекратного повторения позиции, а также после 50 ходов без взятий, превращении и ходов пешек.

Отметим кстати, что позиция фигур на шахматной доске (даже с указанием очередности хода) не определяет, вообще говоря, ситуации полностью; иногда необходимо знание предыстории партии: двигался ли король - для возможности рокировки и др.

Для исследования игры удобно использовать развернутую форму ее графа - в виде корневого дерева. H_0 - корень дерева; ситуации $T(H_0)$ соответствует множество вершин 1-го яруса; для каждой вершины α множество $T(\alpha)$ составляет множество соседних с ней вершин 2-го яруса и т.д В вершинах четных ярусов (0,2,4,...) ход принадлежит 1-му игроку (A), в нечетных (1,3,5,...) - 2-му (B). При таком представлении игры одна и та же ситуация соответствует многим вершинам, если в нее можно попасть из H_0 различными путями: в дереве в каждую вершину ведет единственный путь из H_0, определяемый начальным отрезком партии до этой ситуации. Для конечной игры дерево имеет конечное число ярусов, и все концевые вершины (они могут находиться на разных ярусах) соответствуют заключительным ситуациям: им приписаны значения A или B (или 0 при возможности ничейного исхода). Длину максимального пути назовем длиной игры.

Существенное свойство рассматриваемого нами типа игр: игрок при своем ходе знает, в какой ситуации он находится и в какие ситуации ведет каждый из допустимых ходов. К такому типу игр не относится большинство карточных игр и домино, поскольку игроку обычно не известен расклад; тем самым при выборе хода он не знает текущей ситуации. По другой причине к этому типу игр не относятся, например, нарды или лото, т. к. возможность выбора хода зависит от результат стохастического эксперимента - бросания игральных костей. Стратегия f игрока A - это некоторое соответствие f(Hi) = H'i e Ti назначающее для каждой ситуации Hi, в которой может оказаться игрок A один определенный ход. Аналогично определяется стратегия игрока B.

Стратегия f игрока A - это некоторое соответствие $f(H_i) = H'_i \in T_i$ назначающее для каждой ситуации H_i, в которой может оказаться игрок A один определенный ход. Аналогично определяется стратегия игрока B.

Если выбрана стратегия f игрока A и стратегия g игрока B, то тем самым определена партия (f, g), поскольку в каждой не заключительной ситуации однозначно определен переход в следующую ситуацию. Исход игры определяется заключительной ситуацией, в которую приходит, партия.

Выбор стратегии игроком A (соответственно, игроком B) означает указание для каждой вершины четного (соответственно, нечетного) яруса ровно одной исходящей дуги. Выбор пары стратегий (f, g) выделяет ровно один путь из H_0 в одну из заключительных вершин.

Стратегия f игрока A называется выигрышной (соответственно, беспроигрышной), если для любой стратегии g игрока B партия (f, g) заканчивается выигрышем игрока A (соответственно, выигрышем или ничьей). Выигрышная и беспроигрышная стратегии игрока B определяются симметрично.

Замечание. Выигрышная стратегия может быть только у одного из игроков. Беспроигрышная стратегия может быть как у одного, так и у обоих игроков.

Чтобы проиллюстрировать понятие стратегии рассмотрим игру НИМ. На столе лежат N спичек. Игрокам разрешается по очереди удалять 1,2 или 3 спички. Проигрывает тот, кто удаляет последнюю спичку. Примерами стратегий начинающего игрока могут быть такие:

- при каждом ходе брать 1 спичку;

- при первом ходе взять 2 спички, а затем брать столько же, сколько взял второй игрок при предыдущем ходе, пока на столе больше 5 спичек; далее - брать 1 спичку.

При N = 20 начинающий игрок обладает выигрышной стратегией: взять при первом ходе 3 спички, и в дальнейшем, при своем ходе брать (4–b) спичек, где b - число спичек, взятых игроком B на предыдущем ходе. При такой стратегии после хода игрока A на столе будет оставаться последовательно 17, 13, 9, 5, 1 спичек, и игрок B вынужден взять последнюю. Если же N = 25, то выигрышная стратегия имеется у игрока B: брать всегда (4–a) спичек, где a - число спичек, взятых игроком A на предыдущем ходе. Тогда после его хода на столе будет оставаться последовательно 21, 17, 13, 9, 5, 1 спичек, и последнюю спичку берет игрок A.

На рисунке 53 приведено дерево игры для N = 5. В кружках - число спичек на столе в данной ситуации. Заштрихованные кружки - заключительные позиции с указанием результата (выигрыш A или B). Двойными стрелками обозначены наилучшие стратегии игроков (не указан первый ход A и переходы в заключительные позиции, когда нет выбора). Во всех вершинах первого яруса у игрока B есть выигрышные ходы, поэтому при любом первом ходе A игрок B выигрывает, если придерживается указанной стратегии. Для игры НИМ, где результат определяется тем, кто из игроков сделал заключительный ход, все концевые вершины четных ярусов свидетельствуют о выигрыше A, а нечетных ярусов - B. В общем случае игр - это не так.

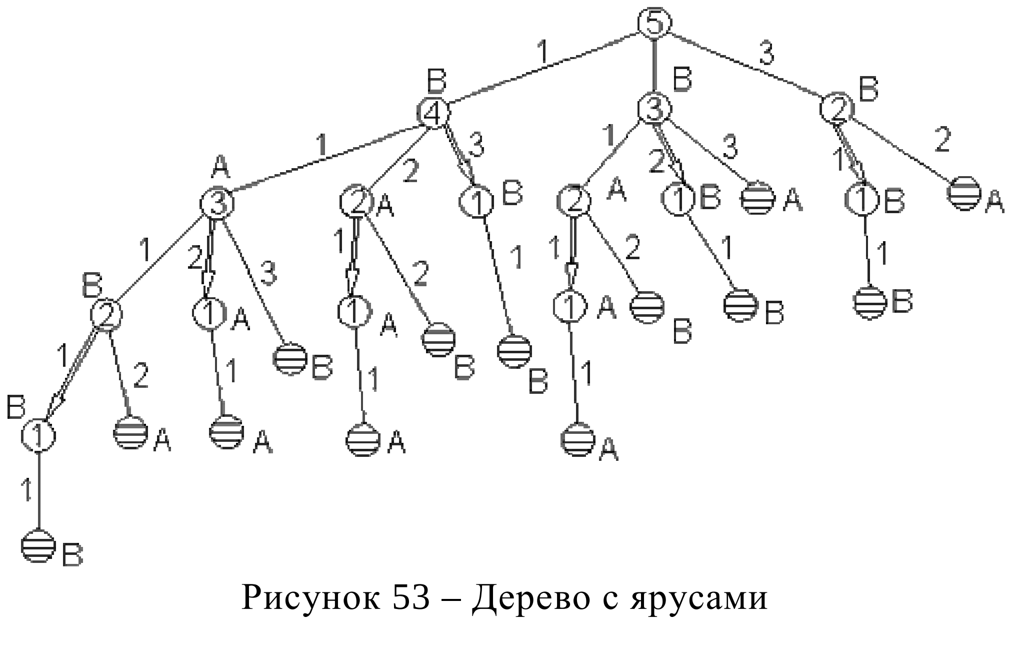


Рисунок 53 – Дерево с ярусами

Для конечной игры справедливы две следующих теоремы.

Теорема 1. Если игра не допускает ничейного исхода, то для одного из игроков существует выигрышная стратегия.

Теорема 2. В игре, допускающей ничейный исход, хотя бы один из игроков обладает беспроигрышной стратегией.

Замечание. Обратите внимание, что в теоремах утверждается не тот очевидный факт, что каждая партия заканчивается в первом случае победой одного из игроков, а во втором - победой или ничьей; смысл первой теоремы - в наличии такой стратегии, следование которой приводит к победе при любой стратегии противника (во втором случае, по крайней мере к ничьей).

Доказательство теоремы 1 будем вести индукцией подлине игры t.

Если t = 1, то дерево игры имеет вид, изображенный на рисунке 48а.

Возможны два варианта:

- среди ситуаций H_1, ..., H_k (все они - заключительные) имеется! ситуация H, помеченная символом A, означающим выигрыш игрока A; в этом случае начинающий имеет выигрышную стратегию $f(H_0) = H_i$, т.е. выбор хода из H_0 в H_i;

- все ситуации H_1, ..., H_k помечены символом B; тогда выигрышная стратегия (пустое множество ходов) - у игрока B: начинающий сам при любом своем ходе попадает в заключительную позицию с выигрышем игрока B.

Рисунок 54 - Деревья

Пусть теперь t > 1 (рисунок 54б). Если удалить корень и исходящие из него дуги, то останется некоторое количество корневых поддеревьев, в каждом из которых корнем является вершина 1-го яруса первоначального дерева. Эти поддеревья представляют варианты игры, возникающие после того или иного первого хода игрока A, но начинающим в каждой из ветвей является уже игрок B. Все эти подыгры имеют длину меньше t; поэтому, по предположению индукции, в каждой из них у одной из сторон имеется выигрышная стратегия. Возможны два варианта:

- во всех подыграх выигрышная стратегия у начинающего игрока, (B); тогда в исходной игре выигрышная стратегия у игрока B: какой бы первый ход ни выбрал игрок A, его противник B может выбрать свою выигрышную стратегию в полученной подыгре;

- хотя бы в одной из подыгр есть выигрышная стратегия у не начинающего игрока (т.е. A); тогда в исходной игре выигрышная стратегия - у игрока A: она состоит в том, чтобы первым ходом попасть именно в эту подыгру, в ней выбрать свою выигрышную стратегию; в остальных подыграх можно выбрать стратегию произвольно - все равно партия в эти подыгры не переходит. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2 проводится таким же образом. При этом может оказаться, что беспроигрышная стратегия имеется у обоих игроков.

Замечание. Для шахматной (а также шашечной) игры справедлива теорема 2, т. е. либо белые, либо черные, либо обе стороны имеют беспроигрышную стратегию. Однако в настоящее время не известно, у какой именно стороны имеется беспроигрышная стратегия и имеется ли у какой-либо из сторон выигрышная стратегия.

3.6 Эйлеровы графы. Цикломатическое число

Здесь мы будем рассматривать подграфы, может быть, несвязные, содержащие все вершины графа. Пусть G - граф, содержащий p занумерованных ребер $e_1,e_2,...,e_p$. Каждому подграфу H G поставим в соответствие p-мерный вектор $(a_1, a_2,...,a_p)$ из нулей и единиц: $a_i = 1$, если $e_i \in H$; $a_i = 0$, если $e_i \notin H$ (характеристический вектор подграфа H). Это соответствие, очевидно, взаимнооднозначное. Более того, сумме по модулю 2 подграфов H, и $H_2 – H_1 \oplus H_2$ - соответствует (поразрядная) сумма по модулю 2 их характеристических векторов. Над множеством коэффициентов {0,1} множество всех подграфов образует линейное пространство: умножение любого подграфа H на 1 дает H, умножение на 0- пустой подграф, т.е. подграф, не содержащий ребер и состоящий из одних изолированных вершин графа G. Нетрудно видеть, что пространство подграфов графа G и пространство характеристических векторов его подграфов изоморфны и имеют размерность p. Базисом может служить множество всех однореберных подграфов.

Характеристический вектор каждого такого подграфа содержит ровно одну единицу, причем для разных подграфов - на разных местах.

Назовем граф четным, если степени всех его вершин - четные числа. Любую элементарную цепь (кроме цикла) в четном графе можно продлить ребром, не принадлежащим цепи, так как конец цепи имеет степень 1 в цепи и степень не меньше 2 в графе. Если граф конечен, то, продолжая цепь, мы через конечное число шагов вторично придем в уже пройденную вершину, т.е. часть полученной (уже не элементарной) цепи образует элементарный цикл, после удаления которого остается четный граф, так как все степени изменяются на четное число (2 - для вершин цикла и 0 - для вершин, не принадлежащих циклу). В этом графе можно снова выделить некоторый элементарный цикл и т.д., пока в графе не останется ни одного ребра. Таким образом, каждый конечный четный граф можно представить в виде суммы попарно не пересекающихся (по ребрам) элементарных циклов, откуда, в частности, следует, что каждое его ребро циклическое.

Если конечный четный граф связен, то нетрудно показать (например, индукцией по числу его элементарных циклов), что в нем существует, простой (т.е. не самопересекающийся по ребрам) цикл, содержащий все ребра графа. Такой цикл называется эйлеровым циклом, а обладающий им граф называется эйлеровым графом. Поскольку каждая вершина простого цикла имеет в нем четную степень (каждое прохождение через вершину по циклу использует два ребра инцидентных этой вершине), то доказана следующая теорема.

Теорема Эйлера. Для того чтобы конечный связный граф был эйлеровым, необходимо и достаточно, чтобы он был четным.

В конечном несвязном четном графе все компоненты связности - эйлеровы графы.

Определение 106: Будем называть вершину ориентированного графа равновесной, если число дуг, входящих в вершину, равно числу дуг, исходящих из нее.

Определение 107: Ориентированный граф назовем равновесным, если все его вершины равновесные. Обход (неориентированного) эйлерова графа по эйлерову циклу; ориентирует каждое ребро графа в направлении обхода. Ясно, что при такой ориентации эйлеров граф является равновесным. Пусть теперь дан равновесный граф. Повторяя предыдущее рассуждение (вместо циклов надо говорить о контурах), легко показать, что каждый конечный равновесный граф можно представить в виде суммы элементарных контуров, попарно не пересекающихся по ребрам (а также то, что в конечном связном равновесном графе существует простой контур, содержащий все ребра графа).

Другими словами, теорема Эйлера означает, что четность всех вершин графа есть необходимое и достаточное условие существования обхода графа, при котором каждое ребро проходится ровно один раз.

Из теоремы Эйлера можно вывести интересное следствие. В произвольном связном графе G раздвоим каждое ребро $e = (V_1,V_2)$, т.е. заменим его парой кратных ребер e', e'' с теми же вершинами. Степень каждой вершины удвоится и станет четной. В полученном четном графе G_1 существует эйлеров цикл (а если ребра e', e'' ориентировать в противоположных направлениях, то каждая вершина будет равновесной и существует эйлеров контур). Если рассмотреть его как обход графа G1, снова склеить пары e', e'' в одно ребро, то в первоначальном графе G эта траектория будет (уже не простым) циклом, проходящим через каждое свое ребро ровно два раза (причем в противоположных направлениях). Итак, в каждом связном графе существует цикл, содержащий ровно 2 раза каждое ребро графа, что можно трактовать как соответствующий обход лабиринта с возвращением в начало обхода.

Определение 108: Элементарный путь, проходящий через все вершины графа, называется гамильтоновым; если совпадают его начало и конец, то это гамильтонов цикл.

Известная задача о коммивояжере формулируется так: имеется n городов, попарные расстояния между которыми заданы. Коммивояжер желает посетить все города так, чтобы суммарная длина пути была минимальной. Это означает, что нужно найти гамильтонов путь минимальной длины в полном графе K_n, ребрам которого приписаны положительные числа - длины ребер (для варианта задачи - обхода с возвращением в начало пути - ищется минимальный гамильтонов цикл).

Последовательность перестановок, описанная ранее, может быть интерпретирована следующим образом. Рассмотрим граф G_n, вершины которого соответствуют всем (n!) перестановкам множества {1,2,...,n}, а ребра связывают пары вершин, отличающиеся транспозицией соседних элементов (таким образом, каждая вершина соединена с (n–1) другими вершинами). Тогда указанная последовательность соответствует гамильтонову пути в графе G_n. На рисунке 49 а,б - соответствующие иллюстрации для n = 3 и n = 4.

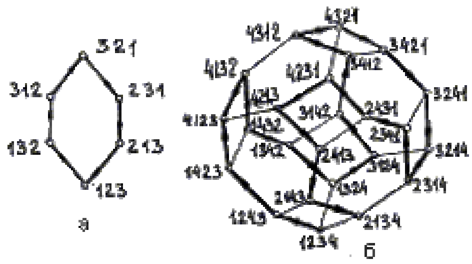


Рисунок 55 – Граф G_3, G_4

Сумма двух четных подграфов любого графа есть также четный подграф. Если s_1 и s_2- степени некоторой вершины в подграфах H_1 и H_2 соответственно, а s_{12} - ее степень в пересечении $H_1 \cap H_2$, то степень $s(\alpha)$ вершины α в подграфе $H_1 \oplus H_2$ равна $(s_1–s_{12})+(s_2–s_{12}) = s_1+s_2–2S_{12}$ (кстати, это пример применения комбинаторной формулы включения- исключения). Если s_1 и s_2 - четные, то $s(\alpha)$ также четное. Поэтому четные подграфы образуют подпространство в пространстве всех подграфов, которое совпадает с подпространством, натянутым на множество всех элементарных.

Перейдем к выяснению размерности v этого подпространства. Пусть G - связный граф с p ребрами и b вершинами, D - некоторый его остов. Число хорд равно (p–b+1). Каждая хорда (α,β) вместе с единственной элементарной цепью $[\alpha,\beta] \subseteq D$ образует элементарный цикл, причем векторы всех таких циклов (для разных хорд) образуют независимую систему Σ, так как каждый из циклов содержит ребро (свою хорду), не принадлежащее ни одному из остальных циклов системы. Отсюда $v > p–b+1$.

С другой стороны, каждый четный подграф, в частности любой простой цикл выражается через циклы системы Σ. Действительно, прибавим к четному подграфу H те циклы из Z, которые содержат хорды графа, принадлежащие H. Полученная сумма не будет содержать ни одной хорды (каждая хорда входит в сумму дважды: в подграф H и в один из циклов системы Σ), т.е. будет некоторым подграфом дерева D, откуда следует, что это пустой подграф, так как в противном случае четный подграф (сумма H и циклов), имеющий элементарные циклы, содержался бы в дереве D. Таким образом, $v = p–b+1$.

Для несвязного графа с k компонентами связности базис пространства четных подграфов получается объединением базисов его связных компонент, а число ребер и вершин суммируется. Поэтому, если i-я компонента содержит p_i ребер и b_i вершин, то $v = p–b+k$, где $p = \sum_{i=1}^{k} p_i$, $b = \sum_{i=1}^{k} b_i$.

Число v называется цикломатическим числом графа. Ввиду того, что $v \geq 0$, для любого графа справедливо неравенство $k \geq b–p$. Деревья - это связные графы с цикломатическим числом, равным 0.

Пример 88:

Для полного графа K_5 (5 вершин, $C_5^2 = 10$ ребер)

Пример 89:

Для графа на рисунке 7 имеем $p = 18$, $b = 11$, $k = 1$, откуда $v = 18–11+1 = 8$.

Пример 90:

Рассмотрим соотнесенный неориентированный граф для графа на рисунке 106. Число его вершин равно числу перестановок из 4 элементов: $4! = 24$. Степени всех вершин равны 3. Поэтому число ребер графа $p = 24\cdot3/2 = 36$. Граф связен, т.е. $k = 1$. Цикломатическое число равно $v = 36–24+1 = 13$.

3.7 Двухполюсные сети. Потоки в сетях.

Определение 109: Граф, некоторые вершины которого выделены, называется сетью.

Определение 110: Выделенные вершины называются полюсами сети. Например, дерево с корнем можно рассматривать как однополюсную сеть.

Определение 111: Вершины, отличные от полюсов, называются **внутренними вершинами сети.**

Определение 112: Ребро, инцидентное хотя бы одному полюсу, называется полюсным ребром; остальные ребра называются внутренними.

(k,l)-полюсником называется сеть с $(k+l)$ полюсами, разбитыми на два класса: k входных и l выходных полюсов. $(1,1)$-полюсник называется также двухполюсной сетью. В этом параграфе мы будем рассматривать, главным образом, двухполюсные сети без петель и без изолированных внутренних вершин (кратные ребра допускаются). Они будут называться просто сетями.

Определение 113: Будем также называть **цепью** (без указания концов) элементарную цепь между полюсами сети - в других случаях будем обязательно указывать концы цепи или называть ее цепочкой. Обозначим входной и выходной полюсы сети S символами α_s и β_s. Полюсные ребра образуют входную и выходную звезды Z_{as} и Z_{Bs} - пересечение которых состоит из сквозных ребер (оно может быть пустым), инцидентных обоим полюсам.

Пусть A и B - две цепи сети S, не имеющие общих внутренних вершин, α и β- внутренние вершины этих цепей, C - элементарная цепочка $[\alpha,\beta]$, не пересекающаяся с A и B нигде, кроме своих концов (рисунок 56). Тогда существуют две цепи, проходящие через цепочку C в разных направлениях: $\alpha_s A_1 \alpha C\ \beta > B_2 \beta_s$ и $\alpha_s B_1 \beta C \alpha A_2 \beta_s$. Подграф, образованный парой таких цепей A и B и связывающей их цепочкой C, называется мостиком.

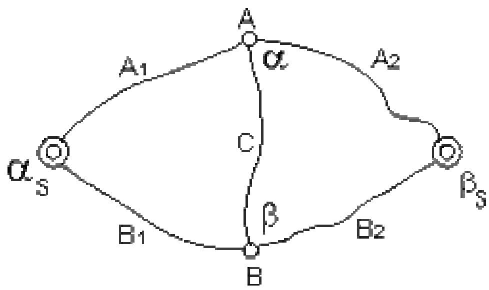
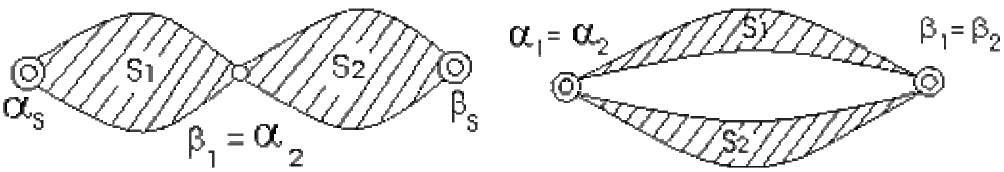


Рисунок 56 - Сеть

Рассмотрим две операции над сетями. Пусть S_1 - сеть с полюсами α_1, и β_1, S_2 - сеть с полюсами α_1, и β_1, причем S, и S_2 не имеют общих элементов.

Определение 114: Сеть $S_1 \cdot S_2$ с полюсами α_1 и β_2, полученная склеиванием вершин β_1 и α_2, называется последовательным соединением сетей S_1 и S_2 (рисунок 57а); сеть $S_1 \vee S_2$ с полюсами α_1 и β_1 полученная склеиванием полюсов α_1 с α_2 и β_1, с β_2, параллельным соединением сетей S_1 и S_2 (рисунок 57б). Аналогично определяют последовательное и параллельное соединения большего числа сетей $S_1 \cdot S2 \cdot \ldots S_n$ и $S_1 \vee S_2 \vee \ldots \vee S_n$.



а б

Рисунок 57- Последовательное и параллельное соединение

Сеть, полученная из однореберных сетей в результате конечного числа параллельных и последовательных соединений, называется параллельно-последовательной сетью. Другими словами, класс параллельно-последовательных сетей (сокращенно П-сетей) определяется индуктивно:

(1) однореберная сеть есть П-сеть

(2) если S_1 и S_2 - П-сети, то $S_1 \cdot S_2$ и $S_1 \vee S_2$ - тоже П-сети.

Характеристическое свойство П-сетей: они не содержат мостиков.

Добавим к сети S дополнительное, источниковое ребро, связывающее полюсы (иногда, например, в случае ориентированных сетей бывает удобным ориентировать это ребро от выхода к входу сети). Полученную расширенную сеть обозначим через $\tilde{S}$. Заметим, что добавление источникового ребра к любой цепи A превращает ее в элементарный цикл $\tilde{A}$.

Нетрудно показать, что в произвольной сети сумма по модулю 2 нечетного числа цепей A_i содержит цепь. В самом деле, сложим по модулю 2 циклы $\tilde{A}_i$, соответствующие данным цепям A_i. В результате получим четный граф $\sum \tilde{A}_i$. Источниковое ребро входит в эту сумму, таккак оно участвует в сложении нечетное число раз. Очевидно, что оно является циклическим ребром в $\sum \tilde{A}_i$; (напомним, что в четном графе, все ребра циклические). Содержащий его цикл после удаления самого источникового ребра есть искомая цепь.

Пусть S - произвольная частично ориентированная сеть, каждому ребру e которой приписано неотрицательное число c(e) - пропускная способность. Потоком в сети S называется пара (f,ω), где ω - некоторая ориентация всех неориентированных ребер сети, а f(e) - заданная на множестве всех ребер функция с неотрицательными значениями, не превосходящая пропускных способностей, и такая, что в каждой внутренней вершине выполнен закон Кирхгофа, согласно которому сумма значений потока по ребрам, входящим в вершину, равна сумме значений потока по ребрам, исходящим из вершины. Другими словами, для f(e) выполнены условия:

(1) $0 \le f(e) \le c(e)$ для всех ребер сети;

(2) $R(\alpha) = 0$ для всех внутренних вершин α,

где $R(\alpha) = \sum_{e \in \Gamma'(\alpha)} f(e) - \sum_{e \in \Gamma'(\alpha)} f(e)$, а Γ(α) (соответственно Γ'(α)) - множество всех ребер, исходящих из α(соответственно входящих в α) при ориентации ω.

Поскольку сумма значений R(α) по всем вершинам сети, включая полюсы, равна 0 (каждое ребро является исходящим для одной вершины и входящим для другой), то $R(\alpha_s) = -R(\beta_S)$. Значение $R = R(\alpha_s)$ называется величиной потока. Между прочим, сходные рассуждения показывают, что если сеть допускает поток ненулевой величины, то полюсы сети находятся в одной компоненте связности. Если сеть изображает какую-либо проводящую систему (сеть дорог, трубопровод и т.п.), то R определяет величину потока, входящего в одном полюсе и выходящего из другого, т.е. проходящего через сеть. Если на ориентированном от β_s к α_s источниковом ребре положить f = R (допуская, что для этого ребра f может быть меньше 0), то закон Кирхгофа будет выполняться для всех вершин сети, а R будет определять величину циркуляции через сеть.

Поставим задачу определить максимальную величину потока R_{max} через сеть S при заданных значениях пропускных способностей. Ответ может быть получен в терминах сечений сети.

Сечением в сети называется множество ребер, при удалении которого сеть становится несвязной, причем полюсы попадают в разные компоненты связности. Ясно, что каждая цепь (а тем более каждый путь из α_s в β_s) проходит хотя бы через одно ребро сечения. В сети на рисунке 58 примерами сечений являются {d,e,f}, {b,c,e,g,h}, {d,g,h,i}. Сечение будем называть простым, если при удалении любого его ребра оно перестает быть сечением. Так, {d,e,f} и {b,c,e,g,h} являются простыми сечениями, в то время как {d,g,h,i} не является таковым: можно удалить ребро h или ребро i. Очевидно, что для каждого ребра простого сечения можно указать цепь, которая проходит через это ребро, но не проходит через другие ребра данного сечения: иначе это ребро было бы излишним.

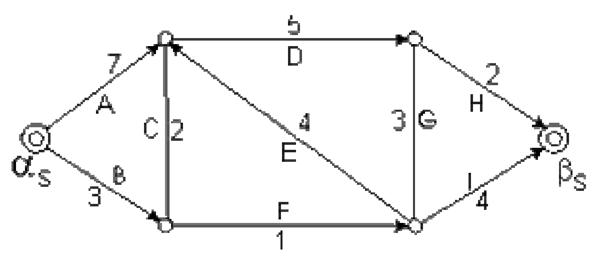


Рисунок 58 – Сеть с двумя полюсами

Если в связной сети удаляется простое сечение, то сети распадается ровно на две части левую часть, содержащую α_s, и правую часть, содержащую β_s Каждое ребро простого сечении связывает вершины из разных частей. Будем называть ребро сечения прямым, если оно в сету не ориентировано или ориентировано слева направо, и обратным -в противном случае. Будет ли ориентированное ребро прямым и обратным, вообще говоря, зависит от выбора сечения. Так, в примере на рисунке 58 ребро e в сечениях {d,e,f} и {b,c,e,g,h} - обратное, а сечении {a,c,e,g,i} - прямое.

Каждому простому сечению W припишем пропускную способность c(W), равную сумме пропускных способностей всех его прямых ребер. В примере на рисунке 58 сечение {d,e,f} имеет пропускную способность) 5+1 = 6, а сечение {b,c,e,g,h} - пропускную способность 3+2+3+2 = 10. Если сеть несвязна и ее полюсы находятся в разных компонентах связности, то естественно считать (единственным) простым сечением пустое множество, а его пропускную способность нулевой.

Теорема Форда-Фалкерсона о максимальном потоке: максимальная величина потока R_{max} через сеть S равна минимально из пропускных способностей c_{min} ее простых сечений.

Неравенство $R_{max} \leq c_{min}$ можно считать достаточно очевидным из физических соображений, и в его справедливости нетрудно убедиться, просуммировав величину R(α) по всем вершинам α левой компоненты произвольного сечения W. Эта сумма, с одной стороны, равна $R(\alpha_s)$, а с другой стороны, она равна алгебраической сумме величин потоков, идущих через сечение слева направо (потоки по ребрам, идущим из левой компоненты в правую суммируются со знаком плюс, а по ребрам, идущим в обратном направлении, - со знаком минус). Поскольку f(e) c(e), отсюда следует, что R < c(W). Ясно также, что равенство R = c(W) может достигаться только, если все прямые ребра сечения W ориентированы слева направо (при ориентации) и для них f(e) = c(e), а для всех обратных ребер f(e) = 0.

Несколько сложнее доказывается, что в сети S можно создать поток величины, равной c_{min}.

Разработан ряд конкретных алгоритмов построения максимального потока, основанных на этой теореме.

Теорема Форда-Фалкерсона допускает обобщение на случай, когда пропускные способности приписаны не только ребрам, но и внутренним вершинам сети, и поток считается допустимым, если для любой внутренней вершины α величина $\sum_{eeI'(\alpha)} f(e)$ (так же как и величина $\sum_{eeI'(\alpha)} f(e)$) не превосходит пропускной способности вершины.

Теорема распространяется и на (k,l) - полюсную сеть. В обоих случаях величина максимального потока от входов к выходам сети равна и минимальной пропускной способности множества элементов сети, блокирующего все цепи.

Наряду с определением максимальных потоков в тех или иных проводящих системах теорема Форда-Фалкерсона позволяет решать и некоторые чисто комбинаторные проблемы. Одна из них носит название задачи о назначениях. Пусть имеется N претендентов {α} на N вакантных должностей {β}. Возможно ли назначение всех N кандидатов, если каждый из них способен занять одну из некоторого подходящего ему подмножества B_i этих должностей? Очевидным является следующее необходимое условие такой возможности: для любой группы $k \leq N$ претендентов объединение соответствующих им множеств B_i должно содержать не меньше k должностей - иначе им не хватит мест (вспомните комбинаторный принцип Дирихле).

Ситуация может быть представлена двудольным графом, где $V_1 = \{a_i\}$, $V_2 = \{b_j\}$ и (a_i,b_j) - дуга графа, если кандидат a_i, способен занять должность b_j. Если ввести две дополнительные вершины - полюсы s и t, дополнительные дуги (s,a_i) и (b_j,t), установить подходящим образом пропускные способности вершин и ребер, то с помощью теоремы Форда-Фалкерсона можно показать, что приведенное условие является также достаточным.

3.8 Кратчайшие пути в цепи

Есть известная задача о волке, козе и капусте. Хозяин должен переправить их с левого берега реки на правый, пользуясь лодкой, в которой кроме него может поместиться только один из трех «пассажиров». При этом по понятным причинам нельзя в отсутствие хозяина вместе волка с козой, а также козу с капустой. В каком порядке проводить переправу? Задача довольно легко решается в уме из-за малого числа вариантов, однако рассмотрим ее с прицелом на более общий случай.

На рисунке 59 - сеть, вершинами которой являются всевозможные расположения на двух берегах четырех участников: X (хозяин), Кз (коза),. Кп (капуста), В (волк). Каждую ситуацию, возникающую в процесс переправы, можно охарактеризовать подмножеством A персонаже находящихся на этом этапе на левом берегу; дополнение $\bar{A}$ подмножества - участники, перевезенные на правый берег. Общее; количество подмножеств 4-элементного множества равно $2^4 = 16$. Ребра графа связывают вершины α и β, если из ситуации α можно перейти ситуацию β за одну ходку (переправу). Поскольку возможен и обратный рейс из β в α, то можно считать граф неориентированным.

Множество вершин естественно разбивается на 2 части: с присутствием (столбец 2 на рисунке 59) или отсутствием (столбец 3 рисунок 59) на левом берегу хозяина; очевидно, что граф - двудольный, т.к. при каждой переправе этот признак меняется. Например, вершина <Х Кз Кп> связана с вершинами <Кп> (если хозяин перевозит на правый берег козу), <Кз> (если перевозит капусту) и <Кз Кп> (если переправляется один). Вершина <Кп В> (хозяин с козой находятся на правом берегу) связана с вершинами <Х Кз Кп В> (если хозяин возвращается на, левый берег с козой) и <Х Кп В> (если он возвращается один).

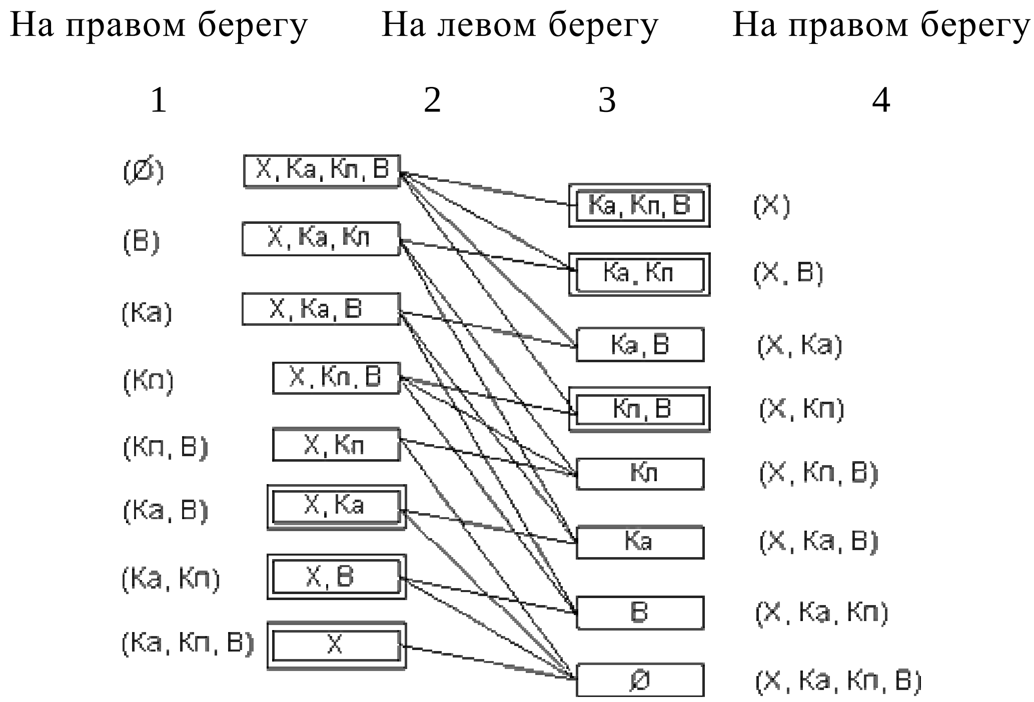


Рисунок 59 – Задача о волке, козе и капусте

Задачу теперь можно сформулировать так: найти цепь из полюса <Х Кз Кп В> (все на левом берегу) в полюс <Ø> (все на правом берегу, на левом - никого), причем нельзя проходить через запрещенные вершины, обозначенные на рисунке 60 двойной рамкой: например, ситуация <Кз В> означает опасную пару без хозяина на левом берегу, а ситуация <Х В> - на противоположном берегу коза соседствует с капустой.

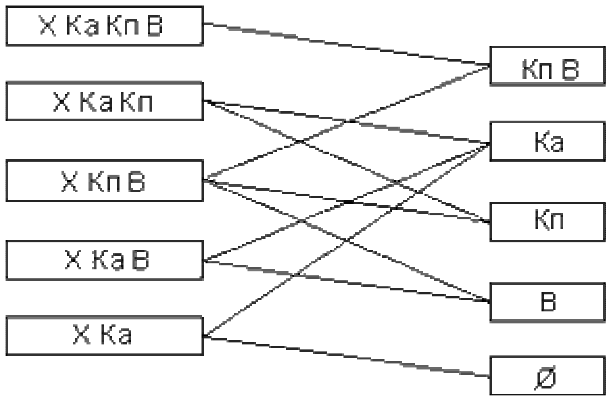


Рисунок 60- Схема перевозки

Удалим теперь из сети запрещенные вершины вместе с инцидентными им ребрами: результат представлен на рисунке 60. Теперь достаточно изобразить полученную сеть в более удобном виде, как на рисунке 61. Здесь решение очевидно: обнаруживаются даже две различные элементарные цепи.

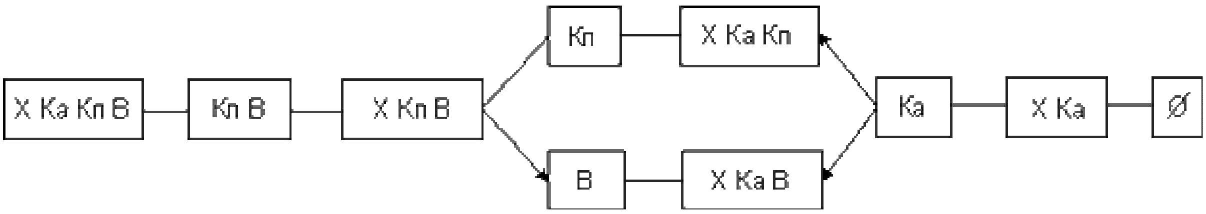


Рисунок 61 – Элементарная цепь

Обобщение этой задачи состоит в отыскании цепи (или цепи наименьшей длины) в произвольной сети. Для достаточно большой сети наглядность уже отсутствует. Разработаны различные алгоритмы построения такой цепи, применимые к графам и сетям, заданным в различной форме.

Один из них основан на следующей конструкции. Будем присваивать вершинам сети S ранг (целочисленную метку): входному полюсу α_s - ранг 0; вершинам, смежным с полюсом α_s - ранг 1; непомеченным вершинам, смежным с вершинами первого ранга, - ранг 2 и т.д. На k-ом этапе процесса непомеченным вершинам, смежным с вершинами (k–1)-го ранга, присваивается ранг k. Ранг вершины равен расстоянию до нее от полюса α_s. На каждом этапе вершины очередного ранга образуют как бы фронт распространения волны от полюса α_s. Процесс закончится, когда ранг будет присвоен выходному полюсу β_S (если это не произойдет, то сеть S несвязна). Кратчайшая цепь $[\alpha_s,\beta_s]$ (не единственная) определяется некоторой последовательностью вершин различных рангов: каждая вершина γ k-го ранга, начиная с β_S, связана ребром со смежной вершиной (k–1)-го ранга (например, с той, по которой γ получила свой ранг).

Для графа на рисунке 62 представлены ранги вершин при определении расстояния и кратчайшей цепи из А в В и указана одна из них.

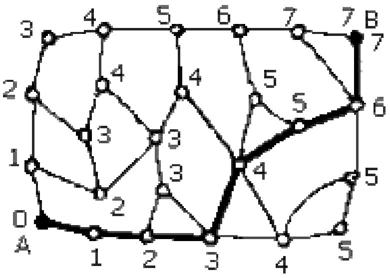


Рисунок 62 – Ранги вершин

Модификация этого алгоритма состоит в одновременном построении двух фронтов волн, исходящих из α_s и β_s: процесс заканчивается, когда эти волны встретятся.

Для ориентированной сети с присвоенными ее дугам длинами $\{1(e_к)\}$ алгоритм построения кратчайшего пути несколько иной. Метки $\lambda(V_i)$, присваиваемые вершинам, могут изменяться в процессе построения. Первоначально пометим полюс α_s числом 0, а каждую из остальных вершин - достаточно большим числом L (например, превышающим сумму длин всех дуг сети). Далее будем, пока возможно, производить-следующее преобразование (смену) меток $\lambda(v_i)$. Если для некоторой дуги $e = (v_1,v_2)$ выполнено строгое неравенство $\lambda(v_2) - \lambda(v_1) > 1(e)$, то присвоим вершине v_2 (концу дуги e) новую, меньшую метку: $\lambda(v_2) = \lambda(v_1)+1(e)$. Через конечное число таких операций для любой дуги e будет выполнено нестрогое неравенство $\lambda(v_2)–\lambda(v_1) \leq 1(e)$. Тогда $\lambda(\beta_s)$ будет равно длине кратчайшего пути $[\alpha_s,\beta_s]$. Отыскать этот путь можно, двигаясь подобно предыдущему, обратным ходом из β_s в α_s по дугам $e = (v',v'')$, для которых $\lambda(v'') = \lambda(v')+l(e)$.

Пример описанного построения для сети на рисунке 63 приведен в таблице 47. В первом столбце - первоначальные метки; в последующих столбцах - процесс пересчета меток: указаны только меняющиеся значения, остальные переносятся слева из предыдущих столбцов; для каждого изменения указано, по какой из вершин оно произведено. В последний столбец перенесены окончательные значения меток.

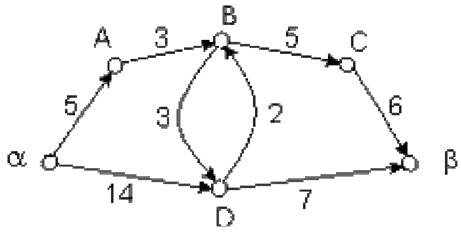


Рисунок 63 - Сеть

Таблица 47 – Таблица построения сети

α	0											0
A	100	5α										5
B	100			16D				8A				8
C	100				21B				13B			13
D	100		14α								11B	11
β	100					27C	21D			19C		8D

3.9 Раскраска графов

Говорят, что вершины (соответственно ребра) неориентированого графа G без петель правильно раскрашены, если каждой вершине (соответственно каждому ребру) графа сопоставлен ровно один из заданного набора цветов, причем любым двум соседний вершинам (соответственно смежным ребрам) сопоставлены разные цвета. Граф, вершины или ребра которого правильно раскрашен будем называть правильно раскрашенным, если из контекста ясно какие именно элементы графа раскрашиваются или это безразлично. Очевидно, что всякий подграф правильно раскрашенного графа также правильно раскрашен. Удобно нумеровать цвета натуральными числами 1, 2, ...Отрезок натурального ряда от 1 до k включительно будем обозначать N_k. Можно сказать, что правильная раскраска вершин (соответственно ребер) графа - это функция с натуральными, значениями, определенная на множестве вершин (соответственно ребер) и разнозначная на концах каждого ребра (соответственно на ребрах каждой звезды) графа.

Основная задача состоит в определении наименьшего числа $\chi(G)$ (соответственно $\chi'(G)$) различных цветов, с помощью которых можно правильно раскрасить вершины (соответственно ребра) графа G. $\chi(G)$ называется хроматическим числом, а $\chi'(G)$ - хроматическим классом графа G.

При раскраске вершин будем рассматривать графы без петель и кратных ребер, поскольку наличие или отсутствие кратных ребер никак не влияет на правильность раскраски графа. Отметим, что подграф, натянутый на множество вершин, окрашенных одинаково, при правильной раскраске не содержит ребер.

Очевидно, что для всякого графа с b вершинами $\chi(G) \leq b$, причем равенство достигается только для полного графа: всякий другой граф можно раскрасить меньшим числом цветов, окрасив две несмежные вершины одинаково. С другой стороны, если в графе имеется хотя бы одно ребро, $\chi(G) \geq 2$.

Графы, для которых $\chi(G) = 2$, называются бихроматическими. Ясно, что бихроматический граф является двудольным, и наоборот всякий двудольный граф, содержащий хотя бы одно ребро, бихроматичен. Справедливо и другое условие бихроматичности и тем самым двудольности графа.

Теорема. Для того чтобы граф, содержащий хотя бы одно ребр был бихроматическим, необходимо и достаточно, чтобы он не содержал элементарных циклов нечетной длины.

Необходимость. Поскольку при правильной раскраске цвета на цикле должны чередоваться, вершины цикла нечетной длины не могут быть раскрашены в два цвета, и, следовательно, граф, содержащий этот цикл, не может быть бихроматическим.

Достаточность. Заметим прежде всего, что дерево бихроматично. В самом деле, выберем произвольно корень и используем представление дерева, описанное в параграфе 3. Окрасим все вершины четных ярусов в один цвет, а все вершины нечетных ярусов в другой цвет. Эта раскраска правильная, так как ребра в дереве соединяют только вершины соседних ярусов.

Рассмотрим теперь элементарную цепь, соединяющую в дереве вершину i-го яруса и вершину j-го яруса. На каждом ее ребре происходит изменение номера яруса на единицу. Поэтому ее длина имеет ту же четность, что и число $i - j$. В частности, вершины, принадлежащие ярусам одинаковой четности, связаны элементарной цепью четной длины.

Если мы выберем теперь в графе G, не содержащем элементарных циклов нечетной длины, любой остов, то хорды относительно этого остова будут связывать вершины из ярусов разной четности (иначе в графе G появился бы элементарный цикл нечетной длины), т.е. двухцветная правильная раскраска остова будет правильной раскраской и в графе G.

Если граф содержит в качестве подграфа t-вершинный полный граф K_t, то его хроматическое число, очевидно, не меньше t. Противоположное утверждение, однако, неверно. Существуют графы даже без треугольников K_3, имеющие сколь угодно большое хроматическое число. Пример такого графа с хроматическим числом 4 приведен на рисунке 58.

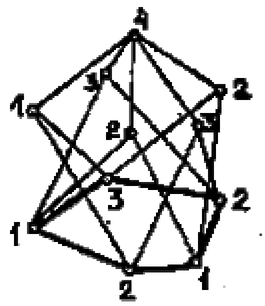


Рисунок 64 – Граф с хроматическим числом 4

Рассмотрим, как связано хроматическое число со степенями вершин графа. Обозначим через s(G) максимальную из степеней вершин графа G, а через Γ(s) - класс графов без кратных ребер, для которых $s(G) \leq s$. Нетрудно показать индукцией по числу вершин, что если $G \in \Gamma(s)$, то $\chi(G) \leq s+1$. В самом деле, если число вершин в графе меньше или равно (s+1), то утверждение тривиально. Пусть теперь оно установлено для всех графов из Γ(s), имеющих меньше вершин, чем граф G. Удалим из G звезду произвольной вершины αи β соответствии с предположением индукции правильно раскрасим граф $G \backslash Z\alpha$ (s+1) цветами. В графе G у вершины αне более s соседних вершин, поэтому в множестве цветов N_{s+1} есть хотя бы один цвет, которым не окрашена ни одна из вершин, соседних с α. Его можно использовать для окраски вершины α, после чего граф G будет правильно раскрашен (s+1) цветами.

Полный (s+1)-вершинный граф K_{s+1} представляет собой пример графа из Γ(s), для которого хроматическое число равно s+1. Оказывается, что этот пример - единственный, а именно справедлива следующая теорема

Теорема. Пусть $s \geq 3$. Если $G \in \Gamma(s)$ и $G \neq K_{s+1}$, то $\chi(G) \leq s$.

3.10 Применение теории графов при проектировании коммуникационных сетей

Удачной моделью компьютерной сети может служить ориентированный граф, чьи вершины (или *узлы*) представляют компьютерные компоненты, а дуги – коммуникационные линии связи. Каждая дуга такого графа снабжена весом, обозначающим пропускную способность соответствующей линии.

Рисунок 65 показывает, например, простую сеть из семи узлов.

Сразу после ввода в действие сети возникает вопрос о том, как передавать сообщения между несмежными узлами. Процедура **статической маршрутизации** учитывает информацию о пропускной способности линий для определения фиксированного пути передач между узлами. В целях оптимизации таких путей в сети применяют алгоритм, подобный алгоритму Дейкстры. Однако при этом подходе могут возникать сбои в линиях или узлах сети. Задержки передач могут происходить в тех случаях, когда превышается пропускная способность линии.

Процедура **динамической маршрутизации** постоянно корректирует пропускную способность линий с учетом потребности. Чтобы дать возможность индивидуальным узлам решать, когда и куда передавать новую информацию, разработан **протокол** или множество правил. Каждый узел поддерживает свою таблицу путей, так что задача оптимизации передачи сообщений **рассредоточена** по всей сети.

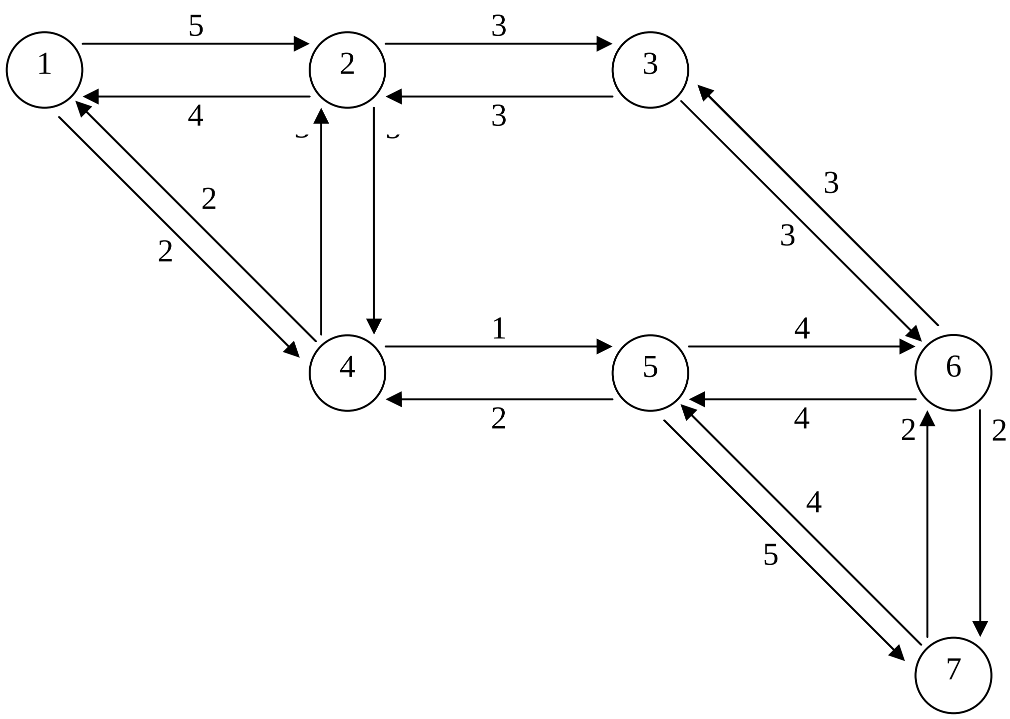


Рисунок 65 - Семиузловая сеть

Каждый узел сети, изображенной на рисунке 65, прогоняет алгоритм Дейкстры для определения наилучших путей к другим узлам и распространяет эту информацию по дереву, чей корень соответствует «домашнему узлу». Например, для узла 1 соответствующее дерево показано на рисунке 66.

Реально, для передачи сообщений любому узлу требуется таблица, в которой указаны ближайшие соседи для передачи сообщения тому или иному адресату1. Такая таблица, относящаяся к узлу 1, приведена ниже (таблица 48).

Таблица 48 – Таблица узла 1

Адресат	2	3	4	5	6	7
Следующий узел	2	2	4	4	4	4

Пример 91

Используя алгоритм Дейкстры, найдите кратчайшие пути от узла 2 к любому другому по сети, о которой шла речь выше. После этого изобразите дерево кратчайших путей и заполните таблицу маршрутов для узла 2.

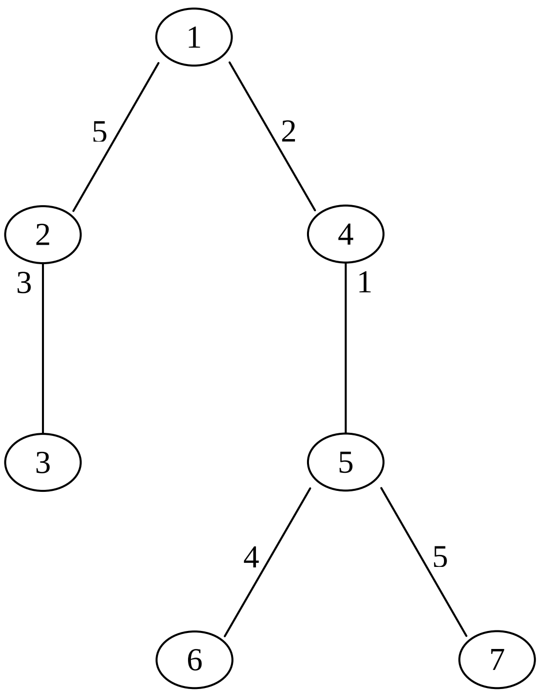


Рисунок 66 - Дерево передачи информации узла 1

Решение:

Смотри таблицу 49.

Таблица 49 – Таблица расстояний

Отмеченные вершины	Расстояние до вершины	Неотмеченные вершины
2		1, 3, 4, 5, 6, 7
3		1, 4, 5, 6, 7
4		1, 5, 6, 7
5		1, 6, 7
1		6, 7
6		7
7		

Кроме того, алгоритм Дейкстры определяет кратчайшие пути от вершины 2 к любой другой. Например, PATHTO(6) = 2, 3, 6.

Дерево кратчайших путей и таблица маршрутов показаны на рисунке 67 и таблице 50 соответственно.

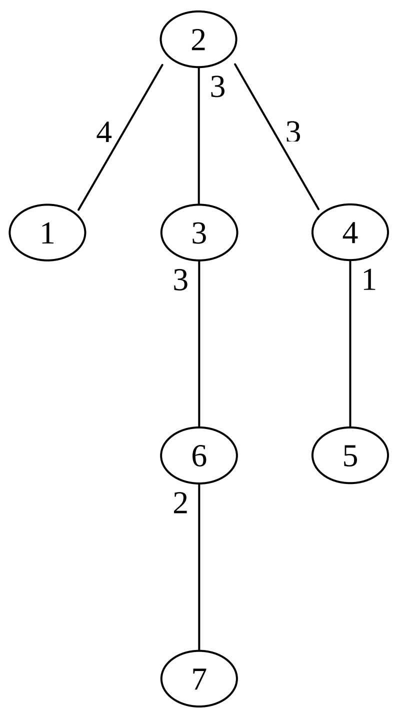


Рисунок 67 – Дерево кратчайших путей

Таблица 50 – Таблица маршрутов

Адресат	1	3	4	5	6	7
Следующий узел	1	3	4	4	3	3

Пример 92

Предположим, что временная задержка передачи от узла 2 к узлу 4 уменьшилась с 3 до 1. Как изменятся при этом дерево кратчайших путей и таблица маршрутов для узла 2?

Решение : перезапустим алгоритм Дейкстры, установив временную задержку на линии 2 4, равную 1. Это изменение дает нам несколько новых деревьев кратчайших путей. Одно из них приведено на рисунке 68.

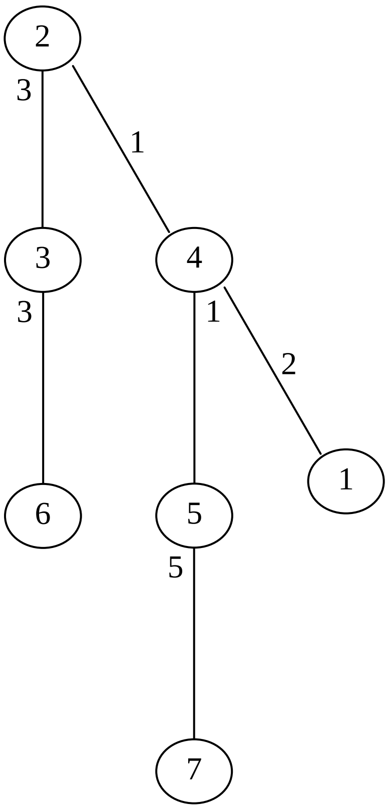


Рисунок 68 – Дерево кратчпйших путей

Соответствующая таблица маршрутов – таблица 51

Таблица 51 – Таблица маршрутов

Адресат	1	3	4	5	6	7
Следующий узел	4	3	4	4	3	4

Пример 93. Какими будут дерево кратчайших путей и таблица маршрутов для узлов 1 и 2, если удалить линии между узлами 5 и 6?

Решение: поскольку линия 5 6 не задействована при передаче информации от узла 2, то его дерево кратчайших путей и таблица маршрутов, найденные в задаче 1, останутся без изменений.

Что касается узла 1, то мы можем ограничиться поиском кратчайшего пути от узла 1 к узлу 6. Алгоритм Дейкстры находит такой путь без особых затруднений: PATHTO(6) = 1, 4, 5, 7, 6.

Новое дерево кратчайших путей начерчено на рисунке 69.

Таблица 52 – соответствующая таблица маршрутов.

Таблица 52 – Таблица маршрутов

Адресат	1	3	4	5	6	7
Следующий узел	2	2	4	4	4	4

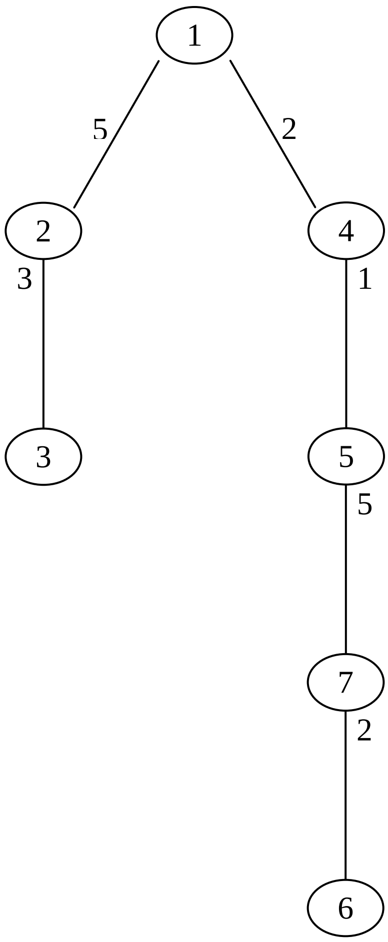


Рисунок 69 – Дерево кратчайших путей

3.11 Вопросы для самоконтроля

1) Дайте определение графа, ориентированного и неориентированного графа. Приведите примеры.

2) Определите понятие инцидентности.

3) Сформулируйте определение ориентированности и неориентированности.

4) Сформулируйте определение дуги; концевых, кратных, смежных ребер.

5) Дайте определения матрицы инцидентности и матрицы смежности

Приведите примеры.

6) Постройте полный граф, двудольный граф. Дайте определение данных понятий.

7) Нарисуйте граф и определите внешний подграф.

8) Можно ли считать, что операция расщепления вершины является в определенном смысле двойственной к операции стягивания ребра.

9) Задан неориентированный граф G. В графе удаляются вершина и два ребра. Существенна ли последовательность выполнения операций?

10) Как выглядит колода P(G) n-вершинного графа G, если все подграфы, входящие в колоду, выписать следующим образом: $G_i = G–v_i$, $i = 1,2,...,n$?

11) Верно ли, что для n-вершинного графа G и подграфов Q_i, Q_j из его колоды P(G) справедливо соотношение: $G = Q_i \cup Qj$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$?

12) Верно ли, что для n-вершинного графа G и подграфов Q_i,Q_j из его колоды справедливо соотношение: $G–v_i–v_j = (G–v_i)\cap(G–v_j)$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,n$?

13) K = {{1,2};{1,2}} - полный двухвершинный граф, Q = {{1,2,3,4};{1,2};{2,3};{3,4};{4,1}} - двухмерный куб. Верно ли, что граф R = $K\times Q$ - трехмерный куб?

14) Графы $H=H_1\cup H_2$ и Q являются подграфами полного n-вершинного графа. Выполняется ли для них соотношение $H\times Q = (H_1\cup H_2)\times Q = H_1\times Q\cup H_2\times Q$?

15) Дайте определение пути, цепи, цикла. Определите, в чем различие на примере.

16) Сформулируйте свойства цепей.

17) Дайте определение связности.

18) Дайте определение циклического и ациклического ребра.

19) Сформулируйте несколько определений дерева. Приведите пример.

20) Дайте определение остова графа G.

21) Сформулируйте правила игры двух лиц с открытой информацией.

22) Как графы применяются в игре?

23) Выигрышная и беспроигрышная стратегии, в чем их различие.

24) Разберитесь в игре НИМ. Постройте дерево для N = 20 и N = 25.

25) Сформулируйте и запишите теоремы 1 и 2.

26) Дайте определение четного графа, эйлерового графа.

27) Сформулируйте теорему Эйлера.

28) Дайте определение гамильтонову пути.

29) Чему равно цикломатическое число и для чего оно служит?

30) Дайте определение сети, полюса сети, внутренней вершины сети.

31) Сформулируйте определение потока в сети, величина потока, сечение в сети.

32) Сформулируйте теорему Форда-Фанкерсона.

33) Разберитесь с общими случаями решения задачи о переправе волка, козы и капусты на другой берег.

34) Изучите алгоритм отыскивания цепи в произвольной сети, в ориентированном и неориентированном графах.

35) Дайте определение хроматического класса графа G.

36) Дайте определение бихроматического графа.

37) Сформулируйте и докажите основные теоремы раздела.

3.12 Практические задания

Задание 1

Пусть $A = \{0,1,2,10\}$, $B = \{E_0,E_1,\dots,E_{10}\}$, где $E_0 = (0)$, $E_1 = (0,1)$, $E_2 = (0,2)$, $E_3 = (0,3)$, $E_4 = (1,4)$, $E_5 = (1,5)$, $E_6 = (1,6)$, $E_7 = (3,7)$, $E_8 = (3,8)$, $E_9 = (4,9)$, $E_{10} = (4,10)$. Построить и определить граф.

Задание 2

Для графа, показанного на рисунке 59, описать подграф, порожденный вершинами $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

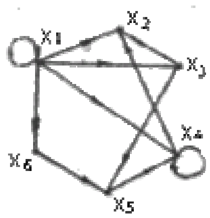


Рисунок 70 - Граф

Задание 3

Доказать, что если A - матрица инцидентности простого неориентированного графа без петель, то его матрица смежности получается из $A \cdot A^T$(mod 2) путем замены всех элементов на диагонали нулями (A^T - матрица, получаемая транспонированием матрицы A).

Задание 4

Охарактеризуйте матрицу смежности:

- полного графа на n вершинах;
- двудольного графа.

Задание 5

Задать графы G_2 - G_3 (рисунок 71) множествами их вершин и ребер. Сравнить графы G_1 - G_3.

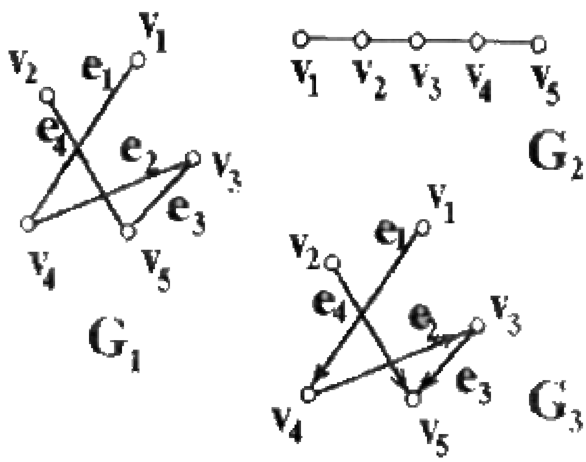


Рисунок 71 – Графы G1,G2,G3

Задание 6

Определить дополнение ┐G графа G, если:

1) G - Пятиугольник;

2) G - Треугольник.

Какой ориентированный граф канонически соответствует графу G (представить графически)?

Задание 7

Задать графы G_1 - G_3, изображенные на рисунке 2, матрицами инцидентности и смежности, а также списком ребер.

Задание 8

Выполнить генерацию матрицы смежности M неориентированного помеченного графа G, вершинам которого присвойте метки из подмножества натуральных чисел {1,2, .., n}. Вычислите матрицу смежности дополнительного графа (дополнения) G для порядка $n \geq 8$.

Задание 9

Вычислите матрицы смежности подграфов H, Q графа G(¬ G). Например:

$$H = g - v_i,\ i = 1,2,\ldots,n;$$

$$Q = G - v_i - v_j;\ i = 1,2,\ldots,n;\ j = 1,2,\ldots,n,\ i \neq j.$$

Задание 10

Выполните операцию отождествления вершин (стягивания ребра) в графе G(¬ G). Номера выбираемых для выполнения операций двух вершин согласуйте с преподавателем.

Задание 11

Выполните операцию расщепления вершины графа G(¬ G). Номер выбираемой для выполнения операции вершины согласуйте с преподавателем.

Задание 12

Выполните генерацию матриц M_1, M_2 смежности неориентированных помеченных графов G_1, G_2. Метки вершин выберите из подмножества натуральных чисел {1,2,...,n}, $n \geq 8$.

Задание 13

Задайте граф G_3, содержащий два ребра. Выполните операцию декартова произведения графов $G = G_2 \cup G_3$. i=1,2.

Задание 14

Для графов G1,G2, показанных на рисунках 72 и 73, привести примеры замкнутых и незамкнутых маршрутов, цепей и путей.

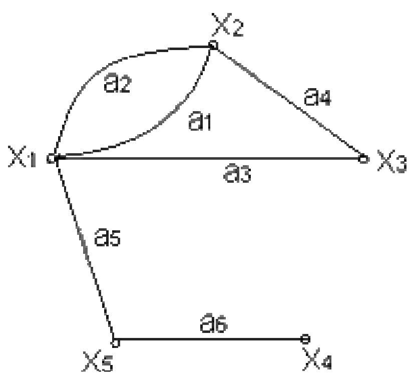


Рисунок 72- Граф G1

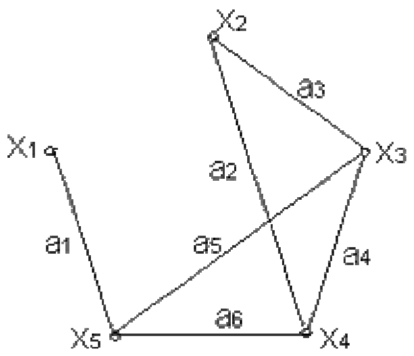


Рисунок 73 Граф G2

Задание 15

Выполните операцию объединения графов $G = G_1 \cup G_2$.

Задание 16

Для графа, представленного на рисунке 73, найти все простые циклы.

Задание 17

Для графа, показанного на рисунке 74 найти путь из вершины x_4 в вершину x_1.

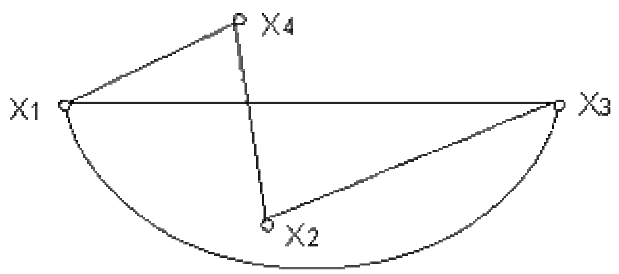
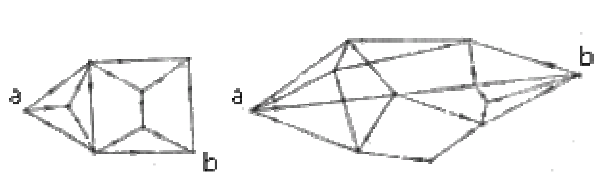


Рисунок 74 – Граф

Задание 18

Перечислить все пути между вершинами а и б в графах, показанных на рисунке 75.



а б

Рисунок 75 - Графы

Задание 19

Для показанного на рисунке 76 указать гамильтонов и негамильтонов контуры.

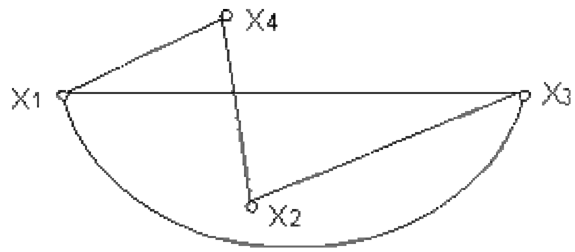


Рисунок 76- Граф

Задание 20

Выполните операцию пересечения графов $G = G_1 \cap G_2$.

Задание 21

Выполните операцию кольцевой суммы графов $G = G_1 \oplus G_2$.

Задание 22

В ориентированном графе, показанном на рисунке 77, найти контуры длины 3, 4, 5, гамильтонов контур.

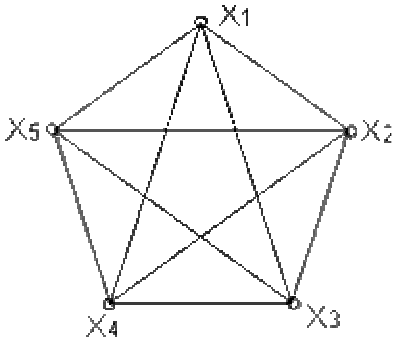


Рисунок 77 - Граф

Задание 23

Для выполнения заданий необходимо определить и записать в таблице 53 значеня булевых переменных a1 - a48 (нули и единицы), исходя из следующих параметров:

Н - порядковый номер студента в списке группы;

Ф - число букв в фамилии студента.

Впишите свои параметры:

Н=   , Ф=

Значения a_1 - a_{48} выбираются из таблицы К2 по следующему правилу:

a_1 - a_6 - 6 чисел подряд, начиная с позиции Н;

a_7 - a_{16} - 10 чисел подряд, начиная с позиции Ф + 20;

a_{17} - a_{26} - 10 чисел подряд, начиная с позиции Н + Ф + 20;

a_{27} - a_{36} - 10 чисел подряд, начиная с позиции Н + 2Ф +40

a_{37} - a_{48} - 12 чисел подряд, начиная с позицииН + 3Ф +60.

Таблица 53 – Значение булевых переменных

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
a_{17}	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}
a_{33}	a_{34}	a_{35}	a_{36}	a_{37}	a_{38}	a_{39}	a_{40}	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}	a_{45}	a_{46}	a_{47}	a_{48}

Таблица 54 – Значения булевых переменных при заданных условиях

	1 5	10	15	20
	0 1 0 0 0	1 0 0 1 1	0 1 0 0 1	0 0 1 0 0
20+	0 0 1 0 0	1 0 1 1 1	1 0 0 1 1	0 0 0 1 1
40+	0 0 0 0 0	1 0 0 0 0	0 0 1 1 1	0 0 0 1 0
60+	0 1 0 0 1	1 0 1 0 1	1 0 1 1 0	0 1 1 0 1
80+	0 1 0 0 0	0 0 1 1 0	0 1 1 1 0	1 1 1 0 1
100+	0 1 1 1 0	0 0 1 0 0	1 1 0 0 1	1 0 1 0 0
120+	1 0 1 0 0	1 0 1 1 0	1 0 0 0 1	1 0 0 0 1

1) Символами a_1 - a_{28} заполнить квадратную матрицу 7х7 (диагональные и наддиагональные элементы). Продолжить полученную треугольную матрицу симметричным образом (таблица 55).

Таблица 55

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}
		a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}	a_{18}
			a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}
				a_{23}	a_{24}	a_{25}
					a_{26}	a_{27}
						a_{28}

а) Рассматривая полученную матрицу как матрицу соседства вершин неориентированного графа G с вершинами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, построить изображение графа. (Рекомендация: расположите вершины графа в вершинах правильного семиугольника).

б) Построить матрицу инциденций графа G.

в) Удалив петли (если они есть), найти цикломатическое число полученного графа.

2) Символами a_{11} - a_{38} заполнить наддиагональные элементы квадратной матрицы 8x8(диагональные элементы - нулевые). Продолжить полученную треугольную матрицу симметричным образом.

Таблица 56 – Треугольная матрица

0	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}	a_{17}
	0	a_{18}	a_{19}	a_{20}	a_{21}	a_{22}	a_{23}
		0	a_{24}	a_{25}	a_{26}	a_{27}	a_{28}
			0	a_{29}	a_{30}	a_{31}	a_{32}
				0	a_{33}	a_{34}	a_{35}
					0	a_{36}	a_{37}
						0	a_{38}
							0

а) Рассматривая полученную матрицу как матрицу соседства вершин неориентированного графа G с вершинами 1 - 8, построить изображение графа G.

б) Определить цикломатическое число графа G.

в) Выделить какой-либо остов графа G.

г) Построить базис циклов графа G.

Задание 24

Постройте самостоятельно остов и базис циклов неориентированных графов, заданных списком ребер:

1){(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,4),(3,4),(3,6),(4,7),(5,6),(6,7)}

2){(1,2),(1,4),(1,5),(1,7),(2,3),(2,4),(3,4),(3,5),(3,7),(4,5),(5,7)}

3){(1,2),(1,3),(1,5),(1,6),(2,3),(2,5),(3,4),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6)}

4){(1,2),(1,4),(1,5),(1,7),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,7),(4,5),(5,6),(5,7)}

5){(1,2),(1,4),(1,6),(1,7),(2,5),(2,6),(2,7),(3,4),(3,5),(3,7),(4,5),(5,6),(6,7)}

Определите цикломатическое число графа.

Задание 25

Пусть в сети G(V,E) помимо пропускной способности дуг заданы пропускные способности узлов, то есть, задана нагрузка на вершины D:V->$\mathbb{R}^+$ Для допустимого потока сумма потоков через входящие дуги не должна превышать пропускной способности вершины

$$\forall v \in V \sum_{\{u|(u,v)\in E\}} f(u,v) \le D(v)$$

Найти максимальный поток в такой сети.

Задание 26

Постройте самостоятельно различные представления графов, заданных списком дуг:

1){(1,6),(2,1),(2,3),(3,1),(3,3),(3,3),(3,4),(3,6),(5,1),(5,6),(5,6),(5,6),(7,4),(7,6)};

2) {(1,2),(1,4),(1,5),(2,4),(3,2),(3,4),(3,4),(4,2),(4,5),(5,5),(5,7),(7,1)};

3){(1,2),(1,6),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,6),(4,3),(4,3),(4,5),(4,6),(5,1),(5,2),(5,4),(5,6)};

4) {(1,4),(2,1),(2,5),(2,6),(3,4),(3,7),(4,1),(5,3),(5,4),(5,6),(7,1),(7,5)};

5){(2,5),(2,1),(2,6),(2,7),(3,5),(3,5),(4,1),(4,3),(4,5),(6,1),(6,2),(6,5),(6,7),(7,3)}.

3. 13 Примеры решения задач

1) Ориентированный граф G с множеством вершин V = {1,2,3,4,5,6,7} задан списком дуг

E = {(1,4)(1,6)(2,1)(2,2)(2,6)(2,6)(3,2)(3,4)(3,6)(4,6),
(5,2)(5,4)(5,4)(5,5)(6,2)(6,5)(7,1)(7,6)}.

Построить реализацию графа G.

Построить матрицу инциденций графа G.

Построить матрицу соседства вершин графа G.

Для соотнесенного неориентированного графа G построить матрицу соседства вершин.

Решение:

Заполните таблицу 57, подобрав алгоритму конкретное содержание.

Таблица 57 – Алгоритм решения задачи

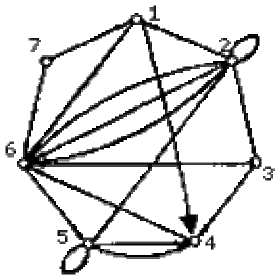
No п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Построить реализацию графа G	Изображения вершин 1, 2, ..., 7 удобно поместить (приблизительно) в вершинах правильного 7-угольника. Соединить пары вершин в соответствии со списком дуг, избегая пересечения трех ребер в одной точке. Обозначить стрелками ориентацию дуг. 
2	Построить матрицу инциденций графа G	Число ребер графа G - 18. В прямоугольной матрице A = $\|\|a_{i,j}\|\|$ размерности 7×18 последовательно заполнять столбцы в соответствии со списком дуг: каждой дуге e_k = (i,j), где i ≠ j соответствуют элементы $a_{ik} = -1$ u $a_{jk} = +1$. Петле e_k = (i,j) соответствует элемент $a_{jk} = 2$
3	Построить матрицу соседства вершин графа G	В квадратной матрице B = $\|\|b_{ij}\|\|$ размерности 7×7 каждой дуге e_k = (i,j) сооветствует элемент b_{ij} = 1, кроме кратных дуг, которым соответствует элемент, равный кратности дуги (i,j)
4	Для соотнесенного неориентированного графа G построить матрицу соседства вершин	Квадратная матрица C = $\|\|c_{ij}\|\|$ размерности 7×7 строится из предыдущей матрицы B следующим образом: $c_{ij} = c_{ji} = b_{ij}+b_{ji}$ для i ≠ j; c_{ii} = b_{ii}.

Таблица 58 – Таблица построения графа

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	-1	-1	1														1	
2			-1	2	-1	-1	1				1				1			
3							-1	-1	-1									
4	1							1		-1		1	1					
5											-1	-1	-1	2		1		
6		1			1	1			1	1					-1	-1		1
7																	-1	-1

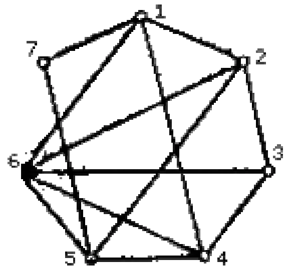
2) Неориентированный граф G с множеством вершин V = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7} задан списком ребер E= {(1, 2), (1, 4), (1, 6), (1, 7), (2, 3), (2, 5), (2, 6), (3,4), (3,6), (4, 5), (4, 6), (5, 6), (5, 7)}.

- построить реализацию графа G.
- найти цикломатическое число графа G.
- выбрать остов графа G.
- построить базис циклов графа G.

Решение:

Заполните таблицу 59, подобрав алгоритму конкретное содержание

Таблица 59 – Алгоритм решения задачи

No п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания заданному алгоритму
1	Построить реализацию графа G	Процесс построения реализации графа описан в тренинге умения 1 
2	Найти цикломатическое число графа G	Цикломатическое число, равное размерности базиса циклов графа, определяется формулой ν = p-b+k, где p - число ребер, b - число вершин, k - число компонент связности графа p = 13, b = 7, k = 1 (нетрудно убедиться, что граф G - связный). Следовательно ν = 13–7+1.
3	Выбрать	Поскольку число вершин графа G равно 7, в лю-

	остов графа G	бом его остове должно быть 6 ребер. При заданном упорядочении вершин 1-7, начиная с вершины 1, последовательно добавляем ребра, присоединяющие к строящемуся дереву новую вершину: (1,2),(1,4),(1,6),(1,7),(2,3),(2,5)
4	Построить базис циклов графа G	1. Составим список хорд относительно построенного остова (все остальные ребра графа): (2,6),(3,4),(3,6),(4,5),(4,6),(5,6),(5,7). Число хорд должно быть равно цикломатическому числу графа, т.е. 7. 2. Поочередно присоединяя к остову по одной хорде, выделяем элементарный цикл, состоящий из этой хорды и части ребер остова - единственной цепи, связывающей в остове концы хорды. Хорда — Добавляемая цель *(2,6) — (6,1),(1,2) (3,4) — (4,1),(1,2),(2,3) (3,6) — (6,1),(2,1),(2,3) *(4,5) — (5,2),(2,1),(1,4) (4,6) — (6,1),(1,4) *(5,6) — (6,1),(1,2),(2,5) (5,7) — (7,1),(1,2),(2,5) 3. Выразим в построенном базисе элементарный цикл C=(6,2,1,4,5,6). Он получается сложением по модулю 2 тех базисных циклов, которые содержат хорды, принадлежащие C (Они отмечены звездочкой в предыдущей таблице: (6,2),(4,5),(5,6)) Проверьте, что ребра цикла C содержатся в совокупности базисных циклов нечетное число раз (в частности, все хорды - ровно по одному разу), а ребра, не принадлежащие C (например, ребро (5,2)), - четное.

3) На рисунке 78 изображены графы G_1 - G_{12} с четырьмя вершинами в каждом. Сравнить графы.

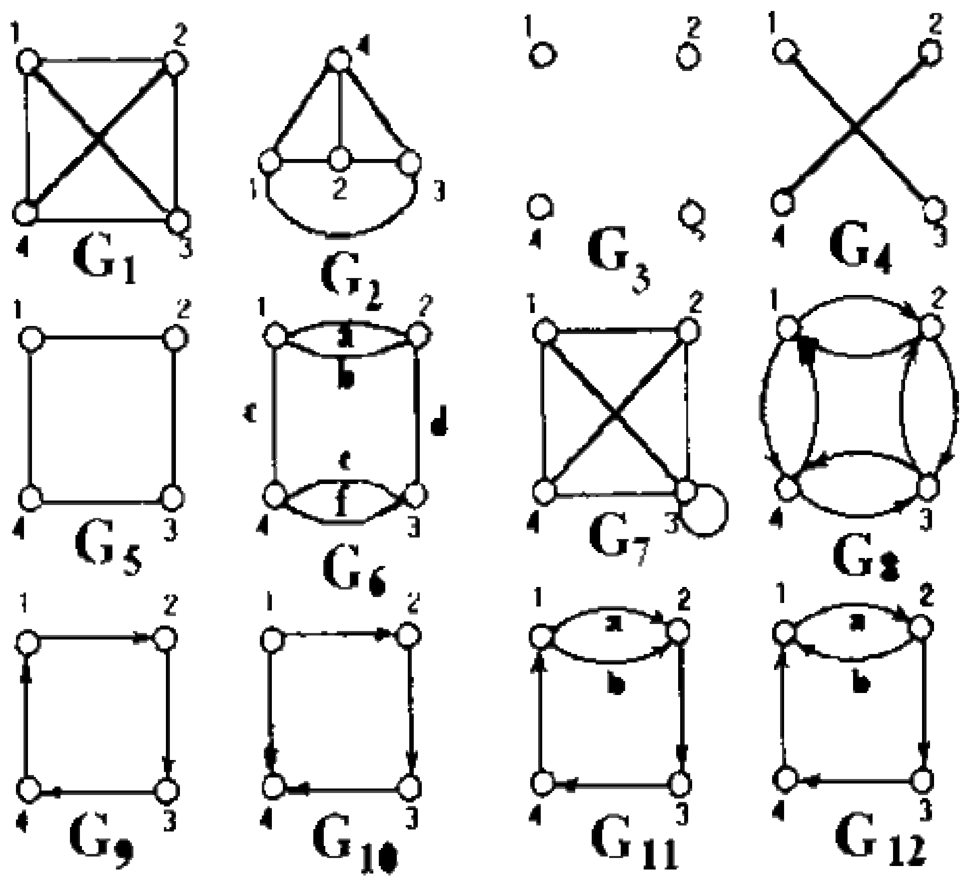


Рисунок 78 - Графы G_1 - G_{12}

Решение:

Результаты сравнения графов таковы: G_1 - G_7 - неориентированные; G_8 - G_{12} - ориентмированные; G_1, G_2 - полные, причем $G_1 = G_2$; G_7 - не является полным, так как хотя каждая пара вершин и соединена ребром, но имеется одна петля. (Иногда полным называют граф с петлями во всех вершинах, каждая пара которых соединена ребром. Граф G_7 не отвечает и этому определению.) G_3 - все вершины этого графа являются изолированными (граф с пустым множеством ребер, т.е. $E = \varnothing$); G_4 и G_5 являются дополнением друг другу: $G_4 = \neg G_5$ и $G_5 = G_4$; G_6 - мультиграф, так как содержит кратные ребра a и b, а также e и f; G_8 - ориентированный, канонически соответствующий неориентированному графу G; G_9 и G_{10} не являются равными, так как имеют отличающиеся ребра: (4,1) - в G_9 и (1,4) - в G_{10}; G_{11} - ориентированный мультиграф: ребра a и b - кратные, тогда как G_{12} мультиграфом не является, поскольку в нем ребра a и b различно ориентированы.

4) Задать граф G_1, представленный на рисунке 79, через множества вершин V_1 и ребер E_1.

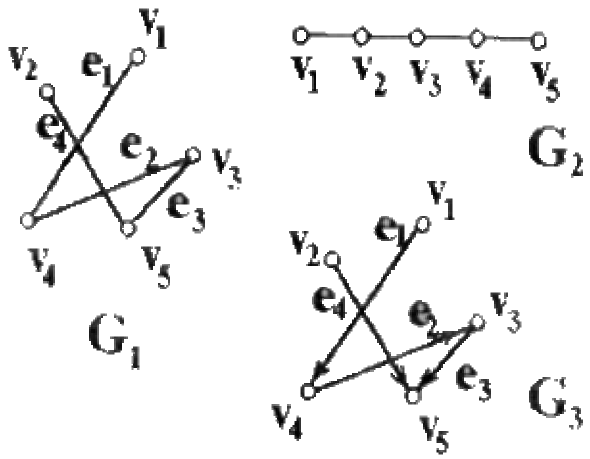


Рисунок 79 - Граф

Решение:

Граф G_1 может быть полностью определен:

- двумя множествами - поименованных вершин $V_1 = \{v_1,v_2,v_3,v_4,v_5\}$ и поименованных ребер $E_1 = \{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5\}$ (в строгом смысле требуется установление отношения инцидентности ребер соответствующим вершинам);

- множеством ребер, каждое из которых представлено парой своих концевых вершин: $E_1 = \{(v_1,v_4),(v_4,v_3),(v_3,v_5),(v_5,v_2)\}$.

Порядок указания вершин при описании ребра здесь безразличен, так как все ребра в графе G неориентированные.

5) Задать матрицами инцидентности и смежности, а также списком ребер графы G_1, G_3 (рисунок 80)

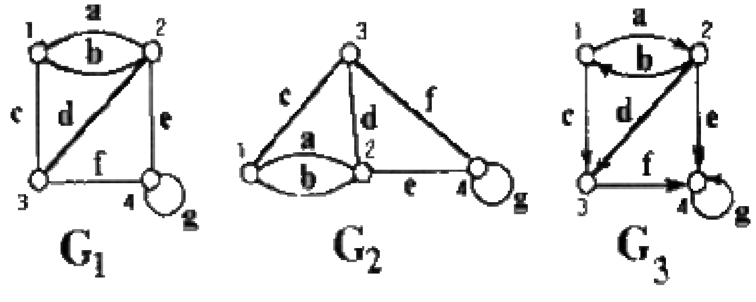


Рисунок 80 – Графы G_1, G_2, G_3

Решение:

Матрицы инцидентности графов G_1 и G_3 приведены в таблице 60. В матрице инцидентности в каждом столбце только два элемента, отличных от 0 (или один, если ребро - петля). Список ребер является более компактным опиманием графа. Список ребер орграфа G_3 приведен в таблице 62, для неориентированного графа G_1 он аналогичен, однако последовательность указания вершин здесь безразлична. Матрицы смежности графов G_1, G_3 даны в таблице 61.

Таблица 60 – Матрица гарфа

G_1	a	b	c	d	e	f	g		G_3	a	b	c	d	e	f	g
1	1	1	1	0	0	0	0		1	-1	1	-1	0	0	0	0
2	1	1	0	1	1	0	0		2	1	-1	0	-1	-1	0	0
3	0	0	1	1	0	1	0		3	0	0	1	1	0	-1	0
4	0	0	0	0	1	1	1		4	0	0	0	0	1	1	2

Таблица 61 – Матрица граф

G_1	1	2	3	4		G_3	1	2	3	4
1	0	2	1	0		1	0	1	1	0
2	2	0	1	1		2	1	0	1	1
3	1	1	0	1		3	0	0	0	1
4	0	1	1	1		4	0	0	0	1

Таблица 62 – Матрица граф

Ребро	Вершины
a	1 2
b	2 1
c	1 3
d	2 3
e	2 4
f	3 4
g	4 4

3. 14 Лабораторные работы

Лабораторная работа 7

Задание: Составить алгоритм и написать программу, осуществляющую генерацию матрицы смежности M(G) неориентированного графа G порядка $n \geq 8$ и матрицу инцидентности.

Определить диаметр графа, используя матрицу смежности и алгоритм построения графа и радиус.

Определить подмножество периферийных и центральных вершин графа, используя матрицу смежности.

Определить список степеней вершин графа, изолированные, концевые и доминирующие вершины.

Лабораторная работа 8

Задание: Составить алгоритм и написать программу, выполняющую генерацию матриц M_1 и M_2 смежности M_1, M_2, неориентированных помеченных графов G_1, G_2.

Метки вершин выбрать из подмножества натуральных чисел $\{1,2,...,n\}$, $n \geq 8$.

Выполнить операцию объединения графов $G = G_1 \cup G_2$.

Выполнить операцию пересечения графов $G = G_1 \cap G_2$.

Выполнить операцию кольцевой суммы графов $G = G_1 \oplus G_2$.

Задать граф G_3, содержащий два ребра.

Выполнить операцию декартова произведения графов.

Лабораторная работа 9

Задание: Составить алгоритм и написать программу генерации матрицы смежности неориентированного помеченного графа G, $n \geq 8$. Определить вершинную и реберную связности графа. Осуществить генерацию матрицы смежности ориентированного графа. Определить, является ли орграф R связным, односторонне связным, слабосвязным.

Лабораторная работа 10

Задание: Составить алгоритм и написать программу нахождения эйлеровой цепи в графе.

3. 15 Тест для самоконтроля

1) Как называется вершина, не инцидентная ни одному ребру?

а) изолированная;

б) неизолированная;

в) смежная.

2) Как называются ребра, которым поставлена в соответствие одна и та же пара вершин?

а) смежные;

б) кратные;

в) концевые.

3) Какая из матриц - смежности или инцидентности - является симметричной?

а) смежности;

б) инцидентности.

4) Сколько ребер содержит полный неориентированный граф с b вершинами?

а) $\frac{b}{2}$;

б) $\frac{b\cdot(b-1)}{3}$;

в) $\frac{b\cdot(b+1)}{2}$;

г) $\frac{b\cdot(b-1)}{2}$.

5) Сколько вершин и ребер содержит полный двухдольный граф $K_{m,n}$, где $m = |V_1|$, $n = |V_2|$?

а) (m–n) вершин, (m·n) ребер;

б) (2m–n) вершин, (m+n) ребер;

в) (m+n) вершин, (m·n) ребер;

г) (m·n) вершин, (m+n) ребер.

6) Можно ли утверждать, что всякий путь является цепью и обратно?

а) да;

б) нет;

в) прямая теорема - да, обратная - нет;

г) прямая теорема - нет, Обратная - да.

7) Можно ли элементарные путь, цепь, контур, цикл считать просто некоторым подграфом графа G?

а) да;

б) нет.

8) Верно ли утверждение, что простая, но не элементарная цепь содержит элементарный цикл?

а) да;

б) нет.

9) Граф называется связным, если он имеет …

а) хотя бы одну компоненту связности;

б) одну компоненту связности;

в) несколько компонент связности.

10) Чем является V_1,V_2,V_3,V_4,V_5?

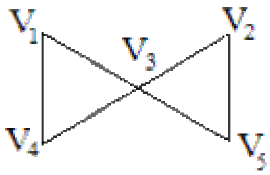


Рисунок 81 - Граф

а) цепь;

б) цикл;

в) простая цепь;

г) простой цикл.

11) Верно ли, что при удалении из связного графа циклического ребра граф остается связным?

а) да;

б) нет.

12) Верно ли, что при удалении из связного графа ациклического ребра граф становится несвязным?

а) да;

б) нет, связным.

13) Деревом называется граф ...

а) без циклов;

б) без цепей;

в) без простых циклов.

14) Верно ли, что деревом называется граф, любые две вершины которого связаны единственной элементарной цепью.

а) да;

б) нет.

15) Что входит в остов?

а) все циклические ребра;

б) некоторые циклические ребра и некоторые ациклические ребра;

в) все ациклические ребра.

16) В игре НИМ для N = 5, если стратегия игроков была такова: А - 1, В - 2, то сколько спичек нужно взять А, чтобы выиграть?.

а) одну;

б) две.

17) В игре НИМ для N=5, если стратегия была такова: А - 1, В - 1, то какова дальнейшая стратегия игрока А, чтобы выиграть?.

а) А - 2;

б) А - 1;

в) А - 3.

18) Верно ли, что в четном графе каждое ребро циклическое?

а) да;

б) нет.

19) Утверждение: Если конечный связный граф четный, то он является эйлеровым. Верно ли обратное утверждение?

а) да;

б) нет.

20) Как называется элементарный путь, проходящий через все вершины графа?

а) цепью;

б) гамильтовым;

в) контуром.

21) Чему равно цикломатическое число, если р - число ребер, b - число вершин, k - число конъюнкций связности?

а) $\nu = p+b-k$;

б) $\nu = p-b+k$;

в) $\nu = k-p+b$;

г) $\nu = b-p-b$.

22) Как изменится цикломатическое число, если граф связен?

а) $\nu = p+b$;

б) $\nu = p-b+1$;

в) $\nu = 1-p+b$;

г) $\nu = p-b$.

23) (k,l)-полюсником называется сеть с ... полюсами, разбитыми на два класса: k входных и l выходных полюсов.

а) $k+l$;

б) $k-l$;

в) $2k+l$;

г) $2(k-l)$.

24) Какое соединение изображено на рисунке?

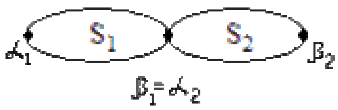


Рисунок 82- Сеть с двумя полюсами

а) последовательное;

б) параллельное.

25) Сечением в сети называется множество ребер, при удалении которого сеть становится…

а) связной;

б) несвязной, причем полосы попадают в разные компоненты связности.

26) Определите простое сечение на рисунке:

а) {α,g,h,i};

б) {b,c,e,g,h};

в) {α,c,h,i}.

4. Итоговый тест

1 Множества и их спецификация. Диаграммы Эйлера-Венна

1.1 Выбор одного из многих:

Какую мощность имеет объединение конечного числа счетных множеств?

- оно конечное
- оно счетное
- оно континуальное

1.2 Выбор одного из многих:

Чему равна мощность множества {кр., зел., син., фиол.}?

- 2
- кр.
- фиол.
- **4**

1.3 Выбор одного из многих:

Какую мощность имеет множество действительных чисел R?

- оно счетное
- оно конечное
- оно континуальное

1.4 Выбор одного из многих:

Какое множество является декартовым произведением множеств {a,b} и {c,k}?

- {a,b,c,k}
- {(a,c),(a,k),(b,c),(b,k)}
- {(a,c),(b,k)}
- {(a,b),(c,k)}

1.5 Выбор одного из многих:

Какое из множеств A = {1,2,4,7}, B = {3,4,5}, D = {5,7,2,6,1} имеет большую мощность?

- A
- D

- B

1.6 Выбор одного из многих:

Какова мощность множества (B x B), где B = {2,3}?

- 4
- 8
- 16

1.7 Ответ текстом:

Множество положительных рациональных чисел является ___________________

1.8 Выбор одного из многих:

Укажите разность множеств {a,b,7,1,4} и {1,f,7,5,3}:

- {a,b,4}
- {a,b,7,1,4}
- {b,7,5,3}
- {b,4,3,a}

1.9 Выбор одного из многих:

Какова мощность множества действительных чисел R?

- конечная
- континуальная
- счетная

1.10 Выбор одного из многих:

Укажите число всех подмножеств множества {1,5,8,9}:

- 8
- 16
- 128
- 64

2 Отношения. Свойства отношений

2.1 Выбор одного из многих:

Какое отношение называется рефлексивным?

- если для любого элемента a имеет место a R a

- если из a R b и b R c следует a R c
- если из a R b следует b R a

2.2 Выбор одного из многих:

Как называется бинарное отношение, являющееся рефлексивным, антисимметричным и транзитивным?

- бинарным отношением
- отношением строгого порядка
- отношением эквивалентности
- отношением нестрогого порядка

2.3 Ответ текстом:

Бинарное отношение, обладающее свойством при любом a: a R a, называется ________________

2.4 Выбор одного из многих:

Выберите верное утверждение:

- ни одно антитождественное отношение не является рефлексивным
- не всякое рефлексивное отношение является тождественным
- любое асимметричное отношение не является рефлексивным
- любое транзитивное отношение является связным
- всякое симметричное отношение является транзитивным

2.5 Выбор одного из многих:

Какое отношение называется симметричным?

- если для любого элемента a имеет место a R a
- если из a R b и b R a следует a R c
- если из a R b следует b R a

2.6 Выбор одного из многих:

Укажите образы элемента k в соответствии {(a,b),(k,c),(f,b),(g,d),(k,d)}:

- b,c,d
- c,d
- (k,c),(k,d)
- (a,b,c,d,f,g,k)

2.7 Выбор одного из многих:

Что не является свойством взаимно однозначного соответствия?

- функциональность
- сюръективность
- оно всюду определенно
- ассоциативность

2.8 Выбор одного из многих:

Соответствием между множествами A и B является?

- разность множеств A и B
- объединение множеств A и B
- подмножество множества (A x B)
- пересечение множеств A и B

2.9 Выбор нескольких из многих:

Свойством транзитивности обладает бинарное отношение

- «быть перпендикулярным»
- «иметь разный рост»
- «быть отцом»
- «быть параллельным»

2.10 Выбор одного из многих:

Пусть R – отношение на множестве M, $R \subseteq M \times M$. Укажите свойство, соответствующее отношению R, если R – симметрично?

- a R b и b R a влекут a = b
- если a R b и b R c влекут a R c
- ни для какого $a \in M$ не выполняется a R a
- a R b влечет b R a

3 Классы разбиения. Отношения эквивалентности и порядка

3.1 Выбор одного из многих:

Какое свойство не определяет отношение эквивалентности?

- рефлексивность
- транзитивность
- симметричность
- взаимооднозначность

3.2 Выбор одного из многих:

Как называется свойство $x \vee \bar{x}$ для логической переменной x?

- закон де Моргана
- исключенного третьего
- закон «противоречия»
- свойство идемпотентности

3.3 Выбор одного из многих:

Каким свойством не обладает отношение эквивалентности?

- рефлексивность
- транзитивность
- симметричность
- антисимметричность

3.4 Выбор одного из многих:

Каким свойством отличаются отношения строгого и нестрогого порядка?

- транзитивность
- антисимметричность
- рефлексивность
- симметричность

3.5 Выбор одного из многих:

Что такое индекс разбиения?

- мощность системы классов эквивалентности
- мощность счетного множества
- мощность системы подмножеств континуального множества
- мощность системы подмножеств счетного множества

3.6 Выбор одного из многих:

Является ли отношение «жить в одном городе», заданное на множестве людей, эквивалентным?

- да
- нет
- недостаточно условий

3.7 Выбор одного из многих:

Какими свойствами обладает отношение эквивалентности?
- антирефлексивность, антисимметричность, транзитивность
- рефлексивность, не симметричность, не транзитивность
- рефлективность, симметричность, транзитивность
- антирефлексивность, симметричность, не транзитивность

3.8 Выбор нескольких из многих:
Какие отношения называют отношениями порядка?
- отношение нестрогого порядка
- отношение эквивалентности
- отношение строгого порядка
- отношение порядка степени

3.9 Выбор одного из многих:
Укажите условие, при котором выполняется: элементы $a,b \in M$ сравнимы по отношению порядка?
- если a = b
- если выполняется a R a и b R b
- если a $\approx$ b
- если выполняется a R b и b R a

3.10 Выбор нескольких из многих:
Каким может быть множество М, на котором задано отношение порядка?
- полностью упорядоченным множеством
- синхронно упорядоченным множеством
- частично упорядоченным множеством
- асинхронно упорядоченным множеством

4 Функци. Отображения. Операции

4.1 Выбор одного из многих:
Как называется отношение, которое является инъективным и сюрьективным?
- биекция
- всюду определенное
- функциональное

4.2 Выбор нескольких из многих:

Каким способом может быть задано соответствие?

- матричным
- теоретическим
- графическим
- высказывательным
- аналитическим

4.3 Выбор одного из многих:

Пусть M = {a,b,c}, R_1 = {(a,b),(b,c),(c,a)}. Какими свойствами обладает отношение R_1?

- рефлексивность
- антирефлексивность
- симметричность

4.4 Выбор одного из многих:

Пусть M = {a,b,c}, R_2 = {(a,a),(a,b),(b,b),(a,c),(b,c),(c,c)}. Каким свойством обладает отношение R_2?

- транзитивность
- антирефлексивность
- симметричность

4.5 Выбор одного из многих:

Пусть M = {a,b,c}, R_3 = {(a,a,(a,b),(b,b),(c,c)}. Каким свойством обладает отношение R_4?

- антирефлексивность
- симметричность
- антисимметричность
- транзитивность

4.6 Выбор одного из многих:

Пусть M = {a,b,c}, R_4 = {(a,a),(a,b),(b,a),(a,c),(c,a))}. Каким свойством обладает отношение R_4?

- рефлексивность
- антирефлексивность
- симметричность

- антисимметричность

4.7 Выбор одного из многих:

Определите бином множества М = {1,2,3}:

- 3
- 8
- 6
- 16

4.8 Выбор одного из многих:

Укажите число наборов переменных для логической функции 4-х переменных:

- 2
- 4
- 8
- 16

4.9 Выбор одного из многих:

Укажите пересечение множеств {1,2,7,3,8}, {1,3,8,9} и {12,5,3,4,8}:

- {3,8}
- {8,3,5}
- {3}
- {2,7,8,12}

4.10 Выбор одного из многих:

Укажите число наборов переменных для логической функции 2-х переменных:

- 2
- 4
- 8
- 16

5 Переключательные функции, теорема о функциональной полноте

5.1 Выбор одного из многих:

Чему равна импликация высказываний P и Q, если P = 0, Q = 0?

- 1
- 0

5.2 Выбор нескольких из многих:

Какие булевы функции образуют функционально полный базис?

- константа 0, константа 1
- дизъюнкция, конъюнкция
- дизъюнкция, инверсия
- конъюнкция, инверсия
- дизъюнкция, конъюнкция, отрицание

5.3 Выбор одного из многих:

Чему равна импликация высказываний P и Q, если P = 1, Q = 1?

- 0
- 1

5.4 Выбор одного из многих:

Как называется свойство $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ для логических переменных x, y, z?

- дистрибутивность
- коммутативность
- ассоциативность

5.5 Выбор одного из многих:

Как называется свойство $x \cdot y = y \cdot x$ для логических переменных x, y?

- коммутативность
- ассоциативность
- дистрибутивность

5.6 Выбор одного из многих:

Чему равна конъюнкция высказываний P и Q, если P = 1, Q = 0?

- 0
- 1

5.7 Выбор одного из многих:

Какие операции двойственны?

- конъюнкция и отрицание

- конъюнкция и дизъюнкция
- импликация и эквивалентность
- дизъюнкция и импликация

5.8 Выбор одного из многих:

Как называется свойство x V (y·z) = (x V y)·(x V z) для логических переменных x, y, z?

- дистрибутивность
- коммутативность
- ассоциативность

5.9 Выбор одного из многих:

Что не является булевой операцией?

- отрицание
- конъюнкция
- дизъюнкция
- импликация

5.10 Выбор одного из многих:

Вычислить для логических переменных x и y: (x·y) V (x·(–y)), если x = 1?

- 0
- 1

6 Минимизация булевых функций. Штрих Шеффера

6.1 Ответ текстом:

Карты Карно используются для ____________________

6.2 Выбор одного из нескольких:

При минимизации булевых функций могут использоваться?

- метод Квайна – Мак-Класски
- метод Блейка – Порецкого
- метод группировки
- метод неопределенных коэффициентов
- метод карт Карно

6.3 Выбор нескольких из многих:

Какие методы используются при минимизации булевых функций представленных в виде ДНФ?

- тождеств алгебры логики
- законов идемпотентности
- операций склеивания
- законов Де Моргана
- операций поглощения

6.4 Выбор одного из многих:

Является ли СДНФ X→Y = ┐ X U Y?

- да
- нет

6.5 Выбор одного из многих:

Минимизируйте функцию $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (1,3,5,7,11,13,15) = 1$:

- $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = \neg x_1x_4+x_3x_4+x_2x_4$
- $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\neg x_4+\neg x_3x_4+x_2\neg x_4$
- $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1\neg x_4+\neg x_3x_4+x_2\neg x_4$
- $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1+\neg x_2x_3+x_4$

6.6 Выбор одного из многих:

Минимизируйте функцию $F=\neg (ab+\neg a\neg b)+\neg a\neg b$:

- $F = \neg a+\neg b$
- $F = a+b$
- $F = \neg ab+a\neg b+\neg a\neg b$
- $F = ab+\neg a\neg b$

6.7 Выбор одного из многих:

Как называется функция, которая ложна тогда и только тогда, когда X_1 и X_2 истинны?

- сложение по модулю 2
- функция Пирса
- штрих Шеффера
- эквивалентность

6.8 Выбор одного из многих:

Как еще называется функция исключительное или?

- сложение по модулю 2

- функция Пирса
- штрих Шеффера
- импликация

6.9 Выбор нескольких из многих:

Укажите функции, которые образуют функционально полный базис?
- дизъюнкция, конъюнкция
- стрелка Пирса
- конъюнкция, инверсия
- штрих Шеффера

6.10 Выбор одного из многих:

Как называется функция, если она равна 0, если значения аргументов совпадают, и 1 – в противном случае?
- штрих Шеффера
- сумма по модулю 2
- дизъюнкция
- конъюнкция

7 Основные понятия теории графов

7.1 Выбор одного из многих:

Как называется граф, все ребра которого ациклические?
- дерево
- двудольный
- полный
- остов

7.2 Выбор одного из многих:

Дайте определение степени вершины неориентированного графа:
- количество ребер, инцидентных этой вершине
- число вершин графа
- произведение числа вершин графа на число ребер графа
- число ребер графа

7.3 Выбор одного из многих:

Что не используется для задания графа?

- матрица инцидентности
- матрица смежности
- список ребер

7.4 Выбор одного из многих:

Что называется расстоянием между вершинами графа v и w?

- минимальная длина простой цепи между вершинами v и w
- сумма степеней вершин v и w
- число вершин в маршруте, соединяющем вершины v и w
- длина маршрута, соединяющего вершины v и w

7.5 Выбор одного из многих:

По какому элементу матрицы инцидентности можно определить число вершин графа?

- число столбцов
- число положительных элементов матрицы
- число нулей матрицы

7.6 Ответ текстом:

Вершины и ребра графа G называются соседними, если они ____________

7.7 Выбор одного из многих:

Как называется граф, полученный после замены всех дуг в ориентированном графе на ребра без ориентации?

- контур
- блок
- основание
- неориентированный

7.8 Выбор одного из многих:

Укажите критерий существования гамильтонова цикла (ГЦ) в графе G:

- общий критерий существования ГЦ неизвестен
- в графе не должно быть вершин с нечетной локальной степенью
- известны только теоремы, дающие достаточные условия существования ГЦ

- в графе не должно быть перешейков
- граф должен быть связным

7.9 Выбор одного из многих:

Как называются смежные и инцидентные вершины и ребра графа?
- соседние
- связные
- простые
- смежные
- кратные

7.10 Выбор нескольких из многих:

В виде какого графа может быть задан мультиграф?
- неориентированного
- ориентированного
- бихроматического
- независимого

8 Цепи, циклы, связность

8.1 Выбор нескольких из многих:

Что можно определить с помощью матрицы расстояний?
- радиус графа
- диаметр графа
- степени вершин графа

8.2 Ответ текстом:

Гамильтоновым называется простой цикл, проходящий через ________________

8.3 Ответ текстом:

Эйлеровым циклом называется цикл, проходящий через ______________

8.4 Выбор одного из многих:

Что не требуется для определения Эйлеровости графа?
- совпадение в графе числа вершин с числом ребер

- четность степеней всех его вершин
- связность графа

8.5 Выбор одного из многих:

Что не требуется для определения Эйлеровости графа?

- совпадение в графе числа вершин с числом ребер
- четность степеней всех его вершин
- связность графа

8.6 Выбор одного из многих:

Чему равно цикломатическое число, если p – ребра, b – вершины, k – связные компоненты?

- $\nu = p - b + k$
- $\nu = p + b - k$
- $\nu = p - b + 1$
- $\nu = k - b + 1$

8.7 Выбор нескольких из многих:

Что используется для построения гамильтонова цикла в графе?

- геометрический метод
- алгебраический метод
- алгоритм Флери
- алгоритм Робертса – Флореса

8.8 Выбор одного из многих:

Как называется ориентированный граф, любые две вершины которого взаимно достижимы?

- связный
- полный
- блок
- неразделимый

8.9 Ответ текстом:

Граф называется связным, если любая пара его вершин соединена ______________

8.10 Выбор одного из многих:

Можно ли утверждать, что всякий путь является цепью и обратно?

- да
- нет
- для прямой теоремы – да, для обратной – нет
- для прямой теоремы – нет, для обратной – да

9 Двухполюсные сети, потоки в сетях

9.1 Выбор одного из многих:

Как называется граф, некоторые вершины которого выделены?
- сетью
- цепью
- циклом
- маршрутом

9.2 Выбор одного из многих:

Как называется дерево с корнями?
- однополюсной сетью
- двуполюсной сетью
- многополюсной сетью

9.3 Выбор одного из многих:

Как называются вершины, отличные от полюсов?
- внешними вершинами сети
- внутренними вершинами сети
- ориентированные вершины сети
- главными вершинами сети

9.4 Выбор одного из многих:

Выберите верное высказывание:
- ребро, инцидентное хотя бы одному полюсу, называется полюсным
- ребро, инцидентное периферийной вершине, называется полюсным
- внутренние ребра графа называются полюсными

9.5 Выбор нескольких из многих:

Какие операции можно выполнить над сетями?
- последовательное соединени

- параллельное соединение
- сложение
- декартово произведение

9.6 Ответ текстом:

Множество ребер, при удалении которого сеть становится несвязной, причем полюсы попадают в разные компоненты связности называется______________

9.7 Выбор одного из многих:

Теорема Форда-Фалкерсона гласит:

- максимальная величина потока R_{max} через сеть S равна максимальной из пропускных способностей C_{max} ее простых сечений
- максимальная величина потока R_{max} через сеть S равна минимальной из пропускных способностей C_{min} ее простых сечений
- миксимальная величина потока R_{min} через сеть S равна максимальной из пропускных способностей C_{max} ее простых сечений
- миксимальная величина потока R_{min} через сеть S равна минимальной из пропускных способностей C_{min} ее простых сечений

9.8 Выбор одного из многих:

Сечением в сети называется множество ребер, при удалении которого сеть становится

- связной
- несвязной, причем полюсы попадают в разные компоненты связности

9.9 Ответ текстом:

(K,L)-полюсником называется сеть с _______________ полюсами, разбитыми на два класса: K- входных, L- выходных.

9.10 Выбор одного из многих:

Выберите верное утверждение.

- пропускной способностью ребра называется целое неотрицательное число, поставленное в соответствии каждому ребру графа
- пропускной способностью ребра называется число, поставленное в соответствие ребрам графа

- пропускной способностью ребра называется целое число являющееся суммой ребер

Список использованных источников

1. **Акимов О. Е.** Дискретная математика / О.Е. Акимов. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
2. **Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В.** Ленинградские математические кружки: пособие для внеклассной работы / С.А. Генкин, И.В. Итенберг, Д.В. Фомин. - Киров: АСА, 1994. - 272 с.
3. **Грэхем Р.** Практический курс языка Паскаль для микроЭВМ / Р. Грэхем. - М.: Радио и связь, 1986.
4. **Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О.** Конкретная математика. Основание информатики / Р. Грэхем, Д. Кнут, О. Паташник. - М.: Мир, 1998. - 703 с.
5. **Дайитбегов Д.М., Черноусов Е.А.** Основы алгоритмизации и алгоритмические языки / Д.М. Дайитбегов, Е.А. Черноусов. - М.: Финансы и статистика, 2001.
6. **Жолков С.Ю.** Математика и информатика для гуманитариев: учебник / С.Ю. Жолков. - М.: Гардарики, 2002.
7. **Иванов Б.Н.** Дискретная математика / Б.Н. Иванов. - М.: Лаборатория базовых знаний, 2001.
8. **Кофман А.** Введение в прикладную комбинаторику / А. Кофман. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1975.
9. **Кузин Л.Т.** Основы кибернетики / Л.Т. Кузин. - М.: Энергия, 1979.
10. **Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М.** Дискретная математика для инженера / О.П. Кузнецов, Г.М. Адельсон-Вельский. - М.: Энергоатомиздат, 1988 .
11. **Липский В.** Комбинаторика для программистов / В. Липский. - М.: Мир, 1988.
12. **Кнут Д.** Искусство программирования для ЭВМ / Д. Кнут. - М.: Мир, 1978. - 844 с.
13. **Мерзляк А. Г., Полонский В. Б., Якир М. С.** Неожиданный шаг, или Сто тринадцать красивых задач / А.Г. Мерзляк, В.Б. Полонский, М.С. Якир. - Киев: Александрия, 1993. - 59 с.
14. **Монарова Н.В.** Информатика / Н.В. Монарова. - М.: Финансы и статистика, 2001.

15. **Нефедов В.Н., Осипова В.А.** Курс дискретной математики / В.Н. Нефедов, В.А. Осипова. - М.: Изд-во МАИ, 1992.

16. **Нивергельт Ю., Фаррар Дж., Рейнгольд Э.** Машинный подход к решению математических задач / Ю. Нивергельт, Дж. Фаррар, Э. Рейнгольд. - М.: Мир, 1977. - 351 с.

17. **Новиков Ф.А.** Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. - Санкт-Питербург: Питер, 2001.

18. **Рейнгольд Э. Нивергельт Ю., Део Н.** Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика / Э. Рейнгольд, Ю. Нивергельт, Н. Део. - М.: Мир, 1980. - 476 с.

19. **Сношатин Н.М.** Логические элементы ЭВМ: практическое пособие для вузов / Н.М. Сношатин. - М.: Высшая школа, 1990.

20. **Уилсон Р.** Введение в теорию графов / Р. Уилсон. - М.: Мир, 1977.

21. **Форсайт Р.** Паскаль для всех / Р. Форсайт. - М.: Машиностроение, 1986.

22. **Эдельман С.Л.** Дискретная математика / С.Л. Эдельман. - М.: Наука, 1975.

23. **Яблонский С.В.** Введение в дискретную математику / С.В. Яблонский. - М.: Наука 2002.