МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

Т. М. ОТРЫВАНКИНА

ОПОРНЫЕ КОНСПЕКТЫ К КУРСУ ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург, 2009

УДК 510.6 (076.5)

ББК 22.12я7
О 87

Рецензент

кандидат педагогических наук, доцент В.В. Липилина

Отрыванкина Т.М.
О 87 Опорные конспекты к курсу лекций по математической логике: методические указания / Т.М. Отрыванкина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 26 с.

Методические указания предназначены для студентов очной формы обучения специальности 010501 Прикладная математика и информатика, одноименного направления подготовки 010500 и специальности 010503 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем. Они содержат опорные конспекты к курсу лекций по дисциплине «Математическая логика». Методическая разработка поможет в организации самостоятельной работы студентов при изучении дисциплины, будет полезна при подготовке к коллоквиуму, экзамену.

О $\frac{1602020000}{}$ ББК 22.12я7

Содержание

Введение

Методические указания содержат опорные конспекты (ОК) по дисциплине «Математическая логика», которые созданы как поддержка лекционного курса для организации самостоятельной работы студентов в процессе изучения указанной дисциплины. Содержание ОК ориентировано, прежде всего, на студентов специальностей 010501 Прикладная математика и информатика, 010503 Математическое обеспечение и администрирование информационных систем и направления подготовки 010500 Прикладная математика и информатика.

Согласно рабочим программам дисциплины для перечисленных выше специальностей и направления подготовки содержание курса включает вопросы:

1 Алгебра высказываний (АВ)

Высказывания. Операции над высказываниями. Формулы АВ. Таблица истинности формулы. Классификация формул. Основные тавтологии АВ.

Логическое следование. Логическая равносильность. Основные равносильности АВ. Упрощение формул, приведение их к заданному виду.

Двойственность формул АВ, принцип двойственности. Нормальные формы формул АВ: ДНФ, КНФ. СДН- и СКН-формы формул АВ.

Проблема разрешимости в АВ. Доказательство тавтологий преобразованиями (в т.ч. с помощью КНФ), с помощью алгоритма редукции, алгоритма Квайна.

2 Булевы функции (БФ)

Понятие булевой функции. Булевы функции одного и двух аргументов. Способы задания БФ. Тождества, справедливые для БФ. Разложение функций по переменным (СДНФ, СКНФ). Многочлен Жегалкина.

Полные и замкнутые системы БФ. Замыкание множества функций. Основные замкнутые классы БФ: классы функций, сохраняющих константы; линейные, монотонные, самодвойственные функции. Критерий полноты системы БФ. Примеры полных систем.

Приложения БФ к теории переключательных схем.

3 Логика предикатов (ЛП)

Понятие n-местного предиката. Область определения и множество истинности предиката. Логические и кванторные операции над предикатами. Теоретико-множественный смысл логических операций над предикатами.

Понятие формулы ЛП. Свободные и связанные переменные. Логическое значение формулы ЛП. Истинность формул в модели, на множестве.

Равносильность формул ЛП. Основные равносильности ЛП. Предваренная нормальная форма формулы ЛП.

Общезначимость и выполнимость формул ЛП. Теорема Черча.

4 Логические исчисления (ЛИ)

Понятие формального исчисления. Исчисление высказываний: алфавит, формулы, аксиомы, правило вывода. Производные правила вывода. Теорема дедукции.

Разрешимость, полнота и непротиворечивость ИВ.

Исчисление предикатов (ИП): алфавит, формулы, аксиомы, правило вывода. Производные правила вывода. Проблема разрешимости ИП. Полнота и непротиворечивость ИП. Теорема о полноте для случая одноместных предикатов. Теорема Геделя о неполноте.

5 Приложения математической логики

Роль математической логики в системе компьютерных наук. Автоматическое доказательство теорем. Правило резолюций.

Метод резолюций как основа логического программирования. Его использование в ИВ и ИП для установления логической выводимости.

6 Элементы теории алгоритмов

Интуитивное понятие алгоритма и его уточнение: вычислимые функции, машины Тьюринга, нормальные алгорифмы Маркова.

Вычислимые функции, тезис Черча. Примеры вычислимых функций. Разрешимые и перечислимые множества

Простейшие функции: сдвиг, аннулятор и проектор. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Примитивно-рекурсивные, частично-рекурсивные и общерекурсивные функции. Вычислимость частично-рекурсивных функций.

Опорные конспекты являются частью УМК по указанной дисциплине, дополняя рабочие программы, и охватывают следующие разделы математической логики: «Алгебра высказываний», «Булевы функции», «Логика предикатов», «Логические исчисления», «Приложения математической логики». Раздел «Элементы теории алгоритмов» не представлен в данной методической разработке.

Содержание каждого ОК устанавливает минимум знаний по соответствующему подразделу дисциплины, который необходимо продемонстрировать студенту для получения положительной оценки на коллоквиуме, экзамене.

1 Алгебра высказываний (АВ)

ОК АВ 1

Опыт древних в искусстве *правильно рассуждать* был систематизирован *Аристотелем*. Он – основатель традиционной, *классической логики*.

Математическая логика (символическая, теоретическая) выросла из традиционной, но составила значительное ее расширение. С одной стороны, эта наука применила математические методы для изучения общих структур правильного мышления, а с другой – математическая логика сделала предметом своего изучения процесс доказательства математических теорем и сами математические теории. Таким образом, она стала инструментом для исследований в области *оснований математики*.

Высказывание – повествовательное утверждение, о котором можно сказать, истинно оно или ложно.

$A, B, C, \ldots, A_1, A_2, A_3, \ldots$

Функция истинности λ

Договоримся писать вместо $\lambda(A)=1$ или $\lambda(A)=0$ просто $A=1$ или $A=0$

Элементарные и *составные* высказывания

Операции над высказываниями

отрицание конъюнкция дизъюнкция импликация эквивалентность

A	7A
0	1
1	0

A	B	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\rightarrow B$	$A\leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Значение составного высказывания вычисляется по логическим значениям содержащихся в нем элементарных высказываний в соответствии с определениями логических операций.

$$\lambda(7A)= 7\lambda(A),$$

$$\lambda (A_1 * A_2) = \lambda (A_1) * \lambda (A_2),$$

где $*$ – один из символов $\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$

Пропозициональные переменные – переменные, принимающие значения на множестве высказываний.

$X, Y, Z, \ldots, X_1, X_2, X_3, \ldots$

Опр. 1) Всякая пропозициональная переменная есть формула АВ.
2) Если F_1, F_2 – формулы АВ, то $7F_1$, $(F_1 * F_2)$, где $*$ – один из символов $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, являются формулами АВ.
3) Других формул АВ нет.

Если $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ – формула АВ и $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – некоторые высказывания, то $F(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ называется **конкретизацией** F на наборе $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Значение F на наборе $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – $\boldsymbol{\lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n))}$.

Бесконечному множеству конкретизаций формулы F соответствует *конечное* множество их логических значений.

Таблица истинности формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ содержит 2^n строк

Наборы нулей и единиц располагаются в лексико-графическом порядке

X_1	X_2	…	X_{n-1}	X_n	$F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
0	0	...	0	0	F(0, 0, ..., 0, 0)
0	0	...	0	1	F(0, 0, ..., 0, 1)
...	...	...	1	0	F(0, 0, ..., 1, 0)
0	1	...	1	1	...
0	1	...	...	...	...
1	0	...	0	0	...
1	0	...	0	1	...
...	...	...	...	...	...
1	1	...	1	0	F(1, 1, ..., 1, 0)
1	1	...	1	1	F(1, 1, ..., 1, 1)

Классификация формул АВ

Формула АВ

выполнимая	**тавтология**	**опровержимая**	**противоречие**
	$\models F$		$F \models$
Существует истинная конкретизация	Любая конкретизация истинна	Существует ложная конкретизация	Всякая конкретизация ложна

Основные тавтологии АВ

1) $X \vee \neg X$ (закон исключенного третьего)
2) $\neg(X \wedge \neg X)$ (закон отрицания противоречия)
3) $((X \rightarrow Y) \wedge X) \rightarrow Y$ (modus ponens)
4) $(X \rightarrow Y) \leftrightarrow (\neg Y \rightarrow \neg X)$ (закон контрапозиции)
5) $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \leftrightarrow (Y \rightarrow (X \rightarrow Z))$ (правило перестановки посылок)
6) $((X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow Z)) \rightarrow (X \rightarrow Z)$ (закон силлогизма)

Доказательство: 1 способ – табличный; 2 способ – рассуждениями.

5) Предположим, что формула $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \leftrightarrow (Y \rightarrow (X \rightarrow Z))$ не является тавтологией $\Rightarrow$
существуют значения X,Y,Z такие, что она обращается в ложное высказывание

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} X \rightarrow (Y \rightarrow Z) = 1 \\ Y \rightarrow (X \rightarrow Z) = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} X \rightarrow (Y \rightarrow Z) = 0 \\ Y \rightarrow (X \rightarrow Z) = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} X \rightarrow (Y \rightarrow Z) = 1 \\ Y = 1, X \rightarrow Z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} X = 1, Y \rightarrow Z = 0 \\ Y \rightarrow (X \rightarrow Z) = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} X \rightarrow (Y \rightarrow Z) = 1 \\ Y = 1, X = 1, Z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} X = 1, Y = 1, Z = 0 \\ Y \rightarrow (X \rightarrow Z) = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 = 1 \\ Y = 1, X = 1, Z = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} X = 1, Y = 1, Z = 0 \\ 0 = 1 \end{cases} \end{array} \right. \Rightarrow$$ ни одна из систем совокупности не имеет решения

$\Rightarrow$ предположение было неверным $\Rightarrow$
формула $(X \rightarrow (Y \rightarrow Z)) \leftrightarrow (Y \rightarrow (X \rightarrow Z))$ является тавтологией.

Формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется **логическим следствием** формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если конкретизация H истинна всякий раз, как только истинна соответствующая конкретизация формулы F

$$F \models H \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} [\text{для всех } A_1, A_2, \ldots, A_n\ \lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n))=1 \Rightarrow \lambda(H(A_1, A_2, \ldots, A_n))=1]$$

Признак логического следствия: $F \models H \Leftrightarrow\ \models F \to H$
(Доказательство методом от противного на основе определений)

Формула $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется **логическим следствием** формул $F_1(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, $F_2(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, ..., $F_m(X_1, X_2, \ldots, X_n)$,если конкретизация H истинна всякий раз, как только истинны соответствующие конкретизации формул $F_1, F_2, ..., F_m$.

$$F_1, F_2, ..., F_m \models H$$

Т. Следующие утверждения эквивалентны:
1) $F_1, F_2, ..., F_m \models H$
2) $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \models H$
3) $\models (F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m) \to H$
4) $F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \wedge 7H \models$

Доказательство: 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4) $\Rightarrow$ 1)

Докажем **4) $\Rightarrow$ 1)**: Пусть $\mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \wedge 7H}$ **является противоречием** и при этом неверно, что $F_1, F_2, ..., F_m \models H \Rightarrow$ существует набор конкретных высказываний $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ такой, что $\lambda(H(A_1, A_2, \ldots, A_n))=0$ в то время, как $\lambda(F_1(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = \lambda(F_2(A_1, A_2, \ldots, A_n)) =\ldots= \lambda(F_m(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = 1 \Rightarrow$ существует набор конкретных высказываний $(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ такой, что $\lambda(7H(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = 1$ в то время, как $\lambda(F_1(A_1, A_2, \ldots, A_n))=\lambda(F_2(A_1, A_2, \ldots, A_n)) =\ldots= \lambda(F_m(A_1, A_2, \ldots, A_n)) =1 \Rightarrow$ на некотором наборе конкретных высказываний $\lambda((F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \wedge 7H)(A_1, A_2, \ldots, A_n))=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbf{F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \wedge 7H}$ **не является противоречием**

Пришли к отрицанию условия 4), значит, предположение было неверным, т. е. $[F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \wedge 7H \models] \Rightarrow [F_1, F_2, ..., F_m \models H]$.
Остальные случаи доказываются аналогичным образом.

Ответить на вопрос, **имеет ли место** логическое следование $\mathbf{F_1, F_2, ..., F_m \models H}$, можно:
1) с помощью таблиц истинности формул $F_1, F_2, ..., F_m$, H, проверяя выполнение требований определения;
2) с помощью рассуждений методом от противного.

Формулы $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ и $H(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называются **логически равносильными**, если логические значения их конкретизаций совпадают на любом наборе конкретных высказываний $A_1, A_2, \ldots, A_n$

$$F \cong H \underset{\text{опр}}{\Leftrightarrow} [\text{на любом наборе } A_1, A_2, \ldots, A_n\ \lambda(F(A_1, A_2, \ldots, A_n)) = \lambda(H(A_1, A_2, \ldots, A_n))]$$

Признак логической равносильности: $F \cong H \Leftrightarrow\ \models F \leftrightarrow H$
(Доказательство на основе определений)

Т. $F \cong H \Leftrightarrow F \models H$ и $H \models F$

Основные равносильности АВ

1 $\neg\neg X \cong X$
2 $X \wedge X \cong X$, $X \vee X \cong X$
3 $X \wedge Y \cong Y \wedge X$, $X \vee Y \cong Y \vee X$
4 $(X \wedge Y) \wedge Z \cong X \wedge (Y \wedge Z)$, $(X \vee Y) \vee Z \cong X \vee (Y \vee Z)$
5 $X \wedge (Y \vee Z) \cong (X \wedge Y) \vee (X \wedge Z)$, $X \vee (Y \wedge Z) \cong (X \vee Y) \wedge (X \vee Z)$
6 $X \wedge (Y \vee X) \cong X$, $X \vee (Y \wedge X) \cong X$
7 $\neg(X \wedge Y) \cong \neg X \vee \neg Y$, $\neg(X \vee Y) \cong \neg X \wedge \neg Y$
8 $X \vee \neg X \cong 1$, $X \wedge \neg X \cong 0$
9 $X \vee 1 \cong 1$, $X \vee 0 \cong X$, $X \wedge 1 \cong X$, $X \wedge 0 \cong 0$
10 $X \rightarrow Y \cong \neg X \vee Y$
11 $X \leftrightarrow Y \cong (X \rightarrow Y) \wedge (Y \rightarrow X)$

Доказательство: 1) с помощью таблиц, 2) рассуждениями.

Л. (о замене)
$G(Y_1, \ldots, Y_s) \cong H(Y_1, \ldots, Y_s)$ и $F(X_1, \ldots, X_{i-1}, Y, X_{i+1}, \ldots, X_n)$ - произвольная формула АВ.
Тогда $F(X_1, \ldots, X_{i-1}, G(Y_1, \ldots, Y_s), X_{i+1}, \ldots, X_n) \cong F(X_1, \ldots, X_{i-1}, H(Y_1, \ldots, Y_s), X_{i+1}, \ldots, X_n)$.

Переход от формулы F к логически равносильной ей формуле называется *равносильным преобразованием* формулы F

Равносильные преобразования позволяют: доказывать логические тождества, упрощать формулы, доказывать тавтологии, противоречия, приводить формулы к заданному виду.

Отношение равносильности на множестве формул АВ является примером отношения эквивалентности. Класс эквивалентности, порожденный некоторой формулой F, состоит из равносильных ей формул. Внутри класса формулы неотличимы с точки зрения принимаемых ими логических значений.

Дизъюнкт **Конъюнктивная нормальная форма** (КНФ)
Конъюнкт **Дизъюнктивная нормальная форма** (ДНФ)

Т. Для всякой формулы АВ существует ее представление в виде ДНФ (КНФ).

Совершенный дизъюнкт от n переменных **Совершенная КНФ** (СКНФ)
Совершенный конъюнкт от n переменных **Совершенная ДНФ** (СДНФ)

Пусть формула $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ задана таблицей истинности. Рассмотрим

(1) $(F(0, 0, \ldots, 0)\wedge 7X_1\wedge 7X_2\wedge\ldots\wedge 7X_n) \vee (F(0, 0, \ldots, 1)\wedge 7X_1\wedge 7X_2\wedge\ldots\wedge X_n) \vee\ldots\vee$
$\vee (F(1, 1, \ldots, 0)\wedge X_1\wedge X_2\wedge\ldots\wedge 7X_n) \vee (F(1, 1, \ldots, 1)\wedge X_1\wedge X_2\wedge\ldots\wedge X_n)$

(2) $(F(0, 0, \ldots, 0)\vee X_1\vee X_2\vee\ldots\vee X_n) \wedge (F(0, 0, \ldots, 1)\vee X_1\vee X_2\vee\ldots\vee 7X_n) \wedge\ldots\wedge$
$\wedge (F(1, 1, \ldots, 0)\vee 7X_1\vee 7X_2\vee\ldots\vee X_n) \wedge (F(1, 1, \ldots, 1)\vee 7X_1\vee 7X_2\vee\ldots\vee 7X_n)$

Выражения (1) и (2) равносильны $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, т.к. на каждом наборе логических значений пропозициональных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$ принимают те же значения, что и F.

Упрощение (1) для F, не являющейся тождественно ложной, дает ее СДНФ
Упрощение (2) для F, не являющейся тождественно истинной, дает ее СКНФ

Т.1 (о существовании и единственности СДНФ)
Т.2 (о существовании и единственности СКНФ)

Правило составления СДНФ (СКНФ) по таблице истинности
Правило составления СДНФ (СКНФ) путем равносильных преобразований

Т. $F\cong H \Leftrightarrow$ СДНФ (СКНФ) формул F и H совпадают с точностью до порядка следования конъюнктивных (дизъюнктивных) одночленов в их составе

Т. $F \models H \Leftrightarrow$ все дизъюнкты СКНФ формулы H содержатся среди дизъюнктов СКНФ формулы F

Правило построения всех неравносильных **следствий** формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$
1) построить $F_1\wedge F_2\wedge \ldots \wedge F_m$;
2) найти СКНФ полученной формулы;
3) выписать все содержащиеся в СКНФ дизъюнкты и их всевозможные конъюнкции.

$\wedge, \vee$ – двойственные операции

Пусть $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ содержит $\wedge, \vee$ и «тесные» 7

$F^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ называется **двойственной** $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, если получается из F заменой содержащихся в ней $\wedge$ на $\vee$ и $\vee$ на $\wedge$

Л. $7F(X_1, X_2, \ldots, X_n) \cong F^*(7X_1, 7X_2, \ldots, 7X_n)$

Доказательство индукцией по количеству содержащихся в формуле логических связок

Т. (Принцип двойственности) $F \cong H \Leftrightarrow F^* \cong H^*$

Доказательство:

$F(X_1, \ldots, X_n) \cong H(X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow 7F(X_1, \ldots, X_n) \cong 7H(X_1, \ldots, X_n) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow F^*(7X_1, \ldots, 7X_n) \cong H^*(7X_1, \ldots, 7X_n) \Leftrightarrow F(X_1, \ldots, X_n) \cong H(X_1, \ldots, X_n)$

Связь значений формулы F и F*: на *противоположных* наборах значений переменных они принимают *противоположные* значения

X_1	X_2	…	X_{n-1}	X_n	$F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$	$7F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$	$F^*(X_1, X_2, \ldots, X_n)$
0	0	...	0	0	F(0, 0, ..., 0, 0)	7F(0, 0, ..., 0, 0)	7F(1, 1, ..., 1, 1)
0	0	...	0	1	F(0, 0, ..., 0, 1)	7F(0, 0, ..., 0, 1)	7F(1, 1, ..., 1, 0)
...	...	...	1	0	F(0, 0, ..., 1, 0)	7F(0, 0, ..., 1, 0)	...
0	1	...	1	1	...	...	...
0	1	...	...	...	...	...	...
1	0	...	0	0	...	...	...
1	0	...	0	1	...	...	...
...	...	...	...	...	...	...	7F(0, 0, ..., 1, 0)
1	1	...	1	0	F(1, 1, ..., 1, 0)	7F(1, 1, ..., 1, 0)	7F(0, 0, ..., 0, 1)
1	1	...	1	1	F(1, 1, ..., 1, 1)	7F(1, 1, ..., 1, 1)	7F(0, 0, ..., 0, 0)

Правило построения СДНФ (СКНФ) по известной СКНФ (СДНФ):

1) выписать отсутствующие в СДНФ (СКНФ) совершенные конъюнкты (дизъюнкты);
2) преобразовать каждый из них, заменив $\wedge$ ($\vee$) на $\vee$ ($\wedge$), «сняв» имеющиеся 7 при переменных и поставив отсутствующие;
3) соединить полученные выражения знаками $\wedge$ ($\vee$).

Проблема разрешимости в АВ

Существует ли алгоритм, который относительно произвольной формулы АВ позволяет установить, является она тавтологией или нет?

I Составление и анализ таблицы истинности

Достоинства: простота

Недостатки: с увеличением n количества переменных в формуле число строк в таблице 2^n «растет» слишком быстро

II Рассуждения

Эффективны при наличии в формуле большого количества импликаций. Известны в этом случае под названием *алгоритм редукции*.

III Равносильные преобразования

Выполняя преобразования формулы, нужно получить выражение $\cong 1$ или то, которое заведомо $7(\cong 1)$. В общем случае вывод о наличии тождественной истинности лучше делать, приведя данную формулу к КНФ.

Л.1 Конъюнкция является тавтологией $\Leftrightarrow$каждый член в ее составе является тавтологией.

Л.2 Дизъюнкция является тавтологией $\Leftrightarrow$среди ее членов присутствуют некоторая переменная и ее отрицание.

Т.1 Формула является тавтологией $\Leftrightarrow$каждый дизъюнкт в составе ее КНФ содержит некоторую переменную и ее отрицание.

Т.2 Формула является противоречием $\Leftrightarrow$каждый конъюнкт в составе ее ДНФ содержит некоторую переменную и ее отрицание.

IV Алгоритм Квайна

Идея: последовательная (а не одновременная) подстановка в формулу $F(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ значений переменных и анализ логических значений получившихся выражений. В результате вывод о том, тавтология данная формула или нет, делается после прохождения только части связанного с формулой *семантического дерева*.

Пример. $? \models F(X,Y,Z) \cong (X\to(Y\to Z))\leftrightarrow(Y\to(X\to Z))$

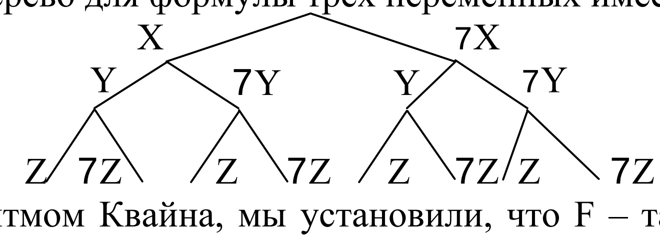
1) $X=0$: $F(0,Y,Z) \cong (0\to(Y\to Z))\leftrightarrow(Y\to(0\to Z)) \cong 1\leftrightarrow (Y\to 1) \cong 1\leftrightarrow 1 \cong 1$.

Значит, на всех наборах вида $(0,Y,Z)$ формула F принимает значение 1.

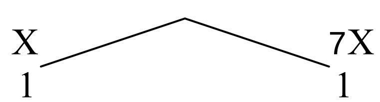
2) $X=1$: $F(1,Y,Z) \cong (1\to(Y\to Z))\leftrightarrow(Y\to(1\to Z)) \cong (Y\to Z)\leftrightarrow(Y\to Z) \cong 1$.

Таким образом, и на наборах $(1,Y,Z)$ формула F принимает значение 1.

Семантическое дерево для формулы трех переменных имеет вид



Пользуясь алгоритмом Квайна, мы установили, что F – тавтология, пройдя только следующую часть дерева:



2 Булевы функции (БФ)

ОК БФ 1

Булева функция (БФ) *n аргументов*

$$f: \{0, 1\}^n \to \{0, 1\}$$

Способы задания: табличный, вектором значений, аналитический

Т. Существует ровно 2^{2^n} различных булевых функций от n аргументов. (Почему?)

Булевы функции одного аргумента

$$f: \{0, 1\} \to \{0, 1\}$$

x	f(x)	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	f(0)	0	0	1	1
1	f(1)	0	1	0	1

$f_0(x)=0$ – тождественный ноль, $f_1(x)=x$ – тождественная,
$f_2(x)=x'$ – отрицание, $f_3(x)=1$ – тождественная единица.

Булевы функции двух аргументов

$$f: \{0, 1\}^2 \to \{0, 1\}$$

x	y	f(x, y)	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}
0	0	f(0, 0)	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	f(0, 1)	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	f(1, 0)	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	f(1, 1)	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

$f_0(x,y)=0$ – тождественный ноль,
$f_1(x,y)=x\cdot y$ – конъюнкция,
$f_2(x,y)=(x\to y)'$
$f_3(x,y)=x$
$f_4(x,y)=(y\to x)'$
$f_5(x,y)=y$
$f_6(x,y)= (x\leftrightarrow y)'=x+y$ – сумма Жегалкина (сложение по модулю 2, XOR, «исключающее ИЛИ»)
$f_7(x,y)=x\vee y$ – дизъюнкция
$f_8(x,y)=(x\vee y)'=x\downarrow y$ – стрелка Пирса
$f_9(x,y)=x\leftrightarrow y$ – эквивалентность
$f_{10}(x,y)=y'$
$f_{11}(x,y)=y\to x$
$f_{12}(x,y)=x'$
$f_{13}(x,y)=x\to y$ – импликация
$f_{14}(x,y)=(x\cdot y)'=x\,|\,y$ – штрих Шеффера
$f_{15}(x,y)=1$ – тождественная единица

Существенная переменная x_i функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$:

$$f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) \neq f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$$

на некотором наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ конкретных значений переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$

Удаление (введение) фиктивной переменной

x	y	z	f(x,y,z)
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
~~1~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~0~~	~~1~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~0~~	~~0~~
~~1~~	~~1~~	~~1~~	~~1~~

Равенство БФ с точностью до набора фиктивных переменных

Свойства булевых операций:

1) идемпотентность конъюнкции, дизъюнкции

2) ассоциативность конъюнкции, дизъюнкции, суммы Жегалкина

3) коммутативность конъюнкции, дизъюнкции, суммы Жегалкина

4) дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции, дизъюнкции относительно конъюнкции, конъюнкции относительно суммы Жегалкина

5) инволютивность отрицания

6) законы поглощения

7) законы де Моргана

8) свойства 0 и 1

9) свойства отрицания

10) выражения операций $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ через другие операции

$$x^{\delta} = \begin{cases} x, если \delta = 1, \\ x', если \delta = 0. \end{cases}$$

Разложение булевых функций по переменным x_1, x_2, x_3, …, x_k

$$f(x_1, x_2, x_3, x_k, x_{k+1}, ..., x_n) =$$

$$= \bigvee_{\substack{по\ всем\ наборам \\ (\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_k)}} x_1^{\delta_1} \cdot x_2^{\delta_2} \cdot ... \cdot x_k^{\delta_k} \cdot f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_k, x_{k+1}, ..., x_n) \qquad (1)$$

$$f(x_1, x_2, x_3, x_k, x_{k+1}, ..., x_n) =$$

$$= \prod_{\substack{по\ всем\ наборам \\ (\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_k)}} x_1^{1-\delta_1} \vee x_2^{1-\delta_2} \vee ... \vee x_k^{1-\delta_k} \vee f(\delta_1, \delta_2, \delta_3, ..., \delta_k, x_{k+1}, ..., x_n) \qquad (2)$$

СДНФ и СКНФ булевых выражений, правила их составления

Многочлен Жегалкина БФ от n переменных, правило его составления

Пример.

x	y	z	f(x, y, z)	С-конъюнкты	С-дизъюнкты
0	0	0	0		x∨y∨z
0	0	1	0		x∨y∨z′
0	1	0	1	x′yz′	
0	1	1	1	x′yz	
1	0	0	1	xy′z′	
1	0	1	1	xy′z	
1	1	0	0		x′∨y′∨z
1	1	1	1	xyz	

СДНФ f(x, y, z): **x′yz′ ∨ x′yz ∨ xy′z′ ∨ xy′z ∨ xyz**

СКНФ f(x, y, z): **(x∨y∨z) (x∨y∨z′) (x′∨y′∨z)**

Многочлен Жегалкина f(x, y, z): x′yz′ + x′yz + xy′z′ + xy′z + xyz =
= x′y (z′ + z)+ xy′(z′ + z) + xyz = (x+1)y + x(y+1) +xyz = xy + y + xy + x + xyz =
= **xyz + x + y**

Линейная и нелинейная БФ

Элементарная суперпозиция (суперпозиция 1-го ранга) функций $f_1, f_2, \ldots, f_m$

Класс булевых функций $M=\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m\}$ называется *полным*,
если любая булева функция может быть выражена через $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$
с помощью суперпозиций

Т. Пусть система $M = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m\}$ – полная, и любая из функций $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m$ может быть выражена через функции $g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k$ с помощью суперпозиций. Тогда система $\{g_1, g_2, g_3, \ldots, g_k\}$ – полная. (Докажите!)

Замыканием класса булевых функций M называется множество, состоящее
из этих функций и их всевозможных суперпозиций

Класс булевых функций $M=\{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_m\}$ называется *замкнутым*,
если $[M] = M$.

Важнейшие замкнутые классы

$T_0 = \{f\in P_2 | \ f(0, 0, 0, \ldots, 0)=0\}$ – класс функций, *сохраняющих ноль*.

$T_1 = \{f\in P_2 | \ f(1, 1, 1, \ldots, 1)=1\}$ – класс функций, *сохраняющих единицу*.

$T_S = \{f\in P_2 | \ f = f^*\}$ – класс *самодвойственных* функций.

$$f = f^* \Leftrightarrow f'(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = f(x_1', x_2', x_3', \ldots, x_n'),$$

т.е. f самодвойственна, если на противоположных наборах значений аргументов она принимает противоположные значения.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in \{0, 1\}^n,\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) \in \{0, 1\}^n,$$

α *предшествует* β, если $\alpha_i \leq \beta_i$ по всем $i=1, \ldots, n$

$T_M = \{f\in P_2 | \text{ для всех } \alpha, \beta \in \{0, 1\}^n \ \alpha \leq \beta \Rightarrow f(\alpha) \leq f(\beta)\}$ – класс *монотонных* функций.

$T_L = \{f\in P_2 | \ f = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n,\ a_i \in \{0, 1\},\ i = 0, \ldots, n\}$ – класс *линейных* функций.

Проверка принадлежности булевой функции замкнутым классам T_0, T_1, T_S, T_M осуществляется по таблице истинности. Проверка принадлежности булевой функции классу T_L осуществляется путем построения полинома Жегалкина.

T_0, T_1, T_S, T_M, T_L замкнуты, неполны, попарно различны

Т. (Поста) Система M булевых функций функционально полна тогда и только тогда, когда она не содержится целиком ни в одном из пяти замкнутых классов T_0, T_1, T_S, T_M, T_L.

Другие формулировки теоремы Поста

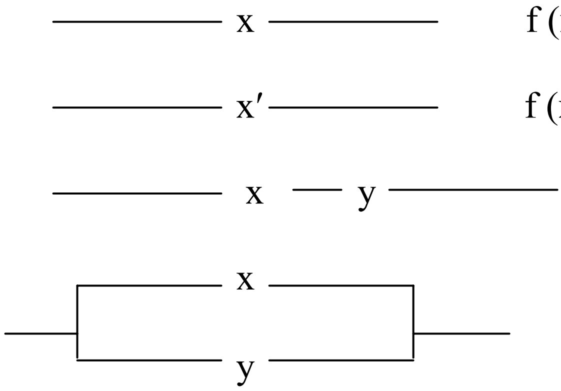
Под *релейно-контактной схемой* (РКС) понимается устройство из проводников и двухпозиционных контактов.

Контакты РКС: *замыкающие* и *размыкающие*

Всей РКС ставится в соответствие булева функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ такая, что

$$f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) = \begin{cases} 1, \text{если РКС проводит ток}, \\ 0, \text{в противном случае}. \end{cases}$$

Такая функция называется *функцией проводимости* РКС.



$f(x) = x$

$f(x) = x'$

$f(x, y) = xy$

$f(x,y) = x \vee y$

Составление РКС с заданными условиями работы называется *задачей синтеза* РКС.

Упрощение РКС называется *задачей анализа* таких схем.

Пример.

x	y	z	f(x, y, z)	С-конъюнкты
0	0	0	0	
0	0	1	0	
0	1	0	0	
0	1	1	1	$x'yz$
1	0	0	0	
1	0	1	1	$xy'z$
1	1	0	1	xyz'
1	1	1	1	xyz

$f(x, y, z) = x'yz \vee xy'z \vee xyz' \vee xyz$ схема 1

$f(x, y, z) = yz \vee xz \vee xy$ схема 2

$f(x, y, z) = y(z \vee x) \vee xz$ схема 3

Изобразите каждую из схем

Рассмотрим задачу поиска для данной булевой функции ДНФ, содержащей наименьшее число вхождений переменных.

Формула $\varphi(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ называется *импликантой* булевой функции f, если φ – импликанта СДНФ, представляющей f.
Импликанта φ называется *простой*, если после отбрасывания любой литеры из φ полученная формула не является импликантой.

Сокращенная ДНФ $\Rightarrow$ Тупиковая ДНФ $\Rightarrow$ Минимальная ДНФ

Метод минимизирующих карт

x_1	x_2	…	x_n	x_1x_2	x_1x_3	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1x_2\,x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\,x_n$	…	$x_1x_2\ldots\,x_n$
x_1'	x_2	…	x_n	$x_1'x_2$	$x_1'x_3$	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1'x_2\,x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\,x_n$	…	$x_1'x_2\ldots\,x_n$
x_1	x_2'	…	x_n	x_1x_2'	x_1x_3	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1x_2'x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\,x_n$	…	$x_1x_2'\ldots\,x_n$
…												
x_1	x_2	…	x_n'	x_1x_2	x_1x_3	…	$x_{n-1}x_n'$	$x_1x_2\,x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\,x_n'$	…	$x_1x_2\ldots\,x_n'$
x_1'	x_2'	…	x_n	$x_1'x_2'$	$x_1'x_3$	…	$x_{n-1}x_n$	$x_1'x_2'x_3$	…	$x_{n-2}x_{n-1}\,x_n$	…	$x_1'x_2'\ldots\,x_n$
…												
x_1'	x_2'	…	x_n'	$x_1'x_2'$	$x_1'x_3'$	…	$x_{n-1}'x_n'$	$x_1'x_2'x_3'$	…	$x_{n-2}'x_{n-1}'x_n'$	…	$x_1'x_2'\ldots\,x_n'$

Т. Если совершенный конъюнкт i-ой строки таблицы не входит в состав СДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$, то никакой конъюнкт этой строки не содержится в составе никакой ДНФ, выражающей данную функцию.

Метод Квайна

а) Операция полного склеивания: $\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot x' = \varphi$

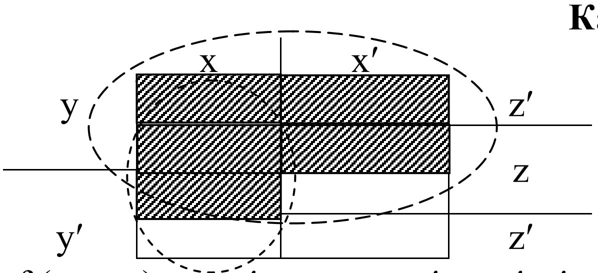
б) Операция неполного склеивания: $\varphi \cdot x \vee \varphi \cdot x' = \varphi \vee \varphi \cdot x \vee \varphi \cdot x'$

в) Операция элементарного поглощения: $\varphi \cdot x \vee \varphi = \varphi$, $\varphi \cdot x' \vee \varphi = \varphi$

Т. (Квайна) Если в СДНФ функции произвести все возможные операции неполного склеивания, а затем элементарного поглощения, то в результате получится сокращенная ДНФ.

таблица Квайна

Карты Карно



$f(x, y, z) = xyz' \vee xyz \vee xy'z \vee x'yz' \vee x'yz = y \vee xz$

3 Логика предикатов (ЛП)

ОК ЛП 1

Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен.

$$A, B \models C$$

Высказывание

Объект

Свойство (предикат)

n-местным предикатом, определенным на множестве $M_1\times M_2\times M_3\times\ldots\times M_n$, называется повествовательное предложение, содержащее переменные $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$, которое превращается в высказывание при подстановке вместо $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ набора конкретных значений из $M_1\times M_2\times M_3\times\ldots\times M_n$

$$P(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$$

$$Q, R, S, T, \ldots$$

Предметные переменные

Предметная область

Множество истинности предиката $P(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$

$$I(P) = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) |\ \lambda(P(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) = 1)\}$$

Классификация предикатов

$$I(P) = M_1\times M_2\times M_3\times\ldots\times M_n$$
$$I(P) = \varnothing$$
$$I(P) \neq \varnothing$$
$$I(P) \neq M_1\times M_2\times M_3\times\ldots\times M_n$$

Логические операции над предикатами

Кванторные операции над предикатами

$\forall x\, P(x)$ «для любого (значения) x P(x) (истинное высказывание)»

$\exists x\, P(x)$ «найдется (значение) x такое, что P(x) (истинное высказывание)»

Алфавит ЛП:

– предметные переменные x, y, z, x_i, y_i ($i \in \mathbf{N}$)
– нульместные предикатные переменные P, Q, R, …
– n-местные ($n \geq 1$) предикатные переменные
– $P_1^{(n)}(\ , \ , \ldots, \ )$, $P_2^{(n)}(\ , \ , \ldots, \ )$, …, $Q^{(n)}(\ , \ , \ldots, \ )$ $R^{(n)}(\ , \ , \ldots, \ )$ с указанием числа свободных мест в них
– символы логических операций
– кванторы
– вспомогательные символы

1 Каждая нульместная предикатная переменная есть *формула*
2 Если $P^{(n)}(\ , \ , \ldots, \ )$ - n-местная ($n \geq 1$) предикатная переменная и $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – предметные переменные, то $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – *формула*, в которой $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – *свободные*
3 Если F – формула, то $\neg$F – тоже *формула*, в которой *свободными* являются те и только те переменные, которые свободны в F
4 Если F_1, F_2 – формулы, причем их общие переменные свободны или связаны в каждой из них, то $(F_1 * F_2)$, где * – один из символов $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, являются *формулами*. *Свободными* (связанными) в них являются те переменные, которые свободны (связаны) хотя бы в одной из формул F_1, F_2
5 Если F – формула и x входит в нее свободно, то $(\forall x \ F)$ и $(\exists x \ F)$ являются *формулами,* у которых x – связанная переменная
6 Других формул ЛП нет

Формулы, определенные в п.п. 1, 2, называются *элементарными*

Интерпретация формулы ЛП:
указание предметной области;
задание конкретных значений предикатных переменных;
при наличии свободных предметных переменных – указание их значений

Классификация формул ЛП

Нахождение общезначимых формул является одной из важнейших задач ЛП

Т. (Черча, 1936) Не существует алгоритма, позволяющего установить, общезначима или нет произвольная формула ЛП

4 Логические исчисления (ЛИ)

ОК ЛИ 1

Формальное исчисление

$I=(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{A}x, \mathcal{R})$

алфавит формулы аксиомы правила вывода

Вывод по правилу: F – непосредственное следствие $F_1, F_2, \ldots, F_k$

Вывод в исчислении: F – теорема I,
последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_k, F$ – ее доказательство

Разрешимое исчисление

Непротиворечивое исчисление

ИВ: алфавит, формулы, схемы аксиом, правило вывода

$F_1\to(F_2\to F_1)$
$(F_1\to F_2)\to((F_1\to(F_2\to F_3))\to(F_1\to F_3))$
$(F_1\wedge F_2)\to F_1$
$(F_1\wedge F_2)\to F_2$
$(F_1\to F_2)\to((F_1\to F_3)\to(F_1\to(F_2\wedge F_3)))$
$F_1\to(F_1\vee F_2)$
$F_1\to(F_2\vee F_1)$
$(F_1\to F_3)\to((F_2\to F_3)\to((F_1\vee F_2)\to F_3))$
$(F_1\to F_2)\to((F_1\to\neg F_2)\to\neg F_1)$
$\neg\neg F_1\to F_1$

MP: $\dfrac{F,\ F\to G}{G}$

Доказать, что $\vdash F\to F$

Вывод из гипотез: F – следствие гипотез,
последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_k, F$ – ее вывод

Теорема о дедукции и ее следствие

$F_1, F_2, \ldots, F_k \vdash F \Leftrightarrow\ \vdash F_1\to(F_2\to(F_3\to(\ldots\to(F_{k-1}\to(F_k\to F))\ldots)))$

Теорема (о полноте ИВ). $\vdash F \Leftrightarrow\ \models F$

ИВ разрешимо

ИВ непротиворечиво

Схемы аксиом ИВ независимы

Формальное исчисление

$I=(\mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{A}x, \mathcal{R})$

алфавит формулы аксиомы правила вывода

Вывод по правилу: F – непосредственное следствие $F_1, F_2, \ldots, F_k$

Вывод в исчислении: F – теорема I,
последовательность $F_1, F_2, \ldots, F_k$, F – ее доказательство

Разрешимое исчисление

Непротиворечивое исчисление

ИП (узкое, 1-го порядка): алфавит, формулы, схемы аксиом, правила вывода

$F_1\to(F_2\to F_1)$
$(F_1\to F_2)\to((F_1\to(F_2\to F_3))\to(F_1\to F_3))$
$(F_1\wedge F_2)\to F_1$
$(F_1\wedge F_2)\to F_2$
$(F_1\to F_2)\to((F_1\to F_3)\to(F_1\to(F_2\wedge F_3)))$
$F_1\to(F_1\vee F_2)$
$F_1\to(F_2\vee F_1)$
$(F_1\to F_3)\to((F_2\to F_3)\to((F_1\vee F_2)\to F_3))$
$(F_1\to F_2)\to((F_1\to \neg F_2)\to \neg F_1)$
$\neg\neg F_1\to F_1$
$\boldsymbol{\forall x F(x)\to F(y)}$
$\boldsymbol{F(y)\to \exists x F(x)}$

MP: если F, $F\to G$ выводимы, то G выводима
Правило обобщения: если $F\to G(x)$ выводима, то $F\to\forall x\, G(x)$ выводима
Правило конкретизации: если $G(x)\to F$ выводима, то $\exists x\, G(x)\to F$ выводима

$$F_1, F_2, \ldots, F_k \vdash_{MP} F \Leftrightarrow \vdash_{MP} F_1\to(F_2\to(F_3\to(\ldots\to(F_{k-1}\to(F_k\to F))\ldots)))$$

$\vdash F \Leftrightarrow$ F общезначима (теорема Геделя)

ИП неразрешимо (теорема Черча)

ИП непротиворечиво

Схемы аксиом ИП независимы

5 Приложения математической логики (Прил)

ОК Прил 1

Фундаментальная основа программирования –
– математическая логика и теория алгоритмов

В *теории алгоритмов* были предугаданы основные концепции, которые легли в основу принципов построения и функционирования ВМ с программным управлением и принципов создания языков программирования

Алгоритм

Машина Тьюринга	*Рекурсивные функции*	*Нормальные алгорифмы*	*λ-исчисление*
Тьюринг Пост	Черч Клини Гедель Эрбран	Марков	Скотт

Четыре главные модели алгоритма породили разные направления в программировании

Алгоритмическая логика (динамическая логика, программная логика, логика Хоара) – раздел теоретического программирования, в рамках которого исследуются алгоритмические системы, представляющие средства для задания синтаксиса и семантики языков программирования, а также для синтеза компьютерных программ и их верификации (проверки правильности работы)

Алгоритм, который проверяет отношение
$$H_1, H_2, \ldots, H_k \vdash_T F,$$
где $H_1, H_2, \ldots, H_k$ – гипотезы, F – некоторая формула теории T, называется *алгоритмом автоматического доказательства теорем*

Метод резолюций был разработан американским ученым Робинсоном (1965 г.)

$$\frac{D_1 \vee X, B_1 \vee \neg X}{D_1 \vee B_1}$$

Т. (о полноте метода резолюций) Множество дизъюнктов $\Gamma = \{H_1, H_2, \ldots, H_k\}$ противоречиво ⇔ существует резолютивный вывод из Г, оканчивающийся **0** (тождественно ложной формулой)

$$F_1, F_2, ..., F_m \vdash H \Leftrightarrow F_1, F_2, ..., F_m \models H \Leftrightarrow F_1, F_2, ..., F_m, 7H \models \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow F_1 \wedge F_2 \wedge ... \wedge F_m \wedge 7H \models \Leftrightarrow D_1 \wedge D_2 \wedge ... \wedge D_k \models$$

Метод резолюций в ИП

Особая стандартная форма – *предложения*

Преобразование формулы ИП в множество предложений осуществляется по схеме:

элиминация импликации $\Rightarrow$

протаскивание отрицаний $\Rightarrow$

разделение связанных переменных $\Rightarrow$

приведение к предваренной форме $\Rightarrow$

элиминация кванторов существования (сколемизация) $\Rightarrow$

элиминация кванторов общности $\Rightarrow$

приведение к КНФ $\Rightarrow$

элиминация конъюнкции

Проверьте правильность заключения методом резолюций
«Все люди смертны. Сократ – человек. Следовательно, Сократ смертен.»

Унификатор
Алгоритм унификации

В ИП метод резолюций является *частичным* алгоритмом автоматического доказательства теорем

Стратегии поиска (зачем они нужны?)

Нисходящая стратегия

Хорновские дизъюнкты
$7X_1 \vee 7X_2 \vee \ldots \vee 7X_n$ или $7X_1 \vee 7X_2 \vee \ldots \vee 7X_n \vee Y$

Алгоритм проверки невыполнимости множества хорновских дизъюнктов S

Список использованных источников

1 **Игошин, В.И.** Математическая логика и теория алгоритмов: учебное пособие / В.И. Игошин – М.: Академия , 2004. – 448 с.
2 **Судоплатов, С.В.** Элементы дискретной математики: учебник / С.В. Судоплатов, Е.В. Овчинникова – М.: ИНФРА-М, Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2002. – 280 с.
3 **Новиков, Ф.А.** Дискретная математика для программистов / Ф.А. Новиков. – СПб.: Питер, 2003. – 304 с.