

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра машин и аппаратов химических и пищевых
производств

В.Б. КИМ

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ОБОРУДОВАНИЯ ОТРАСЛИ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К ЛАБОРАТОРНОМУ ПРАКТИКУМУ

Рекомендовано к изданию Редакционно–издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 664 (075.8)

ББК 36.81 я 73

К40

Рецензент

андидат технических наук, В.П.Ханин

К 40 Ким В.Б
Расчет и конструирование элементов оборудования
отрасли: методические указания. / В.Б.Ким- Оренбург: ГОУ ОГУ,
2009. - 87 с.

Лабораторный практикум состоит из 8 лабораторных работ по курсу «Расчет и конструирование элементов оборудования» химической и пищевой промышленности. Каждая работа включает теоретическое изложение материала, цель, программу, описание экспериментальной установки, порядок и методику проведения, а также содержание отчета по работе.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторного практикума по дисциплине «Расчет и конструирование элементов оборудования отрасли» для специальностей 240801 и 260601 – «Машины и аппараты химических производств» и «Машины и аппараты пищевых производств».

К 4001010000

ББК 36.81 я 73

© Ким В.Б., 2009
© ГОУ ОГУ, 2009

Содержание

Введение.....	4
1 Лабораторная работа 1. Определение напряжений, действующих в стенках цилиндрического сосуда с эллиптическими днищами под действием внутреннего избыточного давления	5
2 Лабораторная работа 2. Определение напряженного состояния цилиндрической оболочки под действием внешнего давления и осевой сжимающей силы	22
3 Лабораторная работа 3. Исследование напряженно-деформированного состояния колец.....	29
4 Лабораторная работа 4. Исследование крутильных колебаний многомассовых валов.....	37
5 Лабораторная работа 5. Исследование изгибных колебаний валов и определение критических оборотов.....	47
6 Лабораторная работа 6. Исследование работы антивибратора	60
7 Лабораторная работа 7. Исследование шарикового автоматического уравнивающего устройства (АУУ)	67
8 Лабораторная работа 8. Исследование напряженного состояния быстровращающихся деталей машин	80
Список использованных источников.....	87

Введение

Лабораторный практикум имеет своей целью ознакомить студента с методикой проведения теоретических расчетов и экспериментальных исследований. Причем условия проведения экспериментальных исследований и теоретических расчетов выбираются одинаковыми, с тем, чтобы студент мог сравнивать результаты расчетов и экспериментов.

В теоретических частях по возможности полнее раскрывалась расчетно-теоретическая сущность работ, при этом все промежуточные выкладки опускались. Каждая теоретическая часть снабжена порядком проведения теоретического расчета.

Ряд лабораторных работ связано между собой, например, Лабораторная работа 1 и Лабораторная работа 2 и отчасти Лабораторная работа 8. В связанных работах автор старался одинаковым величинам давать одинаковые обозначения, хотя это не всегда удавалось. Если в одной работе давались ссылки на формулы из другой, то эти ссылки даются в форме ([3.5) – формула (5) из лабораторной работы 3.

1 Лабораторная работа 1

Определение напряжений, действующих в стенках цилиндрического сосуда с эллиптическими днищами под действием внутреннего избыточного давления

Цель работы

Закрепление навыков теоретического расчета напряжений в стенке цилиндрической обечайки и днища резервуара по безмоментной теории и краевых напряжений от действия внутреннего избыточного давления и осевой растягивающей силы; приобретение навыков экспериментального исследования напряженного состояния деталей машин и аппаратов.

Теоретическая часть

Стенка цилиндрического сосуда, имеющего днища и подверженное действию внутреннего давления, находится в объемно-напряженном состоянии. Вдоль образующей, параллельной оси цилиндра действует осевое (меридиональное) напряжение σ_x ; в направлении касательной к окружности (в сечении, перпендикулярном оси цилиндра) действует окружное напряжение σ_t ; в направлении, нормальном стенке – радиальное напряжение σ_r , касательные напряжения $\tau_{xt}, \tau_{xr}, \tau_{tr}$. По второй гипотезе Кирхгофа-Лява, радиальные напряжения $\sigma_r, \tau_{xr}, \tau_{tr}$ малы и ими можно пренебречь, если толщина оболочки $h < 0.05R_{\min}$, где R_{\min} – минимальный радиус кривизны оболочки.

Если в рассчитываемом сосуде выполняются следующие условия:

- 1) форма сосуда плавная, без резких переходов, то есть нет разрывного изменения радиусов кривизны;
- 2) нагрузки равномерные или плавно меняющиеся; нет сосредоточенных сил и моментов, вызывающих значительное изменение кривизны;
- 3) оболочка не имеет свободных открытых торцов;
- 4) края оболочки закреплены таким образом, что реактивные силы не имеют значительной поперечной составляющей, а также не возникают реактивные моменты; то возникающее напряженное состояние называется *безмоментным*.

При нагружении оболочки несимметричной нагрузкой должны быть предусмотрены связи, препятствующие возникновению чисто моментного состояния..

На краях оболочки, где приложены распределенные поперечные силы и моменты напряженное состояние можно рассматривать как сумму безмоментного состояния и так называемого краевого эффекта.

Рассмотрим тонкие оболочки вращения в безмоментном состоянии.

На достаточном расстоянии от края, например, в цилиндрической обечайке с постоянной толщиной стенки будет чисто безмоментное напряженное состояние, при котором изгибающие и скручивающие моменты, а также поперечные силы отсутствуют. При безмоментном напряженном состоянии на элемент оболочки действуют нормальные напряжения σ_t, σ_m и касательное напряжение $\tau_{tm} = \tau_{mt}$.

Внутренние усилия обозначим:

$$T_t = \sigma_t h \quad \text{- нормальная сила в окружном направлении,}$$

$$T_m = \sigma_m h \quad \text{- нормальная сила в меридиональном направлении,}$$

$$S = \tau_{mt} h \quad \text{- сдвигающая сила.}$$

Для оболочек вращения справедливы следующие зависимости

$$\frac{ds}{R_m} = d\theta, \quad \frac{r}{R_t} = \sin \theta, \quad \frac{dr}{ds} = \cos \theta.$$

где R_m, R_t - радиусы кривизны срединной поверхности оболочки в меридиональном и окружном направлениях соответственно;

h - толщина оболочки;

r - радиус параллели, проходящей через рассматриваемую точку;

θ - угол между нормалью к срединной поверхности в рассматриваемой

точке и осью вращения поверхности;

s - дуговая координата вдоль меридиана.

Для 5%-ой погрешности, для чисто безмоментного состояния должно выполняться условие

$$b \cdot l > 3, \quad \text{где } b = \frac{\sqrt[4]{3(1-\nu^2)}}{\sqrt{Rh}}, \quad \text{при } \nu = 0.3 \text{ принимают } b \approx \frac{1,285}{\sqrt{Rh}};$$

l - расстояние от края обечайки, ν - коэффициент Пуассона.

Уравнения равновесия безмоментной теории для оболочек вращения будут иметь вид

$$\begin{aligned}
\frac{T_m}{R_m} + \frac{T_t}{R_t} &= q_1, \\
\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial s} (T_m r \sin \theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \sin \theta &= q_2, \\
\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial s} (S r^2) + \frac{1}{r} \frac{\partial T_t}{\partial \varphi} &= -q_3
\end{aligned} \tag{1.1}$$

где

q_1, q_2, q_3 – компоненты заданной внешней распределенной поверхностной нагрузки: q_3 – по нормали к поверхности, q_2 – по касательной к меридиану, q_1 – по касательной к параллели;

φ - полярный угол, отсчитываемый от какого-то меридиана, принятого за нулевой ($0 \leq \varphi \leq 2\pi$).

Решение уравнений (1.1) должно удовлетворять граничным условиям, накладываемых на усилия T_m и S . Но если граничные условия геометрические, то необходимо использовать дополнительно уравнения перемещений, которые имеют вид

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{w}{R_m} &= \frac{T_m - \nu T_t}{Eh}, \\
\frac{\partial v}{r \partial \varphi} + \frac{u \cos \theta}{r} + \frac{w}{R_t} &= \frac{T_t - \nu T_m}{Eh}, \\
\frac{\partial u}{r \partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{r} \cos \theta &= \frac{S}{Gh}.
\end{aligned} \tag{1.2}$$

где

u – составляющая перемещения точки срединной поверхности по направлению касательной к меридиану;

v – составляющая перемещения по направлению касательной к параллели;

w – составляющая перемещения по нормали к поверхности;

ν - коэффициент Пуассона.

Осесимметричными называют оболочки, имеющие форму тела вращения и нагруженные осесимметричной нагрузкой. В таких оболочках все величины по углу φ - постоянны, производные по φ во всех уравнениях исчезают.

$$\begin{aligned}
a. \quad & \frac{T_m}{R_m} + \frac{T_t}{R_t} = q_1, \\
b. \quad & \frac{1}{r} \frac{d}{ds} (T_m r \sin \theta) = q_x, \quad q_x = q_1 \cos \theta + q_2 \sin \theta, \\
c. \quad & \frac{1}{r^2} \frac{d}{ds} (S r^2) = -q_3, \\
d. \quad & \frac{du}{ds} + \frac{w}{R_m} = \varepsilon_m = \frac{T_m - \nu T_t}{Eh}, \\
e. \quad & \frac{u \cos \theta}{r} + \frac{w}{R_t} = \varepsilon_t = \frac{T_t - \nu T_m}{Eh}, \\
f. \quad & \frac{dv}{ds} - \frac{v}{r} \cos \theta = \frac{S}{Gh}.
\end{aligned} \tag{1.3}$$

Первое уравнение этой системы называется уравнением Лапласа.

Эта система уравнений распадается на две группы уравнений. 1-ая группа уравнений (1.3а, 1.3б, 1.3д, 1.3е) не содержащих S , 2-ая группа – (1.3с, 1.3ф). Первая группа описывает осесимметричное растяжение оболочки, а вторая группа – осесимметричное кручение оболочки.

Рассмотрим первую группу уравнений.

Так как составляющие поверхностной нагрузки известны (заданы) то по уравнению (3б) можно определить T_m . Проинтегрировав правую и левую части уравнения от s_0 до s , получим

$$T_m r \sin \theta = \int_{s_0}^s q_x \bar{r} ds + C$$

где $r_1 < \bar{r} < r$. а r - радиус текущего сечения, перпендикулярного оси вращения, \bar{r} - радиус промежуточного сечения. Обозначим через $F(s)$ суммарную осевую силу, приходящуюся на единицу полярного угла φ .

$$F(s) = \int_{s_0}^s p_x \bar{r} ds + C \tag{1.4}$$

В каждом частном случае эта сила определяется из уравнения равновесия отсеченной части оболочки. Если $F(s)$ известна, то

$$T_m = \frac{F(s)}{r \sin \theta} = \frac{F(s)}{R_t \sin^2 \theta}. \quad (1.5)$$

Из уравнения Лапласа находится окружная сила

$$T_t = q_1 R_t - T_m \frac{R_t}{R_m} \quad (1.6)$$

Рассмотрим расчет замкнутого резервуара, находящегося под действием внутреннего давления. Функция $F(s)$ в этом случае вычисляется как произведение давление на площадь круга радиуса r , отнесенное к единице полярного угла

$$F(S) = \frac{p \pi r^2}{2\pi} = \frac{pr^2}{2}$$

Учитывая, что

$$r = R_t \sin \theta$$

и используя (5) и (6) найдем

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{pR_t}{2}; \\ T_t &= \frac{pR_t}{2} \left(2 - \frac{R_t}{R_m} \right) \end{aligned} \quad (1.7)$$

Для цилиндрического резервуара

$$\begin{aligned} T_m &= \frac{pD}{4}; & \sigma_m &= \frac{pD}{4h}; \\ T_t &= \frac{pD}{2}; & \sigma_t &= \frac{pD}{2h}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Формулы (1.8) известны под названием «котельных» формул или формул Мариотта. Их применяют для вычисления напряжений в цилиндрических котлах, сосудах и тонкостенных трубах, находящихся под действием внутреннего давления.

Из формулы (1.7) следует, что при $R_m < 0,5R_t$ правая часть равенства становится отрицательной и, следовательно, окружная сила T_m становится сжимающей.

Если внутренние усилия T_m , T_t найдены, то система уравнений перемещений (1.3d), (1.3e) позволяет определить перемещения u и w . Однако в осесимметричных оболочках более удобно рассматривать перемещения ξ , η в радиальном и в осевом направлениях:

$$\begin{aligned}
 w &= \xi \sin \theta - \eta \cos \theta, \\
 u &= \xi \cos \theta + \eta \sin \theta.
 \end{aligned}
 \tag{1.9}$$

Радиальное перемещение находится по формуле

$$\xi = \varepsilon_t R_t \sin \theta
 \tag{1.10}$$

Осевое перемещение

$$\eta = \int_{\theta_0}^{\theta} \left(\frac{\varepsilon_m}{\sin \theta} - \frac{d\xi}{d\theta} \frac{ctq\theta}{R_m} \right) R_m d\theta
 \tag{1.11}$$

или

$$\eta = -\varepsilon_t R_t \cos \theta \Big|_{\theta_0}^{\theta} + \int_{\theta_0}^{\theta} \frac{1}{\sin \theta} \left(\varepsilon_m - \frac{R_t}{R_m} \varepsilon_t \right) R_m d\theta
 \tag{1.12}$$

Угол поворота нормали находится по формуле

$$\mathcal{G} = \varepsilon_m ctq\theta - \frac{d\xi}{ds} \frac{1}{\sin \theta}
 \tag{1.13}$$

или

$$\mathcal{G} = \frac{u}{R_m} - \frac{dw}{ds}.$$

Вблизи стыка днища с обечайкой в стенке обечайки возникают дополнительные напряжения от краевых сил. Это обусловлено тем, что при нагружении сосуда, его стенки и днища деформируются по-разному. Днище деформируется меньше и препятствует увеличению диаметра обечайки. Поэтому в стыке действует распределенная по всему стыку сила, направленная к оси цилиндра (краевая сила) и краевой момент. Эта сила и момент могут быть найдены из условия совместности деформации стенки и днища. Они вызывают в стенке цилиндра внутренние силы и напряжения, быстро убывающие по мере удаления от стыка. Критическая длина, на которой сказывается влияние края

$$l_{кр} < \frac{3}{b} = \frac{3}{1.285} = \frac{3\sqrt{hR}}{1.285}.
 \tag{1.14}$$

Определим напряжения в эллиптическом днище. Полуоси эллипса равны соответственно $D/2$ и H . Радиусы кривизны эллипса в произвольной точка определяются формулами:

$$R_m = \frac{R_0}{\sqrt{(1 + \gamma \sin^2 \theta)^3}};$$

$$R_t = \frac{R_0}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}},$$
(1.15)

где θ - угол между нормалью и осью вращения,

$$R_0 = \frac{D}{2} \sqrt{1 + \gamma}$$

- радиус кривизны в вершине (при $\theta = 0$), (1.16)

$$\gamma = \frac{(D/2)^2 - H^2}{H^2}$$

- параметр, определяющий форму эллипса. (1.17)

При постановке радиусов в (15) получим

$$T_m = \frac{pD}{4} \frac{\sqrt{1 + \gamma}}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}},$$

$$T_t = \frac{pD}{4} \frac{(1 - \gamma \sin^2 \theta) \sqrt{1 + \gamma}}{\sqrt{1 + \gamma \sin^2 \theta}}.$$
(1.18)

Преимуществом эллиптического днища является то, что *радиальная составляющая силы* T_m *в стыке равна нулю* (в стыке T_m направлена перпендикулярно радиальному направлению). Но окружное усилие T_t в стыке изменяется разрывно от $-pD/2$ до $pD/2$, значения окружной деформации ε_t и радиального перемещения ξ также имеют разрыв. Но в действительности же ε_t и ξ функции непрерывные. Поэтому в стыке к безмоментному состоянию добавится изгиб стенки. Определим этот изгибающий момент.

Отделим мысленно обечайку от днища, и примем точку пересечения срединных поверхностей за точку сопряжения. В точке разделения, приложим реакции связей: T_m , T_t , M_0 , Q_0 (на рисунке 2 сила T_t не показана). На краю должны выполняться условия

$$x = 0 \quad w_{dn} = w_{ob}; \quad x = L \quad w_{dn} = w_{ob};$$

$$\mathcal{G}_{dn} = \mathcal{G}_{ob}; \quad w_{dn} = w_{ob}.$$
(1.19)

Оба края находятся в одинаковых условиях, поэтому и граничные условия должны быть одинаковыми и можно рассмотреть только один край, например, край $x = 0$. На краю заданы условия, накладывающие ограничения на

радиальные перемещения краев w и на угол поворота нормали к срединной

$$\mathcal{G} = \frac{dw}{ds}$$

поверхности

Теперь найдем условия на краю обечайки и днища, так как будто они не связаны между собой. Радиальное перемещение и угол поворот нормали на краю обечайки определяется по формуле

$$\begin{aligned} w_{ob} \Big|_{x=0} &= \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{pR^2}{Eh}; \\ \mathcal{G}_{ob} \Big|_{x=0} &= -\frac{1}{D} \left(\frac{M_0}{\beta} + \frac{Q_0}{2\beta^2} \right). \end{aligned} \quad (1.20)$$

Жесткость днища на растяжение-сжатие гораздо выше, чем на изгиб, поэтому деформацией растяжения можно пренебречь, радиальная составляющая меридионального усилия равна нулю. Поэтому

$$w_{dn} = 0$$

Угол поворота нормали на краю днища в данном случае будет

$$\mathcal{G}_{dn} \Big|_{\vartheta=\frac{\pi}{2}} = \frac{pR^3}{8D(1+\nu)} - \frac{M_0 R}{D(1+\nu)} = \frac{R}{D(1+\nu)} \left(\frac{pR^2}{8} - M_0 \right). \quad (1.21)$$

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad \text{где} \quad - \text{цилиндрическая жесткость оболочки.} \quad (1.22)$$

Из условия совместности деформаций, получаем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{M_0}{2D\beta^2} + \frac{Q_0}{2D\beta^3} + \left(1 - \frac{\nu}{2}\right) \frac{pr^2}{Eh} &= 0, \\ -\frac{M_0}{\beta} - \frac{Q_0}{2\beta^2} &= \frac{M_0 r}{(1+\nu)} - \frac{pr^3}{8(1+\nu)} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Нужно иметь в виду, что M_0 во второе уравнение (1.23) обязательно должно входить с разными знаками. Решив систему (1.23), получим M_0 , Q_0 .

Внутренние силы и моменты, напряжения в краевой зоне должны быть определены по моментной теории, так как в стыке кроме меридиональных и окружных усилий действует появляющийся изгибающий момент.

Обечайка

Рассмотрим обечайку без днища, на которую действуют внутреннее избыточное давление p краевой момент M_0 . Системы дифференциальных уравнений деформации и равновесия могут быть приведены к одному

обыкновенному дифференциальному уравнению четвертого порядка относительно радиального смещения w .

$$\frac{d^4 w}{dx^4} + 4\beta^4 w = -\frac{\nu T_x}{Dr} + \frac{p}{D} \quad (1.24)$$

Общее решение этого уравнения можно представить в виде суммы общего решения однородного уравнения, соответствующего (1.24) и частного решения уравнения (1.24)

$$w = w^* + w'$$

w^* - общее решение соответствующего однородного уравнения;

w' - частное решение уравнения (1.24).

Общее решение уравнения (1.24) представится в виде

$$w = e^{-\beta x} (A_1 \sin \beta x + A_2 \cos \beta x) + e^{\beta x} (A_3 \sin \beta x + A_4 \cos \beta x) + \left(p - \frac{\nu T_x}{r}\right) \frac{r^2}{Eh}.$$

где A_1, A_2, A_3, A_4 - постоянные интегрирования.

Первое слагаемое, содержащее множитель $e^{-\beta x}$ быстро затухает, а второе слагаемое, содержащее множитель $e^{\beta x}$, напротив, быстро возрастает. Но так как радиальные смещения даже при больших x должны оставаться конечными и малыми, можно заключить что постоянные A_3 и A_4 должны быть малы и ими можно пренебречь.

Решения этого уравнения при симметричных граничных условиях (т.е. одинаковых условиях на обеих торцах обечайки) будет иметь вид

$$\begin{aligned} x = 0 \quad Q = Q_0, & \quad x = L \quad Q = Q_0, \\ M = M_0. & \quad M = M_0. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Радиальное смещение, угол поворота нормали и внутренние усилия в краевой зоне на расстоянии x от края обечайки определяются по формулам

$$\begin{aligned}
w &= \frac{M_0 f_4(\xi)}{2D\beta^2} + \frac{Q_0 f_1(\xi)}{2D\beta^3}; \\
g &= \frac{dw}{dx} = -\frac{M_0}{D\beta} f_1(\xi) - \frac{Q_0}{2D\beta^2} f_3(\xi); \\
M_x &= D \frac{d^2 w}{dx^2} = M_0 f_3(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} f_2(\xi); \\
M_t &= \nu M_x; \\
Q &= D \frac{d^3 w}{dx^3} = -2M_0 \beta f_2(\xi) + Q_0 f_4(\xi); \\
T_t &= \frac{Ehw}{R} + \nu T_x = 2R\beta^2 \left[M_0 f_4(\xi) + \frac{Q_0}{\beta} f_1(\xi) \right] + q_1 R.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Здесь обозначены

$$\begin{aligned}
f_1(\xi) &= e^{-\beta x} \cos \beta x, \\
f_2(\xi) &= e^{-\beta x} \sin \beta x, \\
f_3(\xi) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x + \sin \beta x), \\
f_4(\xi) &= e^{-\beta x} (\cos \beta x - \sin \beta x).
\end{aligned} \tag{1.27}$$

где

$$\xi = \beta x, \quad \beta = \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R^2 h^2}}. \tag{1.28}$$

Значения функций f_1 , f_2 , f_3 , f_4 протабулированы и приведены в таблице 1

Определив внутренние усилия и моменты можно определить напряжения вблизи краевой зоны. Напряжение в оболочке

$$\begin{aligned}
\sigma_x^+ &= \sigma_x^{(m)} + \sigma_x^{(u)}; & \sigma_{tm}^+ &= \sigma_{tm}^{(m)} + \sigma_{tm}^{(u)}; & \sigma_t^+ &= \sigma_t^{(m)} + \sigma_t^{(u)}; \\
\sigma_t^- &= \sigma_t^{(m)} - \sigma_t^{(u)}; & \sigma_{tm}^- &= \sigma_{tm}^{(m)} - \sigma_{tm}^{(u)}; & \sigma_t^- &= \sigma_t^{(m)} - \sigma_t^{(u)}.
\end{aligned}$$

(1.28)

где

$$\sigma_x^{(m)} = \frac{T_x}{h}; \quad \sigma_{tx}^{(m)} = \frac{S}{h}; \quad \sigma_t^{(m)} = \frac{T_t}{h}; \quad - \text{безмоментные (цепные,}$$

мембранные) напряжения,

$$\sigma_x^{(u)} = \frac{6M_x}{h^2}; \quad \sigma_{xt}^{(u)} = \frac{6H}{h^2}; \quad \sigma_t^{(u)} = \frac{6M_t}{h^2}; \quad - \text{изгибные напряжения}$$

(1.29)

Знак «+» относится к напряжениям в наружном слое оболочки, а знак «-» - к внутреннему слою оболочки.

Для нашего случая

$$\sigma_x^{(u)} = \sigma_{M_0} f_3(\xi) - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_k f_1(\xi);$$

$$\sigma_t^{(u)} = \nu [\sigma_{M_0} f_3(\xi) - \mu \frac{3}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sigma_k f_1(\xi)];$$

$$\sigma_t^{(m)} = \frac{pR}{h} + \mu \sigma_k f_2(\xi) - \frac{\sqrt{3(1-\nu^2)}}{3} \sigma_{M_0} f_4(\xi);$$

$$\sigma_x^{(p)} = \frac{pR}{2h}.$$

(1.30)

где

$$\sigma_{M_0} = \frac{6M_0}{h^2}; \quad \sigma_k = 2\sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \frac{Q_0}{h}$$

(1.31)

Теперь найдем напряжения в краевой зоне днища

Днище

Днище можно рассматривать как эллиптическую оболочку с свободным краем под действием распределенного по краю изгибающего момента M_0 и перерезывающей силой Q_0 . Определить усилия и моменты, а значит и напряжения можно приближенным методом Штаермана – Геккелера.

Метод основан на том, что на краю угол наклона нормали θ велик (в нашем случае он равен $\pi/2$). При этом, при осесимметричном изгибе около края возникает значительное растяжение (сжатие); в следствие этого, изгибные деформации в оболочке быстро затухают и на небольшом расстоянии от края

уже полностью отсутствуют как в осесимметрично нагруженной цилиндрической оболочке. На этой аналогии основан метод расчета оболочек вращения с большим углом подъема, нагруженных только краевыми нагрузками. В этом методе использованы следующие допущения.

Все функции, характеризующие напряжения и деформации в оболочке около края, а также их первые производные малы по сравнению со старшими производными. Это допущение основано на том факте, что рассматриваемые функции содержат множитель вида $e^{-k\omega}$, где ω – угол или дуга, отсчитываемая от рассматриваемого края оболочки, k – параметр. При дифференцировании этих функций этот параметр выходит каждый раз в виде множителя. Так как все функции, о которых идет речь *быстрозатухающие*, то величина параметра k велика, поэтому первые производные больше чем сами функции, а вторые производных больше первых производных и т.д. На этом основании члены, содержащие сами функции и их первые производные в левых частях разрешающих уравнений отбрасываются. В результате уравнения равновесия будут иметь вид

$$\frac{R_t}{R_m} \frac{d^2 V}{d\theta^2} = EhR_m \mathcal{G}, \quad \frac{R_t}{R_m} \frac{d^2 \mathcal{G}}{d\theta^2} = -\frac{R_m V}{D}. \quad (1.32)$$

где $V = QR_t$ – переменная Мейснера.

Радиусы кривизны в краевой зоне принимаются постоянными. Это допущение точно выполняется для сферических оболочек, а для других типов оно тем точнее, чем ближе форма оболочки к сферической.

Уравнения (32) можно привести к одному уравнению. Продифференцировав дважды первое уравнение с учетом второго допущения и подставив во второе

уравнение $\frac{d^2 \mathcal{G}}{d\theta^2}$, получим разрешающее уравнение краевого эффекта

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} + \frac{R_m^4 Eh}{R_t^2 D} V = 0. \quad (1.33)$$

Введем обозначение

$$\frac{R_m^4 Eh}{R_t^2 D} = R_m^4 \frac{12(1-\nu^2)}{R_t^2 h^2} = 4\alpha^4 \quad \text{или} \quad \alpha = R_m \sqrt[4]{\frac{3(1-\nu^2)}{R_t^2 h^2}} \quad (1.34)$$

Тогда

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} + 4\alpha^4 V = 0 \quad (1.35)$$

Уравнение (1.35) по своей структуре совершенно аналогично однородному уравнению (1.24) осесимметричной деформации цилиндрических оболочек.

Введем новую независимую переменную (см. допущение 1) ω – угловую координату, отсчитываемую от края оболочки. Если рассматривается нижний край оболочки, то

$$\omega = \theta_k - \theta,$$

Если верхний край, то

$$\omega = \theta - \theta_k.$$

Так как в обоих случаях

$$\frac{d^4 V}{d\theta^4} = \frac{d^4 V}{d\omega^4},$$

то при переходе к новой переменной вид уравнения не изменится

$$\frac{d^4 V}{d\omega^4} + 4\alpha^4 V = 0.$$

(1.36)

После рассуждений, аналогичных рассуждениям относительно вида решения уравнения (1.24), получим

$$V = e^{-\alpha\omega} (C_1 \sin \alpha\omega + C_2 \cos \alpha\omega)$$

(1.37)

При дифференцировании (1.37) следует учитывать, что на верхнем крае угол ω отсчитывается в сторону возрастания θ , поэтому $\frac{dV}{d\theta} = \frac{dV}{d\omega}$. На нижнем краю направление отсчета противоположное, поэтому $\frac{dV}{d\theta} = -\frac{dV}{d\omega}$.

$$\frac{dV}{d\theta} = \pm \alpha e^{-\alpha\omega} [C_1 (\cos \alpha\omega - \sin \alpha\omega) - C_2 (\cos \alpha\omega + \sin \alpha\omega)];$$

$$\frac{d^2 V}{d\theta^2} = \pm 2\alpha^2 e^{-\alpha\omega} [C_1 (-\cos \alpha\omega) + C_2 \sin \alpha\omega];$$

$$\frac{d^3 V}{d\theta^3} = \pm 2\alpha^3 e^{-\alpha\omega} [C_1 (\cos \alpha\omega + \sin \alpha\omega) + C_2 (\cos \alpha\omega - \sin \alpha\omega)]. \quad (1.38)$$

Здесь знаки вверху – для верхнего края, внизу – для нижнего.

Так в данном случае рассматриваются только краевые нагрузки, то

$$p_1 = 0; \quad p_2 = 0; \quad F(\theta) = 0; \quad \Phi(\theta) = 0.$$

В этом случае внутренние силовые факторы и перемещения связаны с функцией V следующими зависимостями

$$\begin{aligned}
T_m &= -\frac{V}{R_t} ctq\theta; & T_t &= -\frac{1}{R_m} \frac{dV}{d\theta}; & Q &= \frac{V}{R_t}; \\
\mathcal{G} &= \frac{R_t}{R_m^2 Eh} \frac{d^2 V}{d\theta^2}; & M_m &= -D \frac{1}{R_m} \frac{d\mathcal{G}}{d\theta} = -\frac{R_t D}{R_m^3 Eh} \frac{d^3 V}{d\theta^3}; \\
M_t &\cong \nu M_m; & \varepsilon_t &= \frac{1}{Eh} (T_t - \nu T_m); & \xi &= \varepsilon_t r.
\end{aligned} \tag{1.39}$$

Граничные условия в нашем случае выглядят так

$$\begin{aligned}
&\text{при } \omega = 0 & M_m &= M_0; & Q &= Q_0. \\
&\text{Тогда}
\end{aligned} \tag{1.40}$$

$$\begin{aligned}
M_0 &= m \frac{R_m}{2R_t \alpha} (C_1 + C_2), \\
Q_0 &= \frac{1}{R_t} C_2.
\end{aligned}$$

Отсюда

$$C_2 = Q_0 R_t; \quad C_1 = m \frac{M_0 2R_t \alpha}{R_m} - Q_0 R_t.$$

Выражения для внутренних усилий и перемещений примет вид

$$\begin{aligned}
T_m &= ctq\theta \left[\pm M_0 \frac{2\sigma}{R_m} e^{-\alpha\omega} \sin \alpha\omega \mp Q_0 e^{-\alpha\omega} (\cos \alpha\omega - \sin \alpha\omega) \right]; \\
T_t &= \frac{2\alpha R_t}{R_m} \left[\begin{array}{l} + \\ + \end{array} M_0 \frac{\alpha}{R_m} e^{-\alpha\omega} (\cos \alpha\omega - \sin \alpha\omega) \pm Q_0 e^{-\alpha\omega} \cos \alpha\omega \right]; \\
M_m &= M_0 e^{-\alpha\omega} (\cos \alpha\omega + \sin \alpha\omega) \pm \frac{Q_0 R_m}{\alpha} e^{-\alpha\omega} \sin \alpha\omega; \\
M_t &= \nu M_m; \\
\mathcal{G} &= \pm M_0 \frac{R_m}{\alpha D} \begin{array}{l} + \\ + \end{array} Q_0 \frac{R_m^2}{2\alpha^2 D} e^{-\alpha\omega} (\cos \alpha\omega + \sin \alpha\omega)
\end{aligned} \tag{1.41}$$

На краю оболочки при $\omega = 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G} = \mathcal{G}_k &= \frac{M_0 R_m}{\alpha D} + \frac{Q_0 R_m}{2\alpha^2}; \\
T_t =^+ & M_0 \frac{2\alpha^2 R_t}{R_m^2} \pm Q_0 \frac{2\alpha R_t}{R_m}; \\
T_t =^- & Q_0 ctq\theta_k = 0; \\
\varepsilon_{t0} &= \frac{1}{Eh} \left[M_0 \frac{2\alpha^2 R_t}{R_m^2} \pm Q_0 \frac{2\alpha R_t}{R_m} + \nu Q_0 ctq\theta_k \right].
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Верхние знаки относятся к верхнему краю оболочки, а нижние – к нижнему.

Задаваясь определенным шагом θ , например $\Delta\theta = 5^\circ$, вычисляем внутренние усилия и моменты от вершины днища $\theta = 0$ до края оболочки $\theta = \theta_n = 90^\circ$.

При действии на оболочку произвольной осесимметричной нагрузки, например внутреннего избыточного давления, к решению (42) нужно добавить безмоментное решение, найденное по формулам (18).

Порядок проведения теоретического расчета

Расчеты напряжений в стенках обечайки и днища рекомендуется проводить в следующей последовательности.

1. Определить окружное и осевое мембранные напряжения в стенке цилиндрической обечайки:

$$\sigma_t = \frac{pD}{2h}; \quad \sigma_x = \sigma_m = 0.5\sigma_t.$$

где D – диаметр срединной поверхности обечайки, $D = 314\text{мм}$

h – толщина стенки обечайки, $h = 4\text{мм}$.

p – давление в цилиндре. $p = 0,4 - 0,6\text{МПа}$

2. Окружное и осевое напряжения в эллиптическом днище по безмоментной теории. Для этого определить кривизну в вершине эллипса R_0 по формуле (1.16) и параметр формы эллипса по формуле (1.17) при $H = 0.25D$. Расчет произвести для нескольких значений угла θ от 0 до края днища через 5° .

3. Определить внутренние силы и моменты, а также радиальные перемещения и угол наклона нормали вблизи края обечайки. Для этого по формулам (1.22) и

(1.28) вычислить D и β , затем, решив систему (1.23), найти M_0, Q_0 . Зная M_0, Q_0 , перемещения w и угол поворота нормали ϑ , а также внутренние усилия и моменты T_x, M_x, Q_x на расстоянии x от края оболочки $x = 0$ до $x = l_{кр}$ (найденного по формуле (1.14)). Значения x выбрать равными в соответствии с координатами наклейки датчиков. Внутренние силы и моменты, а также радиальное перемещение и угол поворота нормали считать по формулам (1.26), используя (1.27) и таблицу 1.

4. Определить напряжения вблизи края эллиптического днища по формулам (1.29), воспользовавшись формулами (1.41) для определения внутренних усилий и моментов.

5. Добавить к напряжениям, действующим в краевой зоне напряжения от действия внутреннего давления по формулам (1.29), но внутренние усилия определять по формулам (1.18).

6. Построить эпюру окружных напряжений на контуре резервуара. Показать разрыв окружных напряжений в стыке обечайки и днища.

Описание лабораторной установки

Установка состоит из тонкостенного стального цилиндра 1 с толщиной стенок 4 мм. и эллиптическими днищами 2, так же толщиной 4 мм., поршневого компрессора 3, служащего для создания внутреннего давления, ресивера 4 для сглаживания пульсаций давления после поршневого компрессора. Сосуд снабжен предохранительным клапаном 5. Контроль давления осуществляется манометром 6. Датчики Т1 – Т3 наклеены в меридиональном направлении обечайки и днища, причем вблизи стыка с шагом 10 мм (с меньшим шагом не позволяет база датчика). При удалении от стыка шаг датчиков увеличен. В радиальном направлении датчики Т4 – Т5 наклеены с одинаковым шагом на расстоянии $l = 5\text{мм} < l_{кр}$ от края обечайки, а Т5 – Т6 на расстоянии $l = 20\text{мм} > l_{кр}$. Аналогично, наклеены датчики Т7-Т9 на днище с шагом 5 мм. и датчики Т10-Т12 на обечайке в окружном направлении (на схеме не показаны).

В состав лабораторной установки входит многоканальная тензометрическая установка ММТС – 64.01, предназначенная для сбора и измерения сигналов с тензодатчиков, термопар и термопреобразователей с последующей обработкой и регистрацией измерительной информации средствами вычислительной техники. Используется схема включения датчиков по схеме «1/4 мост», компьютер с «USB» - портом. Схема установки дана на рисунке 1.

Порядок выполнения работы

Убедиться, что датчики подключены к хост-контроллеру, для чего соединительные кабели от датчиков должны быть подключены к соответствующим входам хост-контроллера. Включить хост-контроллер и компьютер.

Включить компрессор, для чего подключить кабель питания к розетке трехфазного электропитания и включить кнопку «пуск». Выждать некоторое время, пока давление в ресивере не достигнет требуемого уровня.

Снять показания с монитора. Провести 5 параллельных замеров и по их результатам произвести статистическую обработку эксперимента.

Содержание отчета по работе

1. Номер и наименование работы.
2. Эскизы и расчетные схемы для резервуара.
3. Теоретические расчеты напряжений в обечайке и днище и вблизи стыка днища и обечайки.
4. Обработка экспериментальных данных. По результатам теоретических расчетов и экспериментальным данным построить графики осевых и окружных напряжений в зависимости от расстояния от края.
5. Выводы по работе. Анализ теоретических и экспериментальных результатов.

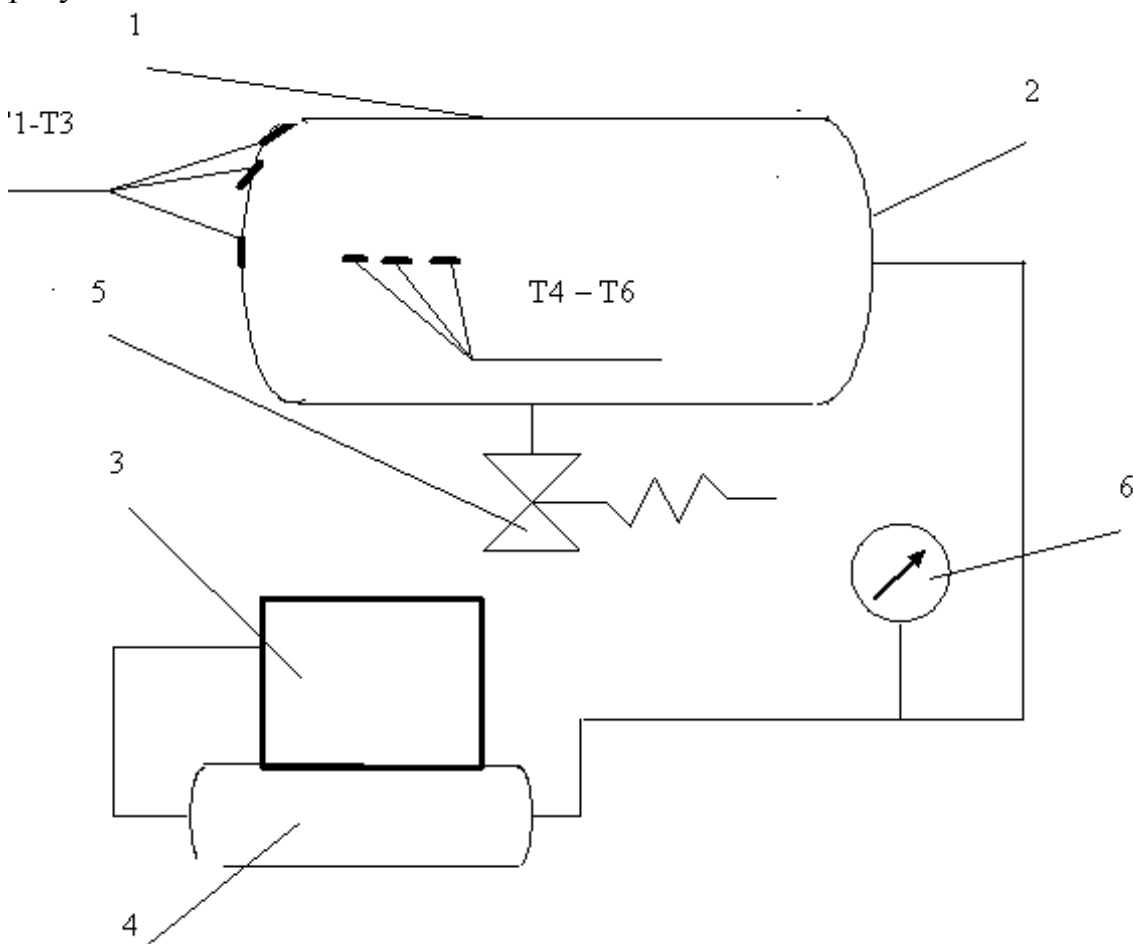


Рисунок 1 - Схема лабораторной установки по изучению напряженно-деформированного состояния цилиндрического сосуда с эллиптическими днищами под действием внутреннего избыточного давления.

2 Лабораторная работа 2

Определение напряжений, действующих в стенках цилиндрического сосуда под действием внешнего избыточного давления и осевой сжимающей силы

Цель работы

Определение теоретическим расчетом безмоментных напряжений и напряжений вблизи края оболочки, а также критического давления и критического числа волн, экспериментальная проверка результатов теоретических расчетов.

Теоретическая часть

В нашем случае, сосуд, напряженное состояние которого рассматривается, представляет собой цилиндрическую оболочку плоским дном с одного края и приваренную встык другим краем к массивному флянцу с центральным отверстием, равным внутреннему диаметру оболочки. Этот сосуд вставляется в другой такой же сосуд, но с внутренним диаметром, большим, чем наружный диаметр первого сосуда и большей длины. Флянцы обоих сосудов соединены шпильками через паронитовую прокладку. В пространство между сосудами накачивается под давлением жидкость, так, что первый – внутренний сосуд находится под действием наружного давления, а внешний сосуд находится под действием внутреннего давления.

При расчете критических нагрузок пластин и оболочек, кроме общепринятых гипотез Кирхгофа-Лява, вводят дополнительные упрощения. Так, например, пренебрегают местными изгибными напряжениями, возникающими вблизи мест закрепления краев, и учитывают только общие безмоментные напряжения; при составлении уравнений равновесия обычно опускают слагаемые, связанные с изменением размеров элемента срединной поверхности.

Введем следующие обозначения

R , h , L – соответственно радиус срединной поверхности, толщина стенки, длина обечайки;

E , ν – модуль Юнга и коэффициент Пуассона;

$\rho = L / R$ – относительная длина оболочки;

$$\eta = \sqrt[4]{3(1-\nu^2)} \sqrt{\frac{R}{h}} \quad \text{параметр оболочки;} \quad (2.1)$$

σ_m , σ_t – меридиональное и окружное напряжения соответственно.

Для цилиндрических оболочек меридиональное направление совпадает с

осевым, поэтому далее меридиональное напряжение будем называть осевым, а напряжение соответственно осевым напряжением σ_x ;

τ - касательное напряжение;

P - осевая сжимающая сила;

q - равномерно распределенное наружное давление;

$P_{кр}, q_{кр}$ - критические значения нагрузок в том случае, когда они действуют раздельно. Эти нагрузки вызывают сжатие оболочки;

$n_{кр}$ - число волн в окружном направлении;

$$D = \frac{Eh}{12(1-\nu^2)} \quad \text{- цилиндрическая жесткость оболочки; (2.2)}$$

Q - перерезывающая сила в поперечном сечении на единицу длины срединной поверхности оболочки;

T_x - осевая внутренняя сила;

T_t - окружная внутренняя сила;

M_t - изгибающий момент в продольном сечении оболочки, приходящийся на единицу длины срединной поверхности;

M_x - изгибающий момент в поперечном сечении, приходящийся на единицу длины срединной поверхности оболочки.

На одном краю оболочки установлено плоское дно, воспринимающая давление, поэтому осевая сжимающая сила $P = \pi R^2 p$ и безмоментные усилия и напряжения будут

$$\begin{aligned} T_x &= \frac{pR}{2}; & T_t &= pR; \\ \sigma_x &= \frac{pR}{2h}; & \sigma_t &= \frac{pR}{h}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Для вычисления напряжений у края оболочки нужно определить M_x, M_t, T_t .

Граничные условия в нашем случае имеют вид

$$x = 0; \quad w = 0; \quad w' = \mathcal{G} = 0. \quad (2.4)$$

т.е. радиальное смещение обечайки и угол наклона нормали от радиального направления на самом краю обечайки отсутствуют. При таких условиях на расстоянии x от края обечайки

$$w(x) = \frac{pR^2}{Eh} [1 - f_3(\xi)]; \quad w(0) = 0;$$

$$\mathcal{G}(x) = w'(x) = 2\beta \frac{pR^2}{Eh} f_2(\xi); \quad \mathcal{G}(0) = 0;$$

$$M_x(x) = \frac{P}{2\beta^2} f_4(\xi); \quad M_x(0) = \frac{P}{2\beta^2}.$$

$$M_t = \nu M_x; \quad T_t = \frac{Ehw(x)}{R}. \quad (2.5)$$

Напряжения, действующие на элемент ячейки, будут
а). напряжения в поперечном сечении

$$\sigma_x = \frac{pR}{2h} m \frac{6M_x}{h^2}; \quad (2.6)$$

б). напряжения в продольном сечении

$$\sigma_t = \frac{pR}{h} m \frac{6M_t}{h^2}. \quad (2.7)$$

Здесь знак «-» относится к наружному слою оболочки, а знак «+» - к внутреннему.

Расчет оболочки на устойчивость

Элементы тонкостенных конструкций (стержни, пластины, оболочки) могут разрушаться в результате потери устойчивости формы оболочки. Устойчивой формой оболочки называется форма, в которой оболочка может находиться как угодно долго. Обычно упругая система, нагруженная постоянно и непрерывно увеличивающейся нагрузкой, теряет устойчивость резко, скачком, переходя к новой форме устойчивого равновесия. Нагрузка, при которой происходит эта потеря устойчивости, называется критической нагрузкой, причем уровень напряжений в оболочке могут быть значительно ниже предела текучести. Тонкостенная цилиндрическая оболочка, нагруженная внешним давлением, может потерять устойчивость формы. При этом, круговая форма ее поперечного сечения, может перейти, например, в эллиптическую и сплющивается, хотя напряжения ниже предела текучести. Цилиндрическая оболочка может потерять устойчивость при осевом сжатии, кручении, поперечном изгибе и т.д. Следует отметить, что потеря устойчивости происходит из-за неизбежных начальных отклонений в форме срединной поверхности оболочки от идеальной. Величина критической нагрузки или критического напряжения зависят также от условий закрепления оболочки, соотношения размеров, вида действующей нагрузки и т.д.

При потере устойчивости оболочек, помимо напряжений изгиба в срединной поверхности, возникают различные дополнительные напряжения. Согласно линейной теории рассматривают случаи, когда потеря формы

равновесия путем выпучивания, сопровождается возникновением относительно мелких волн. Размеры этих волн малы по сравнению с толщиной стенки оболочки. В случае потери устойчивости с образованием осесимметричных волн, длина их значительно меньше длины оболочки.

В нашем случае мы имеем сжатие оболочки внешним давлением p при наличии сжимающей осевой силы P .

Напряжения в оболочке

$$\sigma_m = \sigma_x = \frac{P}{2\pi R h}; \quad \sigma_t = -\frac{pR}{h} \quad (q > 0); \quad \tau = 0. \quad (2.8)$$

Влияние осевой сжимающей силы проявляется в понижении критического давления. В том случае, когда имеет место всестороннее гидростатическое сжатие

$$P = -\pi q R^2. \quad (2.9)$$

Критическое давление при гидростатическом сжатии определяют по второй формуле фон Мизеса

$$q_{кр} = \frac{Eh^3(n^2 + \mu^2)^2}{12(1-\nu^2)R^3\left(n^2 + \frac{1}{2}\mu^2\right)} + \frac{Eh}{R} \frac{\mu^4}{(n^2 + \mu^2)\left(n^2 + \frac{1}{2}\mu^2\right)}$$

где

$$\mu = \pi \frac{R}{l} \quad (2.10)$$

Целое положительное число n подбирают таким, чтобы выражение для q приняло минимальное значение. Критическое число волн n близко к числу

$$n_{кр} = 1,63 \sqrt[4]{\frac{2R}{h}} \cdot \sqrt{\frac{2R}{l}} \quad (2.11)$$

Полученное значение нужно округлить до ближайшего целого.

Для оболочек средней длины влияние осевой составляющей невелико, поэтому для

$$\frac{1}{2\eta^2} = \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^2 = 2\eta^2 \quad (2.12)$$

можно критическое давление вычислять по формуле Папковича

$$q_{кр} = \frac{2\pi Eh^2}{3\sqrt{6}(1-\nu^2)Rl} \sqrt{\frac{h}{R}} \approx 0,918 \frac{Eh}{Rl} \sqrt{\frac{h}{R}} \quad (2.13)$$

При любом соотношении q и P в практических расчетах можно пользоваться приближенным соотношением

$$P = \alpha_c P_{кр} \left(1 - \frac{q}{|q_{кр}|} \right) \quad (2.14)$$

где

$\frac{R}{h}$	250	500	750	1000	1500
α_c	0,3	0,23	0,2	0,165	0,15

Порядок проведения теоретического расчета

1. Определить напряжения в обечайке вдали от края оболочки по формулам (2.8) и (2.9).
2. Определить напряжения вблизи края оболочки через 2 мм от края оболочки $x = 0$ до $x = l_{кр}$. по формулам (2.6) и (2.7). Для определения моментов M_x и M_t использовать формулы (2.5). $l_{кр}$ определяется по формуле (1.9).
3. Проверить длину оболочки. Для этого необходимо проверить, какому условию удовлетворяет длина оболочки:

a. $\eta\rho > 3$

b. $\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^2 < \frac{1}{2\eta^2};$

c. $\frac{1}{2\eta^2} < \left(\frac{\pi}{\rho}\right)^2 < 2\eta^2;$

d. $\left(\frac{\pi}{\rho}\right)^2 > 2\eta^2;$

e. $\rho \geq \eta.$

(2.15)

4. Если выполняется условие a , то оболочка очень короткая. Расчет в этом случае производится по специальной методике. Потери устойчивости в этом случае может отсутствовать. Если выполняется условие b , то оболочка короткая и расчет критического давления производят по второй формуле Мизеса. Если выполняется условие c, d, e , то расчет критического давления производится по формуле Папковича.

Для сварных оболочек рекомендуется значения критических давлений уменьшить на 15%.

5. Найти предполагаемое число волн по формуле (2.11).

Описание лабораторной установки

Схема лабораторной установки показана на рисунке 2. Лабораторная установка состоит из двух цилиндрических резервуаров, одна из которых короче и меньшего диаметра, чем у второго резервуара. Первый резервуар вставляется внутрь второго и соединяется с ним с помощью фланцевого соединения. В образовавшееся пустое пространство между резервуарами нагнетается масло с помощью ручного плунжерного насоса 3. При этом первый резервуар 1 испытывает наружное давление, а резервуар 2 испытывает внутреннее давление. Исследуется напряженно-деформированное состояние первого резервуара 1. Для этого на внутренней поверхности цилиндрической обечайки первого сосуда наклеены датчики 6. Для контроля давления жидкости служит манометр 3. Для поддержания давления в пространстве между сосудами длительное время служит вентиль 4. Для создания давления жидкости служит ручной насос 5.

Порядок выполнения работы

1. Включить компьютер и тензометрическую систему ММТС-64.01
2. Открыть вентиль 4 и накачать жидкость в полость между цилиндрами до требуемого давления.
3. Снять показания с монитора данные после статистической обработки результатов измерений. Для этого провести 5 параллельных измерений при каждом значении давления.

Содержание отчета

1. Номер и наименование работы.
2. Расчет безмоментных и краевых напряжений в радиальном и окружном направлениях под действием наружного давления в зависимости от расстояния от дна сосуда.
3. Расчет критического давления и предполагаемого числа волн.
4. Экспериментальные данные и их обработка.
5. Результаты расчетов и экспериментальные данные в виде графика. Построить эпюры окружных напряжений. По эпюре окружных напряжений определить число волн.

5. Дать анализ теоретических и экспериментальных результатов.

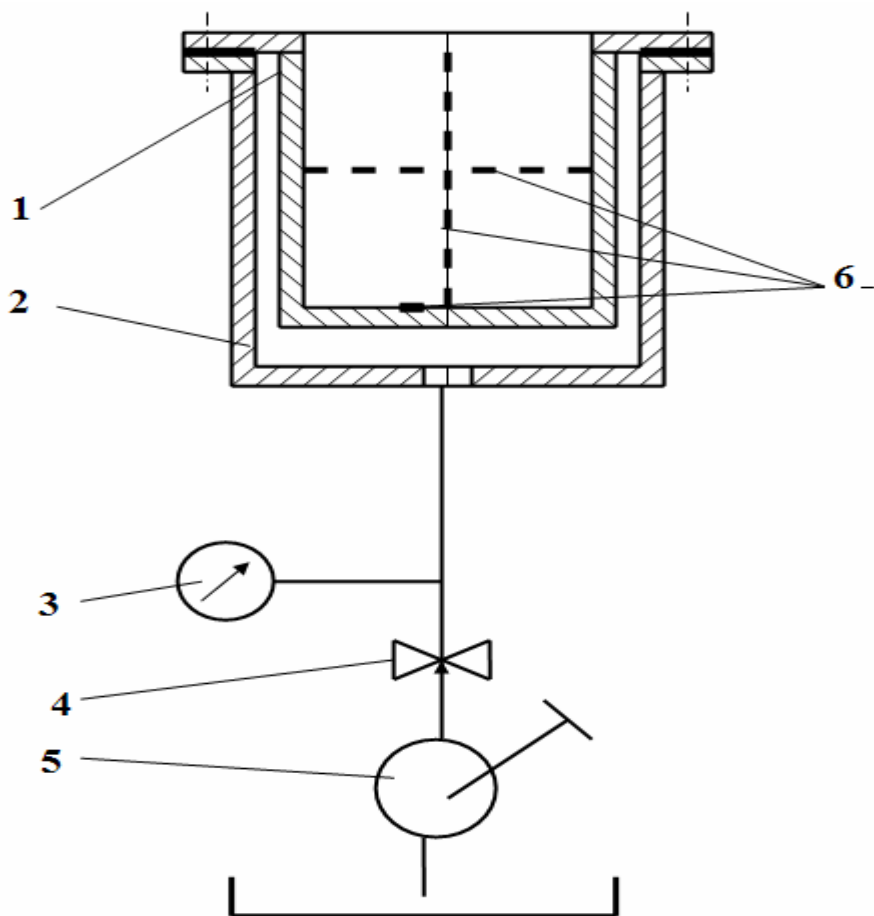


Рисунок 2 – Схема лабораторной установки для исследования напряженно-деформированного состояния цилиндрического резервуара под действием наружного давления и осевой сжимающей силы.

|

3 Лабораторная работа 3

Исследование напряженно-деформированного состояния колец при нагружении их сосредоточенными силами в плоскости кольца

Цель работы. Определение теоретическим расчетом напряжений и деформаций у детали кольцевой формы при нагружении в плоскости кольца сосредоточенной силой и экспериментальное определение напряжений при различных нагрузках и расстояниях между опорными точками.

Теоретическая часть

Все действующие на кольцо нагрузки можно разложить на две составляющие: действующие в плоскости кольца и действующие нормально плоскости кольца. Нагрузки, действующие нормально плоскости кольца называют еще нагрузками, действующими *из плоскости кольца*. Рассмотрим напряженно-деформированное состояние кольца на двух катковых опорах при действии сосредоточенной силы P , приложенной вертикально по диаметру, деляющим угол между опорами пополам.

Теория расчета замкнутого кольца основана на следующих допущениях

1. Одна из главных осей инерции сечений кольца располагается в плоскости кольца.
2. Кольцо является нерастяжимым, то есть длина срединной линии до и после деформации остается одинаковой.
3. Применима гипотеза плоской нормали.
4. Поперечное сечение кольца не деформируется при его нагружении, то есть расстояние между двумя произвольными точками поперечного сечения остается неизменным.
5. Деформации кольца малы и поэтому уравнения, написанные для недеформированного состояния, справедливы и для деформированного состояния.

Обозначения

φ - угловая координата текущего сечения кольца;

φ_i – угловая координата сечения, в которой приложена i -ая внешняя сосредоточенная нагрузка;

P_i – внешняя сосредоточенная сила, приложенная в i -ом сечении кольца;

N, Q, M - нормальная сила, перерезывающая сила, изгибающий момент в текущем сечении кольца;

v, w, u - смещения сечений кольца в окружном, радиальном направлениях и по бинормали;

$\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_k$ – углы поворота сечений стержня в его плоскости, перпендикулярно к ней и угол закручивания;

J_1, J_2, J_k, F – моменты инерции сечения относительно осей, момент инерции кручения (полярный момент инерции относительно центра поперечного сечения кольца), площадь сечения;

r – радиус оси поперечного сечения кольца;

EJ, GJ_k – жесткость кольца на изгиб и свободное кручение.

При $r/h > 5$ кольцо называется тонким или кольцом малой кривизны; при $r/h < 5$, кольцо называется кольцом большой кривизны.

Кольцо под действием внешних нагрузок является трижды внутренне статически неопределимой. Это означает, что внутренние силовые факторы в сечении кольца могут быть определены только в результате решения трех уравнений перемещений.

В нашем случае кольцо нагружено радиальной сосредоточенной силой P и двумя реакциями опор R_1 и R_2 которые, в силу симметрии нагружения, равны между собой $R_1 = R_2 = R$. Из условия равновесия кольца имеем (рисунок 3)

$$2R \cos \alpha - P = 0,$$

отсюда

$$R = \frac{P}{2 \cos \alpha}. \quad (3.1)$$

Угол φ будем отсчитывать от нижней точки вертикального диаметра. Чтобы раскрыть статическую неопределенность разрежем кольцо по

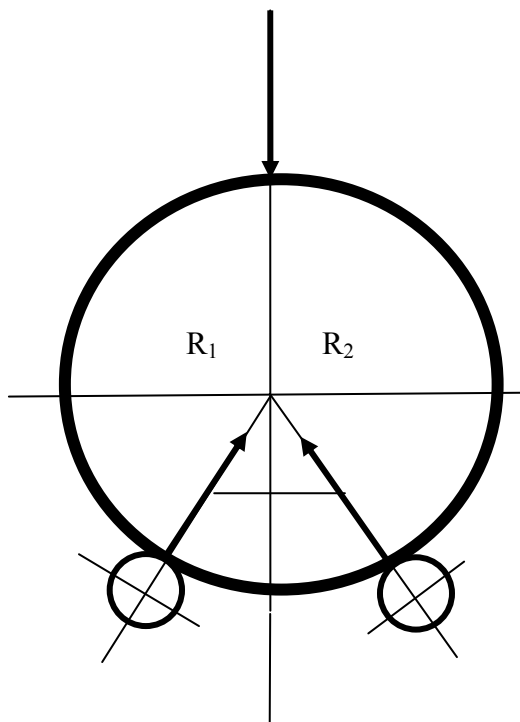


Рисунок 3 - Схема нагружения кольца

сечению $\varphi = 0$, приложим неизвестные силовые факторы X_1 , X_2 , X_3 , действующие в этом сечении (рисунок 4). Здесь X_1 – изгибающий момент, X_2 – растягивающая (сжимающая) сила, X_3 – перерезывающая сила.

Считая кольцо тонким, а также принимая, что деформации растяжения и сдвига пренебрежимо малы по сравнению с деформациями изгиба, и применяя для вычисления перемещений интеграл Мора в следующем виде

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \oint \frac{M M^{(1)} r d\varphi}{E J_x} = 0, \\ \delta_2 &= \oint \frac{M M^{(2)} r d\varphi}{E J_x} = 0, \\ \delta_3 &= \oint \frac{M M^{(3)} r d\varphi}{E J_x} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

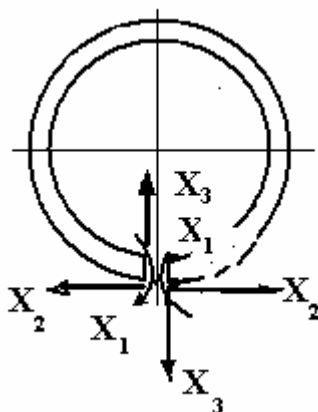


Рисунок 4 - Силовые факторы, действующие в сечении, по которому разрезано кольцо

где

$$\begin{aligned} M^{(1)} &= 1, \\ M^{(2)} &= 1 \cdot r(1 - \cos \varphi), \\ M^{(3)} &= 1 \cdot r \sin \varphi / \end{aligned} \tag{3.3}$$

- это изгибающие моменты в текущем сечении кольца от единичных нагрузок, соответствующих неизвестным силовым факторам X_1 , X_2 , X_3 , M – суммарный изгибающий момент в текущем сечении от заданных нагрузок и от неизвестных силовых факторов X_1 , X_2 , X_3 . Подставив в подинтегральные

выражения интегралов (2) значения моментов (3), и сократив на постоянный множитель EJ_x , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} M d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} M \cos \varphi d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} M \sin \varphi d\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Изгибающий момент в текущем сечении φ может быть представлен в виде суммы

$$M = X_1 + X_2 r(1 - \cos \varphi) + X_3 r \sin \varphi + \bar{M} \tag{3.5}$$

где \bar{M} - момент в текущем сечении только от заданных нагрузок.

Подставляя (3.5) в (3.4) и учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} d\varphi &= 2\pi, & \int_0^{2\pi} \sin \varphi d\varphi &= 0, & \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi &= 0, \\ \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cos \varphi d\varphi &= 0, & \int_0^{2\pi} \cos^2 \varphi d\varphi &= \pi, & \int_0^{2\pi} \sin^2 \varphi d\varphi &= \pi. \end{aligned} \tag{3.6}$$

получим

$$\begin{aligned} X_1 2\pi + X_2 r 2\pi + \int_0^{2\pi} \bar{M} d\varphi &= 0, \\ -X_2 r \pi + \int_0^{2\pi} \bar{M} \cos \varphi d\varphi &= 0, \\ X_3 r \pi + \int_0^{2\pi} \bar{M} \sin \varphi d\varphi &= 0. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В нашем случае внешними нагрузками является R, P, R приложенные в

сечениях $\varphi_1 = \alpha, \varphi_2 = \pi, \varphi_3 = 2\pi - \alpha$. Решая систему (3.7)

относительно X_1, X_2, X_3 получим

$$X_1 = \sum_{i=1}^3 P_i r \chi_{1P}(\varphi_i), \quad X_2 = \sum_{i=1}^3 P_i \chi_{2P}(\varphi_i), \quad X_3 = \sum_{i=1}^3 P_i \chi_{3P}(\varphi_i).$$

где

$$\chi_{1P}(\varphi_i) = \frac{1}{2\pi} (1 + \varphi_i \sin \varphi_i), \quad \chi_{2P} = -\frac{\varphi_i \sin \varphi_i}{2\pi}, \quad \chi_{3P} = -\frac{\varphi_i \cos \varphi_i}{2\pi}. \quad (3.8)$$

В нашем случае

$$X_1 = Rr \frac{1 + \alpha \sin \alpha}{2\pi} + P r \frac{1}{2\pi} + R r \frac{[1 - (2\pi - \alpha) \sin \alpha]}{2\pi}$$

$$X_2 = -R \sin \alpha, \quad X_3 = -\left(R + \frac{P}{2\pi}\right). \quad (3.9)$$

Подставляя (3.9) в (3.5) находим изгибающий момент в текущем сечении M . Для определения

$$\bar{M} = \sum_{i=1}^3 P_i h_i, \quad (3.10)$$

где h_i – длина перпендикуляра, опущенного из текущего сечения на направление силы P_i .

Напряжения в текущем сечении определяем по формуле

$$\sigma = \frac{M}{W}. \quad (3.11)$$

где W – момент сопротивления поперечного сечения кольца.

Выбирая в качестве текущих сечений, сечения через $\Delta\varphi = 5^\circ$ строим эпюру напряжений изгиба в кольце. Так как внешняя нагрузка симметричная, то и эпюру напряжений можно строить на половине кольца для φ от 0 до π .

Порядок проведения теоретического расчета

1. Определить α , исходя из заданного расстояния x , от вертикального диаметра кольца до правой роликовой опоры. Определить α для трех значений x .
2. По формуле (3.1) определить реакции опор R для различных значений α .
3. По формулам (3.9) определить силовые факторы X_1, X_2, X_3 для различных значений α для каждого текущего сечения кольца.
4. По формуле (3.5) вычислить для каждого текущего сечения величину изгибающего момента M , вычисляя значения \bar{M} по формуле (3.10) для различных значений α .

5. Определить напряжения в текущем сечении кольца по формуле (3.11).
6. Построить эпюру напряжений изгиба на половине кольца.

Описание лабораторной установки

Схема установки представлена на рисунке 5.

Установка состоит из рамки 1 и кольца 14. Кольцо опирается на два ролика 2 и 3.

Одна опора – 2 имеет неподвижную ось, а ось опоры 3 установлена в ползуне 4, который может смещаться. Смещение ползуна ролика 3 осуществляется с помощью передачи винт - гайка 5 и маховичка 6. Вращением маховичка 6 изменяется расстояние между осями роликоопор 2 и 3.

Для нагружения кольца служит верхняя рамка 7 с кольцом 8, представляющим собой динамометр. Нажимной винт 9 давит на кольцо 8, а через него усилие нагружения передается на основное кольцо 2 через шток 10. Для изменения усилия нагружения служит маховичок 13; измерения усилия нагружения служит индикатор 11 часового типа. При повороте нажимного винта 9 кольцо 8 деформируется, и эта деформация воспринимается индикатором 11. При смещении роликоопоры 3 меняется положение вертикального диаметра основного кольца 14. Чтобы настроить динамометр так, чтобы ось штока 10 всегда при нагружении совпадала с вертикальным диаметром основного кольца 14, необходимо ослабить болты 12 и переместить соответственно рамку 7 динамометра. При проведении лабораторной работы изменяется расстояние между осями роликоопор x и сила нагружения P . Для измерения деформаций (напряжений) на внутренней поверхности основного кольца 14 наклеены тензодатчики (14 датчиков). Для исключения бокового смещения кольца 8 служат подпружиненные направляющие 15.

Порядок выполнения работы

1. Определить напряжения в сечениях кольца теоретическим расчетом.
2. С помощью маховичка 6 установить требуемое смещение оси роликоопоры
3. Принять значения смещения $l_1 = 148,5 \approx 148_{\text{мм}}$, $l_2 = 210_{\text{мм}}$,
 $l_3 = 258,4 \approx 260_{\text{мм}}$.

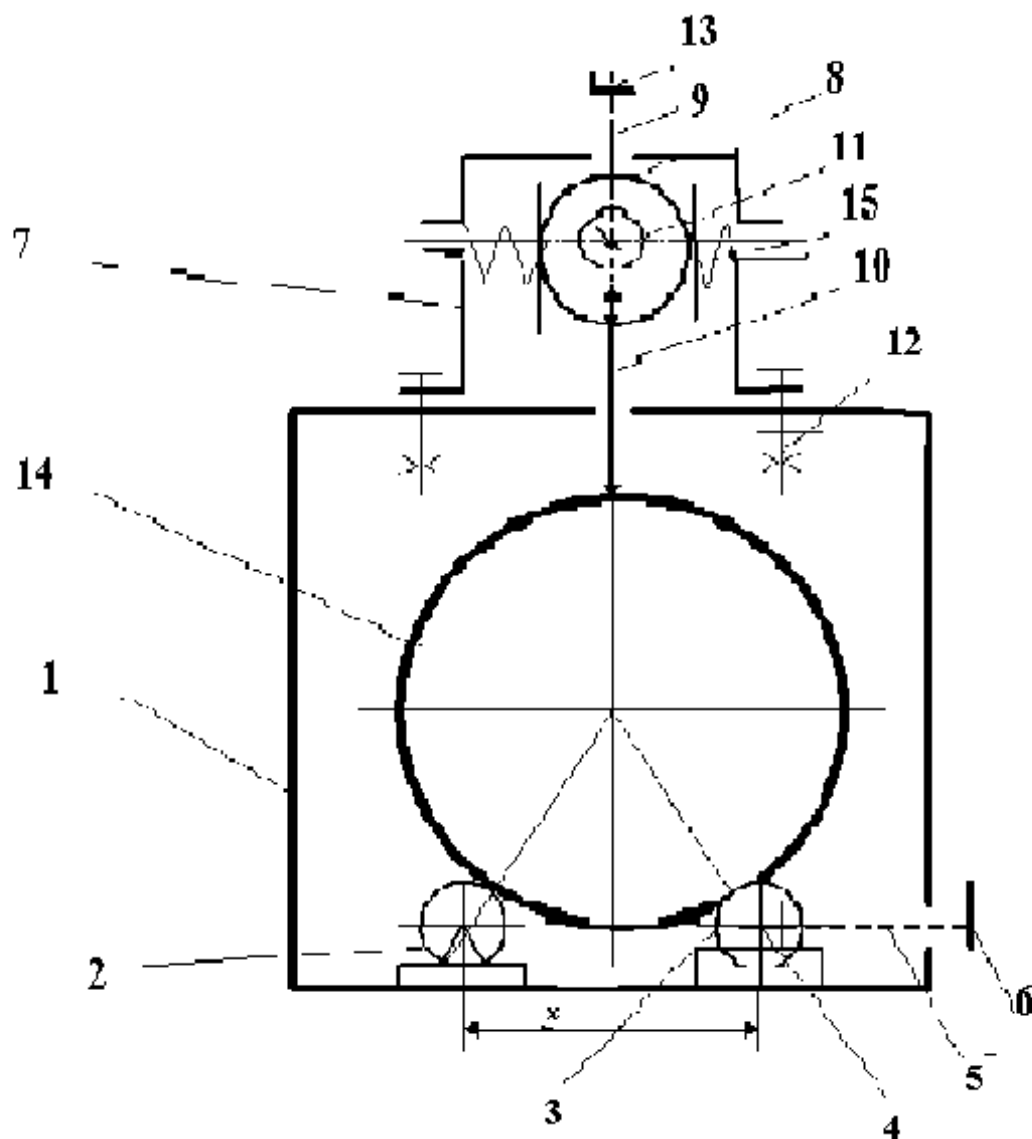


Рисунок 5

Схема лабораторной установки для изучения напряженно-деформированного состояния кольца

4. Совместить ось штока 10 с вертикальным диаметром кольца 14, для чего риски на кольце 14 совместить с отвесом (на схеме не показан), расположенным по оси штока 10. Для этого ослабить болты 12 и сместить рамку 7 до совмещения рисок с отвесом и вновь затянуть болты 12.

5. Установить заданную нагрузку, для чего вращая маховичок 13, установить стрелку индикатора 11 на нужное деление. Тарировочная таблица укреплена на боковой стенке рамки 1.

6 Снять отсчет по монитору. Провести статистическую обработку результатов измерений.

Содержание отчета

1. Номер и наименование работы.
2. Теоретические расчеты к работе.
3. Экспериментальные данные и статистическая обработка результатов измерений.
4. Результаты расчетов и измерений оформленные в виде эпюры на кольце.
5. Анализ теоретических и экспериментальных результатов.

4 Лабораторная работа 4

Исследование крутильных колебаний многомассовых валов

Цель работы

Определение теоретическим расчетом частоты собственных крутильных колебаний двухопорного вала с несколькими массами между опорами и экспериментальное исследование крутильных колебаний вала.

Теоретическая часть

Если повернуть диск с моментом инерции J , насаженным на свободный конец упругого стержня, закрепленного неподвижно другим концом, на некоторый угол φ и освободить диск от приложенного момента, то возникнут свободные крутильные колебания системы диск-стержень.

Если из установившейся угловой скорости $\omega(t)$ вращающегося вала машины вычесть постоянную составляющую ω_0 , то оставшаяся периодическая составляющая угловой скорости будет представлять собой крутильные колебания вала. Таким образом, крутильные колебания – это любая периодическая неравномерность вращения вала.

Пусть задан вал с одним диском с моментом инерции J . Моментом инерции самого вала пренебрегаем, а крутильную жесткость вала обозначим через c , т.е. крутящий момент, необходимый для закрутки вала на один радиан ($c = M_{кр}/\varphi^{H.M./rad}$). Таким образом, вал с диском мы представляем в виде невесомого стержня с сосредоточенной массой в центре диска. Тогда на основании принципа Даламбера (условия равновесия диска под действием реакции упругих связей и момента сил инерции относительно оси вращения) получим дифференциальное уравнение движения диска

$$J\ddot{\varphi} + c\varphi = 0 \quad (4.1)$$

или

$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = 0, \quad (4.2)$$

где

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{J}}$$

Величина ω_c называется круговой (угловой или циклической) частотой собственных колебаний. Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка. Его общее решение имеет вид

$$\varphi = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t \quad (4.3)$$

где постоянные C_1, C_2 определяются из начальных условий.

При начальном отклонении диска $\varphi(0) = \varphi_0$ и нулевой начальной скорости $\dot{\varphi}(0) = 0$ решение уравнения (4.2) имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \cos \omega_c t \quad (4.4)$$

Полученное уравнение описывает незатухающие колебания.

Если крутильно-колеблющаяся система состоит в общем случае из n сосредоточенных масс (дисков) с моментами инерции J_i , соединенных между собой безмассовым (безынерционным) валом в жесткостях c_i (или податливостях $\delta_i = 1/c_i$) между массами. Полагаем, что трение в системе отсутствует; все нелинейные элементы в системе линеаризованы, а колебания происходят с малыми амплитудами.

Система дифференциальных уравнений движения для n -массной системы имеет вид

$$\begin{aligned} J_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ J_2 \ddot{\varphi}_2 + c_{1,2}(\varphi_1 - \varphi_2) + c_{2,3}(\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ \dots & \\ J_i \ddot{\varphi}_i + c_{i-1,i}(\varphi_{i-1} - \varphi_i) + c_{i,i+1}(\varphi_i - \varphi_{i+1}) &= 0; \\ \dots & \\ J_{n-1} \ddot{\varphi}_{n-1} + c_{n-2,n-1}(\varphi_{n-2} - \varphi_{n-1}) + c_{n-1,n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0; \\ J_n \ddot{\varphi}_n + c_{n-1,n}(\varphi_{n-1} - \varphi_n) &= 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Складывая уравнения движения системы, получаем

$$J_1 \ddot{\varphi}_1 + J_2 \ddot{\varphi}_2 + \dots + J_i \ddot{\varphi}_i + \dots + J_n \ddot{\varphi}_n = \sum_{i=1}^n J_i \ddot{\varphi}_i = 0. \quad (4.6)$$

т.е. момент количества движения (кинетический момент) системы относительно оси вращения в процессе собственных колебаний системы остается постоянным, т.к. из (4.6) следует

$$\sum_{i=1}^n J_i \ddot{\varphi}_i = \text{const.}$$

Общее решение системы (4.5) имеет вид

$$\varphi_i = \sum_{i=1}^n A_i \sin(\omega_c^i t + \varepsilon_i) \quad (4.7)$$

где A_i – амплитуда колебаний i -ой массы, ε_i – фазовый угол, ω_c^i – i -ая частота собственных колебаний.

Подставляя (4.7) в (4.5) и сокращая на общий множитель $\sin(\omega_c^i t + \varepsilon_i)$ соответствующих преобразований получим

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 - \omega_c^2 \delta_{1,2} J_1 A_1; \\ &\dots\dots\dots \\ A_i &= A_{i-1} - \omega_c^2 \delta_{i-1,i} \sum_{j=1}^{i-1} J_j A_j \\ &\dots\dots\dots \\ A_n &= A_{n-1} - \omega_c^2 \delta_{n-1,n} \sum_{j=1}^{n-1} J_j A_j. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из системы (4.8) амплитуды A_i определены быть не могут (система незамкнута), но могут быть определены относительные амплитуды

$$a_1 = \frac{A_1}{A_1} = 1, \quad a_2 = \frac{A_2}{A_1}; \quad \dots \quad a_i = \frac{A_i}{A_1}; \quad \dots \quad a_n = \frac{A_n}{A_1}. \quad (4.9)$$

При расчетах обычно принимают $A_1 = 1$. Для каждой собственной частоты ω_c^i значения относительных амплитуд колебаний a_i можно графически изобразить в виде вертикальных отрезков длиной a_i , откладываемых от оси вала в сечениях, соответствующих точкам крепления сосредоточенных масс J_i с учетом знака амплитуды. Соединяя концы соседних отрезков прямыми, получим ломанную линию называемую *формой колебаний*. Форма колебаний показывает относительные амплитуды колебаний каждой массы системы при данной собственной частоте. Таким образом, каждой собственной частоте соответствует своя форма колебаний, называемая собственной формой колебаний. Пересечение формы колебаний с осью вала называется *узлом*. Узловые точки при колебании вала остаются неподвижными. Существует

теорема (теорема Гантмахера – Крейна) по которой в системе с n массами будет максимально $n-1$ узлов.

Безузловая форма, то есть форма колебаний, при которой все массы движутся в одной фазе (все массы одновременно меняют знак перемещения) соответствует наименьшей частоте собственных колебаний. Это частота называется *основной* частотой собственных колебаний. Из общего числа n собственных частот (и форм) колебаний практический интерес представляют только те, которые совпадают с частотой возмущающих моментов и сил, вызывающие резонанс. Чтобы избежать резонанса, необходимо знать собственные частоты, особенно, основную, и ближайшие к ней несколько собственных частот.

Практические способы нахождения частот и форм собственных крутильных колебаний многомассовых систем основаны на решении системы уравнений (4.6) путем последовательных подстановок пробных значений ω^2 . Проверка правильности выбора значений ω^2 выполняется аналитическим или графическим путем. Одним из таких методов является метод остаточного момента или метод Толе.

Метод Толе (остаточного момента).

Если подставить в уравнение (4.6) решения (4.7) и сокращая на общий множитель, получим

$$J_1 A_1 \omega_c^2 + J_2 A_2 \omega_c^2 + \dots + J_i A_i \omega_c^2 + \dots + J_n A_n \omega_c^2 = 0 \quad (4.10)$$

Задавшись некоторым, произвольным значением квадрата частоты ω_c^2 , например $\omega_c^2 = p_1$, и положив $A_1 = 1$, вычисляем по формулам (4.8) амплитуды A_2, A_3, \dots, A_n . Эти значения подставляем в левую часть уравнения (4.10). Если значение p_1 выбрано равным какой-либо частоте собственных колебаний, то уравнение (4.10) будет выполнено, т.е. левая часть будет равна нулю. Если значение p_1 выбрано не равным частоте собственных колебаний, то равенство (4.10) не будет выполнено и левая часть будет равна какому-то числу R , которое называется *остаточным моментом*. Задавая частоте ω_c^2 различные значения p_2, p_3, \dots , получим соответствующие значения остаточного момента $R(p_2), R(p_3) \dots$. Строим график остаточного момента $R = R(p)$, откладывая по оси абсцисс p , а по оси ординат – соответствующие значения остаточного момента R . Точки пересечения кривой остаточного момента оси абсцисс есть частоты собственных колебаний.

Вычисление остаточных моментов удобно расположить в расчетные схемы в табличной форме.

Таблица 1

(M)	1	2	3	4	5	6	(a_i)
		M	δ	$-J p^2$	A		
		$-J_1 p^2 a_1$	←	$-J_1 p^2$	$a_1 = 1$	1	
	1 - 2	$-J_1 p^2 a_1$	δ_1	→		↓	
	↓		←	$J_2 p^2$	←	2	
	2 - 3		δ_2	→		↓	
	↓		←	$J_3 p^2$	←	3	
	3 - 4		δ_3	→		↓	
				$J_4 p^2$	←	4	
	4 - 5	δ_4		→			
			←	$J_5 p^2$		5	
		$R(p) =$					

В основной своей части она состоит из 6 столбцов. Столбец 1 содержит нумерацию участков, а столбец 6 – нумерацию маховых масс, причем строки участков чередуются со строками масс. Столбцы 3 и 4 содержат соответственно податливости δ_i (или жесткости c_i) и произведения моментов инерции J_i на квадрат выбранного значения частоты p^2 . Эти столбцы заполняются с самого начала, причем податливости помещаются в строках участков, а произведения $J_i p^2$ – в строках масс. В столбцах 5 располагаются вычисленные по формулам (4.6) амплитуды маховых масс и в столбце 2 – крутящие моменты на участках вала.

Заполнение этих столбцов производится в следующем порядке. Записав амплитуду ревой массы $a_1 = 1$ в первую клетку 5-го столбца, умножаем на $-J_1 p^2$ и результат пишем в первой клетке 2-го столбца. Это – крутящий момент на первом участке; его без изменений переписываем в том же столбце в строку первого участка (1 – 2). Далее умножаем этот момент на податливость δ_1 и произведение подписываем (в той же строке 1 – 2) под первой амплитудой. Сумма первой амплитуды и только что полученного произведения $-J_1 p^2 \delta_1$, согласно первой формуле (6) даст амплитуду 2-ой массы. С этой амплитудой поступаем также как и с первой; только, получив произведение $-J_2 p^2 a_2$, мы его не просто переписываем в строку второго участка (2 – 3), а прибавляем к предыдущему моменту M_1 (в том же столбце 2) и в строке второго участка ставим полученную сумму. Дальнейшие вычисления ведутся в аналогичном порядке. При этом в 5-ом столбце, в строках масс, получают амплитуды, а в строках участков – произведения

$$-\delta_1 \sum J_i p^2 a_i,$$

которые согласно уравнения (6) нужно прибавить к предыдущей амплитуде, чтобы получить следующую.

Остаточный момент получится в дополнительной строке, которую можно было бы считать относящейся к $(n, n+1)$ -му, несуществующему участку. Для контроля вычисления остаточного момента следует провести еще один раз с тем же значением p^2 , но в обратном порядке, т.е., начиная с амплитуды последней массы, приняв амплитуду этой массы за единицу. Результаты такого контрольного расчета – амплитуды масс и моменты на участках, размещаются в дополнительных столбцах (a) и (M) слева и справа основной таблицы заполняемых снизу вверх, аналогично столбцам 5 и 2.

Описанная процедура касалась вычисления остаточного момента для одного значения p^2 . Для другого значения квадрата частоты процедура аналогична. Построение кривой остаточных моментов затруднений не вызывает. Найдя абсциссы точек пересечения кривой остаточных моментов с осью абсцисс, находим частоты собственных крутильных колебаний вала.

Вынужденные крутильные колебания вала. Рассмотрим вынужденные колебания вала на примере одномассовой системы. Будем полагать, что на вал действует периодический возмущающий момент $M_0 = \sin \omega t$. Дифференциальное уравнение движения диска в этом случае принимает вид

$$J \ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = \frac{M_0}{J} \sin \omega t \quad (4.11)$$

Общее решение уравнения (4.11) состоит из суммы общего решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (4.11), т.е. уравнения (4.2) и частного решения уравнения (4.11)

$$\varphi = C_1 \cos \omega_c t + C_2 \sin \omega_c t + \frac{M_0}{c} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \quad (4.12)$$

Первые два члена 4.12) характеризуют собственные колебания системы, а третий член – вынужденные колебания. Эти колебания имеют ту же частоту, что и возмущающий момент. Третий член общего решения (4.12) представляет собой частное решение неоднородного уравнения (4.12)

$$\varphi = \frac{M_0 / c}{1 - (\omega / \omega_c)^2} \quad (4.13)$$

Отношение $M_0 / c = \varphi_{cm}$ определяет угловое перемещение диска под статическим действием амплитудного значения возмущающего момента M_0 .
Множитель

$$\lambda = \frac{1}{1 - (\omega / \omega_c)^2} \quad (4.14)$$

называется *динамическим коэффициентом* и характеризует динамическое действие возмущающего момента M . Если ω далека от ω_c , то динамический коэффициент близок к единице и $\varphi \approx \varphi_{ст}$. Но если $\omega = \omega_{ст}$, то знаменатель равен нулю, а $\lambda = \infty$ и амплитуда колебаний резко возрастает. Это явление называется *резонанс*. На этом явлении основано экспериментальное определение собственной частоты колебаний. Если частоту возмущающего момента плавно изменять, то та частота, на которой наступит резонанс, будет равна собственной частоте крутильных колебаний.

Порядок проведения теоретического расчета

1. Определить моменты инерции деталей, установленных на валу.
2. Определить крутильные жесткости (податливости) участков вала. Длиной участка считать расстояние между серединами ступиц дисков, а для шкива и тормозного барабана – середины посадочных участков. Эскиз вала приведен в задании на курсовую работу.
3. Построить расчетную схему вала.
4. Задавшись значением квадрата частоты вычисляем остаточный момент. При этом вычисления проводим по изложенной расчетной схеме, используя табличную форму метода Толле.
5. Строим кривую остаточных моментов и находим частоты собственных крутильных колебаний – основную и первую собственные частоты.

Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из привода 1, ременной передачи 2, двухопорного вала 3 с тремя дисками 4 между опорами; генератора переменного возмущающего момента, состоящего из колодочного тормоза 5, привода тормозных колодок, в котором электромагнитный привод заменен электродвигателем постоянного тока 6 с эксцентрик 7 на валу; измерительной системы, состоящей из датчиков 9, токосъемника 10 и тензометрической установки 11.

Установка работает следующим образом. Вращение от эл/двигателя 1, через ременную передачу 2 передается на вал 3. На другом конце вала установлен тормозной барабан 5 колодочного тормоза 12. При включении эл/двигателя 6 эксцентрик 7 воздействует на сердечник 13 электромагнита 14 привода колодок. При этом колодки тормоза периодически прижимаются к тормозному барабану, и таким образом к валу прикладывается периодический тормозной момент, играющий роль возмущающего периодического момента,

приложенного к валу. Угловая скорость эл/двигателя 6 привода колодок плавно меняется изменением питающего напряжения с помощью автотрансформатора 15. В лабораторной установке предусмотрен второй вариант конструкции генератора тормозного момента, состоящий из прерывателя 19 цепи питания обмотки эл/магнита 14 тормоза. При вращении барабана 17, часть наружной обечайки 18 которого изготовлена металлической, контакты прерывателя 19 замыкаются и обмотки эл/магнита запитываются. Другая часть обечайки изготовлена из диэлектрика, и когда на контакты прерывателя наезжает эта часть обечайки, цепь питания обмотки эл/магнита разрывается. Таким образом, колодки тормоза будут прижиматься к тормозному барабану периодически, с частотой вращения эл/двигателя 20 привода барабана 17. Эта частота регулируется с помощью автотрансформатора 15.

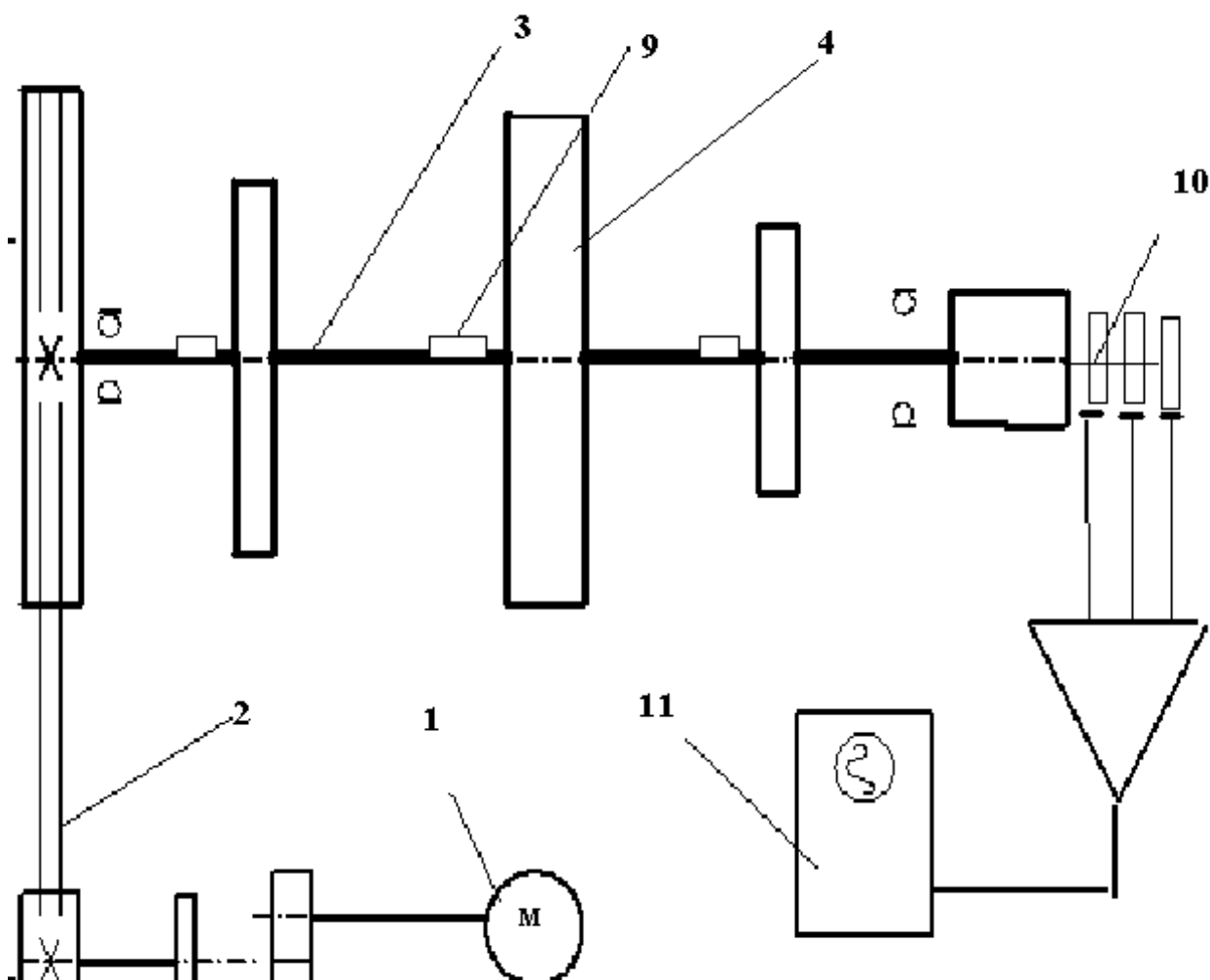


Рисунок 6 – Схема лабораторной установки для изучения и изгибных колебаний многомассовых валов. Лист 1.

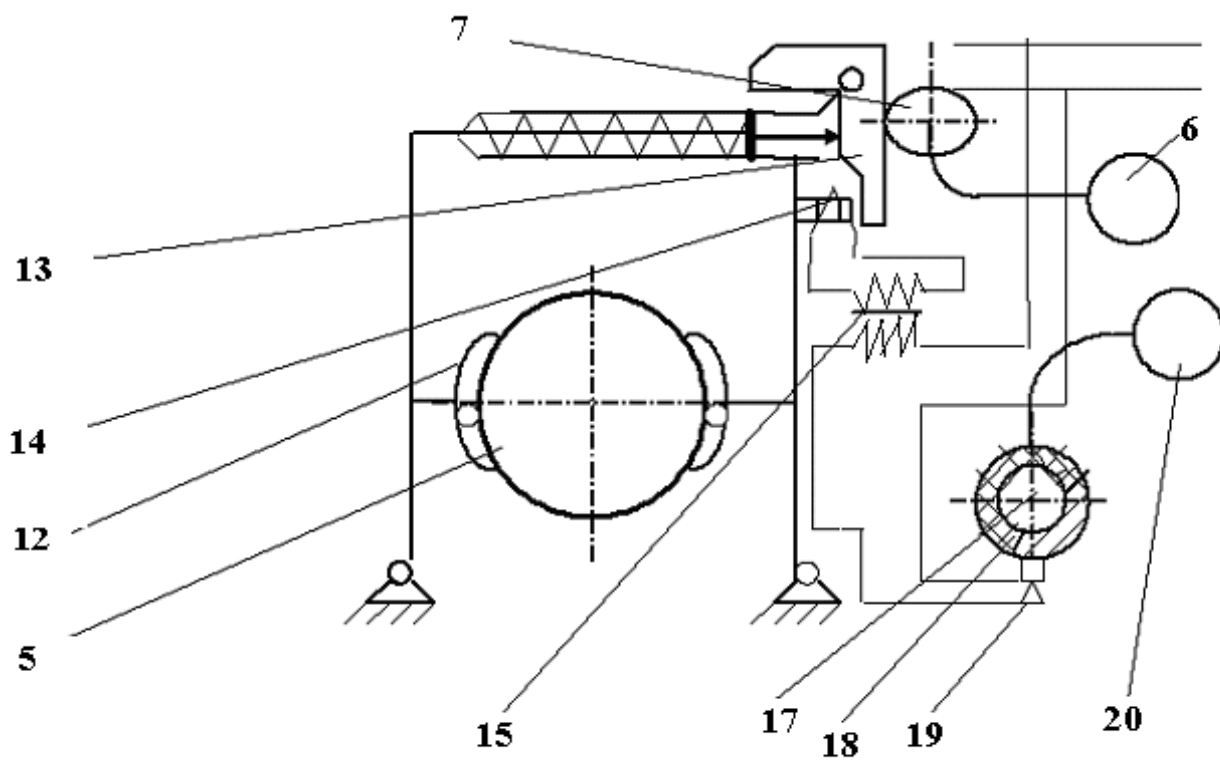


Рисунок 6. Лист 2

Порядок выполнения работы

1. Определить экспериментально основную частоту собственных колебаний. Для этого включить главный привод и привести вал во вращение.
2. При достижении угловой скорости вала установившегося режима включить привод тормозных колодок и плавно увеличивать его угловую скорость. Зафиксировать угловую скорость привода колодок, при которой возникают интенсивные крутильные колебания. Угловую скорость привода измерять стробоскопическим тахометром. Это будет основная частота собственных крутильных колебаний вала.
4. Провести несколько параллельных измерений основной частоты и произвести статистическую обработку результатов измерений.

Содержание отчета

1. Номер и наименование работы.
2. Теоретические расчеты собственных частот крутильных колебаний.
3. Экспериментальные данные и статистическая обработка результатов измерений.
4. Анализ теоретических и экспериментальных результатов.

5 Лабораторная работа 5

Исследование изгибных колебаний валов и определение критических оборотов

Цель работы

Определение теоретическим расчетом критических оборотов много-массового вала и их экспериментальное определение.

Теоретическая часть

Изгибные колебания рассчитывают для определения собственных частот изгибных колебаний валов и сопоставления их с частотами возмущающих сил чтобы оценить возможность резонансов в пределах рабочих частот вращения вала

Силы, вызывающие изгибные колебания, являются следствием рабочего процесса в машине (компрессоров, вентиляторов, центрифуг, сепараторов и т.д.), и (или) следствием неуравновешенности вращающихся деталей, установленных на валу (шкивов, зубчатых колес, роторов, муфт и т.д.). Причины возникновения неуравновешенности могут быть различными: конструктивные, технологические, производственные, эксплуатационные. Перечисленные выше, а также многие другие причины ведут к тому, что возникают периодические возмущающие силы, под действием которых происходят вынужденные колебания вала.

В большинстве конструкций, валы имеют две опоры (при большем числе опор возникает статическая неопределимость), поэтому вал можно рассматривать как двухопорную балку, в общем случае с консольными частями. Массы деталей, установленных на валу полагают сосредоточенными в одной точке – центре масс детали, а сам вал невесомой, но упругой балкой с коэффициентом изгибной жесткости, присущей валу. Если погонная масса вала велика и пренебречь ею нельзя, то вал делят на участки, имеющие постоянный диаметр, массу участка вала полагают сосредоточенной в центре участка. Таким образом, вал с установленными на нем деталями представляется в виде совокупности сосредоточенных масс соединенных

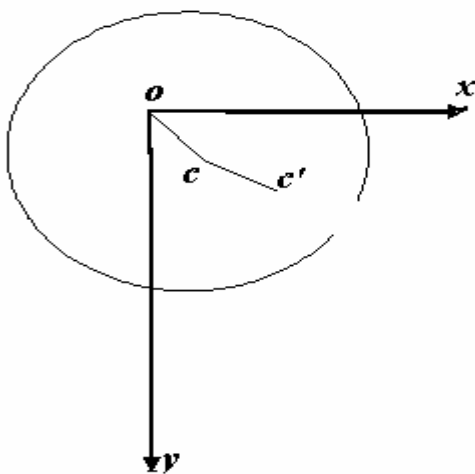
невесомыми, но упругими стержнями с исходными коэффициентами изгибной жесткости.

При таком представлении исходной конструкции вала появляется возможность рассматривать вал не как систему с бесконечным числом степеней свободы (распределенной системой), а как систему с конечным числом масс, то есть как систему с конечным числом степеней свободы, которая описывается системой ОДУ (обыкновенных дифференциальных уравнений)

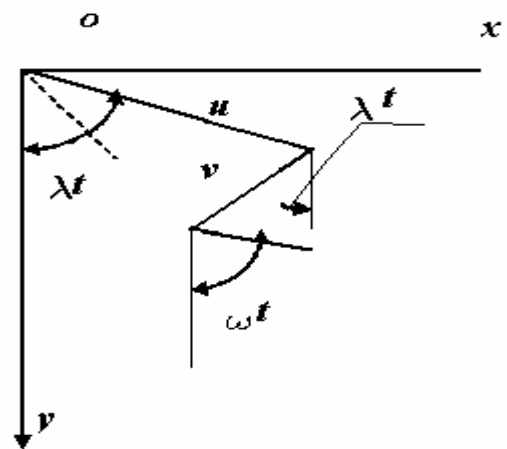
Рассмотрим случай двухопорного вала с одним диском в середине. Пусть имеется вал с диском массой m , расположенным точно в плоскости симметрии между опорами и вращающийся с угловой скоростью ω . Изучение изгибных колебаний вращающегося вала начинается с рассмотрения движения сечения, в котором закреплена деталь – диск. Это движение происходит вследствие деформаций вала и вследствие его вращения.

Прямую линию, соединяющую центры сечений вала на опорах будем называть *линией опор*. Линия опор всегда остается в покое при любом движении вала. Ось вала, вследствие деформации последнего имеет отклонение от прямолинейности и пересекается с линией опор только в двух точках – на опорах. Геометрический центр диска C будем считать точкой крепления диска к валу, то есть через точку C проходит ось вала. Если диск неуравновешен, то центр масс диска не будет совпадать с центром диска C , а располагаться в некоторой точке C' . Обозначим

$OC = \bar{\rho}$ - вектор прогиба вала; $CC' = \bar{a}$ - вектор неуравновешенности. Выберем неподвижную систему координат $Oxyz$, где ось x направлена вертикально вниз, ось y горизонтально, перпендикулярно x ; ось z вдоль линии опор, а за начало координат O примем точку пересечения линии опор с плоскостью симметрии диска. Вал будем считать вращающимся с постоянной скоростью ω .



а)



б)

Рисунок 7

Если рассматриваются колебания неуравновешенного диска, то движение центра масс диска может быть представлено в виде суммы двух векторов

$$w = \bar{\rho} + \bar{a}, \quad (5.1)$$

Пользуясь комплексным представлением векторов в плоскости $xу$, то перемещение центра масс диска можно записать в виде (рисунке 1а)

$$w = x + iy = \rho e^{i\delta} + ae^{i\varphi} \quad (5.2)$$

где
$$\rho = |\bar{\rho}|, \quad a = |\bar{a}|, \quad \delta = \lambda t, \quad \varphi = \omega t. \quad (5.3)$$

В простых случаях, когда плоскость симметрии диска движется в этой же плоскости, центр вала описывает эллипс, а вектор неуравновешенности вращается в плоскости диска с угловой скоростью ω вала. В таких случаях движение центра массы диска описывается выражением

$$w = Ue^{i\lambda t} + Ve^{-i\lambda t} + ae^{i\omega t} \quad (5.4)$$

где U, V, λ - некоторые постоянные величины.

Геометрически такое движение представляется как сумма трех векторов постоянной длины (рисунк 1б), из которых два вращаются в противоположные стороны с угловой скоростью λ , а третий – с угловой скоростью ω , т.е. с угловой скоростью вращения вала (диска). Если одна из постоянных величин U или V равна нулю, то движение будет слагаться из кругового движения центра вала и кругового движения вектора неуравновешенности.

Круговое движение центра вала(или точки крепления диска) называется *прецессией* центра вала, а λ - скоростью прецессии. Если $V = 0$, то прецессия выражается вектором $Ue^{i\lambda t}$ и называется *прямой прецессией*, если $U = 0$, то прецессия выразится вектором $Ve^{-i\lambda t}$ и называется *обратной прецессии*

Выражение $Ue^{i\lambda t} + Ve^{-i\lambda t}$ представляет собой эллиптическое движение, которое называется обобщенной прецессией. Это движение будет прямым, если $U > V$ и обратным, если $U < V$. Если в частном случае $V = 0$ и $\lambda = \omega$, т.е. скорость прямой прецессии равна скорости вращения диска, то движение можно представить выражением

$$w = Ue^{i\omega t} + ae^{i\omega t} = (U + a) e^{i\omega t} \quad (5.5)$$

Очевидно, что (5.5) является решением дифференциального уравнения движения

диска. Так как диск совершает плоское движение, то он имеет три степени свободы: две степени свободы центра масс и вращательное движение вокруг центра масс. В качестве обобщенных координат выберем

декартовы координаты x и y центра масс. угол поворота диска относительно оси x - φ . Пусть на вал действует крутящий момент $M(t)$, под действием которого вал вращается с угловой скоростью ω .

Кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{J_z \dot{\varphi}^2}{2},$$

где J_z – момент инерции диска относительно оси z .

Потенциальная энергия системы равна в данном случае потенциальной энергии изгиба, и составит

$$П = \frac{c(x - a \cos \varphi)^2}{2} + \frac{c(y - a \sin \varphi)^2}{2}.$$

где

$$c = \frac{48EJ}{l^3} \quad \text{- статическая жесткость на изгиб.}$$

Пользуясь методом уравнений Лагранжа, составляем дифференциальные уравнения движения. На систему действует только один крутящий момент $M(t)$ по обобщенной координате φ . Поэтому в системе одна обобщенная сила – $M(t)$, действующая по обобщенной координате φ . Уравнения движения будут иметь вид

$$\begin{aligned} m\ddot{x} + cx &= ca \cos \varphi, \\ m\ddot{y} + cy &= a \sin \varphi, \\ J_z \ddot{\varphi} + ca(x \sin \varphi - y \cos \varphi) &= M(t) \end{aligned} \quad (5.6)$$

Интегрирование системы нелинейных уравнений (5.6) достаточно сложная математическая задача. Однако, при постоянной угловой скорости вращения вала ω , угловая скорость вращения вектора неуравновешенности тоже постоянна, поэтому угол поворота φ может быть принятым равным ωt . Это сразу приводит к большим упрощениям системы (5.6): первые два уравнения становятся независимыми, а третье упрощается, т.к.

$$\begin{aligned} \omega &= const, & \dot{\varphi} &= \frac{d\varphi}{dt} = \omega, & u & \\ J_z \ddot{\varphi} &= 0 \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
m\ddot{x} + cx &= ca \cos \omega t, \\
m\ddot{y} + cy &= ca \sin \omega t, \\
ca(x \sin \omega t - y \cos \omega t) &= M(t)
\end{aligned}
\tag{5.7}$$

Первые два уравнения системы становятся линейными неоднородными уравнениями, независимыми друг от друга и достаточно легко интегрируются, а после подстановки в третье уравнение решений двух первых уравнений, оно представляет собой алгебраическое уравнение из которого определяется крутящий момент $M(t)$, поддерживающий вращение вала со скоростью ω .

Для наглядного представления движения введем комплексную плоскость x , y и рассмотрим движение центра массы диска, изображаемого концом вектора

$$w = x + iy. \tag{5.8}$$

Заметим, что при представлении колебательного движения посредством вращающегося вектора в комплексной плоскости, действительное движение описывается действительной частью комплексного числа, т.е. $x = h \cos \omega t$, где h – амплитуда колебаний $h = |\bar{\rho} + \bar{a}|$.

Умножив второе уравнение (5.7) на i и сложив с первым, получим

$$m\ddot{w} + cw = cae^{i\omega t} \tag{5.9}$$

интегрирование. которого дает

$$w = Ue^{i\sqrt{\frac{c}{m}}t} + Ve^{-i\sqrt{\frac{c}{m}}t} + \frac{a}{1 - \frac{\omega^2}{\sqrt{c/m}}} e^{i\omega t} \tag{5.10}$$

Движение, описываемое формулой (5.10) представляет комбинацию свободных и вынужденных колебаний. Два первых члена - суть прямая и обратная прецессия, совершающаяся с угловой частотой собственных колебаний

$$\omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}}. \tag{5.11}$$

Третий член представляет чисто вынужденные колебания – круговую прецессию вала с угловой скоростью вала ω .

Если угловая скорость вала $\omega = \omega_c = \sqrt{\frac{c}{m}}$, становится неограниченным. Угловая скорость вала, численно равная частоте собственных изгибных колебаний вала называется *критической скоростью или критическими оборотами вала*. На этом явлении основано экспериментальное определение

собственных частот изгибных колебаний вала, примененное в этой лабораторной работе.

Сравнивая вектор неуравновешенности, выражаемый комплексной величиной $ae^{i\omega t}$, с вектором вынужденных колебаний в формуле (5.10), имеющим

$$\frac{ae^{i\omega t}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_c^2}} \quad (5.12)$$

комплексное выражение

приходим к выводу, что они параллельны, а это значит OC и CC' составляют одну прямую линию. Кроме того, при $\omega < \omega_c$ знаки у этих векторов одинаковые, а при $\omega > \omega_c$ они разные. Отсюда следует, что при угловой скорости вала ниже критической точка C' лежит вне отрезка OC , а при угловой скорости вала выше критической, точка C' находится внутри OC . При неограниченном возрастании ω величина вектора вынужденных колебаний или, что тоже, радиус вынужденной круговой прецессии (5.12) стремится к нулю.

Этот эффект есть самоцентрирование, выражающееся в уменьшении радиуса вынужденной прецессии диска с увеличением угловой скорости вала. Валы, у которых рабочие скорости выше критических оборотов, то есть работа этих валов протекает в закритической области, называются «гибкими».

Для определения критических оборотов, или что тоже самое, частот собственных колебаний существует несколько методов.

Метод Рэлея

Метод Рэлея обобщением энергетического метода, который основан на том, что при колебаниях по гармоническому закону сумма кинетической и потенциальной энергий системы остается постоянной. При этом максимальная кинетическая энергия, которая имеет место при прохождении колеблющейся массы через положение равновесия, в котором потенциальная энергия равна нулю. А потенциальная энергия имеет максимум при максимальном отклонении массы от положения равновесия, т.к. скорость массы становится равной нулю, перед тем как изменить свой знак, т.е. кинетическая энергия массы равна нулю.

Пусть упругая система совершает свободные колебания с частотой ω_c , причем смещения y_i отсчитываемые от положения равновесия, изменяются по закону

$$y_i = y_{0i} \sin \omega_c t \quad (5.13)$$

Кинетическая энергия системы изменяется пропорционально квадратам скоростей

$$T = \frac{\omega_c^2}{2} \sum_{i=1}^n m_i y_{0i}^2 \cos^2 \omega_c t, \quad (i = \overline{1, n}) \quad (5.14)$$

где

$$m_i = \frac{P_i}{g}, \quad P_i - \text{вес } i\text{-ой массы}$$

Потенциальная энергия системы пропорциональна квадратам перемещений

$$\Pi = \Pi_0 \sin \omega_c t \quad (5.15)$$

где Π_0 - потенциальная энергия системы при амплитудных значениях перемещений y_i .

$$\Pi_0 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n c_i y_{0i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i y_{0i}^2 \quad (i = \overline{1, n}) \quad (5.16)$$

т.к.

$$P_i = c_i y_{0i}^2 \quad (5.17)$$

Вследствие вышесказанного

$$T_{\max} = \Pi_{\max} \quad (5.18)$$

$$T_{\max} = \frac{\omega_c^2}{2g} \sum_{i=1}^n P_i y_{0i}^2$$

$$\Pi_{\max} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i y_{0i}^2 \quad (5.19)$$

т.е.

$$\frac{\omega_c^2}{2g} \sum_{i=1}^n P_i y_{0i}^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n P_i y_{0i}^2$$

Отсюда

$$\omega_c^2 = \frac{g \sum_{i=1}^n P_i y_{0i}}{\sum_{i=1}^n P_i y_{0i}^2} \quad (5.20)$$

Если на балку действуют также сосредоточенные сила кроме весов сосредоточенных масс, то тоже включаются в число P_i .

Из формулы (5.20) видно, что для определения частоты собственных колебаний вала, на которую установлено несколько сосредоточенных грузов (дисков) требуется знать только веса этих дисков и прогибы под грузами. Если в формулу (5.20) подставить истинные значения прогибов, соответствующих той или иной форме колебаний, то она дает точное значение собственной частоты этой формы колебаний. Но значения истинных прогибов неизвестны. Рэлей предложил подставлять в формулу (5.20) вместо неизвестных значений истинных прогибов y_{0i} статические прогибы от действия грузов P_i , которые можно определить известными методами сопротивления материалов, например с помощью универсального уравнения изогнутой оси балки. В нашем случае оно имеет вид

$$y_{0i} = y_0 + \theta_0 x + \frac{1}{6EJ} \sum_{i=1}^n P_i (x - b_i)^3$$

$$\theta_{0i} = \theta_0 + \frac{1}{2EJ} \sum_{i=1}^n P_i (x - b_i)^2 \quad (5.21)$$

Здесь y_0 - прогиб в начале координат; θ_0 - угол поворота сечения вала в начале координат, координата x - расстояние от начала координат до сечения, в котором определяется прогиб вала, b_i - расстояние от начала координат до сечения, в котором действует сила P_i , J - момент инерции сечения вала. Величины y_0 и

θ_0 находим из условий на опорах, где $y_{0A} = y_{0B} = 0$. В нашем случае $n = 7$. Расчетная схема представлена на рисунке 2.

Если в формулу (5.20) подставить прогибы y_{0i} для k -ой собственной формы, то вычисленное значение будет k -ой собственной частотой изгибных колебаний. Но по формуле Рэля (5.20), по идее Рэля подставляются статические прогибы, которые соответствуют основной, первой собственной форме. Поэтому она дает приближенное значение основной частоты собственных колебаний, причем формула (5.20) дает несколько завышенное значение собственной частоты ω_c .

Метод Дункерля.

Применяется метод Дункерля для предварительных расчетов и при достаточно простых схемах валов. Метод дает несколько заниженные значения основной собственной частоты изгибных колебаний валов. Поэтому определив основную частоту двумя методами (Рэля и Дункерля) определим интервал, внутри которого находится истинное значение частоты.

Двухопорный вал с n массами разделяется на n парциальных (частичных) систем с одной массой каждая, то есть на n одномассовых систем и определяем собственные частоты каждой из них ω_{ci} .

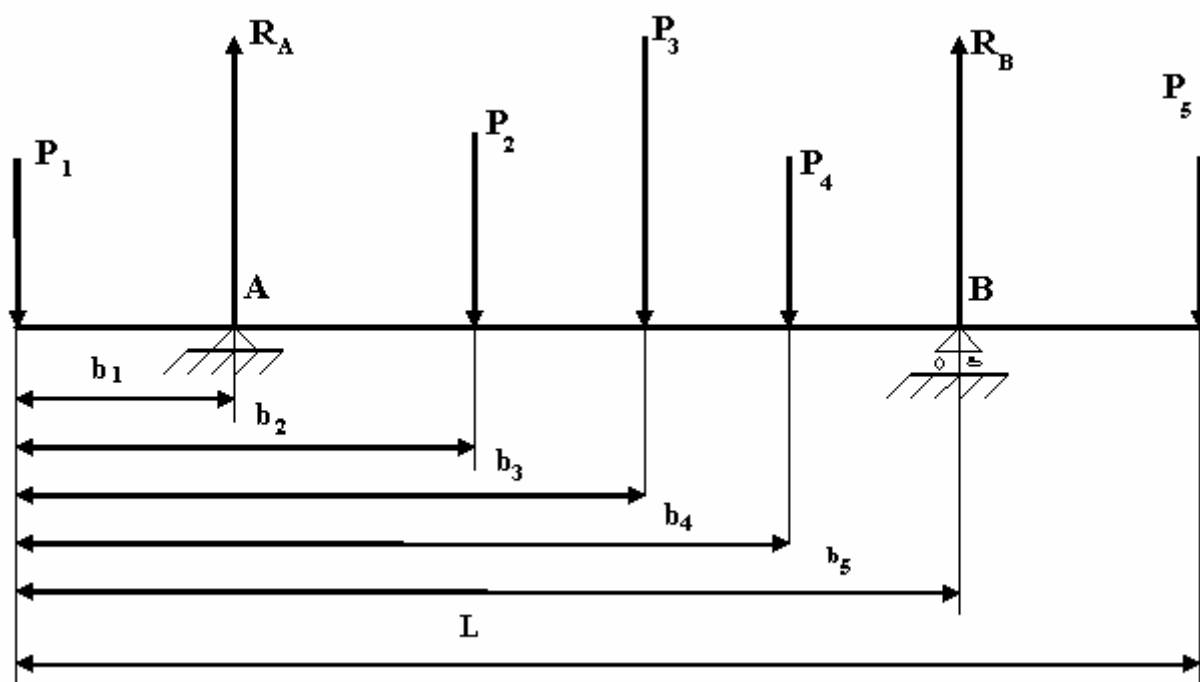
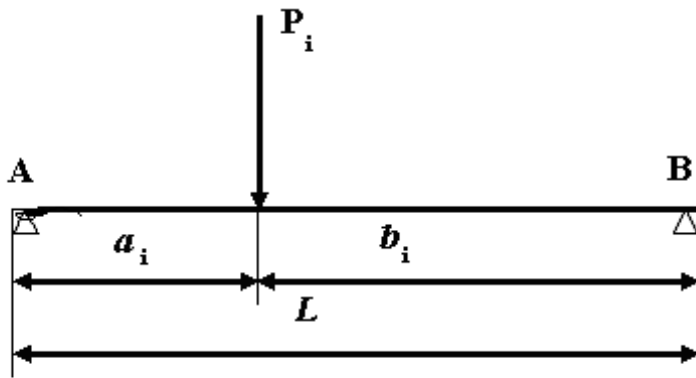


Рисунок 8

При вращении невесомого вала с одной массой, критическая угловая скорость

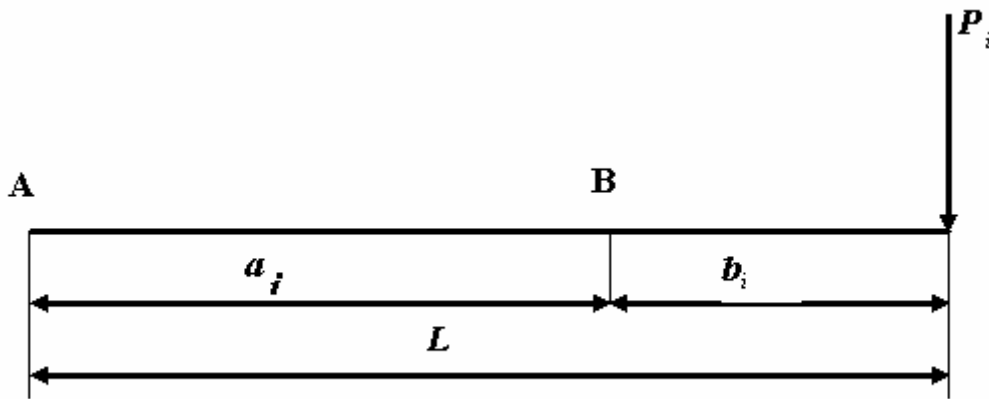
$$\omega_{ci} = \frac{1}{\sqrt{m_i \delta_i}} \quad (5.22)$$

где m_i – масса в i -ой парциальной системы.



$$\delta_i = \frac{a_i^2 b_i^2}{3EJ} \quad (5.23)$$

Рисунок 9



$$\delta_i = \frac{b_i^2 l}{3EJ} \quad (5.24)$$

Рисунок 10

Податливость δ_i зависит от типа парциальной системы. Для схемы с массой между опорами, изображенной на рис 3, податливость определяется по формуле (5.23), а на рисунке 4 – по формуле (5.24), В этих формулах J – момент инерции сечения вала.

Основная частота определяется по формуле

$$\frac{1}{\omega_c^2} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ci}^2} \quad \text{или} \quad \omega_c^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_{ci}^2}} \quad (5.25)$$

Порядок теоретического расчета

- 1) Определить массы деталей, установленных на валу, или определить их экспериментально (взвешиванием).
- 2) Определить момент инерции сечения вала. Диаметр вала $d = 27\text{мм}$.
- 3) Составить расчетную схему. $b_1 =$, $b_2 =$, $b_3 =$, $b_4 =$, $b_5 =$.
4. Решая систему (5.21), найти y_{0i} ($i = 1, 2, \dots, 5$)
5. По формуле (5.20) найти основную частоту собственных колебаний ω_c методом Рэлея.
6. Разбить исходную систему на 5 парциальных систем. Найти по формуле (5.22) парциальные собственные частоты ω_{ci} . Для этого в зависимости от типа парциальной системы воспользоваться для вычисления податливости формулами (5.23) или (5.24).
7. Вычислить основную частоту собственных колебаний вала методом Дункерлея по формуле (5.25). Истинное значение основной собственной частоты находится в интервале частот от значения, найденного по методу Дункерлея $\omega_{сД}$, до значения частоты, найденного методом Рэлея - $\omega_{сР}$

$$\omega_{сД} < \omega_c < \omega_{сР}$$

Описание лабораторной установки

Лабораторная работа производится на установке, применяемой в предыдущей работе – лабораторной работе 4. Исключение составляет генератор возмущающей силы. Схема лабораторной установки приведена на рис. 11.

Генератор состоит из стойки 1, ролика 2, эксцентрика 3 с эл/двигателем постоянного тока 4, и пружины 6. Ролик 2, прижимаясь к ободу диска 5 по действием пружины 6 передает на вращающийся диск 5 сосредоточенную силу в точке контакта ролика с диском. Со стойкой 4 в верхней части контактирует вращающийся эксцентрик 3. При вращении эксцентрика, стойка 1, поворачиваясь вокруг оси 7, меняет усилие контакта по гармоническому закону. Таким образом, вал оказывается под действием сосредоточенной силы, изменяющейся по гармоническому закону. Амплитуду возмущающей силы можно изменять путем изменения натяжения пружины (устройство для изменения натяжения пружины на схеме не показано). При включении

эл/двигателя главного привода, многодисковый вал начинается вращаться. По достижении угловой скоростью своего установившегося значения, включается эл/двигатель постоянного тока 7, угловая скорость которого изменяется с помощью автотрансформатора 8. Появление интенсивных изгибных колебаний свидетельствует о достижении первой критической скорости вала. Угловая скорость эксцентрика измеряется стробоскопическим тахометром.

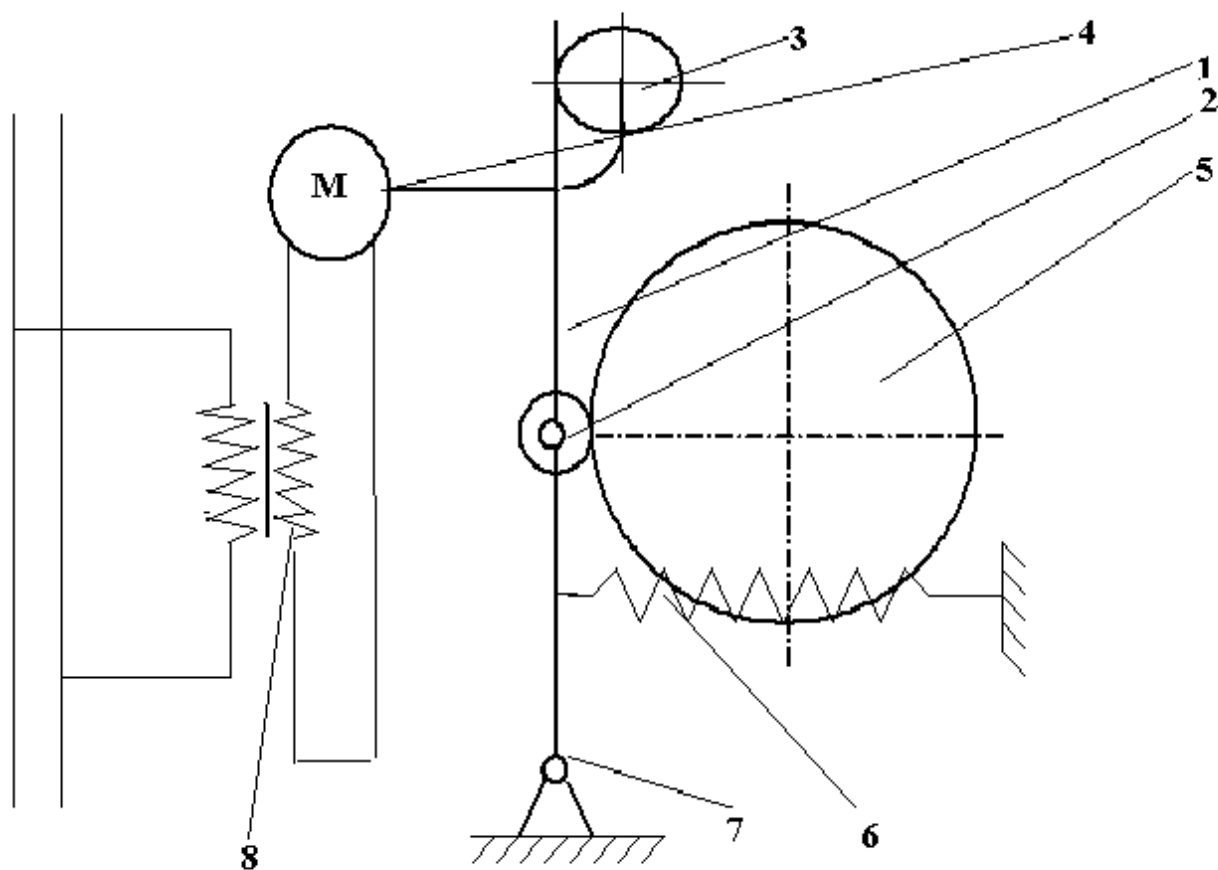


Рисунок 11

Порядок выполнения работы

1. Включить эл/двигатель главного привода.
2. При достижении установившейся угловой скорости главного вала включить эл/двигатель эксцентрика и плавно изменять его угловую скорость

- с помощью автотрансформатора.
3. Изменением угловой скорости эксцентрика добиться резкого увеличения амплитуды изгибных колебаний и зафиксировать угловую скорость эксцентрика. Эта скорость есть критическая скорость вала.
 4. Провести измерение критической скорости пять раз и провести статистическую обработку данных измерений.

Содержание отчета

1. Номер и наименование работы.
2. Теоретические расчеты критических оборотов вала.
3. Экспериментальные данные и статистическая обработка результатов эксперимента.
4. Анализ теоретических и экспериментальных данных.

6 Лабораторная работа 6

Исследование работы антивибратора

Цель работы

Теоретическое рассмотрение работы динамического гасителя колебаний и его экспериментальное исследование.

Теоретическая часть

Пусть дана система с двумя степенями свободы, изображенная на рисунке 12, в которой на массу M действует периодическая возмущающая сила $P_0 \sin pt$.

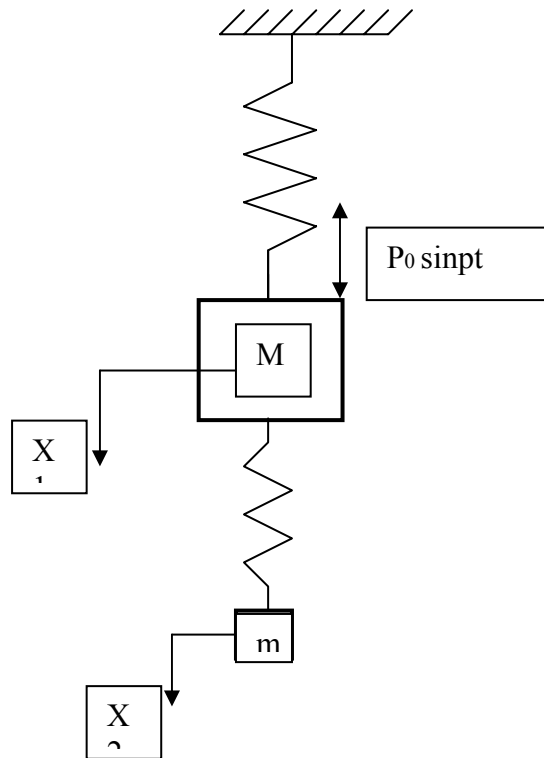


Рисунок 12 – Схема двухмассовой поступательно колеблющейся системы

Система имеет две степени свободы. если массу пружин считать пренебрежимо малой. Часть системы, состоящей из пружины жесткостью C и массой M будем называть *главной системой*; а часть, состоящую из пружины жесткостью c и массой m будем называть *гасителем*. За обобщенные координаты можно взять отклонения масс от положения равновесия x_1 и x_2 . Тогда обобщенными скоростями будут \dot{x}_1 и \dot{x}_2 , где точка над переменной означает дифференцирование по времени.

Кинетическая энергия системы будет

$$T = \frac{M\dot{x}_1^2}{2} + \frac{m\dot{x}_2^2}{2},$$

а потенциальная энергия системы

$$П = \frac{Cx_1^2}{2} + \frac{c(x_2 - x_1)^2}{2}.$$

Обобщенная сила равна

$$Q_1 = P_0 \sin pt$$

Произведя необходимые операции дифференцирования, составляем уравнения движения.

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + (C + c)x_1 - cx_2 &= P_0 \sin pt \\ m\ddot{x}_2 + c(x_2 - x_1) &= 0 \end{aligned} \quad (6.1)$$

Вынужденные колебания системы определяются решением

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 \sin pt \\ x_2 &= a_2 \sin pt \end{aligned} \quad (6.2)$$

Подставляя (6.2) в (6.1) после двукратного дифференцирования и сокращая на общий множитель $\sin pt$, получим систему алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_1(-Mp^2 + C + c) - ca_2 &= P_0, \\ -ca_1 + a_2(-mp^2 + c) &= 0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Для упрощения приведем эти уравнения к безразмерному виду. Для этого введем следующие обозначения

$$x_{cm} = \frac{P_0}{C} - \text{статическая деформация главной системы. Это деформация}$$

пружины жесткостью C под статическим действием амплитудного значения возмущающей силы.

$$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}} - \text{собственная частота гасителя.}$$

$$\Omega = \sqrt{\frac{C}{M}} - \text{собственная частота главной системы.}$$

$$f = \frac{p}{\Omega} - \text{отношение частоты вынужденных колебаний к собственной частоте главной системы.}$$

$$\mu = \frac{m}{M} - \text{отношение массы гасителя к главной массе системы.}$$

Тогда уравнения (3) примут вид

$$a_1 \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{p^2}{\Omega^2} \right) - a_2 \frac{c}{C} = x_{cm},$$

$$a_1 = a_2 \left(1 - \frac{p^2}{\omega^2} \right),$$

или, если разрешить их относительно a_1 и a_2 , то

$$\frac{a_1}{x_{cm}} = \frac{1 - \frac{p^2}{\omega^2}}{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2} \right) \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{p^2}{\Omega^2} \right) - \frac{c}{C}}$$

$$\frac{a_2}{x_{cm}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2} \right) \left(1 + \frac{c}{C} - \frac{p^2}{\Omega^2} \right) - \frac{c}{C}} \quad (6.4)$$

Из первого уравнения следует, что амплитуда колебаний главной массы системы равняется нулю, если только числитель уравнения равен нулю

$$1 - \left(\frac{p^2}{\omega^2} \right) = 0, \quad (6.5)$$

а это возможно только тогда, когда $p = \omega$. то есть тогда, когда частота возмущающей силы сравнивается с собственной частотой гасителя. То есть при выполнении условия (6.5) в системе будет колебаться гаситель, хотя возмущающая сила действует на главную систему, последняя будет находиться в покое. Это явление называется *антирезонансом*. На этом эффекте основано действие разнообразных динамических гасителей колебаний, иначе называемых *антивибраторами* или *виброгасителями (гасителями)*. Если к колеблющейся системе, колебания которого нужно погасить, добавить еще одну систему, состоящую из пружины, жесткостью c и массы m , удовлетворяющих условию $c/m = p^2$, то колебаться будет эта присоединенная система, а исходная находиться в покое.

Рассмотрим теперь второе уравнение (6.4) для случая $\omega = p$. В этом случае первый множитель в знаменателе обращается в нуль, и уравнение приводится к виду

$$a_2 = -\frac{C}{c} x_{cm} = -\frac{P_0}{c}. \quad (6.6)$$

При покое главной массы и движении массы гасителя по закону $-(P_0/k) \sin pt$, сила упругости пружины гасителя изменяется по закону $-P_0 \sin pt$, а это есть сила равная, возмущающей силе, но противоположно направленная ей. Это значит, что гаситель движется в противофазе с возмущающей силой и вследствие этого уравнивает последнюю. В этом физическая суть явления.

Остается еще один вопрос: как влияет масса гасителя на эффективность его работы? Полученные ранее выводы справедливы вообще говоря, для любого значения отношения p/Ω . Однако, как следует из сказанного, что гаситель колебаний или антивибратор не будет гасить колебания, если исходная – главная система не находится в состоянии резонанса. Поэтому рассмотрим случай, когда $\omega = \Omega$, или

$\frac{c}{m} = \frac{C}{M}$ или $\frac{c}{C} = \frac{m}{M} = \mu$. Величина μ определяет параметры антивибратора. В случае резонанса знаменатели в уравнениях (6.4) должны быть равны нулю (тогда амплитуды будут бесконечными), т.е.

$$\left(1 - \frac{p^2}{\omega^2}\right) \left(1 + \mu - \frac{p^2}{\omega^2}\right) - \mu = 0, \quad \text{или}$$

$$\left(\frac{p}{\omega}\right)^4 - \left(\frac{p}{\omega}\right)^2 (2 + \mu) + 1 = 0. \tag{6.7}$$

Решая последнее уравнение, находим

$$\left(\frac{p}{\omega}\right)^2 = \left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \pm \sqrt{\mu + \frac{\mu^2}{4}}. \tag{6.8}$$

Формула (6.8) дает для каждого значения μ две собственные частоты системы в целом. Пусть, например $\mu = 0,1$ (масса гасителя составляет десятую часть главной массы). Формула (6.8) дает две собственные частоты системы в целом, соответственно равные 1,17 и 0,85 частоты колебаний исходной системы.

Анализ системы с антивибратором при наличии сопротивления между главной массой и массой гасителя приводит к следующему результату:

$$f = \frac{1}{1 + \mu}.$$

Эта формула позволяет настраивать гаситель. Так, в случае очень маленькой массы гасителя ($\mu \approx 0$) настройка определяется величиной $f = 1$, т.е. собственная частота гасителя должна быть такая же, как и собственная частота главной системы. При массе гасителя, оставляющую одну пятую часть главной массы $f = 5/6$, т.е. гаситель должен быть изготовлен так, чтобы

его частота была на 17 % меньше частоты главной системы. Наиболее выгодные размеры массы гасителя при $\mu = 0,1 \div 0,83 \left(\frac{1}{10} \div \frac{1}{12} \right)$.

В заключение отметим, динамический гаситель колебаний эффективен только на той частоте, на которую он настроен. Если частота возмущающей силы по какой-либо причине изменяется, то гаситель будет бесполезен на других частотах. Поэтому такими гасителями снабжаются системы с постоянной частотой возмущающей силы. Это стационарные компрессора и двигатели, синхронные электрические машины и т.д.

Порядок проведения теоретического расчета

1. Определить параметры главной системы M , C . При этом $C = 4c_i$, где c_i – жесткость пружины. Массу M определить взвешиванием.
2. Определить параметры динамического гасителя колебаний c , m , задавшись ориентировочно $\mu = 0.1$. Провести расчеты для трех значений m , чтобы $\mu_1 < 0,1$; $\mu_2 = 0.1$; $\mu_3 > 0.1$.

Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из эл/двигателя 1, с установленным на валу эл/двигателя неуравновешенного диска 2, устройства для измерения угловой скорости диска, состоящее из редуктора 4 и тахометра 5. Ведущая шестерня редуктора соединена с валом эл/двигателя гибким валом 3. Эл/двигатель с диском установлен на платформе 13. Платформа 13 установлена на 4-х пружинах 12. Антивибратор представляет собой сердечник 10 подвешенный к платформе через пружину 11. Сердечник 10 совершает возвратно-поступательное движение внутри катушки 9 с двумя обмотками – первичной обмотки 8 и вторичной обмотки 6. Первичная обмотка питается от источника постоянного тока 4,5 вольт, а со вторичной обмотки напряжение подается на вход осциллографа.

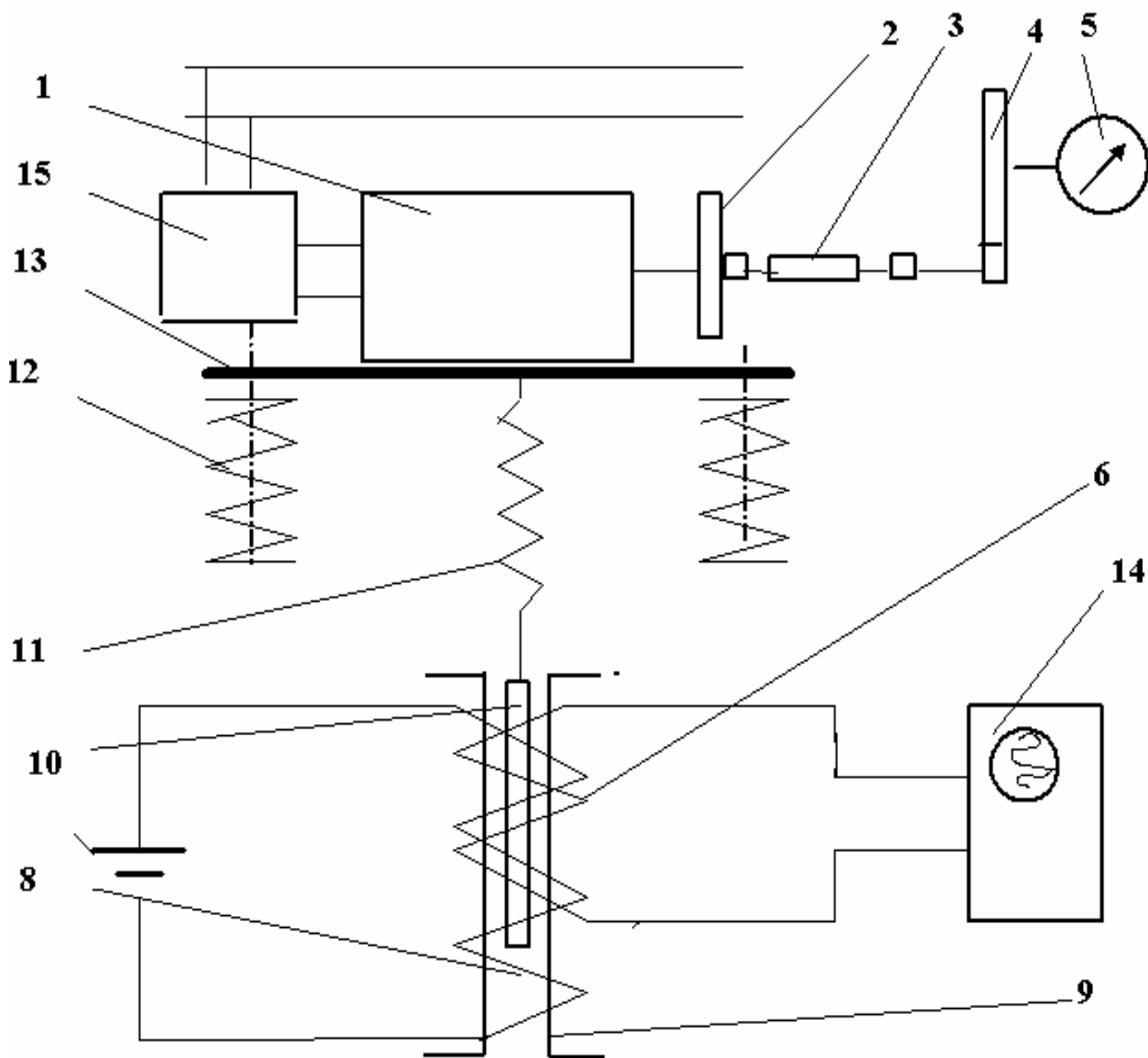


Рисунок 13 - Схема лабораторной установки для изучения динамического поглотителя колебаний

Установка работает следующим образом. При включении эл/двигателя и вращении неуравновешенного диска под действием центробежной силы платформа совершает колебания. Главная система представляет собой массу эл/двигателя с диском и платформы и жесткость 4 пружин, а гаситель - массу сердечника 10 и жесткость пружины 11. Добавляя или снимая с сердечника грузы, меняем параметры гасителя, а изменяя угловую скорость эл/двигателя изменяем частоту возмущающей силы p . Параметры гасителя будут подобраны, если амплитуда колебаний платформы резко уменьшатся. Поэтому при постоянных параметрах гасителя нужно изменять частоту

возмущающей силы. Это осуществляется изменением частоты питающего напряжения с помощью регулятора частоты 14. Применение эл/двигателя постоянного тока в данном случае нежелательно из-за искрения щеток и наведения из-за этого помех на вторичную обмотку датчика.

Порядок выполнения работы

1. Включить эл/двигатель. **Плавно** поворачивая движок регулятора частоты менять угловую скорость эл/двигателя до тех пор, пока амплитуда колебаний платформы резко не уменьшится.
2. Уменьшение колебаний главной системы означает, что частота возмущающей силы совпала с собственной частотой гасителя. Уменьшение колебаний главной системы должно совпасть с резким увеличением амплитуды колебаний гасителя.
3. Добавить к сердечнику дополнительный груз и повторить процедуру. Указанное явление должно произойти на другой частоте возмущающей силы, то есть угловой скорости эл/двигателя.
4. Меняя дополнительные грузы к сердечнику, изменяем частоту собственных колебаний гасителя. Измерения угловой скорости эл/двигателя провести при трех значениях дополнительных масс.
5. Для каждой массы сердечника провести по 5 параллельных измерений угловой скорости эл/двигателя.

Содержание отчета

1. Номер и наименование работы.
2. Результаты теоретических расчетов по определению параметров виброгасителя при заданных M , C , s , μ .
3. Экспериментальные данные по угловой скорости эл/двигателя для различных μ .
4. Результаты статистической обработки экспериментальных данных.
5. Анализ теоретических и экспериментальных результатов работы.

7 Лабораторная работа 7

Исследование шарикового автоматического уравнивающего устройства

Цель работы

Теоретическое рассмотрение работы шарикового автоматического уравнивающего устройства (АУУ) и экспериментальное исследование его работы.

Теоретическая часть

Рассмотрим устройство и работу двухшарикового АУУ. Схема установки изображена на рисунке 14.

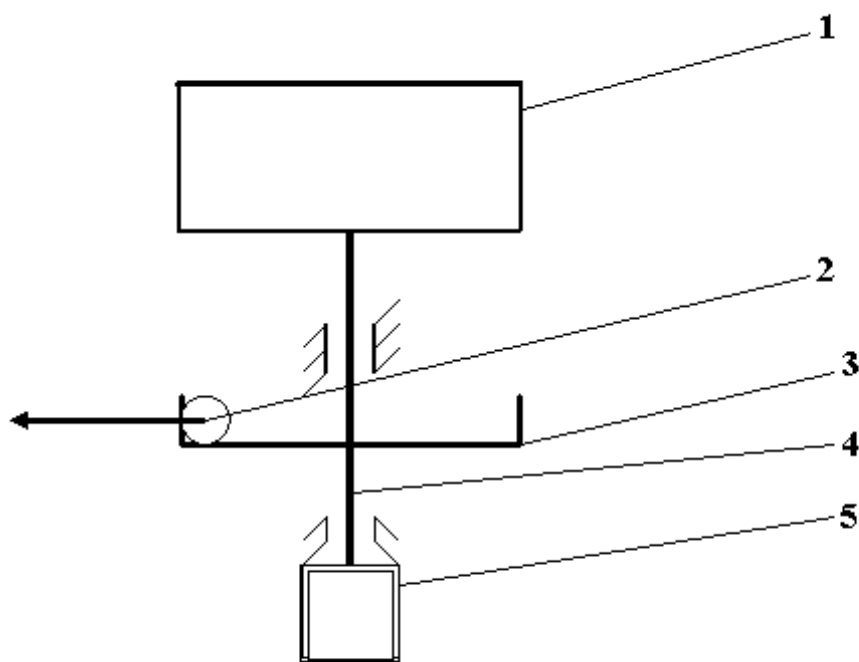


Рисунок 14 - Схема лабораторной установки для исследования шарикового АУУ

Рассмотрим вращающийся в двух подшипниках вертикальный вал 4 с ротором 1, массой M . На валу соосно с ротором симметрично относительно опор установлена цилиндрическая обойма 3 радиуса R с двумя шариками 2 массой m . Вертикальный вал 4 соединен с валом эл/двигателя 5. Схема действующих сил и принцип действия шарикового АУУ показана на рисунке 2, представляющим собой обойму в плане.

Рассмотрим случай двух шариков.

На рисунке 15 точка O_1 означает линию опор, вокруг которой происходит вращение; точка O – центр обоймы и ротора; точка C – центр тяжести ротора. Пусть угловая скорость вращения ротора ω , а критическая скорость - ω_0 . То есть частота собственных изгибных колебаний вала ротора есть ω_0 . Будем полагать, что трение отсутствует

При скорости ротора ниже критической, под действием тангенциальных составляющих центробежных сил T шарики будут сближаться, перемещаясь на «тяжелую» сторону и тем самым, увеличивая неуравновешенность. (см. рисунок 15а)

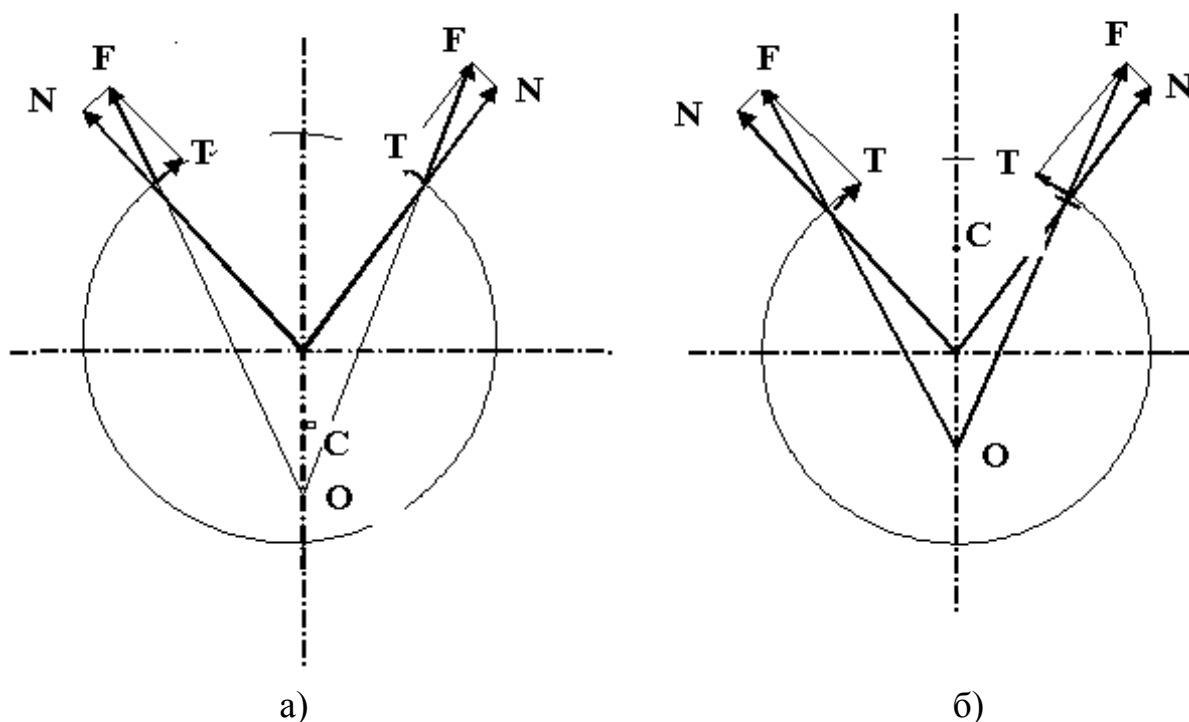


Рисунок 15 - Схема действия сил на шарики и стенку обоймы

Выше критической скорости шарики также будут сближаться (рисунок 15б) под действием силы T , но теперь их движение направлено на «легкую» сторону. Что ведет к уменьшению неуравновешенности. При полном уравнивании точки C, O, O_1 совпадут, силы T обратятся в нуль и движение шаров прекратится.. Следовательно, шариковое АУУ описанного типа может работать, то есть уравнивать только на скоростях выше критических, то есть при закритических скоростях. При скоростях ниже критических – докритических, оно создает дополнительную неуравновешенность.

Для устранения этого недостатка, применяются не плоские обоймы, а конические с двумя цилиндрическими насадками - верхним и нижним. В нижней насадке шарики тесно прижаты друг к другу, равномерно распределяясь по окружности диаметра $d_1 = d_n - 2r$, где d_n – диаметр нижней насадки, r – радиус шарика, при этом число шариков должно быть четным. При таком расположении шариков, они не будут при докритических скоростях вносить дополнительной неуравновешенности. При достижении

некоторой, превышающей критическую, скорости, определяемой углом конусности, шарики выйдут из нижнего гнезда и поднявшись вверх, попадают в верхнюю цилиндрическую насадку, имеющей значительно больший диаметр. Перемещаясь по окружности, шарики автоматически займут положение, устраняющее неуравновешенность системы.

Центры ротора и обоймы совпадают в точке O . Введем прямоугольную систему координат $хоу$, вращающуюся вместе с ротором со скоростью ω . Ось x проходит через центр тяжести ротора C_0 , имеющий эксцентриситет a . Линия опор пересекается с плоскостью обоймы в точке O_1 , отстоящей на расстоянии q от центра O . Вращение ротора и обоймы происходит вокруг точки, проходящей через точку O_1 . Положение шариков определено углами α_1, α_2 между осью x и прямыми OC_1 и OC_2 , (рисунок 16). Центр тяжести системы ротор – шарики обозначим через C .

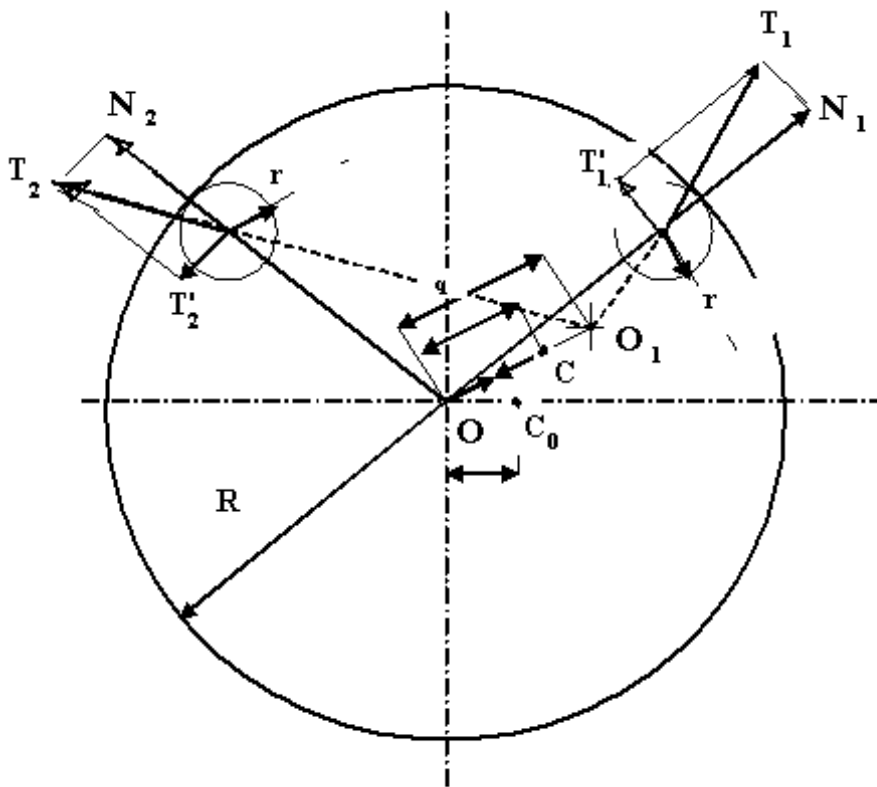


Рисунок 16 - Расчетная схема шарикового АУУ

Таким образом, q является прогибом середины вала между опорами. При равномерном вращении вала с угловой скоростью ω вокруг точки O_1 с закрепленными в положении α_1 и α_2 шариками, на них действуют силы

$F_1 = m\omega^2 O_1 C_1$ и $F_2 = m\omega^2 O_1 C_2$, а на обойму сила $F = M\omega^2(q - OC)$. Разлагая силы F_1 и F_2 , нормальные составляющие N_1, N_2 и тангенциальные составляющие T_1, T_2 , и имея ввиду, что центробежная сила F составляет угол $\varphi = \omega t$ с осью $ох$ и проектируя все силы на оси x, y , составим уравнения движения.

Из этих уравнений получим, что

$$q = -\frac{OC \gamma_0^2}{1 - \gamma_0^2} \quad (7.1)$$

где $\gamma_0 = \frac{\omega}{\omega_0}$ — относительная скорость ротора, причем критическая скорость ω_0 (7.2)

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{c}{M + 2m}}, \quad a \quad c - \text{коэффициент изгибной жесткости вала.} \quad (7.3)$$

Из рисунке 16 видно, что

$$OC = \sqrt{x_c^2 + y_c^2} \quad (7.4)$$

где x_c, y_c — координаты центра тяжести ротора с шариками, равные

$$x_c = v_2 A_2; \quad y_c = v_2 B_2. \quad (7.5)$$

Здесь обозначено

$$v_2 = \frac{m(R - r)}{M + 2m};$$

$$A_2 = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \psi_1;$$

$$B_2 = \sin \alpha_2 + \sin \alpha_2; \quad (7.6)$$

$$\psi_1 = \frac{Ma}{m(R - r)}. \quad (7.7)$$

Подставляя выражения (7.4) и (7.6) в формулу (7.1) получаем

$$\left\{ \begin{array}{l} OC = v_2 \sqrt{A_2^2 + B_2^2}; \\ q = -\frac{v_2 \gamma_0^2}{1 - \gamma_0^2} \sqrt{A_2^2 + B_2^2}; \\ \frac{q}{OC} = -\frac{\gamma_0^2}{1 - \gamma_0^2} \end{array} \right. \quad (7.8)$$

Учитывая эти выражения и формулы (7.5) получаем координаты точки O_1 и центры шаров

$$\begin{aligned} x_{0_1} &= -\frac{v_2 \gamma_0^2 A_2}{1 - \gamma_0^2}; & y_{0_1} &= -\frac{v_2 \gamma_0^2 B_2}{1 - \gamma_0^2}; \\ x_{c_1} &= (R - r) \cos \alpha_1; & y_{c_1} &= (R - r) \sin \alpha_1 \\ x_{c_2} &= (R - r) \cos \alpha_2; & y_{c_2} &= (R - r) \sin \alpha_2. \end{aligned} \quad (7.9)$$

Так как координаты центров шариков и координаты точки O_1 , известны, то можно определить углы β_1 и β_2 между центробежными силами F_1 и F_2 и линиями центров OC_1 и OC_2 . Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки дадут уравнение прямой OC_1 :

$$x \operatorname{tg} \alpha_1 - y = 0 \quad (7.10)$$

И уравнение прямой O_1C_1 :

$$\begin{aligned} x \left[(R - r) \sin \alpha_1 + \frac{v_2 \gamma_0^2 B_2}{1 - \gamma_0^2} \right] - y \left[(R - r) \cos \alpha_1 + \frac{v_2 \gamma_0^2 A_2}{1 - \gamma_0^2} \right] - \\ - [B_2 \cos \alpha_1 - A_2 \sin \alpha_1] \frac{v_2 \gamma_0^2 (R - r)}{1 - \gamma_0^2} = 0. \end{aligned} \quad (7.11)$$

Для прямых OC_2 и O_1C_2 получаются аналогичные выражения, естественно, вместо α_1 нужно взять α_2 . Используя формулы для определения угла между двумя прямыми, находим углы β_1 , β_2 .

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_1 &\approx \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) - \psi_1 \sin \alpha_1}{1 + \frac{R - r}{v_2 \gamma_0^2} (1 - \gamma_0^2) + \psi_1 \cos \alpha_1 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}; \\ \operatorname{tg} \beta_2 &\approx \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha_1) + \psi_1 \sin \alpha_2}{1 + \frac{R - r}{v_2 \gamma_0^2} (1 - \gamma_0^2) + \psi_1 \cos \alpha_2 + \cos(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Здесь учтено, что вес шариков значительно меньше веса ротора и принято, что

$$\frac{c}{M + m} \approx \frac{c}{M + 2m} = \omega_0^2. \quad (7.13)$$

Освобожденные шарики под действием тангенциальных сил T_1 и T_2 будут перемещаться до тех пор, пока эти составляющие не станут равными нулю, при этом углы β_1 , β_2 так же станут равными нулю. Таким образом, условия равновесия без учета трения будут

$$tq\beta_1 = 0; \quad tq\beta_2 = 0$$

или

$$\psi_1 \sin \alpha_1 - \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0,$$

$$\psi_1 \sin \alpha_2 - \sin(\alpha_2 - \alpha_1) = 0$$

Эта система уравнений приводится к двум системам:

$$\sin \alpha_1 = 0$$

$$\sin \alpha_2 = 0$$

(7.14)

$$\cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \psi_1 = A_2 = 0;$$

$$\sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 = B_2 = 0$$

(7.15)

решение системы (7.14) дает ряд возможных положений относительного равновесия шариков:

$$\alpha_1 = 0; \quad \pi; \quad 2\pi, \quad \dots$$

$$\alpha_2 = 0; \quad \pi; \quad 2\pi; \quad \dots$$

(7.16)

Но не все эти положения равновесия устойчивы.

В положении равновесия, определяемом уравнениями (7.15), шары располагаются, так как показано на рисунке 4. Подставляя эти уравнения в уравнения (7.8), получаем для этого случая $OC = q = 0$. При этом расположении шариков их положение относительного равновесия устойчиво, ротор будет уравновешен. Но это положение равновесия возможно только при закритической скорости ротора.

Решив систему (7.15), найдем значения углов α_1^0 , α_2^0 , при которых ротор автоматически уравновешивается

$$\alpha_1^0 = \arccos\left(-\frac{\psi_1}{2}\right); \quad \alpha_2^0 = 2\pi - \alpha_1^0. \quad (7.17)$$

Отсюда видно, что шары расположены симметрично относительно оси x , причем

$\alpha_1^0 > \pi/2$, если $a > 0$. Назовем этот случай вариантом I . Кроме рассмотренного случая, возможно так же еще случаи, когда положения

шариков устойчивы, Шарики могут быть устойчивы и в тех случаях, когда они соприкасаются, и точка их касания лежит на оси x . При этом тангенциальные силы инерции шариков равны и противоположно направлены. Углы, определяющие эти положения шариков, будут следующими:

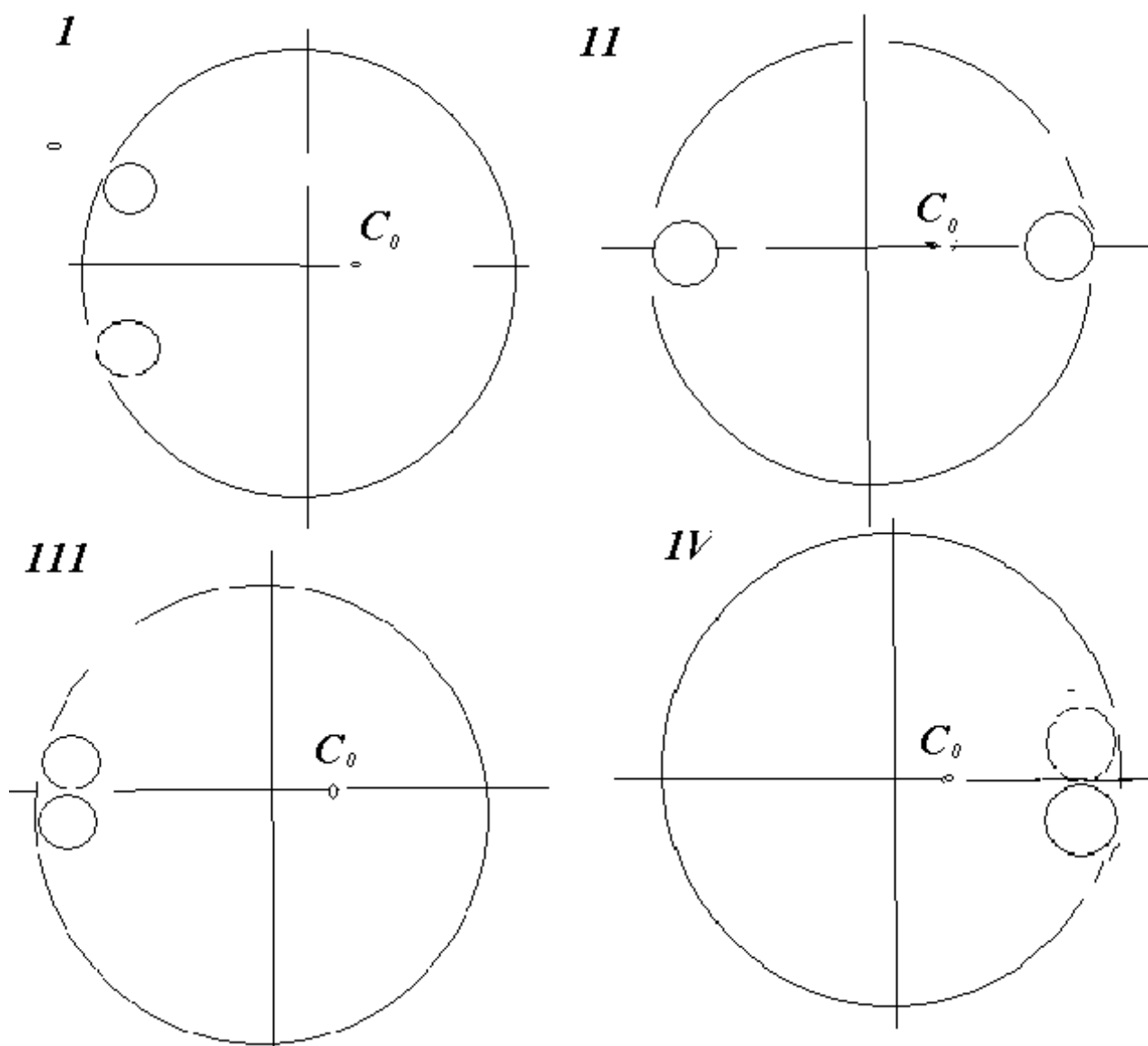


Рисунок 17 - Возможные положения равновесия шариков

$$\alpha_1^0 > \frac{\pi}{2}; \quad \alpha_2^0 > \pi, \quad \text{если } a > 0 \quad \text{вариант 1}$$

$$\alpha_1^0 = 0; \quad \alpha_2^0 = \pi \quad \text{вариант 11}$$

$$\alpha_1^0 = \pi - \theta; \quad \alpha_2^0 = \pi + \theta \quad \text{вариант III}$$

$$\alpha_1^0 = \theta; \quad \alpha_2^0 = 2\pi - \theta \quad \text{вариант IV}$$

$$\text{где } \sin \theta = \frac{r}{R-r}$$

α_1^0 , α_2^0 – углы α_1 и α_2 в положении равновесия

Относительное положение шариков по варианту III устойчиво в закритической области вращения, а по варианту IV – при докритической скорости. Однако ни III, ни IV не являются положениями, при которых возможно уравновесить ротор. При варианте III уменьшается неуравновешенность ротора, но не полностью, а при варианте IV, наоборот, неуравновешенность увеличивается.

Вариант II, при котором шарики располагаются на оси x, но в диаметрально противоположных точках, не дают эффекта уравновешивания ротора и в подшипниках остаются динамические реакции.

Граница устойчивой работы АУУ лежит не на критической скорости, а несколько выше её, и положение этой границы зависит от параметров системы, в частности, трения. При оборотах, больших, чем граничные, АУУ работает устойчиво и время уравновешивания тем меньше, чем выше скорость. Наибольшее возможное значение α_1^0 определяется из выражения

$$(\cos \alpha_1^0)_{\max} = -\frac{\sqrt{R(R-2r)}}{R-r} \quad (7.18)$$

Так как $\alpha_1^0 < (\alpha_1^0)_{\max}$, то $\cos \alpha_1^0 \geq (\cos \alpha_1^0)_{\max}$. Отсюда, учитывая формулы (7.7), (7.17), (7.18) получаем

$$Ma \leq 2m\sqrt{R(R-2r)} \quad (7.19)$$

Выражение (7.19) определяет наибольшую неуравновешенность ротора, которая может быть устранена с помощью АУУ с двумя шарами

$$\Delta = \frac{8}{3} \pi \gamma R^4 \left(\frac{r}{R} \right)^3 \sqrt{1 - 2 \frac{r}{R}} \quad (7.20)$$

где γ - удельный вес материала шариков.

Трение в системе приводит к тому, что шарики имеют не точки равновесия, а некоторые зоны равновесия, определяемые неравенствами

$$-\frac{k}{r} \leq tq\beta_i \leq \frac{k}{r} \quad (i = 1, 2) \quad (7.21)$$

где k – коэффициент трения качения.

Выражения (7.12) для $tq\beta_i$ ($i = 1, 2$) содержат угловую скорость ротора, следовательно, и границы зон равновесия зависят от нее. При этом выше критической скорости с увеличением скорости, границы зон равновесия расширяются.

Наличие трения приводит также к тому, что при медленном изменении эксцентриситета, ранее уравновешенного ротора, АУУ начнет работать не сразу, а только после достижения неуравновешенностью некоторой величины Δa . Эта величина Δa является мерой чувствительности АУУ: чем больше Δa , при

которой АУУ начнет уравновешивать ротор, тем он менее чувствителен, и наоборот.

Если в обойме АУУ помещены не два, а n шариков, то для прогиба вала ротора формула получается аналогичной формуле

$$q = -\frac{v_n \gamma_n^2}{1 - \gamma_n^2} \sqrt{A_n^2 + B_n^2} \quad (7.22)$$

где

$$A_n = \cos \alpha_1 + \cos \alpha_2 + \dots + \cos \alpha_n + \psi_1;$$

$$B_n = \sin \alpha_1 + \sin \alpha_2 + \dots + \sin \alpha_n;$$

$$v_n = \frac{m(R-r)}{M+nm}; \quad \gamma_n = \frac{\omega}{\omega_n}; \quad \omega_n = \sqrt{\frac{c}{M+nm}}.$$

Условия равновесия шариков определяются уравнениями

$$A_n = 0, \quad B_n = 0. \quad (7.23)$$

Если уравновешивание происходит по варианту 1, то шарики разделятся на группы. Если число шаров четное, групп будет две с равным числом шаров, а если нечетное, то три: две группы с одинаковым числом шариков $\frac{n-1}{2}$ симметрично относительно оси x и, один шарик расположится по оси x

противоположно центру масс C_0 . В группе шарики расположатся наиболее тесно, контактируя друг с другом.

По варианту 111 шарики расположатся одной группой, симметрично относительно оси x , контактируя друг с другом.

При выполнении этих условий центр тяжести системы и ось ротора совпадут с осью вращения и динамические реакции в подшипниках будут равны нулю, т.е. ротор будет уравновешен.

Порядок проведения теоретического расчета

1. Определим углы $\alpha_{11}^0, \alpha_{21}^0$. Здесь угол α_{11}^0 - угол между положительным направлением оси ox и первым шариком в 1-ой группе, а α_{21}^0 - угол между положительным направлением ос ox и первым шариком во второй группе.

Эти шарики назовем *реперными* шариками.

2. Положение остальных шариков в группах определится из геометрических соображений:

$$\alpha_{1k}^0 = \alpha_{11}^0 \pm k \Delta\alpha, \quad \text{где} \quad \Delta\alpha = \frac{2r}{R-r}. \quad (7.24)$$

Знак «-» относится к шарикам, расположенным от шарика с углом α_{11}^0 в направлении по часовой стрелке, а знак «+» к шарикам, расположенным против часовой стрелки.

3. Для варианта 111 (шарики собираются в одну группу из n шариков)) из условия (7.23), которое примет вид

$$\begin{aligned} A_n &= \sum_{k=1}^n \cos\left(\alpha_1^0 + (k-1)\frac{2r}{R-r}\right) + \psi_1 = 0; \\ B_n &= \sum_{k=1}^n \sin\left(\alpha_1^0 + (k-1)\frac{2r}{R-r}\right) = 0. \end{aligned} \quad (7.25)$$

где

$$\psi_1 = \frac{Ma}{m(R-r)}$$

Так как ротор полностью уравновешен, то центр тяжести, ось ротора и ось вращения совпадают, то эксцентриситет будет равен нулю, то есть $\psi_1 = 0$. Условия (7.24) примут вид

$$\sum_{k=1}^n \cos\left(\alpha_1^0 + (k-1)\frac{2r}{R-r}\right) = 0,$$

$$\sum_{k=1}^n \sin\left(\alpha_1^0 + (k-1)\frac{2r}{R-r}\right) = 0. \quad (k = 1, 2, \dots, n) \quad (7.26)$$

решив систему (7.26), найти $\alpha_1^0, \alpha_2^0, \dots, \alpha_n^0$

4. Для этого, определив α_1^0 по формуле (7.24) определить положения других шариков.

Описание лабораторной установки

Лабораторная установка состоит из ротора 1, установленного на вертикальном валу 2 и стробоскопического частотомера 8, подвижного кольца 3, установленного концентрично обойме 6, кольца 5 со шкалой от 0^0 до 360^0 . Вертикальный вал 2 соединен с валом эл/двигателя 9, корпус которого установлен на упругих опорах 7 к неподвижной платформе 10. На валу 2 установлена обойма 6, в которой расположено 6 шариков 11.

Установка работает следующим образом. При включении эл/двигателя неуравновешенный ротор приходит во вращение. Для увеличения неуравновешенности ротора рекомендуется добавлять дебаланс ко дну ротора. Набор скорости ротора сопровождается интенсивным ростом изгибных колебаний ротора. Шарика 11 находятся в кольцевой канавке на дне обоймы 6. Глубина канавки выбирается из расчета, что шарики могут покинуть канавку на скорости не меньшей чем первая критическая скорость. При достижении критической скорости шарики покидают канавку и располагаются по периферии обоймы одной группой в определенном, относительно обоймы положении. Это положение определяется углом α_1^0 между ближайшим к оси ox шариком и положительным направлением этой оси. Для определения этого угла служит подвижное кольцо 3 со стрелкой 12. Направив на шарики свет от стробоскопической лампы 4, плавно

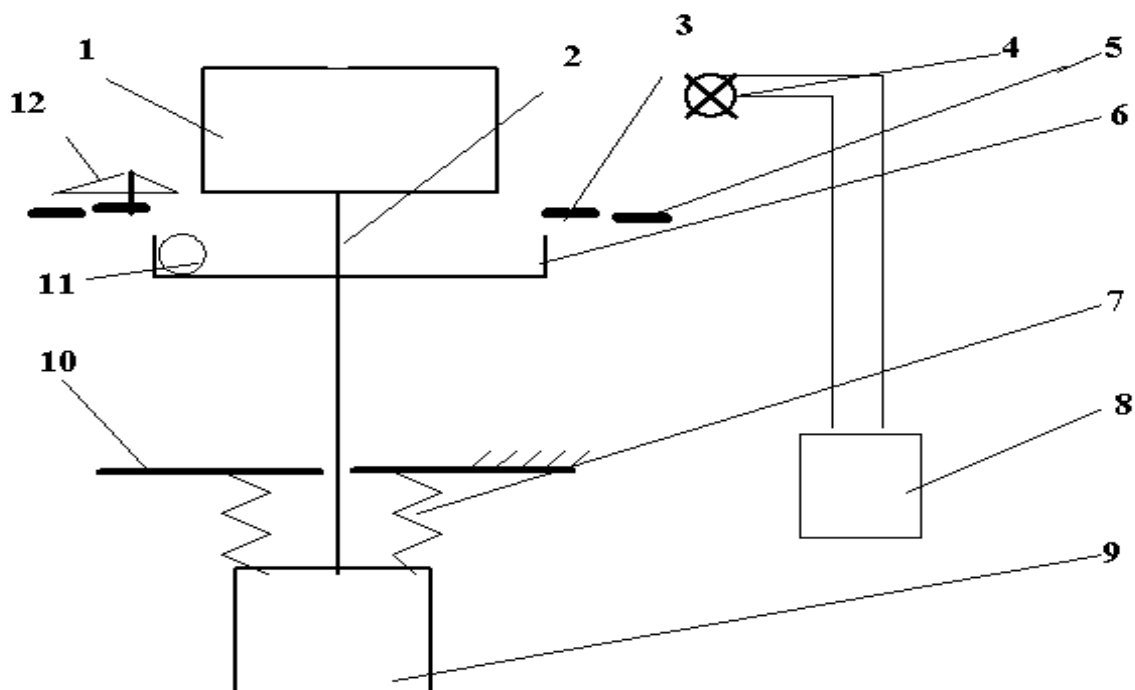


Рисунок 17 - Схема лабораторной установки для исследования работы шарикового АУУ

вращая рукоятку частотомера 8, добиваемся того, чтобы шарики стали «неподвижными». Поворачивая подвижное кольцо совмещаем стрелку 12 с центром реперного шарика, по шкале отсчитываем угол по зафиксированной шкале 5.

Это положение реперного шарика относительно абсолютной системы отсчета. Для того чтобы найти угол α_1^0 в подвижной системе отсчета, нужно начало отсчета шкалы 5 совместить с осью ox , а подвижное кольцо 3 со стрелкой 12 поворачивать до совмещения стрелки с центром реперного шарика. Ось ox проведена по дну, обоймы от центра обоймы через проекцию центра тяжести ротора с обоймой на дно обоймы.

Для определения положения этой оси, также требуется применение стробоскопической лампы.

Порядок выполнения работы

1. Включить эл/двигатель ротора.
2. При достижении угловой скорости ротора критической области и полного уравновешивания ротора, включить стробоскопическую лампу.

3. Плавно регулируя частоту импульсов лампы, добится того, чтобы ось ox , проведенная по дну обоймы стала неподвижной.
4. Поворачивая шкалу 5, совместить начало отсчета шкалы с осью ox .
5. Поворачивая кольцо 3 со стрелкой 12, совместить стрелку с центром реперного шарика.
По этой же стрелке (обратной стороной) снять отсчет значения угла α_1^0 .
6. Повторить эти измерения 5 раз.
7. Провести статистическую обработку результатов измерений.

Содержание отчета

1. Номер и наименование работы.
2. Теоретический расчет угла положения реперного шарика.
3. Результаты экспериментального определения угла положения реперного шарика.
4. Статистическая обработка результатов измерений
5. Анализ теоретических и экспериментальных результатов.

8 Лабораторная работа 8

Исследование напряженного состояния быстровращающегося диска

Цель работы

Теоретически определить напряжения во вращающихся деталях дискового типа и экспериментально найти напряжения в тех же условиях.

Теоретическая часть

В химической промышленности широко применяются оборудование с быстровращающимися деталями (центрифуги, сепараторы, вентиляторы, дисковые пилы и т.д.). С точки зрения расчета и конструирования, машины с быстровращающимися деталями можно условно разделить два класса: дисковые и роторные.

Дисковые машины более просты чем роторные; их расчет проще роторных. Основным рабочим органом дисковых машин является диск или набор дисков того или иного профиля.

Рассмотрим расчет быстровращающегося диска постоянной толщины. Пусть угловая скорость вращения диска ω , толщина диска $h = const = l$, плотность материала диска ρ .

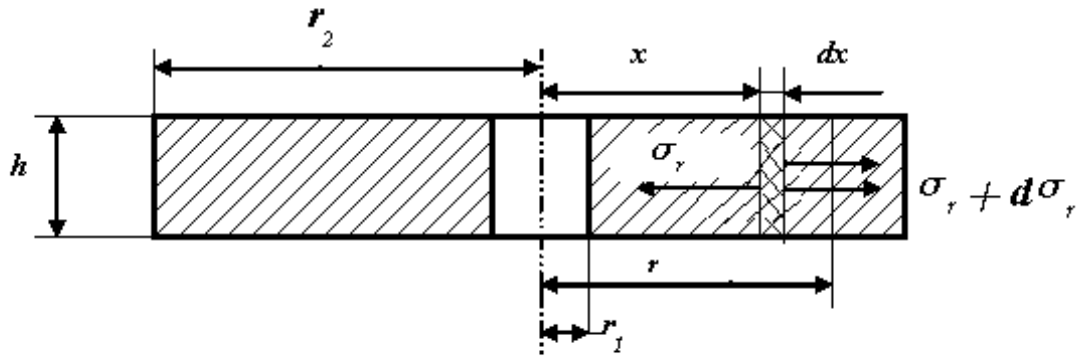


Рисунок 18

Выделим бесконечно малый элемент диска в форме сектора на расстоянии x от оси вращения, длиной dx и шириной $x d\theta$. На гранях выделенного элемента действуют: радиальные напряжения σ_r и $\sigma_r + d\sigma_r$, и окружные (тангенциальные) напряжения σ_θ и $\sigma_\theta + d\sigma_\theta$. Равнодействующие напряжений, действующие на гранях, равны произведениям напряжений на площади граней, которые равны $h dx$ - площадь граней, нормальных касательной к срединной линии в рассматриваемом сечении, $h x d\theta$ и $h (x+dx)d\theta$, а также равнодействующая центробежных сил инерции $q = \rho\omega^2 r$. Проектируя эти силы на радиальное и тангенциальное направления и пренебрегая членами, содержащими бесконечно малые величины высшего порядка малости ($d\theta^2$, $d\theta dx$), получим уравнение равновесия элемента диска.

$$\frac{d}{dx}(\sigma_r x) - \sigma_\theta + \rho\omega^2 x^2 = 0 \quad (8.1)$$

Уравнение совместности деформаций в напряжениях в интегральной форме имеет вид

$$\sigma_\theta = \nu\sigma_r + \frac{E(1-\nu^2)}{x^{1+\nu}} \int_a^r \frac{x^\nu}{E} \sigma_r dx + \frac{Ea^{1+\nu}}{E_a x^{1+\nu}} (\sigma_{\theta_a} - \nu\sigma_{r_a}). \quad (5.2)$$

В уравнениях (5.1) и (5.2) индекс a означает, что рассматривается значение параметра для радиуса $r = a$.

Задачу можно решать и в перемещениях. Основное дифференциальное уравнение для радиального перемещения для диска с постоянной толщиной и постоянными параметрами упругости (E , ν) и постоянной температуре, имеет вид

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{du}{dx} - \frac{u}{x^2} = -\frac{1-\nu^2}{E} \rho \omega^2 x \quad (8.3)$$

Уравнение (3) имеет частные решения

$$u_1 = x, \quad u_2 = \frac{1}{x}. \quad (8.4)$$

Краевые условия

Краевые условия для диска на внешнем контуре относятся к радиальному напряжению

$$\sigma_r(b) = \sigma_{rb},$$

где σ_{rb} - заданное радиальное напряжение на внешнем контуре. Обычно, это напряжения от действия центробежных сил деталей, закрепленных по внешнему контуру диска. Если таковые отсутствуют, как в нашем случае, то σ_{rb} равно нулю.

На внутреннем контуре диска с центральным отверстием краевое условие имеет вид

$$\sigma_r(a) = \sigma_{ra}, \quad \text{где } \sigma_{ra} \text{ - заданное радиальное}$$

напряжение на внутреннем контуре. Если отсутствует посадка на вал с натягом, то $\sigma_{ra} = 0$. При наличии посадки с натягом, то $\sigma_{ra} = -p$, где p - давление напрессовки.

Полагаем, что посадки с натягом нет, т.е. $\sigma_{ra} = 0$. Обобщенный закон Гука в нашем случае имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{du}{dx} + \nu \frac{u}{x} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left(\frac{u}{x} + \nu \frac{du}{dx} \right). \end{aligned} \quad (8.5)$$

или

$$\begin{aligned}\varepsilon_r &= \frac{1}{E}(\sigma_r - \nu\sigma_\theta); \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \nu\sigma_r).\end{aligned}\tag{8.6}$$

Для диска с центральным отверстием в напряжениях будет решение

$$\begin{aligned}\sigma_r(x) &= \frac{3+\nu}{8} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 - \frac{a^2b^2}{x^2} - x^2 \right); \\ \sigma_\theta(x) &= \frac{3+\nu}{3} \rho\omega^2 \left(b^2 + a^2 + \frac{a^2b^2}{x^2} - \frac{1+3\nu}{3+\nu} x^2 \right);\end{aligned}\tag{8.7}$$

Радиальное перемещение в диске

$$u(x) = \frac{3+\nu}{8} \frac{\rho\omega^2 x}{E} \left(\left[(b^2 + a^2)(1+\nu) + \frac{a^2b^2}{x^2} (1+\nu) - x^2 \frac{1-\nu^2}{3+\nu} \right] \right).\tag{8.8}$$

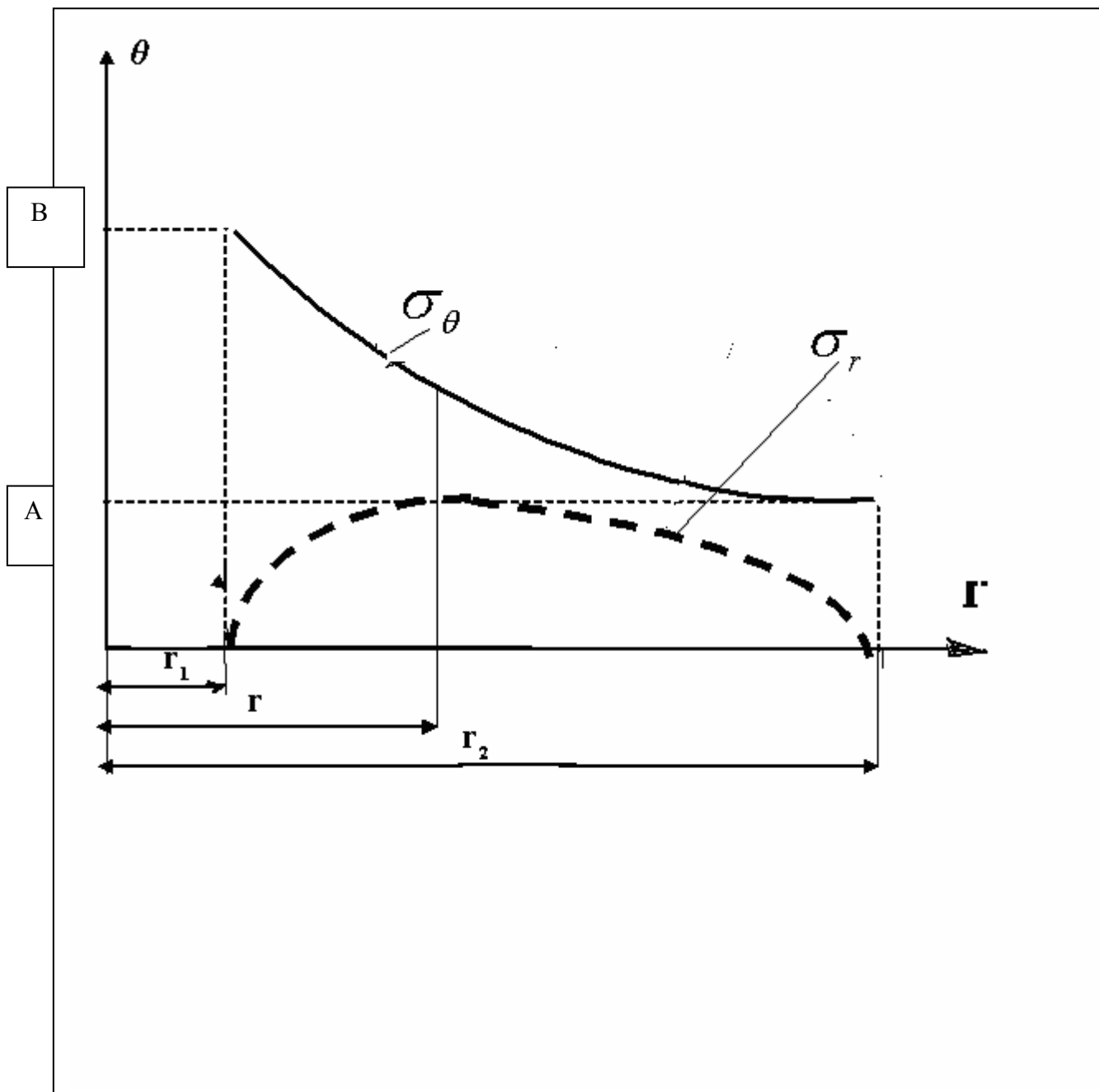


Рисунок 19 - Эпюры окружных радиальных напряжений

На рисунке 19 даны кривые распределений радиальных и окружных напряжений, где

$$A = \sigma_{\theta_a} = \rho \omega^2 b^2 \left(\frac{3 + \nu}{4} + \frac{a^2}{b^2} \frac{1 - \nu}{4} \right),$$

$$B = \sigma_{\theta_b} = \rho \omega^2 b^2 \left(\frac{3 + \nu}{4} \frac{a^2}{b^2} + \frac{1 - \nu}{4} \right) \quad (8.9)$$

Порядок проведения теоретического расчета

1. Для данных диска $a = d/2 = 37.5_{\text{мм}}$; $b = D/2 = 150_{\text{мм}}$, где d, D – внутренний и наружный диаметр диска соответственно, вычислить по формулам (8.7) радиальные и окружные напряжения для $x = x_1, x_2, \dots, x_n$ при заданных значениях ω_i ($i = 1, 2, \dots, m$). Материал диска – сталь, плотность $\rho = 7.8 \text{ кг/см}^3$; коэффициент Пуассона $\nu = 0.3$.

Принять $x_1 = 47_{\text{мм}}$, $x_2 = 66_{\text{мм}}$, $x_3 = 85_{\text{мм}}$, $x_4 = 104_{\text{мм}}$, $x_5 = 123_{\text{мм}}$.

Описание лабораторной установки

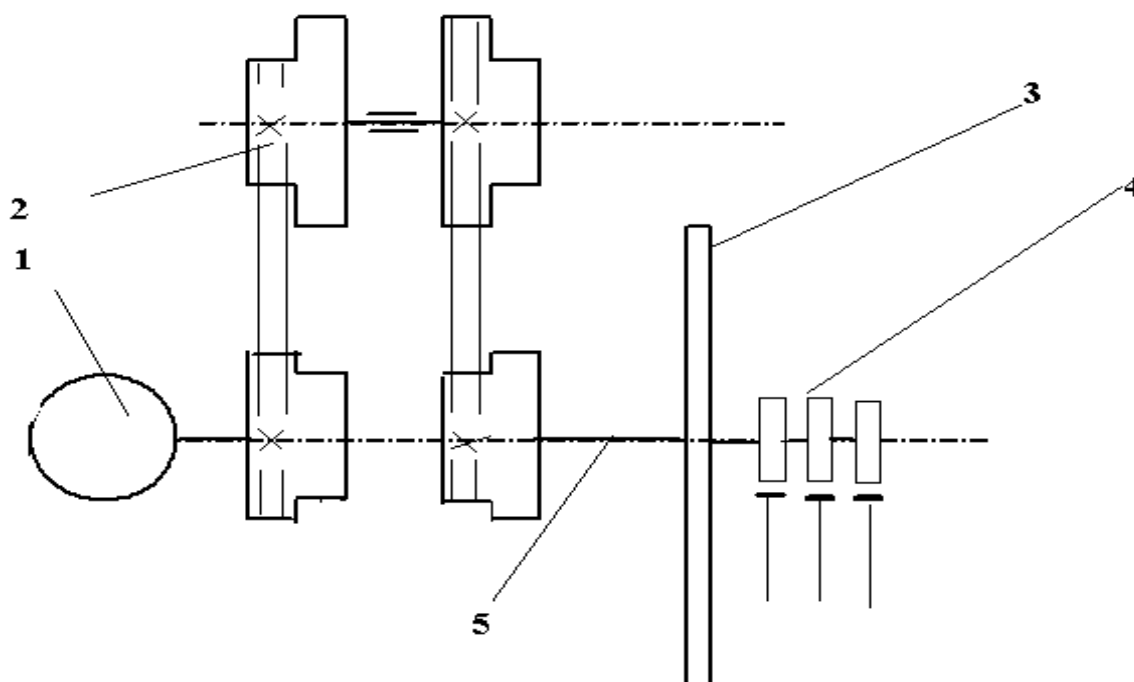
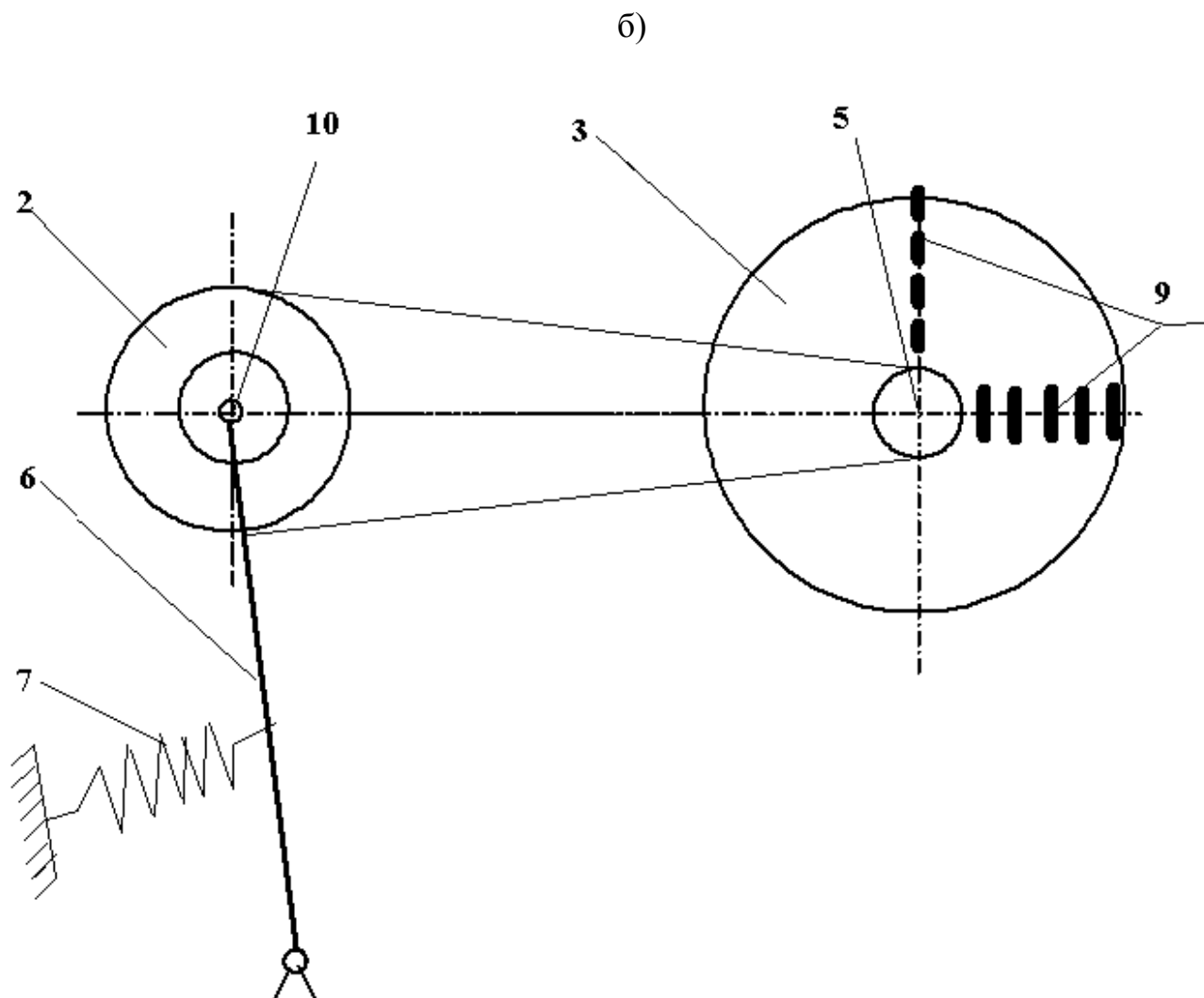


Рисунок 20 – Схема лабораторной установки для исследования напряженно-деформированного состояния быстровращающегося диска. Лист 1



б)

Рисунок 20. Лист 2.

Установка состоит из двухскоростного эл/двигателя 1, контрпривода 2, вала 5 с установленным на нем диском 3. Контрпривод 2 двухступенчатый, позволяющий получить 4 различные угловые скорости диска. Таким образом на установке можно получить 8 различных угловых скоростей диска. Плоский диск наружным диаметром $D = 300_{\text{мм}}$ и внутренним диаметром $d = 75_{\text{мм}}$, установлен на ведомом валу 5. С этим валом соединен токосъемник 4. Шкивы контрпривода свободно насажены на ось 10, стойка 6 контрпривода 2 с помощью пружины 7 осуществляет натяжение ременной передачи. Межосевые расстояния и длины клиновых ремней обеих ременных передач должны быть одинаковыми. Датчики 9 на диске наклеены в радиальном и окружном направлениях с шагом $19_{\text{мм}}$.

Установка работает следующим образом. При включении эл/двигателя вращение через контрпривод передается на вал 5. Его угловая скорость передается на плоский диск 3. Под действием центробежных в диске образуется напряженно-деформированное состояние, которое измеряется с помощью 10 тензодатчиков 9. Так как угловая скорость диска постоянна (она регулируется ступенчато), то напряженно-деформированное состояние будет статическим, поэтому можно применить ММТС-64.01

Порядок выполнения работы

1. Установить нужное передаточное число ременных передач. Для этого освободить стойку контрпривода, оттянуть пружину и установить ремень в требуемые канавки. Зафиксировать стойку контрпривода.
2. Включить эл/двигатель. При достижении установившейся угловой скорости произвести измерение сигнала и подключенного датчика.
3. Для снятия сигнала с другого датчика остановить двигатель и переключить входы токосъемника на выводы другого датчика.
4. На одной угловой скорости снять сигналы со всех 10 датчиков.
5. Перейти на другую угловую скорость и повторить измерения со всех 10 датчиков.
6. Для каждой угловой скорости провести по 5 параллельных измерений со всех 10 датчиков.

Содержание отчета

1. Номер и наименование работы.
2. Теоретические расчеты радиальных и окружных напряжений при заданных угловых скоростях диска.
3. Экспериментальные данные по распределению напряжений в радиальном и окружном направлениях.
4. Статистическая обработка результатов измерений.
5. Анализ теоретических и экспериментальных результатов.

Список использованных источников

1. Бабаков И.М. Теория колебаний / И.М.Бабаков – М.: Наука, 1968. – 559 с.
2. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций. Статика. / В. Л.Бидерманн – М.: Машиностроение, 1977. – 487 с.
3. Биргер И.А., Расчет на прочность деталей машин / И.А. Биргер, Б.Ф. Шорр, Р.М. Шнейдерович – М.: Машиностроение, 1966. – 616 с.
4. Бояршинов С.В. Основы строительной механики машин. / С.В. Бояршинов – М.: Машиностроение, 1973. – 456 с.
5. Диментберг Ф.М. Колебания машин / Ф.М. Диментберг, К.Т. Шаталов, А.А. Гусаров – М.: Машиностроение, 1964. – 308 с.
6. Новожилов В.В. Линейная теория тонких оболочек / В.В. Новожилов, К.Ф. Черных, Е.И.Михайловский – Л.: Политехника, 1991. – 656 с.
7. Маслов Г.С. Расчеты колебаний валов. Справочник / Г.С. Маслов – М.: Машиностроение, 1980. – 151 с.
8. Прочность, устойчивость, колебания. Справочник в 3-х томах Т. 1 и 2/ под общей редакцией И.А. Биргер и Я.Г. Пановко – М.: Машиностроение, 1968. - том 1 – 831 с., том 2 – 463 с.
9. Соколов В.И. Основы расчета и конструирования деталей и узлов пищевого оборудования / В.И. Соколов - М.: Машиностроение, 1985. – 423 с.
10. Тимошенко С.П. Колебания в инженерном деле. / С.П. Тимошенко, Д.Х. Янг, У. Уивер – М.: Машиностроение, 1985. – 472 с.
11. Домашнев А.Д. Конструирование и расчет химических аппаратов. / А.Д. Домашнев – М.: Машгтз, 1961. – 624 с.
12. Ильинкий В.С. Защита аппаратов от динамических воздействий. / И.С. Ильинский – М.: Энергия , 1970. – 320 с.
13. Вибрации в технике. Справочник в 6 т. Т.3 Колебания машин, конструкций и их элементов / под редакцией Ф.М. Диментберга и К.С. Колесникова – М.: Машиностроение, 1980. – 544 с.
14. Паникаров И.И. Расчеты машин и аппаратов химических производств и нефтегазопереработки (примеры и задачи) / И.И. Паникаров, С.И. Паникаров, С.В. Рачковский - М.: Альфа-М 2008 – 717 с.

