Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа
Кафедра математической кибернетики

А. Н. Павленко
Е. Н. Рассоха

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ДЛЯ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Методические указания

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 517.5(07)
ББК 22.161.5я7
П 12

Рецензент - кандидат физико-математических наук С.А. Герасименко

Павленко, А.Н.

П12 Дифференциальное исчисление для функций многих переменных \ А.Н. Павленко, Е.Н. Рассоха; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 67 с.

В методических указаниях изложены основные теоретические вопросы и продемонстрировано решение типовых задач и примеров по теме «Дифференциальное исчисление для функций многих переменных».

Методические указания предназначены для студентов всех форм обучения, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности 190601 – «Автомобили и автомобильное хозяйство», 190603 – «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования (автомобильный транспорт)», 190702 – «Организация и безопасность движения».

УДК 517.5(07)
ББК 22.161.5я7

Содержание

Введение

Настоящие методические указания составлены в соответствии с программой изучения дисциплины «Математика» студентами специальности 190601 – «Автомобили и автомобильное хозяйство», 190603 – «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования (автомобильный транспорт)», 190702 – «Организация и безопасность движения». Дисциплина «Математика» по всем указанным специальностям относится Государственным образовательным стандартом к федеральным дисциплинам.

Раздел «Дифференциальное исчисление для функций многих переменных» не только сам имеет многочисленные практические приложения, но и является необходимым при изучении ряда разделов высшей математики («Интегральное исчисление для функций многих переменных», «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Уравнения математической физики», «Теории вероятностей и математической статистике», «Численные методы», «Векторном анализе» и т. д.).

Следует отметить, что в данных методических указаниях приведены подробные решения большого количества типовых задач. Такое изложение материала позволяет использовать указания для самостоятельной работы студентов над домашними заданиями и РГЗ как очного, так и заочного отделений, указанных специальностей.

Приведение разнообразных примеров применения рассматриваемого материала в различных областях науки и техники (физика, сопротивление материалов, электротехника, теория вероятностей, математическая статистика, экономика) способствует повышению мотивации к изучению студентами математики.

Настоящая работа не претендует на полноту и законченность изложения всех вопросов, имеющих отношение к теме «Функции нескольких переменных». О замеченных недостатках в методических указаниях просьба сообщить на кафедры математической кибернетики и математического анализа ГОУ ОГУ. Авторы с благодарностью примут и рассмотрят любые предложения, касающиеся повышения научного, учебно-методического и содержательного уровня данных методических указаний.

1 Понятие функции нескольких переменных и ее предела

1.1 Определение функции нескольких переменных

Нам уже знакомо понятие функции одной переменной. Как известно, такие функции выражают зависимость одной величины от другой. Однако, абсолютное большинство величин самой разной природы зависят ни от одной, а от нескольких величин.

Примеры:

1) площадь прямоугольника зависит от двух величин – длин его сторон a и b:

$$S = ab;$$

2) сила тока I в замкнутой цепи определяется ЭДС источника тока E, его внутренним сопротивлением r, а также сопротивлением внешнего участка цепи R:

$$I = \frac{E}{R + r};$$

3) прибыль предприятия π зависит от его дохода r и издержек (полных затрат) c:

$$\pi = r - c.$$

Когда величина y зависит от n величин x_1, $x_2, \ldots$, x_n, то часто говорят, что величина y является функцией n величин x_1, $x_2, \ldots$, x_n.

Определение 1.1.1. Функцией n действительных переменных будем называть закон, ставящий в соответствие каждому упорядоченному набору из n действительных чисел $(x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n$, единственное действительное число y.

Здесь: x_1, $x_2, \ldots$, x_n - независимые переменные или аргументы, y - зависимая переменная или функция, D - область определения данной функции.

Обозначение функции n переменных: $y = f(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$. Независимые переменные можно интерпретировать как координаты точки в пространстве R^n: $M(x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$. В этом случае функцию нескольких переменных можно обозначить как $y = f(M)$. Если же рассматривать значения x_1, $x_2, \ldots$, x_n как координаты радиус-вектора $\bar{r} = (x_1,\ x_2, ...,\ x_n)$, то применяется обозначение $y = f(\bar{r})$.

Множество всех значений, которые функция может принимать, будем называть областью определения функции

$$E(f) = \{y = f(x_1, x_2, ..., x_n) \mid (x_1, x_2, ..., x_n) \in D(f)\}.$$

Свойства функций $n-$переменных $(n \geq 3)$ аналогичны свойствам функций двух переменных, поэтому в дальнейшем мы будем рассматривать, как правило, только функции двух переменных $z = f(x, y)$.

1.2 Окрестности и области на плоскости

Определение 1.2.1. Окрестностью $U_\varepsilon(M_0)$ точки M_0 радиуса ε называется множество точек M плоскости, удовлетворяющее неравенству $|M_0M| < \varepsilon$.

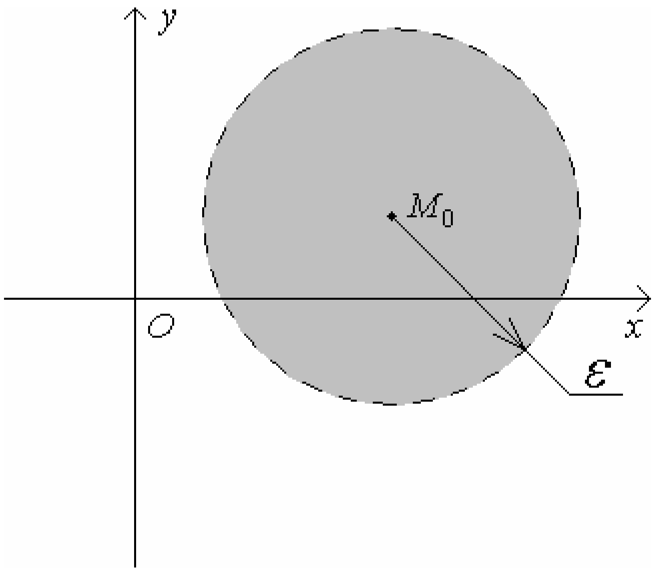

Рисунок 1

Если же из окрестности исключить саму точку M_0, то тогда мы получим проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_\varepsilon(M_0)$ точки M_0 радиуса ε.

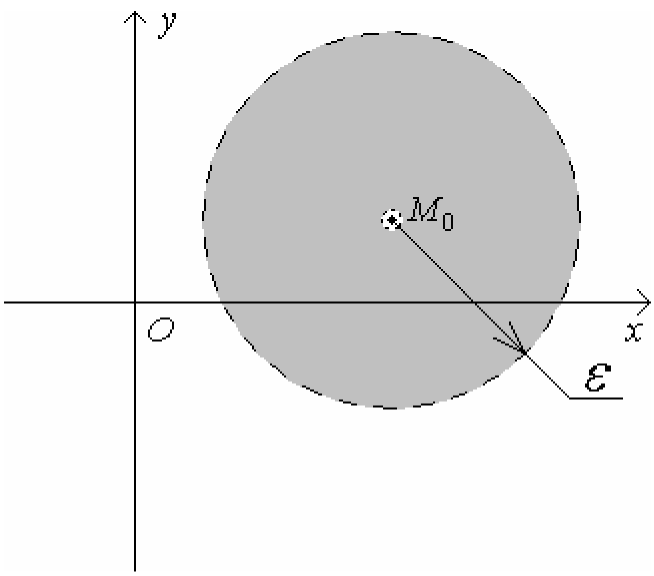

Рисунок 2

Определение 1.2.2. Открытой областью D на плоскости (Рисунок 3) называется множество точек плоскости, удовлетворяющее требованиям:

1) если точка принадлежит множеству D, то можно указать окрестность этой точки, также принадлежащую множеству D;

2) D - связное множество, то есть любые две точки множества D можно соединить ломаной линией, целиком принадлежащей множеству D.

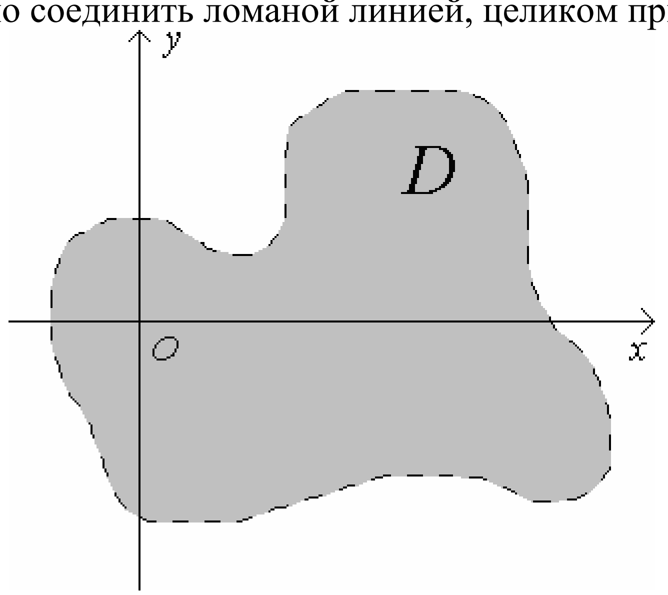

Рисунок 3

Определение 1.2.3. Замкнутой областью D (Рисунок 4) будем называть открытую область вместе с ее границей.

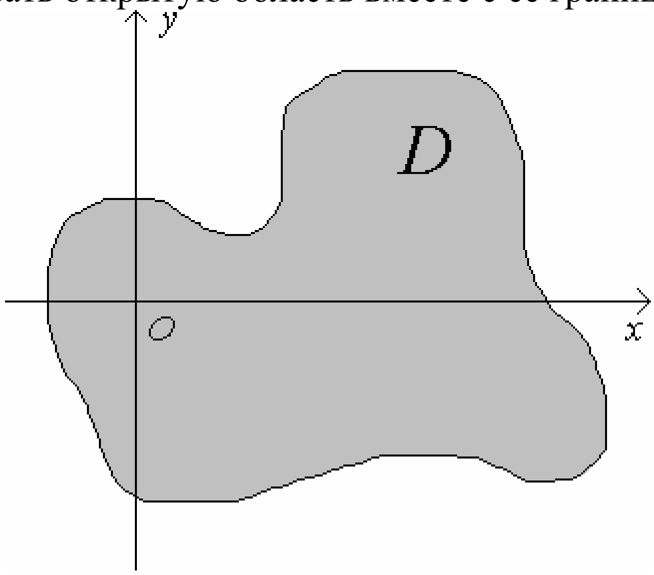

Рисунок 4

Определение 1.2.4. Область называется ограниченной, если она является подмножеством некоторого круга.

1.3 Способы задания функций нескольких переменных

Аналитический способ (с помощью формулы)

Пример: $f(x, y) = \dfrac{x^3 - 4xy}{2y^2}$.

Задача. Пусть дана функция $f(x,y)=\dfrac{x^3-4xy}{2y^2}$. Найти:

1) $f(1;2)$;
2) $f(M)$, где $M(-2;-1)$.

Решение.

1. Для нахождения значения $f(1;2)$, достаточно в формулу, задающую данную функцию, вместо переменой x подставить значение 1, а вместо переменной y - значение 2.

Получим:

$$f(1;2)=\frac{1^3-4\cdot 1\cdot 2}{2\cdot 2^2}=-\frac{7}{8}.$$

2. Для нахождения значения данной функции в точке $M(-2;-1)$, достаточно в формулу, задающую данную функцию, вместо переменой x подставить значение -2, а вместо переменной y - значение -1.

Получим:

$$f(M)=\frac{(-2)^3-4\cdot(-2)\cdot(-1)}{2\cdot(-1)^2}=-8.$$

Если функция задана аналитически и ее область определения не указана, то за ее область определения принимается так называемая естественная область определения, то есть множество всех наборов значений аргументов, при которых данная формула имеет смысл.

Задача. Найти область определения функции $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$.

Решение.

Формула, задающая функцию, имеет смысл тогда и только тогда, когда подкоренное выражение неотрицательно. Тогда решим неравенство

$$4-x^2-y^2\ge 0,\ x^2+y^2\le 4,\ x^2+y^2\le 2^2.$$

Полученное неравенство определяет замкнутый круг с центром в начале координат и радиусом 2.

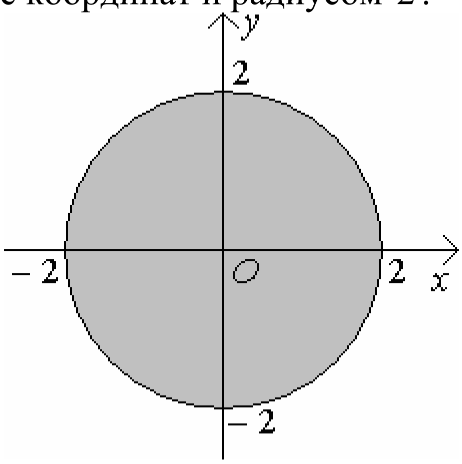

Рисунок 5

Задача. Найти область определения функции $f(x,y)=\ln xy$.

Решение.

Логарифм определен на множестве положительных чисел, поэтому для нахождения области определения данной функции нам достаточно решить неравенство $xy > 0$. Оно эквивалентно совокупности двух систем

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x > 0, \\ y > 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ y < 0. \end{cases}\end{array}\right.$$

Записанная совокупность определяет первую и третью координатные четверти без границ.

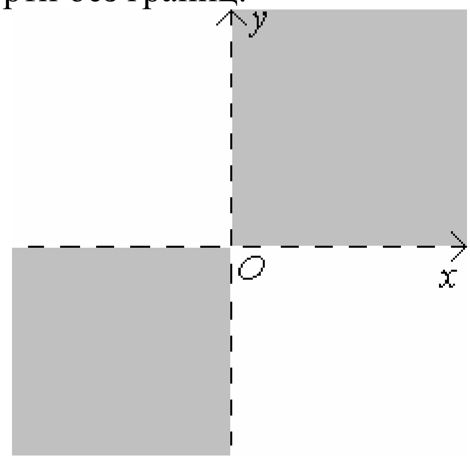

Рисунок 6

Табличный способ

Кроме задания функций одной переменной данный способ практически всегда применяется только для функций двух переменных. В качестве примера рассмотрим фрагмент таблицы значений коэффициентов Стьюдента $t(\gamma, n)$, которые широко применяются при статистической обработке экспериментальных данных.

Таблица 1

n	γ				
	…	0,4	0,5	0,6	…
…	…	…	…	…	…
12	…	0,540	0,697	0,876	…
13	…	0,539	0,695	0,873	…
14	…	0,538	0,694	0,870	…
…	…	…	…	…	…

Из приведенной таблицы легко установить, что, например, при числе опытов $n = 13$ и для доверительной вероятности $\gamma = 0{,}5$ значение коэффициента Стьюдента будет равно $t = 0{,}695$.

Семейство линий и поверхностей уровня

Наглядно функции двух (трех) переменных задаются с помощью семейств линий (поверхностей) уровня. Последние будут рассмотрены в п. 1.4.

1.4 Геометрическая интерпретация функций двух и трех переменных

Определение 1.4.1. Графиком функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек пространства

$$\Pi = \{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D(f)\}.$$

Как правило, графиком функции двух переменных является некоторая поверхность в пространстве.

Задача. Построить график функции $z = x^2 + y^2$ методом сечений.

Решение.

1. Сечением графика плоскостью $x = 0$ будет являться парабола

$$\begin{cases} z = y^2, \\ x = 0. \end{cases}$$

лежащая в плоскости yOz.

2. Сечением графика плоскостью $y = 0$ будет являться парабола

$$\begin{cases} z = x^2, \\ x = 0, \end{cases}$$

лежащая в плоскости xOz.

3. При $z = 0$ имеем равенство $x^2 + y^2 = 0$. Из которого следует, что $x = 0$ и $y = 0$. Таким образом сечение графика плоскостью $z = 0$ будет состоять из единственной точки – начала координат $O(0,0,0)$.

4. Сечение плоскостью $z = C$ $(C > 0)$ будет являться окружность

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = \left(\sqrt{C}\right)^2, \\ z = C. \end{cases}$$

На основании полученных данных строим график функции $z = x^2 + y^2$.

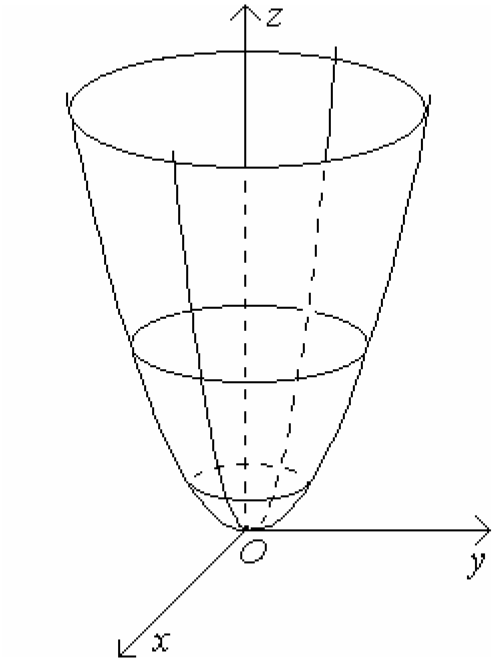

Рисунок 7

Полученная поверхность называется параболоидом вращения. В форме данной поверхности изготовляют спутниковые антенны и зеркала для телескопов.

Замечание 1. Очевидно, что с помощью графика двух переменных невозможно даже примерно определить значение функции при данных x и y. Чтобы иметь такую возможность применяются системы линий уровня.

Определение 1.4.2. Линией уровня функции двух переменных $z = f(x, y)$ называется множество точек плоскости, удовлетворяющее уравнению $f(x, y) = C$.

Таким образом, на всей линии уровня значение функции остается постоянным. Очевидно, что линии уровня не могут пересекаться.

Если мы построим несколько линий уровня, меняя C с некоторым шагом, то получим систему линий уровня – наглядное представление функции двух переменных.

Задача. Для функции $f(x, y) = x^3 - y$ построить семейство линий уровня.

Решение.

Так как функция $f(x, y) = x^3 - y$ определена на всей плоскости, то через каждую точку плоскости будет проходить линия уровня, причем единственная. Другими словами, линии уровня будут заполнять всю плоскость.

Получим уравнение линии уровня:

$f(x, y) = C$, $x^3 - y = C$, $y = C + x^3$.

Полученное уравнение определяет кубическую параболу, а изменение величины C приводит к параллельному переносу кубической параболы вдоль оси y. Очевидно, что в данном случае C может принимать любые действительные значения.

Взяв C, например, с шагом 1, построим семейство линий уровня на координатной плоскости.

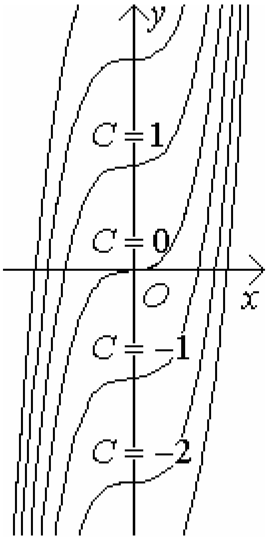

Рисунок 8

С помощью системы линий уровня легко можно находить примерные значения функции двух переменных.

В качестве примера рассмотрим характеристики некоторого биполярного транзистора. Для него зависимость тока коллектора I_K от тока базы $I_Б$ и напряжения коллектор-эмиттер $U_{КЭ}$ приведена на рисунке 9.

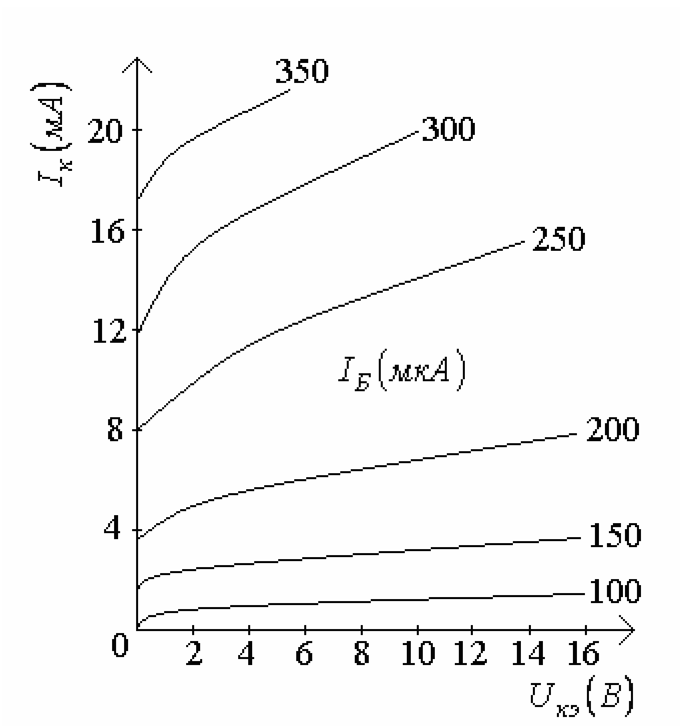

Рисунок 9

Из данной системы линий уровня мы можем легко определить примерное значение любого из параметров при условии, что нам известны значения двух других параметров.

Например:

1) если ток базы $I_Б = 250 мкА$, а напряжение коллектор-эмиттер равно $U_{КЭ} = 8В$, то тогда ток коллектора $I_К \approx 13 мА$;

2) При $U_{КЭ} = 10В$ ток коллектора $I_К = 10 мА$ будет, если ток базы $I_Б \approx 230 мкА$.

Рассмотрим теперь функцию трех переменных $u = f(x, y, z)$. Для того, чтобы построить ее график нам нужна система координат с осями x, y, z и u. Таким образом, построить график функции трех переменных в трехмерном пространстве нельзя.

Для наглядного изображения функций трех переменных используются системы поверхностей уровня.

Определение 1.4.3. Поверхностью уровня функции трех переменных $u = f(x, y, z)$ называется множество точек пространства, удовлетворяющее уравнению $f(x, y, z) = C$.

Таким образом, на всей поверхности уровня значение функции остается постоянным. Очевидно, что поверхности уровня не могут пересекаться.

Если мы построим несколько поверхностей уровня, меняя C с некоторым шагом, то получим систему поверхностей уровня – наглядное представление функции трех переменных.

Задача. Для функции трех переменных $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2$ построить семейство поверхностей уровня.

Решение.

Так как функция $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + 4z^2$ определена на всем пространстве, то через каждую точку будет проходить поверхность уровня, причем единственная. Другими словами, поверхности уровня будут заполнять все пространство.

Получим уравнение поверхности уровня:

$f(x, y, z) = C$, $x^2 + y^2 + 4z^2 = C$.

Отсюда следует, что $C \geq 0$. При $C = 0$ записанное уравнение определяет точку $O(0;0;0)$.

Преобразуем полученное уравнение:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{C} + \frac{z^2}{C/4} = 1, \quad \frac{x^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\sqrt{C}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(\sqrt{C}/2\right)^2} = 1.$$

Полученное уравнение при $C > 0$ определяет эллипсоид с центром в начале координат и полуосями $a = \sqrt{C}$, $b = \sqrt{C}$ и $c = \dfrac{\sqrt{C}}{2}$.

Взяв $C = 0,\ 1,\ 2,\ 3$, построим семейство поверхностей уровня.

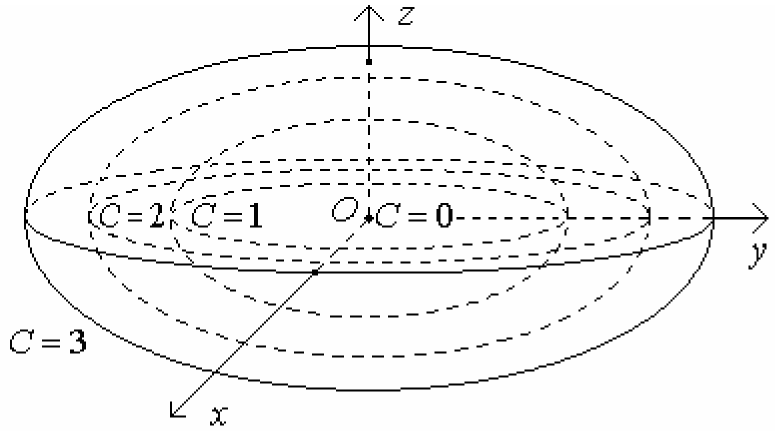

Рисунок 10

1.5 Частное и полное приращение функций нескольких переменных

Частное и полное приращения рассмотрим на примере функций двух переменных, в случае n переменных введение данных понятий совершенно аналогично.

Пусть имеется функция двух переменных $z = f(x,y)$. Очевидно, что если мы изменим значение x на величину Δx, то и значение функции также должно измениться на некоторую величину, которую мы будем называть частным приращением функции $z = f(x,y)$ по переменной x:

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Совершенно аналогично можно ввести понятие частного приращения по переменной y:

$$\Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Если же мы изменим обе переменные: переменную x на величину Δx, а переменную y на величину Δy, то в этом случае изменение функции будем называть полным приращением:

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Задача. Найти частные и полное приращение функции $f(x,y) = xy$ в точке $M_0(1;2)$. Сравнить сумму частных приращений с полным приращением.

Решение.

1. Найдем частное приращение данной функции по переменной x по формуле

$$\Delta_x f(x,y) = f(x+\Delta x, y) - f(x,y).$$

Если $f(x,y) = xy$, то получим:

$\Delta_x f(x,y) = (x+\Delta x)y - xy = xy + \Delta x \cdot y - xy = \Delta x \cdot y$.

Для нахождения частного приращения по x в точке $M_0(1;2)$ нам достаточно вместо x подставить 1, а вместо y подставить 2.

Получим: $\Delta_x f(M_0) = 2\Delta x$.

2. Найдем частное приращение данной функции по переменной y по формуле

$$\Delta_y f(x,y) = f(x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Если $f(x,y) = xy$, то получим:

$\Delta_y f(x,y) = x(y+\Delta y) - xy = xy + x\cdot\Delta y - xy = x\cdot\Delta y$.

Для нахождения частного приращения по y в точке $M_0(1;2)$ нам достаточно вместо x подставить 1, а вместо y подставить 2.

Получим: $\Delta_y f(M_0) = \Delta y$.

3. Найдем полное приращение данной функции по формуле

$$\Delta f(x,y) = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y).$$

Если $f(x,y) = xy$, то получим:

$\Delta f(x,y) = (x+\Delta x)(y+\Delta y)y - xy = xy + x\cdot\Delta y + \Delta x\cdot y + \Delta x\cdot\Delta y - xy =$

$= x\cdot\Delta y + \Delta x\cdot y + \Delta x\cdot\Delta y$.

Для нахождения полного приращения в точке $M_0(1;2)$ нам достаточно вместо x подставить 1, а вместо y подставить 2.

Получим: $\Delta f(M_0) = 2\Delta x + \Delta y + \Delta x\cdot\Delta y$.

4. Получили, что

$\Delta_x f(M_0) + \Delta_y f(M_0) = 2\Delta x + \Delta y \neq 2\Delta x + \Delta y + \Delta x\cdot\Delta y = \Delta f(M_0)$.

Таким образом, в общем случае **сумма всех частных приращений не равна полному приращению.**

1.6 Предел функции нескольких переменных

Определение 1.6.1. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$. В самой точке $M_0(x_0,y_0)$ функция может быть, как определена, так и не определена.

Число A называется пределом функции $z = f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для всех точек $M(x,y)$, для которых верно соотношение $0 < |M_0M| < \delta(\varepsilon)$, имеет место неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Обозначения:

1) $\lim\limits_{M\to M_0} f(M) = A$ - читается: «предел функции $f(M)$ в точке M_0 равен A»;

2) $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$ - читается: «предел функции $f(x,y)$ при $x\to x_0$, $y\to y_0$ равен A».

Приведенное определение утверждает, что какую бы мы узкую окрестность $U_\varepsilon(A)$ не взяли бы, всегда можно указать настолько узкую проколотую окрестность $\overset{\circ}{U}_{\delta}(M_0)$ точки M_0, что функция $z = f(x, y)$ отображает $\overset{\circ}{U}_{\delta}(M_0)$ в $U_{\varepsilon}(A)$.

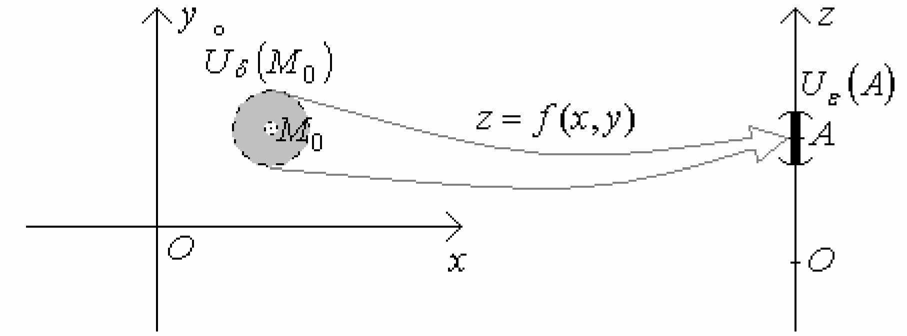

Рисунок 11

Замечание 1. Из определения предела функции двух переменных фактически следует, что если точка M неограниченно приближается любым способом к точке M_0, но ее не достигает, то значение $f(M)$ будет неограниченно приближаться к A.

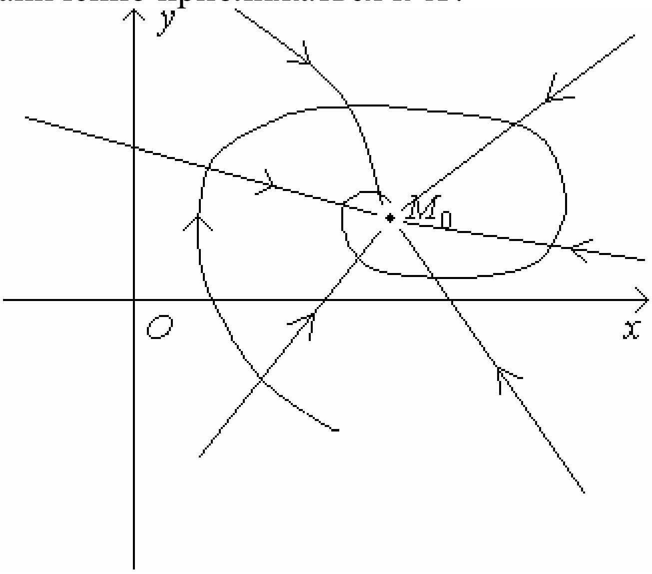

Рисунок 12

Задача. Доказать, что предел $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ не существует.

Решение.

Функция $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ определена в любой проколотой окрестности точки $O(0;0)$.

Пусть точка $M(x, y)$ приближается к точке $O(0;0)$ по прямой $y = kx$.

Тогда мы получим

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{x \cdot kx}{x^2 + (kx)^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{kx^2}{x^2 + k^2 x^2} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{k}{1 + k^2} = \frac{k}{1 + k^2}.$$

Получили, что величина предела зависит от углового коэффициента прямой, по которой точка $M(x,y)$ приближается к точке $O(0;0)$. Так как предел не должен зависеть от способа приближения точки $M(x,y)$ к точке $O(0;0)$, то данный предел не существует.

Замечание 2. Пусть точка $M(x,y)$ приближается к точке $M_0(x_0,y_0)$, двигаясь по прямой. Следует отметить, что если даже по любому направлению мы будем получать, что $f(M)\to A$, то отсюда еще не следует, что $\lim\limits_{M\to M_0} f(M)=A$.

Действительно, рассмотрим функцию двух переменных $z=f(M)$, которая задана следующим образом: $f(M)=1$, если точка M принадлежит оси x, кругу с центром $C_1(0;1)$ и радиусом 1, кругу с центром $C_2(0;-1)$ и радиусом 1, а во всех остальных точках плоскости функция $z=f(M)$ равна 0.

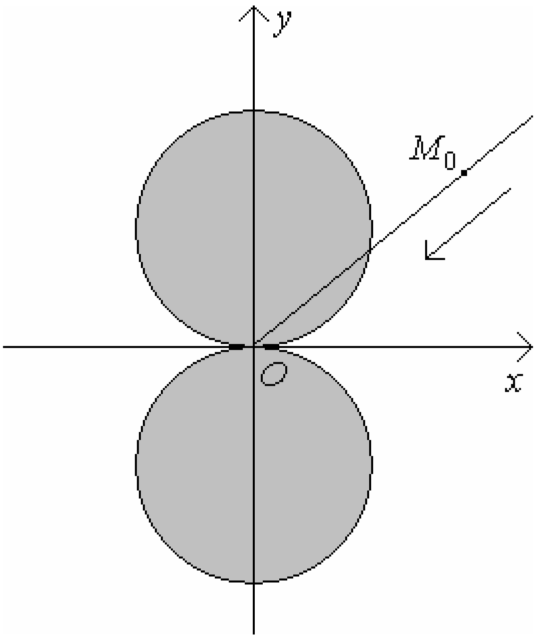

Рисунок 13

Очевидно, что, двигаясь к началу координат по любому лучу, мы получим $f(M)\to 1$. Однако предела в точке $O(0;0)$ данная функция не имеет так как, если мы будем точку M перемещать по дуге к точке $O(0;0)$, как показано на рисунке 14, то получим $f(M)\to 0$.

Данный пример показывает, что понятие предела функции двух переменных гораздо более сложное понятие, чем предел функции одной переменной, так как для функции одной переменной аргумент может приближаться к предельной точке всего по двум направлениям: слева и справа (см. рисунок 15), а на плоскости направлений бесконечно много (см. рисунок 12).

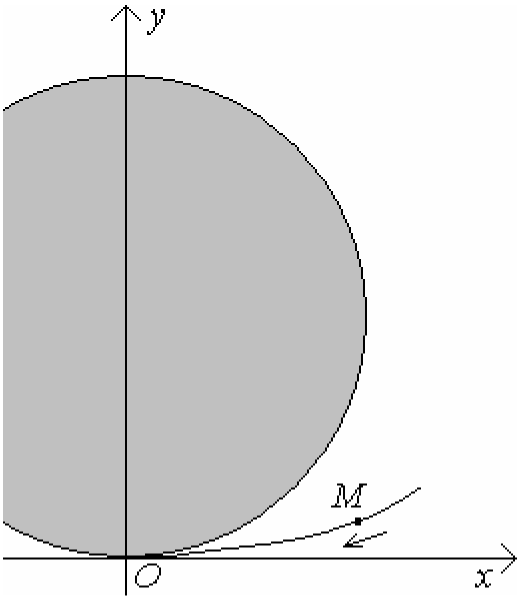

Рисунок 14

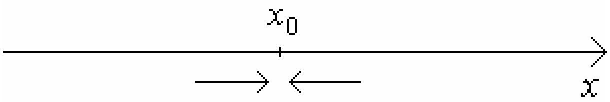

Рисунок 15

Пределы функций нескольких переменных имеют такие же свойства, что и пределы функций одной переменной [1, стр. 132-154; 3 стр. 205-211].

В качестве примеров, раскрывающих свойства пределов функций нескольких переменных, рассмотрим следующие задачи.

Задача. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \dfrac{x}{x+y}$.

Решение.

Функция $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ является элементарной, а точка $M_0(1;2)$ вместе со своей достаточно малой окрестностью принадлежит области определения этой функции. Тогда для нахождения предела достаточно в функцию $f(x,y)=\dfrac{x}{x+y}$ вместо x подставить значение 1, а вместо y - значение 2.

$$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}} \frac{x}{x+y}=\frac{1}{1+2}=\frac{1}{3}.$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy^2 \sin\dfrac{1}{x^2+y^2}$.

Решение.

Функция, стоящая под знаком предела, определена в любой проколотой окрестности точки $O(0;0)$.

Используем, что произведение бесконечно малой и ограниченной величины является бесконечно малой.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy^2 \sin\frac{1}{x^2+y^2} = [0\cdot огр] = 0.$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x+1}{x^2+y^2}$.

Решение.

Функция, стоящая под знаком предела, определена в любой проколотой окрестности точки $O(0;0)$.

Используем, что величина, обратная бесконечно малой, является бесконечно большой.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x+1}{x^2+y^2} = \left[\frac{1}{0}\right] = \infty.$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{x-y+1}{\ln(x^2+y^2)}$.

Решение.

Функция, стоящая под знаком предела, определена в любой проколотой окрестности точки $O(0;0)$.

Используем, что величина, обратная бесконечно большой, является бесконечно малой.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x-y+1}{\ln(x^2+y^2)} = \left[\frac{1}{\infty}\right] = 0.$$

Задача. Найти предел $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$.

Решение.

Функция, стоящая под знаком предела, определена в любой проколотой окрестности точки $O(0;0)$.

Перейдем в полярную систему координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$. Очевидно, что $x \to 0$, $y \to 0$ равносильно $\rho \to 0$.

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{xy^2}{x^2+y^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\rho\cos\varphi(\rho\sin\varphi)^2}{(\rho\cos\varphi)^2+(\rho\sin\varphi)^2} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\rho^3\cos\varphi\sin^2\varphi}{\rho^2\left(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi\right)} =$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \rho\cos\varphi\sin^2\varphi = 0.$$

Замечание 3. В случае получения выражения, зависящее от φ, делаем вывод о том, что данный предел не существует. В силу того, что в таком случае предел зависит от способа стремления точки $M(x,y)$ к точке $M_0(x_0,y_0)$.

1.7 Непрерывность функции двух переменных

Определение 1.7.1. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если верно равенство

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Определение 1.7.2. Пусть любая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$ содержит точки, принадлежащие области определения функции $z = f(x, y)$. Если в этой точке данная функция не является непрерывной, то функция $z = f(x, y)$ называется разрывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, а точка $M_0(x_0, y_0)$ называется точкой разрыва функции $z = f(x, y)$.

Приведенное определение непрерывности функции в точке, говоря нестрого, означает, что если $x \approx x_0$ и $y \approx y_0$, то тогда $f(x, y) \approx f(x_0, y_0)$. Другими словами, небольшое изменение аргументов непрерывной функции приводит к небольшому изменению значения самой функции.

Введя замены $x - x_0 = \Delta x$, $y - y_0 = \Delta y$ и $f(x, y) - f(x_0, y_0) = \Delta f(x_0, y_0)$, мы сможем записать определение непрерывной функции в точке на языке приращений.

Определение 1.7.3. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0, y_0)$, если верно равенство

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \Delta f(x_0, y_0) = 0.$$

Определение 1.7.4. Функция $z = f(x, y)$ называется непрерывной в некоторой области, если она непрерывна в каждой точке этой области.

Любая элементарная функция непрерывна в каждой точке, которая принадлежит вместе со своей окрестностью области определения функции.

Очевидно, что если функция двух переменных непрерывна в некоторой области, то ее график будет сплошной поверхностью в виде одного куска без разрывов.

Для различных практических приложений требование непрерывности чрезвычайно важно, так как измерения различных величин всегда содержат некоторые погрешности.

Приведем без доказательства наиболее важные свойства непрерывных функций.

Теорема 1.6.1. Функция $y = f(M)$, непрерывная на ограниченной и замкнутой области D, является ограниченной на этой области, то есть другими словами существует такое число $N > 0$, что для всех точек $M \in D$ выполняется неравенство $|f(M)| < N$.

Теорема 1.6.2. Функция $y = f(M)$, непрерывная на ограниченной и замкнутой области D, достигает на области D своих наименьшего и наибольшего значений, то есть другими словами существуют такие точки

$M_1, M_2 \in D$, что для всех точек $M \in D$ выполняется неравенство $f(M_1) \le f(M) \le f(M_2)$.

Теорема 1.6.3. Пусть функция $y = f(M)$ является непрерывной на области D, и для точек $M_1, M_2 \in D$ верны равенства $f(M_1) = y_1$ и $f(M_2) = y_2$. Тогда функция $y = f(M)$ на области D принимает и все промежуточные значения между y_1 и y_2.

Первые две теоремы часто бывают полезны при решении различных задач на максимум и минимум, а третья теорема – при решении уравнений.

2 Производные и дифференциалы

2.1 Понятие частной производной

Определение 2.1.1. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется число, равное пределу отношения частного приращения $\Delta_x f(x_0, y_0)$ к приращению Δx, когда последнее стремиться к нулю.

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Если рассматривать частную производную не в фиксированной точке $M_0(x_0, y_0)$, а в произвольной точке $M(x, y)$, то частная производная будет не числом, а функцией.

Определение 2.1.2. Частной производной функции $z = f(x, y)$ по переменной x называется функция, равная пределу отношения частного приращения $\Delta_x f(x, y)$ к приращению Δx, когда последнее стремиться к нулю.

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x f(x, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Различные обозначения частных производных: $\dfrac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}$, z'_x, $D_x f(x, y)$, $\dot{f}_x(x, y)$, $f_x(x, y)$.

Следует отметить, что значение переменной y в данном случае не меняется, поэтому фактически частная производная представляет собой производную функции одной переменной (той по которой находится частная производная), когда все остальные переменные считаются константами.

Задача. Найти все частные производные первого порядка функции трех переменных $u = xy^z$.

Решение.

1) $u'_x = \left(xy^z\right)'_x = \begin{bmatrix} x - \textit{переменная}, \\ y, z - \textit{константы.} \end{bmatrix} = y^z (x)'_x = y^z \cdot 1 = y^z$;

2) $u'_y = \left(xy^z\right)'_y = \begin{bmatrix} y - \textit{переменная}, \\ x, z - \textit{константы.} \end{bmatrix} = x\left(y^z\right)'_y = xzy^{z-1} = xy^{z-1} z$;

3) $u'_z = \left(xy^z\right)'_z = \begin{bmatrix} z - \textit{переменная}, \\ x, y - \textit{константы.} \end{bmatrix} = x\left(y^z\right)'_z = xy^z \ln y$.

Так как понятие частной производной для функции нескольких переменных фактически свелось к понятию производной функции одной переменной, то можно сделать следующие выводы.

1. Если $f'_x(x,y) > 0$, то (y зафиксирован) при увеличении x, значение функции $z = f(x,y)$ будет возрастать.

2. Если $f'_x(x,y) < 0$, то (y зафиксирован) при увеличении x, значение функции $z = f(x,y)$ будет убывать.

3. Чем больше $|f'_x(x,y)|$, тем сильнее меняется функция $z = f(x,y)$ при изменении x и неизменном y.

Таким образом, частная производная $f'_x(x,y)$ характеризует скорость изменения функции $f(M)$, если точка M движется вдоль оси x.

2.2 Геометрический смысл частной производной первого порядка функции двух переменных

Пусть дана функция двух переменных $z = f(x,y)$, график которой имеет вид

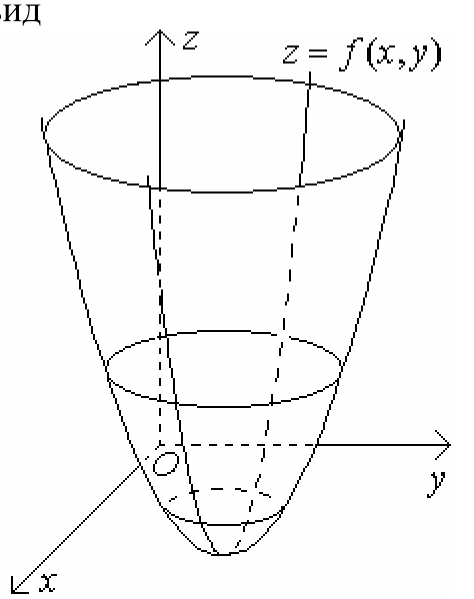

Рисунок 16

Для нахождения частной производной $f'_x(x_0, y_0)$ мы фиксируем переменную $y = y_0$, находим производную полученной функции одной переменной $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ и подставляем в полученную производную вместо переменной x значение x_0.

Графиком функции одной переменной $z = f(x, y_0) = \varphi(x)$ является (рисунок 17) сечение графика функции $z = f(x,y)$ плоскостью $y = y_0$.

Как нам уже известно, из курса дифференциального исчисления для функции одной переменной, значение $\varphi'(x_0)$ в точке $x = x_0$ равно тангенсу угла наклона касательной, проведенной в точке графика функции $z = f(x, y_0)$ с абсциссой $x = x_0$.

Таким образом, получили, что

$$f'_x(x_0, y_0) = \varphi'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi.$$

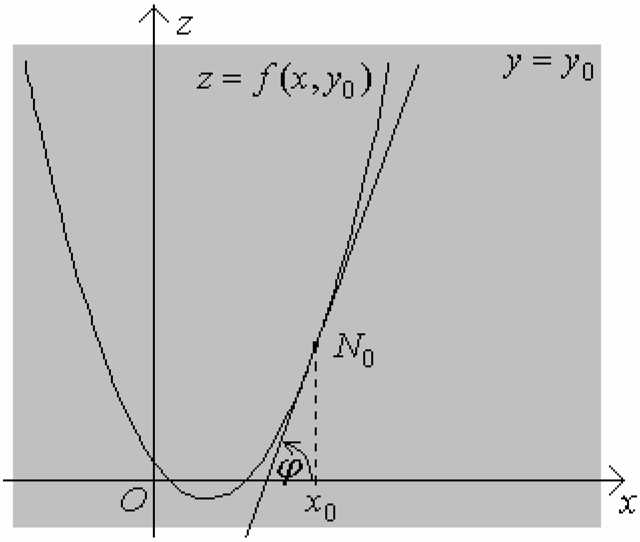

Рисунок 17

Геометрический смысл частной производной функции двух переменных: значение частной производной функции $z=f(x,y)$ по x в точке $M_0(x_0,y_0)$ равно тангенсу угла наклона касательной проведенной в точке $N_0(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ к сечению графика функции $z=f(x,y)$ плоскостью $y=y_0$.

$$f'_x(x_0,y_0)=\operatorname{tg}\varphi.$$

2.3 Дифференцируемые функции нескольких переменных. Дифференциал.

Определение 2.3.1. Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ определена функция $z=f(x,y)$, и ее полное приращение в $M_0(x_0,y_0)$ представимо в виде

$$\Delta f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\cdot\Delta x+$$
$$+B(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta y,$$

где $A(x_0,y_0)$, $B(x_0,y_0)$ - величины, не зависящие от Δx и Δy, а $\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$, $\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$ - бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

Тогда функция $z=f(x,y)$ называется дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Задача. Доказать, что функция $f(x,y)=x^2y$ является дифференцируемой в произвольной точке $M_0(x_0,y_0)$.

Решение.

Докажем, что функция $f(x,y)=x^2y$ является дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$, используя определение дифференцируемой функции.

Для данной функции имеем $D(f)=R^2$, и тогда она определена в произвольной окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$.

Рассмотрим приращение функции $f(x,y)=x^2 y$ в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=(x_0+\Delta x)^2(y_0+\Delta y)-x_0^2 y_0 =$$
$$=\left(x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x^2\right)(y_0+\Delta y)-x_0^2 y_0 = x_0^2 y_0+2x_0 y_0\Delta x+y_0\Delta x^2+x_0^2\Delta y+$$
$$+2x_0\Delta x\Delta y+\Delta x^2\Delta y-x_0^2 y_0 = 2x_0 y_0\Delta x+y_0\Delta x^2+x_0^2\Delta y+2x_0\Delta x\Delta y+$$
$$+\Delta x^2\Delta y = 2x_0 y_0\Delta x+x_0^2\Delta y+(y_0\Delta x+2x_0\Delta y)\Delta x+\Delta x^2\Delta y =$$

►Введем обозначения: $A(x_0,y_0)=2x_0 y_0$, $B(x_0,y_0)=x_0^2$,

$\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=y_0\Delta x+2x_0\Delta y$, $\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=\Delta x^2$.◄

$$=A(x_0,y_0)\cdot\Delta x+B(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Так как выражения $A(x_0,y_0)=2x_0 y_0$, $B(x_0,y_0)=x_0^2$ не зависят от Δx и Δy, а выражения $\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=y_0\Delta x+2x_0\Delta y$, $\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)=\Delta x^2$ являются бесконечно малыми при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, то согласно определению дифференцируемой функции получаем, что функция $f(x,y)=x^2 y$ является дифференцируемой в произвольной точке $M_0(x_0,y_0)$.

Теорема 2.3.1. Если функция $z=f(x,y)$ является дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$, то тогда она в этой точке является непрерывной.

Доказательство.

Используем, что функция $z=f(x,y)$ называется непрерывной в точке $M_0(x_0,y_0)$, если верно равенство $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(x_0,y_0)=0$.

Рассмотрим

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\Delta f(x_0,y_0)=$$

►Если в точке $M_0(x_0,y_0)$ функция $z=f(x,y)$ является дифференцируемой, то существует представление

$$\Delta f(x_0,y_0)=A(x_0,y_0)\cdot\Delta x+B(x_0,y_0)\cdot\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+$$
$$+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$◄

$$=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\left(A(x_0,y_0)\Delta x+B(x_0,y_0)\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\cdot\Delta x+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta y\right)=$$

$$=A(x_0,y_0)\cdot 0+B(x_0,y_0)\cdot 0+0\cdot 0+0\cdot 0=0.$$

Таким образом, если функция дифференцируема в точке, то она непрерывна в этой точке.

Теорема доказана.

Замечание 1. Данная теорема представляет собой необходимое условие дифференцируемости функции: для того, чтобы функция $z=f(x,y)$ была дифференцируемой в точке $M_0(x_0,y_0)$ необходимо, чтобы она была непрерывной в этой точке.

Замечание 2. Данное необходимое условие не является достаточным. Например, функция $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ непрерывна в точке $O(0,0)$, но не дифференцируема в этой точке.

Теорема 2.3.2. Пусть частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ определенны в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и в самой этой точке непрерывны, то тогда функция $f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Доказательство.

Рассмотрим полное приращение функции $f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$:

$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+$
$+f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=$

►►Используем теорему Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и существует производная $f'(x)$ на интервале (a,b).

Тогда существует точка $c\in(a,b)$ такая, что верно равенство

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).◄$$

$=f'_x(c,y_0+\Delta y)\Delta x+f'_y(x_0,d)\Delta y=$

►Здесь: $c\in(x_0,x_0+\Delta x)$, $d\in(y_0,y_0+\Delta y)$.

Так как $f'_x(x,y)$ непрерывна в точке $M_0(x_0,y_0)$, то тогда верно равенство $\lim\limits_{\substack{c\to x_0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(c,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)$.

Из того, что $c\in(x_0,x_0+\Delta x)$ следует, что при $\Delta x\to 0$ имеем $c\to x_0$. Тогда имеем выполнимость равенства $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f'_x(c,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)$.

Далее используем теорему о связи величины, имеющей предел, и бесконечно малой.

Теорема. $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$ тогда и только тогда, когда существует представление $f(x,y)=A+\alpha(x,y)$, где $\alpha(x,y)$ - бесконечно малая при $x\to x_0$, $y\to y_0$.

В данном случае будем иметь:

1) $f'_x(c,y_0+\Delta y)=f'_x(x_0,y_0)+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$;

2) $f'_y(c,d)=f'_y(x_0,y_0)+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$.

Здесь: $\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$, $\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)$ - бесконечно малые при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.◄◄

$=(f'_x(x_0,y_0)+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y))\Delta x+(f'_y(x_0,y_0)+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y))\Delta y=$
$=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta y$.

Отсюда, согласно определению дифференцируемой функции, функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Из доказательства теоремы имеем, что
$A(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)$ и $B(x_0, y_0) = f'_y(x_0, y_0)$.

Замечание 2. Доказанная теорема представляет собой достаточное условие дифференцируемости функции двух переменных. Это условие не является необходимым. В качестве примера можно рассмотреть функцию

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2, x \in Q \text{ и } y \in Q; \\ 0, x \in I \text{ или } y \in I. \end{cases}$$

Приведенная функция в точке $O(0;0)$ является дифференцируемой, однако она не имеет частных производных в любой проколотой окрестности точки $O(0;0)$.

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда ее приращение в этой точке можно записать в виде:
$\Delta f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y$.

При уменьшении $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ последние два слагаемых убывают быстрее первых двух, поэтому при достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ влияние первых двух слагаемых будет определяющим на величину полного приращения $\Delta f(x_0, y_0)$.

Определение 2.3.2. Выражение $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ называется дифференциалом (полным дифференциалом) функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Обозначение: $df(x_0, y_0)$.

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Выражение $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ является «главной» линейной (относительно Δx и Δy) частью $f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y$ приращения $\Delta f(x_0, y_0)$.

Определение 2.3.3. Дифференциалом независимой переменной называется ее приращение: $dx = \Delta x$.

Тогда формулу для дифференциала можно записать в виде:

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)dx + f'_y(x_0, y_0)dy.$$

Если дифференциал рассматривать в произвольной точке $M(x, y)$, то тогда

$$df(x, y) = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy.$$

2.4 Касательная плоскость и нормаль

Пусть функция $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, тогда для малых Δx и Δy можно записать

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \approx f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y.$$

Положив $x = x_0 + \Delta x$, $y = y_0 + \Delta y$, будем иметь:

$f(x,y) - f(x_0,y_0) \approx f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0)$.

Тогда:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

В правой части приближенного равенства находится линейная функция относительно x и y, график которой является плоскостью. Таким образом, дифференцируемая функция в «небольшой» окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ «похожа» на линейную функцию, а «небольшой» фрагмент ее графика «похож» на фрагмент плоскости, с которой график функции как бы «сливается».

Причем чем фрагмент меньше, тем он «более плоский».

В качестве примера рассмотрим всюду дифференцируемую функцию $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$. Рассмотрим точку графика $P(0;0;4)$. Очевидно, что если мы будем уменьшать фрагмент графика, содержащий точку P, то он будет становиться все более и более «плоским».

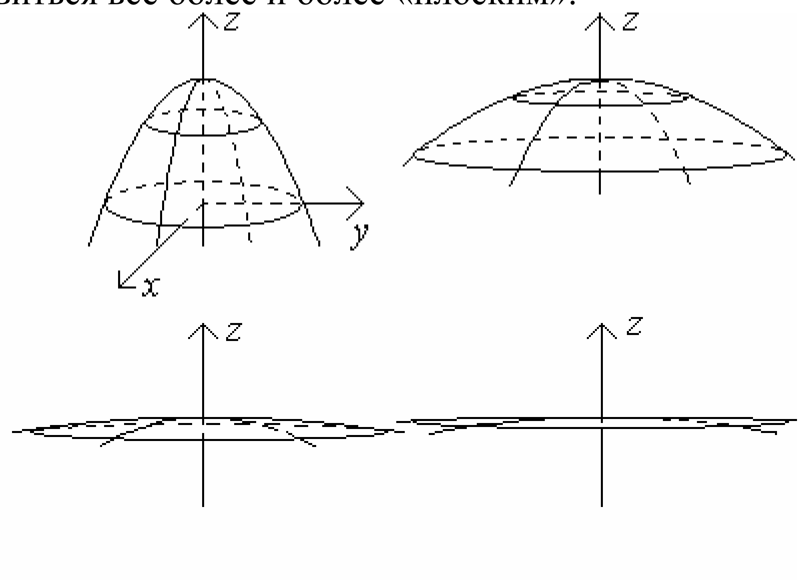

Рисунок 18

Плоскость, с которой «сливается» график дифференцируемой функции называется касательной плоскостью.

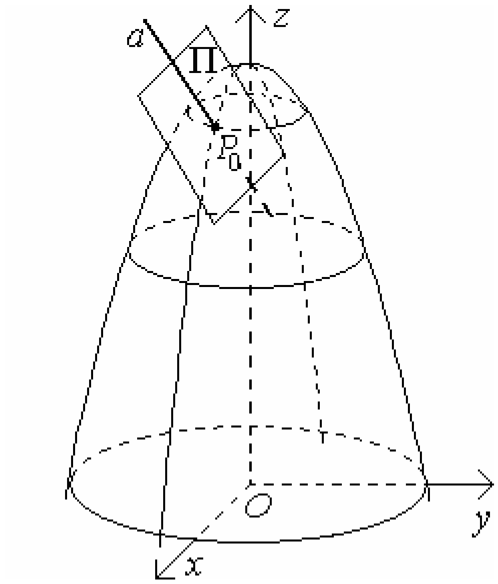

Рисунок 19

Пусть $z = f(x, y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$, то тогда через точку $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ ее графика проходит касательная плоскость

$$z = f(x_0, y_0) + f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Вывод: если функция $z = f(x, y)$ дифференцируема на некоторой области, то ее график представляет поверхность в виде одного сплошного куска (так как дифференцируемость влечет непрерывность) причем к этой поверхности всюду можно провести касательную плоскость, то есть график не имеет изломов, является как бы «гладким».

Прямую (см. рисунок 19), проходящую через точку $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, и перпендикулярную касательной плоскости, проходящей через эту точку, будем называть нормалью.

Приведя уравнение касательной плоскости к общему уравнению плоскости, получим

$$f'_x(x_0, y_0) \cdot x + f'_y(x_0, y_0) \cdot y - z + \left(f(x_0, y_0) - f'_x(x_0, y_0) \cdot x_0 - f'_y(x_0, y_0) \cdot y_0\right) = 0.$$

Из курса аналитической геометрии известно, что плоскость, заданная уравнением $Ax + By + CZ + D = 0$, имеет нормальный вектор $\overline{N} = (A, B, C)$. Тогда $\overline{N} = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\right)$ - нормальный вектор касательной плоскости, который, очевидно, будет являться направляющим вектором нормали.

Кроме того, если прямая проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеет направляющий вектор $\overline{N} = (A, B, C)$, то ее уравнение имеет вид

$$\frac{x - x_0}{A} = \frac{y - y_0}{B} = \frac{z - z_0}{C}.$$

Теперь, зная, что нормаль имеет направляющий вектор $\overline{N} = \left(f'_x(x_0, y_0), f'_y(x_0, y_0), -1\right)$ и проходит через точку $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, получим уравнение нормали к графику функции $z = f(x, y)$, проходящей через точку графика $P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$

$$\frac{x-x_0}{f'_x(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{f'_y(x_0,y_0)}=\frac{z-z_0}{-1}.$$

Перепишем уравнение касательной плоскости в виде

$$z-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Тогда в левой части записанного равенства находится Δz - приращение аппликаты касательной плоскости в точке $M_0(x_0,y_0)$, а в правой части имеем: $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y=$ $=f'_x(x_0,y_0)dx+f'_y(x_0,y_0)dy=df(x_0,y_0)$ - дифференциал функции $z=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$.

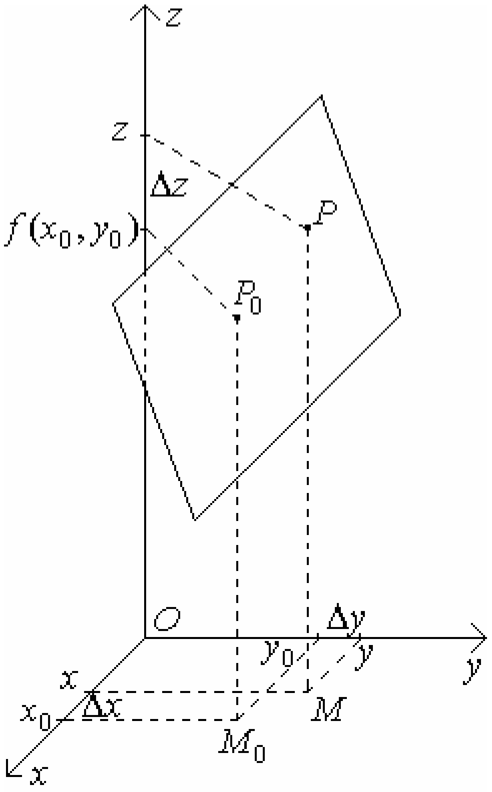

Рисунок 20

Таким образом, мы получили **геометрический смысл дифференциала функции двух переменных:** дифференциал функции двух переменных равен приращению аппликаты касательной плоскости.

2.5 Дифференцируемость сложной функции

Теорема 2.5.1. Пусть функции $z=z(x,y)$, $x=x(t)$ и $y=y(t)$ являются дифференцируемыми, тогда верна формула для производной сложной функции

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}.$$

Доказательство.

Приращение переменной t равное Δt вызовет приращения функций $x = x(t)$ и $y = y(t)$, которые мы обозначим Δx и Δy соответственно.

Так как функция $z = z(x, y)$ дифференцируема, то существует представление

$$\Delta z = z'_x \cdot \Delta x + z'_y \cdot \Delta y + \alpha \cdot \Delta x + \beta \cdot \Delta y .$$

Разделим записанное равенство на Δt

$$\frac{\Delta z}{\Delta t} = z'_x \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + z'_y \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \alpha \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \beta \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} .$$

Перейдем к пределу $\Delta t \to 0$.

Так как функции $x = x(t)$ и $y = y(t)$ дифференцируемы, то они непрерывны, и из того, что $\Delta t \to 0$ следует $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$, и тогда $\alpha \to 0$ и $\beta \to 0$. Кроме того, из определения производной функции одной переменной, имеем $\frac{\Delta z}{\Delta t} \to \frac{dz}{dt}$, $\frac{\Delta x}{\Delta t} \to \frac{dx}{dt}$ и $\frac{\Delta y}{\Delta t} \to \frac{dy}{dt}$.

Тогда получим равенство

$$\frac{dz}{dt} = z'_x \cdot \frac{dx}{dt} + z'_y \cdot \frac{dy}{dt} + 0 \cdot \frac{dx}{dt} + 0 \cdot \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{dz}{dt} = z'_x \cdot \frac{dx}{dt} + z'_y \cdot \frac{dy}{dt} .$$

Теорема доказана.

Пусть теперь функции $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ зависят от двух переменных. Так как частная производная по переменной u функции, зависящей от двух переменных u и v, фактически сводится к производной функции одной переменной u (переменная v принимается равной константе), то тогда верна

Теорема 2.5.2.

Пусть функции $z = z(x, y)$, $x = x(u, v)$ и $y = y(u, v)$ являются дифференцируемыми.

Тогда верна формула для производной сложной функции

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} .$$

Замечание. Полученные формулы могут быть обобщены на случай функций n переменных.

Выясним теперь различия между полной $\frac{dz}{dx}$ и частной $\frac{\partial z}{\partial x}$ производными.

Пусть имеется функция двух переменных $z = z(x, y)$, причем переменная $y = y(x)$ является функцией от x.

Используя формулу для производной сложной функции, получим

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} .$$

Рассмотрим функцию $z = z(x, y)$.

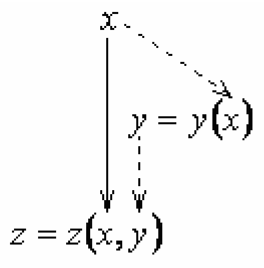

Рисунок 21

Величина x влияет на z непосредственно (сплошная стрелка) и через переменную y (пунктирные стрелки). Так как при нахождении частной производной $\frac{\partial z}{\partial x}$, переменная y считается константой, то частная производная $\frac{\partial z}{\partial x}$ учитывает только непосредственное влияние x на z. В отличие от $\frac{\partial z}{\partial x}$, полная производная $\frac{dz}{dx}$ учитывает и непосредственное влияние x на z, и влияние x на z через переменную y. Именно поэтому производная $\frac{dz}{dx}$ называется полной производной.

2.6 Свойства дифференциала первого порядка

Из формулы для производной сложной функции следует свойство инвариантности (неизменности) первого дифференциала функции нескольких переменных. Данное свойство заключается в том, что формула для дифференциала первого порядка

$$df(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \cdot dy$$

верна вне зависимости от того, являются ли x и y независимыми переменными или функциями.

Пусть нам дана функция $z = z(x, y)$, причем x и y являются не независимыми переменными, а функциями двух переменных u и v ($x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$). Тогда z фактически представляет собой функцию двух переменных u и v ($z = z(u, v)$).

Из определения дифференциала имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot dv =$$

►Используя формулу для производной сложной функции, получим

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.◄$$

$$= \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \right) \cdot du + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right) \cdot dv = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv \right) +$$

$$+ \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv \right) =$$

►Используя формулу для дифференциала функции двух переменных, получим

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial x}{\partial v} \cdot dv, \; dy = \frac{\partial y}{\partial u} \cdot du + \frac{\partial y}{\partial v} \cdot dv . ◄$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy .$$

Получили, что формула для первого дифференциала $dz = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot dy$ верна в независимости от того, являются ли переменные x и y независимыми переменными или функциями.

Дифференциал функции нескольких переменных имеет те же свойства, что и дифференциал функции одной переменной.

1. $dC = 0$.
2. $d(u \pm v) = du \pm dv$.
3. $d(Cu) = Cdu$.
4. $d(uv) = vdu + udv$.
5. $d\left(\frac{u}{v} \right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

В качестве примера докажем свойство 5 (свойства 2-3 доказываются аналогично).

Пусть сначала u и v - независимые переменные, тогда

$$d\left(\frac{u}{v} \right) = \left(\frac{u}{v} \right)'_u du + \left(\frac{u}{v} \right)'_v dv = \frac{1}{v} du - \frac{u}{v^2} dv = \frac{vdu - udv}{v^2} .$$

Учитывая свойство инвариантности первого дифференциала, получаем, что записанная формула верна и вне зависимости являются ли u и v независимыми переменными или функциями.

2.7 Дифференцирование неявных функций

Пусть нам дано уравнение $F(x, y) = 0$. Рассмотрим данное уравнение как уравнение с параметром x и с неизвестной y. Если мы будем менять значение параметра x, то в общем случае будет меняться и решение y (или решения) уравнения $F(x, y) = 0$. Если каждому значению x из некоторого промежутка X будет отвечать единственное значение y из некоторого промежутка Y, то будем говорить, что уравнение $F(x,y)=0$ при $x \in X$ и $y \in Y$ определяет неявную функцию $y = y(x)$.

Например, уравнение $xy^3 + 4x^2 - 1 = 0$ задает функцию $y = \sqrt[3]{\dfrac{1-4x^2}{x}}$. Здесь легко выразить y через x. Однако, как правило, выразить y через x или очень трудно, или вообще невозможно.

Если нам требуется найти $y'(x)$, то нет необходимости предварительно выражать y через x. Достаточно использовать формулу для производной неявной функции.

Пусть $F(x,y)$ является дифференцируемой функцией. Найдем полную производную от обеих частей равенства $F(x,y)=0$, считая y функцией от x и используя формулу для полной производной сложной функции.

Получим:

$$F'_x(x,y)\cdot\frac{dx}{dx} + F'_y(x,y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0,\ F'_x(x,y) + F'_y(x,y)\cdot\frac{dy}{dx} = 0,\ \frac{dy}{dx} = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

Таким образом, получили формулу для производной неявной функции

$$\frac{dy}{dx}(x,y) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}\ \left(F'_y(x,y) \neq 0\right).$$

Уравнение $F(x,y,z)=0$ может задавать неявную функцию двух переменных $z = z(x,y)$. В данном случае, используя формулу для частной производной сложной функции, получим формулу для частной производной неявной функции $z = z(x,y)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}\ \left(F'_z(x,y,z) \neq 0\right).$$

Задача. Дано уравнение $2x^2yz - yz^5 + x^4 - z = 0$. Найти значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ неявной функции $z = z(x,y)$ в точке $M_0(1;2;-1)$.

Решение.

Используя формулу для частной производной неявной функции, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}(x,y,z) = -\frac{\left(2x^2yz - yz^5 + x^4 - z\right)'_x}{\left(2x^2yz - yz^5 + x^4 - z\right)'_z} = -\frac{4xyz + 4x^3}{2x^2y - 5yz^4 - 1} =$$

$$= -\frac{4x\left(yz + x^2\right)}{2x^2y - 5yz^4 - 1} = \frac{4x\left(yz + x^2\right)}{5yz^4 - 2x^2y + 1}.$$

Найдем значение частной производной $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ в точке $M_0(1;2;-1)$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(M_0)=\frac{4\cdot 1\left(2(-1)+1^2\right)}{5\cdot 2(-1)^4-2\cdot 1^2\cdot 2+1}=-\frac{4}{7}.$$

2.8 Применение дифференциала в приближенных вычислениях

2.8.1. Вычисление значений функций

Как известно при малых Δx и Δy приращение дифференцируемой функции $z=f(x,y)$ примерно равно ее дифференциалу, тогда

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\approx f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y,$$

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\approx f(x_0,y_0)+f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y.$$

Полученную формулу можно применять в приближенных вычислениях.

Задача. Вычислить приближенно $\sqrt{3{,}02^2+3{,}97^2}$.

Решение.

В данном случае имеем: $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$, $x_0=3$, $y_0=4$, $\Delta x=0{,}02$, $\Delta y=-0{,}03$.

Найдем значение функции $z=f(x,y)$ и ее частных производных при $x_0=3$, $y_0=4$:

$$f(3;4)=\sqrt{3^2+4^2}=5;$$

$$f'_x(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_x(3;4)=\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{3}{5};$$

$$f'_y(x,y)=\frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2}}\cdot 2y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f'_y(3;4)=\frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{4}{5}.$$

Тогда

$$\sqrt{3{,}02^2+3{,}97^2}\approx 5+\frac{3}{5}\cdot 0{,}02+\frac{4}{5}(-0{,}03)=4{,}988.$$

Точное значение $\sqrt{3{,}02^2+3{,}97^2}=4{,}98811587...$

Замечание. Очевидно, что в настоящее время вычисление подобных выражений с помощью дифференциала не имеет смысла, но для получения приближенных формул применение понятия дифференциала не потеряло актуальности.

2.8.2. Линейная интерполяция

Пусть имеется функция двух переменных $z=f(x,y)$, заданная таблично, а нам требуется найти ее значение $\tilde{z}$ при тех значениях аргументов $x=\tilde{x}$ и $y=\tilde{y}$, которых нет в таблице. Если предположить, что функция $z = f(x, y)$ является дифференцируемой, то тогда ее при небольших изменениях аргументов можно приближенно считать линейной.

Используем фрагмент таблицы, где находятся значения аргументов, между которыми находятся данные значения $x = \tilde{x}$ и $y = \tilde{y}$.

Таблица 2

$z = f(x, y)$		y			
		…	y_1	y_2	…
x	…	…	…	…	…
	x_1	…	z_{11}	z_{12}	…
	x_2	…	z_{21}	…	…
	…	…	…	…	…

Если считать, что при $x \in [x_1, x_2]$, $y \in [y_1, y_2]$ данную функцию можно приближенно считать линейной, то тогда значения функции для промежуточных значений аргументов можно вычислять по формуле.

$$\tilde{z} = z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}(\tilde{x} - x_1) + \frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1}(\tilde{y} - y_1).$$

Задача. Пусть имеется таблично заданная функция двух переменных $t = t(k, \gamma)$. Найти значение данной функции при $k = 45$ и $\gamma = 0{,}93$.

Таблица 3

$t = t(k, \gamma)$		γ			
		…	0,90	0,95	…
k	…	…	…	…	…
	40	…	1,303	1,648	…
	60	…	1,296	…	…
	…	…	…	…	…

Решение.

Найдем в таблице соседние значения аргументов, между которыми находятся значения $k = 45$ и $\gamma = 0{,}93$. Получим значения $k_1 = 40$, $k_2 = 60$ и $\gamma_1 = 0{,}90$, $\gamma_2 = 0{,}95$.

Применим формулу для линейной интерполяции

$$\tilde{t} = t_{11} + \frac{t_{21} - t_{11}}{k_2 - k_1}(\tilde{k} - k_1) + \frac{t_{12} - t_{11}}{\gamma_2 - \gamma_1}(\tilde{\gamma} - \gamma_1) = 1{,}303 + \frac{1{,}296 - 1{,}303}{60 - 40}(45 - 40) +$$

$$+ \frac{1{,}684 - 1{,}303}{0{,}95 - 0{,}90}(0{,}93 - 0{,}90) \approx 1{,}530.$$

2.8.3 Оценка погрешностей результатов косвенных измерений

Понятие дифференциала функции нескольких переменных может применяться для оценки погрешностей косвенных измерений. Косвенным измерением называется вычисление значения некоторой величины по формуле, аргументами которой являются величины, полученные прямыми измерениями, то есть с помощью различных измерительных приборов: весов, рулетки, термометра и т. д.

Например, косвенное измерение объема конуса может быть проведено следующим образом: проводим прямые измерения высоты конуса и радиуса его основания с помощью линейки, а затем находим его объем по формуле $V = \frac{1}{3}\pi R^2 h$.

Предположим, что нам известны погрешности прямых измерений, тогда возникает вопрос о погрешности косвенного измерения, то есть результата, вычисленного по формуле.

Схему оценивания погрешности косвенного измерения удобно рассмотреть на конкретном примере.

Задача. Измерение сопротивления резистора производится косвенным образом с помощью следующей схемы

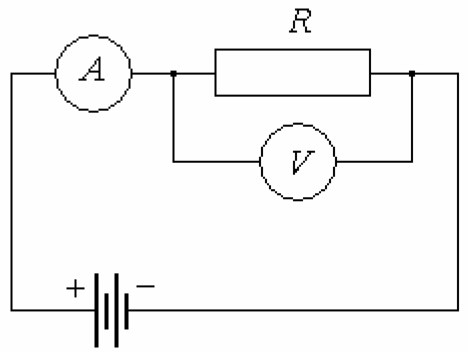

Рисунок 22

Показания вольтметра и амперметра равны соответственно $U = 6{,}3\ B$ и $I = 0{,}093\ \text{А}$.

Определить сопротивление резистора и оценить абсолютную погрешность полученной величины, если погрешности измерений приборов $\Delta_U = 0{,}1\ \text{В}$ и $\Delta_I = 0{,}002\ A$ соответственно.

Решение.

Найдем сопротивление резистора, используя закон Ома для участка цепи $I = \frac{U}{R}$.

$$\overline{R} = \frac{U}{I} = \frac{6{,}3}{0{,}093} = 67{,}7419...(Ом).$$

Оценим абсолютную погрешность полученной величины.

Значения напряжения и тока получены с помощью приборов с некоторыми погрешностями ΔU и ΔI. Очевидно, что изменение аргументов на величины ΔU и ΔI вызовет приращение величины R равное ΔR, которое будет являться абсолютной погрешностью нахождения сопротивления R. Так как функция $R(U,I)=\frac{U}{I}$ является дифференцируемой, а приращения аргументов малы, то можно считать, что приращение функции $R(U,I)=\frac{U}{I}$ примерно равно ее дифференциалу.

$$\Delta R \approx dR(U,I)=d\left(\frac{U}{I}\right)=\left(\frac{U}{I}\right)_U' dU+\left(\frac{U}{I}\right)_I' dI=\frac{1}{I}dU+\left(-\frac{U}{I^2}\right)dI=\frac{1}{I}\Delta U-$$

$$-\frac{U}{I^2}\Delta I.$$

Оценим возможную погрешность по максимуму

$$\Delta_R=\frac{1}{I}\cdot\Delta U+\frac{U}{I^2}\cdot\Delta_I=\frac{1}{0{,}093}\cdot 0{,}1+\frac{6{,}3}{0.093^2}\cdot 0{,}002=2{,}532...(\text{Ом})$$

Округлим получим результат до 1-2 значащих цифр. Получим $\Delta_R=2{,}5$ Ом.

Таким образом, мы получили, что $R=\overline{R}\pm\Delta_R=(67{,}7\pm 2{,}5)$ Ом.

2.9 Производная по направлению. Градиент

Нам уже известно, что частные производные $f_x'(M_0)$ и $f_y'(M_0)$ характеризуют скорость изменения функции $z=f(x,y)$ при перемещении из точки M_0 вдоль осей x и y соответственно.

Для того чтобы охарактеризовать скорость изменения функции при перемещении из точки M_0 в произвольном направлении, используется понятие производной по направлению.

Определение2.9.1. Производной функции $y=f(\overline{r})$ в точке с радиус-вектором $\overline{r}_0$ в направлении единичного вектора $\overline{n}$ называется число

$$\frac{\partial f(\overline{r}_0)}{\partial\overline{n}}=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{f(\overline{r}_0+\varepsilon\cdot\overline{n})-f(\overline{r}_0)}{\varepsilon}.$$

Часто единичный вектор $\overline{n}$ задают с помощью направляющих косинусов: $\overline{n}=(\cos\alpha,\cos\beta)$ или $\overline{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$, где α, β и γ - углы, которые образует вектор $\overline{n}$ с положительными направлениями осей координат.

Выведем формулу для вычисления производной по направлению. Пусть функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке $M_0(x_0,y_0)$, тогда существует представление

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)=f_x'(x_0,y_0)\Delta x+f_y'(x_0,y_0)\Delta y+$$
$$+\alpha(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta x+\beta(x_0,y_0,\Delta x,\Delta y)\Delta y.$$

Положив $\Delta x=\varepsilon\cos\alpha$, $\Delta y=\varepsilon\cos\beta$, будем иметь

$$f(x_0+\varepsilon\cos\alpha, y_0+\varepsilon\cos\beta)-f(x_0,y_0)=f'_x(x_0,y_0)\varepsilon\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\varepsilon\cos\beta+$$
$$+\alpha(x_0,y_0,\varepsilon\cos\beta,\varepsilon\cos\alpha)\varepsilon\cos\alpha+\beta(x_0,y_0,\varepsilon\cos\beta,\varepsilon\cos\alpha)\varepsilon\cos\beta.$$

Разделим полученное равенство на ε. Получим:

$$\frac{f(x_0+\varepsilon\cos\alpha, y_0+\varepsilon\cos\beta)-f(x_0,y_0)}{\varepsilon}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta+$$
$$+\alpha(x_0,y_0,\varepsilon\cos\beta,\varepsilon\cos\alpha)\cos\alpha+\beta(x_0,y_0,\varepsilon\cos\beta,\varepsilon\cos\alpha)\cos\beta$$ или в других обозначениях

$$\frac{f(\bar r_0+\varepsilon\cdot\bar n)-f(\bar r_0)}{\varepsilon}=f'_x(\bar r_0)\cos\alpha+f'_y(\bar r_0)\cos\beta+\alpha(\bar r_0,\varepsilon\cdot\bar n)\cos\alpha+$$
$$+\beta(\bar r_0,\varepsilon\cdot\bar n)\cos\beta.$$

Перейдя в записанном равенстве к пределу при $\varepsilon\to+0$, получим формулу для нахождения **производной по направлению**

$$\frac{\partial f(\bar r_0)}{\partial\bar n}=f'_x(\bar r_0)\cos\alpha+f'_y(\bar r_0)\cos\beta$$

или в других обозначениях

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\bar n}=f'_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f'_y(x_0,y_0)\cos\beta.$$

Замечание. Частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ являются частными случаями производной по направлению $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial\bar n}$ при $\bar n=(1;0)$ и $\bar n=(0;1)$ соответственно.

Для функций нескольких переменных вводится еще и векторная величина, характеризующая изменение функции.

Определение 2.9.2. Градиентом функции $z=f(x,y)$ называется вектор

$$\operatorname{grad} f(x,y)=\left(f'_x(x,y), f'_y(x,y)\right).$$

С помощью понятия градиента формулу для вычисления производной по направлению можно записать в виде

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\bar n}=\left(\operatorname{grad} f(x_0,y_0),\bar n\right).$$

Используя формулу для скалярного произведения $\left(\bar a,\bar b\right)=|\bar a|\cdot\left|\bar b\right|\cos\left(\bar a,\bar b\right)$, получим

$$\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\bar n}=\left|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\right|\cdot|\bar n|\cos\varphi=\left|\operatorname{grad} f(x_0,y_0)\right|\cos\varphi,$$

где φ $(0\le\varphi\le\pi)$- угол между векторами $\operatorname{grad} f(x_0,y_0)$ и $\bar n$.

Из последнего равенства следует, что производная по направлению $\dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial\bar n}$ будет максимальна когда $\varphi=0$. Таким образом, направление градиента совпадает с направлением наибыстрейшего возрастания функции $z=f(x,y)$, а модуль градиента характеризует максимальную скорость возрастания функции по величине:

$$\left(\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial \overline{n}}\right)_{max} = \left|\operatorname{grad} f(x_0, y_0)\right|.$$

Можно показать, что вектор градиента всегда перпендикулярен соответствующей линии уровня

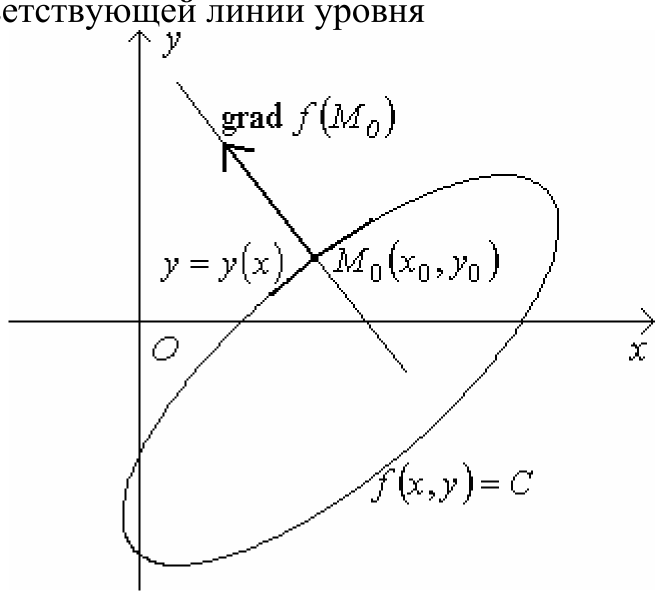

Рисунок 23

Используем, что угловой коэффициент нормали, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0, равен $k = -\dfrac{1}{f'(x_0)}$ [3, стр. 221].

Пусть в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ линия уровня является графиком функции $y = y(x)$, тогда используя формулу для производной неявной функции, получим угловой коэффициент нормали

$$k = -\frac{1}{y'(x_0)} = -\frac{1}{-\dfrac{f'_x(x_0, y_0)}{f'_y(x_0, y_0)}} = \frac{f'_y(x_0, y_0)}{f'_x(x_0, y_0)}.$$

Определим теперь угловой коэффициент прямой, содержащей вектор градиента $\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0) \cdot \bar{i} + f'_y(x_0, y_0) \cdot \bar{j}$.

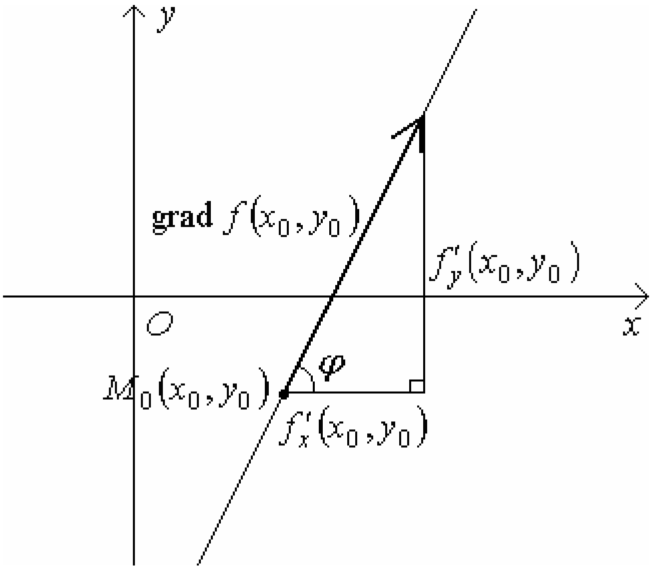

Рисунок 24

Из треугольника M_0MN имеем $\operatorname{tg}\varphi = k_1 = \dfrac{f'_y(x_0, y_0)}{f'_x(x_0, y_0)}$.

Получили, что угловые коэффициенты нормали к линии уровня и прямой, содержащей вектор градиента, совпадают. Таким образом, градиент перпендикулярен линии уровня.

Задача. Дана (рисунок 25) система линий уровня функции $z = f(x, y)$. Требуется определить знаки производных по направлению $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{n}_1}$, $\dfrac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{n}_2}$ и сравнить их модули. Определить направление вектора градиента $\operatorname{grad} f(M_0)$.

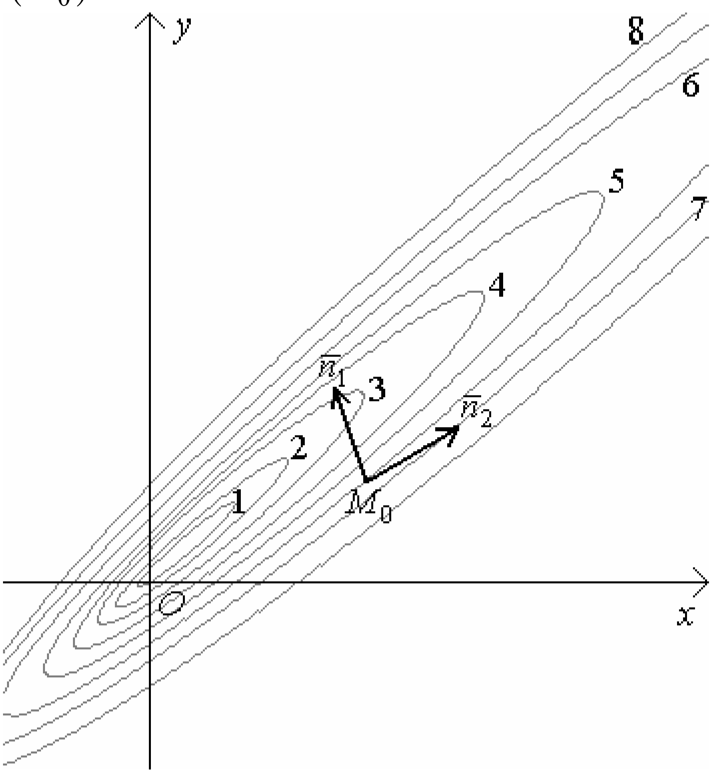

Рисунок 25

Решение.

1. Из приведенной системы линий уровня, очевидно, что в направлении вектора $\overline{n}_1$ функция $z = f(x, y)$ убывает, а в направлении вектора $\overline{n}_2$ - растет. Тогда имеем, что $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{n}_1} < 0$, а $\frac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{n}_2} > 0$.

2. В направлении вектора $\overline{n}_1$ скорость изменения функции $z = f(x, y)$ явно больше, чем в направлении вектора $\overline{n}_2$. Отсюда следует, что $\left|\frac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{n}_1}\right| > \left|\frac{\partial f(M_0)}{\partial \overline{n}_2}\right|$.

3. Вектор градиента $\operatorname{grad} f(M_0)$ перпендикулярен линии уровня, проходящей через точку M_0, и направлен в сторону возрастания значений функции $z = f(x, y)$.

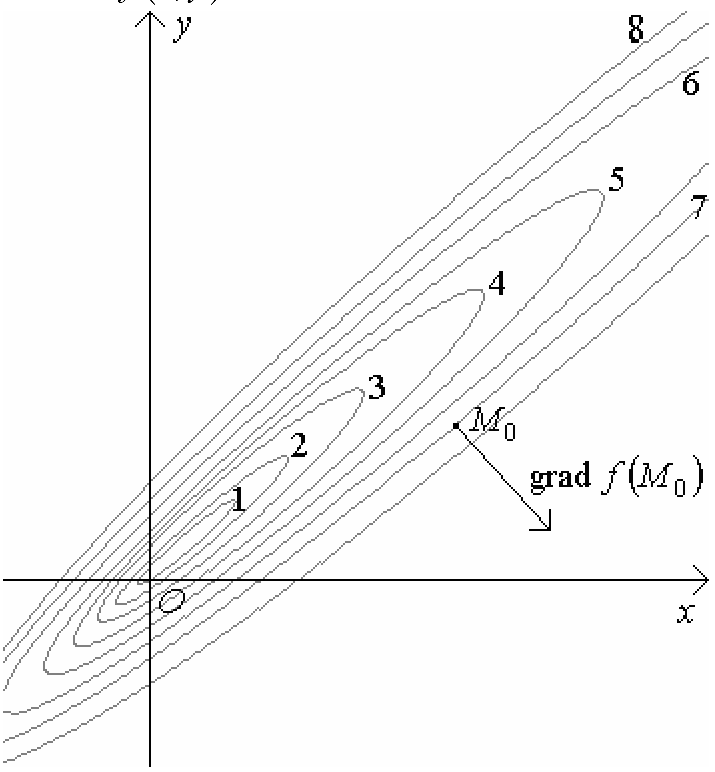

Рисунок 26

3 Производные и дифференциалы высших порядков

3.1 Частные производные высших порядков и их свойства

Как известно, частная производная от функции нескольких переменных сама является функцией нескольких переменных. Тогда от нее можно снова найти частную производную.

Определение 3.1.1. Частная производная от частной производной называется частной производной второго порядка, а частная производная от частной производной второго порядка называется частной производной третьего порядка и т. д.

Частные производные высших порядков обозначаются следующим образом.

1. Выражение $\dfrac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y}$ обозначает частную производную второго порядка от функции $z = f(x,y)$. Данная функция сначала была продифференцирована по переменной по x, а затем по переменной y.

2. Выражение $\dfrac{\partial^3 z}{\partial x^3}$ обозначает частную производную третьего порядка от функции z. Здесь было трехкратное нахождение частной производной только по переменной x.

3. $f'''_{x^2 y}(x,y)$ (или $f'''_{xxy}(x,y)$) – частная производная третьего порядка (по переменным x, x и y) от функции $z = f(x,y)$.

Определение 3.1.2. Производные высших порядков, найденные по разным переменным, называются смешанными производными.

Задача. Сколько частных производных второго порядка может иметь функция трех переменных?

Решение.

Первый раз функцию $u = f(x,y,z)$ мы можем продифференцировать по одной из переменных: x, y или z, то есть тремя способами. Второй раз продифференцировать мы можем тоже одним из трех вариантов.

Таким образом, всего возможно $3^2 = 9$ вариантов: f''_{xx}, f''_{xy}, f''_{xz}, f''_{yx}, f''_{yy}, f''_{yz}, f''_{zx}, f''_{zy}, f''_{zz}.

Задача. Найти все возможные частные производные второго порядка функции $f(x,y) = x^2 y^3 - x^4 y$.

Решение.

Используя определение частной производной второго порядка, будем иметь:

$$f'_x(x,y) = \left(x^2 y^3 - x^4 y\right)'_x = 2xy^3 - 4x^3 y,$$

$$f''_{x^2}(x,y)=\left(f'_x(x,y)\right)'_x=\left(2xy^3-4x^3y\right)'_x=2y^3-12x^2y,$$
$$f''_{xy}(x,y)=\left(f'_x(x,y)\right)'_y=\left(2xy^3-4x^3y\right)'_y=6xy^2-4x^3,$$
$$f'_y(x,y)=\left(x^2y^3-x^4y\right)'_y=3x^2y^2-x^4,$$
$$f''_{yx}(x,y)=\left(f'_y(x,y)\right)'_x=\left(3x^2y^3-x^4\right)'_x=6xy^2-4x^3,$$
$$f''_{y^2}(x,y)=\left(f'_y(x,y)\right)'_y=\left(3x^2y^3-x^4\right)'_y=6x^2y.$$

Замечание 1. Решая предыдущую задачу, мы получили, что для функции $f(x,y)=x^2y^3-x^4y$ выполняется равенство смешанных производных $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$. Такое совпадение не случайно: верна следующая теорема.

Теорема 3.1.1. Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ определены частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$, являющиеся непрерывными в самой точке $M_0(x_0,y_0)$.

Тогда верно равенство $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Доказательство.

Рассмотрим выражение

$$V=\frac{f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0,y_0)}{\Delta x\cdot\Delta y}=$$

►Введем функцию $\varphi(x)=\dfrac{f(x,y_0+\Delta y)-f(x,y_0)}{\Delta y}$. Ее производная равна $\varphi'(x)=\dfrac{f'_x(x,y_0+\Delta y)-f'_x(x,y_0)}{\Delta y}$.◄

$$=\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=$$

►Используем теорему Лагранжа.

Теорема Лагранжа. Пусть функция $y=f(x)$ удовлетворяет требованиям:

1) функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$;

2) существует производная $f'(x)$ на интервале (a,b).

Тогда существует точка $c\in(a,b)$, такая что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.◄

$$=\frac{\varphi'(\xi)\Delta x}{\Delta x}=\varphi'(\xi)=\frac{f'_x(\xi,y_0+\Delta y)-f'_x(\xi,y_0)}{\Delta y}=$$

►Используем теорему Лагранжа.◄

$$=\frac{f''_{xy}(\xi,\eta)\Delta y}{\Delta y}=f''_{xy}(\xi,\eta).$$ Здесь $\xi\in(x_0,x_0+\Delta x)$, $\eta\in(y_0,y_0+\Delta y)$.

Рассмотрим выражение V, введя функцию

$$\psi(x)=\frac{f(x_0+\Delta x,y)-f(x_0,y)}{\Delta x},\ \psi'(x)=\frac{f'_y(x_0+\Delta x,y)-f'_y(x_0,y)}{\Delta x}.$$

Получим

$$V=\frac{\psi(y_0+\Delta y)-\psi(y_0)}{\Delta y}=\frac{\psi'(\lambda)\Delta y}{\Delta y}=\psi'(\lambda)=\frac{f'_y(x_0+\Delta x,\lambda)-f'_y(x_0,\lambda)}{\Delta x}=$$

$$=\frac{f''_{yx}(\theta,\lambda)\Delta x}{\Delta x}=f''_{yx}(\theta,\lambda).$$ Здесь $\theta\in(x_0,x_0+\Delta x),\ \lambda\in(y_0,y_0+\Delta y)$.

Таким образом, $f''_{xy}(\xi,\eta)=f''_{yx}(\theta,\lambda)$. Перейдем в полученном равенстве к пределу при $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{xy}(\xi,\eta)=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} f''_{yx}(\theta,\lambda).$$

Так как $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$, а $\xi,\theta\in(x_0,x_0+\Delta x)$ и $\eta,\lambda\in(y_0,y_0+\Delta y)$, то тогда имеем $\xi\to x_0$, $\theta\to x_0$, $\eta\to y_0$, $\lambda\to y_0$.

$$\lim_{\substack{\xi\to x_0\\ \eta\to y_0}} f''_{xy}(\xi,\eta)=\lim_{\substack{\theta\to x_0\\ \lambda\to y_0}} f''_{yx}(\theta,\lambda).$$

Используя, что частные производные $f''_{xy}(x,y)$ и $f''_{yx}(x,y)$ непрерывны точке $M_0(x_0,y_0)$, получим $f''_{xy}(x_0,y_0)=f''_{yx}(x_0,y_0)$.

Теорема доказана.

Замечание 2. Данная теорема может быть обобщена на случай функций n переменных и для смешанных производных любого порядка.

3.2 Дифференциалы высших порядков и их свойства

Определение 3.2.1. Дифференциал от дифференциала называется дифференциалом второго порядка, а дифференциал от дифференциала второго порядка называется дифференциалом третьего порядка и т. д.

Обозначение: $d^n f(x,y)$ - дифференциал n-ого порядка.

Получим формулу для дифференциала n-ого порядка от функции двух переменных $z=f(x,y)$ в предположении, что x и y являются независимыми переменными.

1. $df(x,y)=\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$.

2. $d^2 f(x,y)=d(df(x,y))=d\left(\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)=$

►Используем, что $d(u\pm v)=du\pm dv$.◄

$$=d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx\right)+d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right)=$$

►Так как x и y - независимые переменные, то $dx=\Delta x$, $dy=\Delta y$ являются константами и их можно вынести за знак дифференциала.◄

$$= d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)dy =$$

►Используем формулу для дифференциала первого порядка

$$df(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\,.◄$$

$$= \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy\right)dy =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dy\cdot dx + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}dx\cdot dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2 =$$

$$= \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dx\cdot dy + \frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2. \qquad (1)$$

Аналогично, получим

3. $d^3 f(x,y) = d\left(d^2 f(x,y)\right) = \dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3 + 3\dfrac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2\partial y}dx^3\cdot dy +$

$$+3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x\partial y^2}dx\cdot dy^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dy^3.$$

4. $d^4 f(x,y) = d\left(d^3 f(x,y)\right) = \dfrac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^4}dx^4 + 4\dfrac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^3\partial y}dx^3 dy +$

$$+6\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x^2\partial y^2}dx^2 dy^2 + 4\frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial x\partial y^3}dxdy^3 + \frac{\partial^4 f(x,y)}{\partial y^4}dy^4.$$

Рассмотрев полученные результаты для $df(x,y)$, $d^2 f(x,y)$, $d^3 f(x,y)$ и $d^4 f(x,y)$, можно предположить, что формула для дифференциала n-го порядка (x, y - независимые переменные) в некотором смысле соответствует формуле бинома Ньютона и имеет вид

$$d^n f(x,y) = \sum_{i=0}^{n} C_n^i \frac{\partial^n f(x,y)}{\partial x^{n-i}\partial y^i}dx^{n-i}dy^i.$$

Данную формулу можно доказать с помощью принципа математической индукции.

Для упрощения запоминания приведенной формулы используется ее символический вид

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n.$$

Для получения формулы дифференциала n-го порядка достаточно формально возвести двучлен, находящийся в скобках, в n-ю степень. При этом, полученные формальные степени и произведения частных производных будем трактовать, как последовательное нахождение соответствующих частных производных. Например, $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^n = \frac{\partial^n}{\partial x^n}$, $\frac{\partial}{\partial x}\cdot\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}$.

Задача. Используя символическое равенство $d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$, получить формулу для дифференциала третьего порядка $d^3 f(x,y)$. Здесь, x и y являются независимыми переменными.

Решение.

Используя формулу $d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n$ для случая $n = 3$, получим

$$d^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx\right)^3 + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}dx\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right) + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}dx\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^2 +$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial y}dy\right)^3 = \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^3 dx^3 + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2\frac{\partial}{\partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 dxdy^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 dy^3 =$$

$$= \frac{\partial^3}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy + 3\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3}{\partial y^3}dy^3.$$

Таким образом, $d^3 f(x,y) = \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x^2 \partial y}dx^2dy +$

$$+3\frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 f(x,y)}{\partial y^3}dy^3.$$

В случае функций m переменных символическая формула для дифференциала n-го порядка будет иметь вид

$$d^n = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}dx_2 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}dx_m\right)^n.$$

Если x и y - являются не независимыми переменными, а функциями, то тогда dx и dy уже не будут константами, и их уже нельзя будет выносить за знак дифференциала. Тогда формула для дифференциала второго порядка будет иметь вид

$$d^2 f(x,y) = d(df(x,y)) = d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx\right) +$$

$$+d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy\right) = d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)dx + d^2x + d\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)dy + d^2y =$$

$$=\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dy\right)dx+d^2x+\left(\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\partial x}dx+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy\right)dy+$$

$$+d^2y=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}dx^2+2\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}dx\cdot dy+\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}dy^2+$$

$$+d^2x+d^2y \qquad (2)$$

Получили формулу, отличающуюся от формулы (1). Таким образом, дифференциал второго порядка (и последующих) свойством инвариантности не обладает.

Найдем дифференциал второго порядка от линейной функции

$$d^2(ax+by+c)=(ax+by+c)''_{xx}\cdot dx^2+2(ax+by+c)''_{xy}\cdot dxdy+$$

$$+(ax+by+c)''_{yy}\cdot dy^2=0.$$

Так как дифференциал второго порядка (и последующих порядков) от линейной функции равен 0, то тогда из равенства (2) следует, что если $x(u,v)$ и $y(u,v)$ - линейные функции, то тогда дифференциалы высших порядков могут быть найдены по той же формуле, что и в случае, когда x и y - независимые переменные. Таким образом, если $x(u,v)$ и $y(u,v)$ - линейные функции, то дифференциалы высших порядков обладают свойством инвариантности.

3.3 Формула Тейлора

Теорема 3.3.1. Пусть для функции $z=f(x,y)$ в некоторой окрестности $U_\varepsilon(M_0)$ точки $M_0(x_0,y_0)$ существует $n+1$-ый дифференциал, тогда в $U_\varepsilon(M_0)$ верна формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0,y_0)\Big|_{\substack{dx=x-x_0\\ dy=y-y_0}}+$$

$$+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta(x-x_0),y_0+\theta(y-y_0))\ \ (0<\theta<1).$$

Доказательство.

Пусть точка $\widetilde{M}(\widetilde{x},\widetilde{y})$ принадлежит окрестности $U_\varepsilon(M_0)$. Зафиксируем x_0, y_0, $\widetilde{x}$, $\widetilde{y}$ и рассмотрим функцию $F(t)=f(x_0+t(\widetilde{x}-x_0),y_0+t(\widetilde{y}-y_0))$.

Введенная функция на отрезке $[0;1]$ имеет производные до порядка $n+1$ включительно. Тогда для нее можно записать формулу Маклорена с остаточным членом в форме Лагранжа

$$F(t)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}t+\frac{F''(0)}{2!}t^2+\ldots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}t^n+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}t^{n+1}\ \ (0<\theta<1).$$

Положив $t=1$, будем иметь

$$F(1)=F(0)+\frac{F'(0)}{1!}+\frac{F''(0)}{2!}+\ldots+\frac{F^{(n)}(0)}{n!}+\frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!}\ (0<\theta<1). \qquad (3)$$

Вернемся к функции $f(x,y)$.

1. $F(1)=f(\tilde{x},\tilde{y})$.

2. $F(0)=f(x_0,y_0)$.

3. $F'(0)=\frac{d}{dt}f(x_0+t(\tilde{x}-x_0),y+t(\tilde{y}-y_0))\Big|_{t=0}=$

►Используем формулу для производной сложной функции

$$\frac{dz}{dt}=\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt},$$

где $z=z(x,y)$, $x=x(t)$, $y=y(t)$.◄

$$=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}\right)\Bigg|_{t=0}=\left[f'_x(x_0+t(\tilde{x}-x_0),y_0+t(\tilde{y}-y_0))\cdot(\tilde{x}-x_0)+\right.$$

$$\left.+f'_y(x_0+t(\tilde{x}-x_0),y_0+t(\tilde{y}-y_0))\cdot(\tilde{y}-y_0)\right]\Big|_{t=0}=f'_x(x_0,y_0)\cdot(\tilde{x}-x_0)+$$

$$+f'_y(x_0,y_0)\cdot(\tilde{y}-y_0)=df(x_0,y_0)\Big|_{\substack{dx=\tilde{x}-x_0\\ dy=\tilde{y}-y_0}}.$$

Аналогично можно показать, что:

1) $F^{(k)}(0)=d^k f(x_0,y_0)\Big|_{\substack{dx=\tilde{x}-x_0\\ dy=\tilde{y}-y_0}}$ $(k=2,3,\ldots,n)$;

2) $F^{(n+1)}(\theta)=d^{n+1}f(x_0+\theta(\tilde{x}-x_0),y_0+\theta(\tilde{y}-y_0))\Big|_{\substack{dx=\tilde{x}-x_0\\ dy=\tilde{y}-y_0}}$.

Подставив в (3) выражения для $F(0)$, $F(1)$, $F'(0)$, …, $F^{(n)}(0)$, $F^{(n+1)}(\theta)$, получим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа

$$f(\tilde{x},\tilde{y})=f(x_0,y_0)+\frac{1}{1!}df(x_0,y_0)\Big|_{\substack{dx=\tilde{x}-x_0\\ dy=\tilde{y}-y_0}}+\frac{1}{2!}d^2f(x_0,y_0)\Big|_{\substack{dx=\tilde{x}-x_0\\ dy=\tilde{y}-y_0}}+\ldots+$$

$$+\frac{1}{n!}d^n f(x_0,y_0)\Big|_{\substack{dx=\tilde{x}-x_0\\ dy=\tilde{y}-y_0}}+\frac{1}{(n+1)!}d^{n+1}f(x_0+\theta(\tilde{x}-x_0),y_0+\theta(\tilde{y}-y_0))\Big|_{\substack{dx=\tilde{x}-x_0\\ dy=\tilde{y}-y_0}}.$$

Теорема доказана.

Если функция $z=f(x,y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ n-ый дифференциал, то тогда в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ верна формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}d^k f(x_0,y_0)\Big|_{\substack{dx=x-x_0\\ dy=y-y_0}}+o\left(|M_0M|^n\right).$$

Здесь: M - точка с координатами (x,y).

Примем данное утверждение без доказательства.

4 Экстремумы функций нескольких переменных

4.1 Понятие экстремума функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Достаточное условие экстремума

Определение 4.1.1. Будем говорить, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ максимум (локальный максимум), если можно указать такую проколотую окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, для всех точек этой окрестности будет выполняться неравенство $f(M) < f(M_0)$.

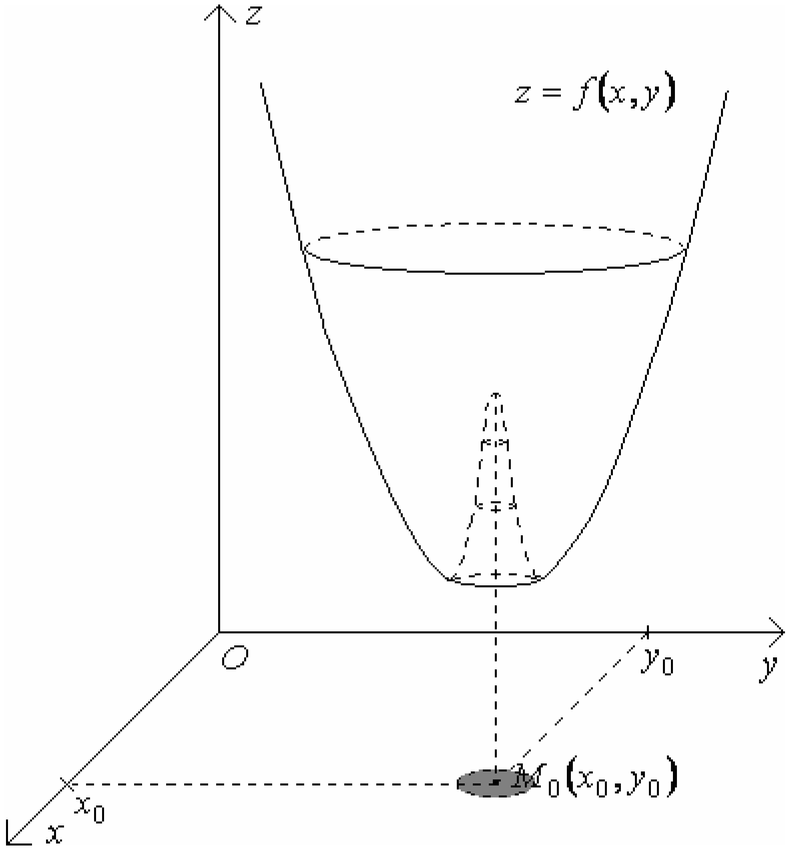

Рисунок 27

Определение 4.1.2. Будем говорить, что функция $z = f(x, y)$ имеет в точке $M_0(x_0, y_0)$ минимум (локальный минимум), если можно указать такую проколотую окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, для всех точек этой окрестности будет выполняться неравенство $f(M) > f(M_0)$.

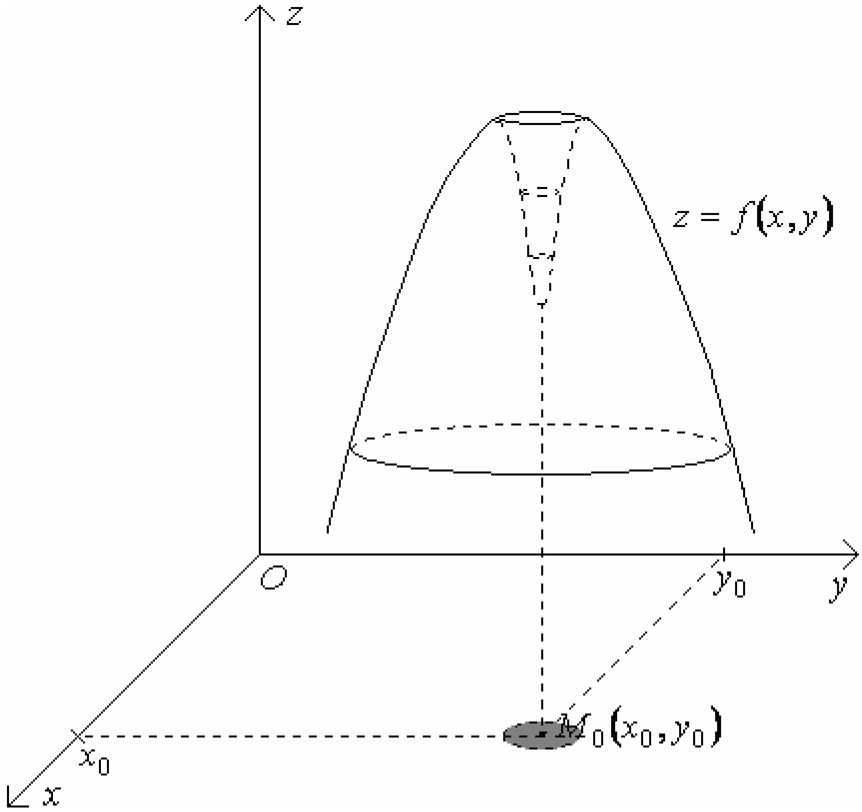

Рисунок 28

Точки, в которых функция имеет максимум или минимум, называются точками экстремумов.

Теорема 4.1.1. Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум, и существуют частные производные первого порядка $f'_x(M_0)$ и $f'_y(M_0)$, то тогда они равны 0.

Доказательство.

Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет максимум (в случае минимума – доказательство аналогично).

По условию существует $f'_x(M_0)$. По определению частной производной будем иметь

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \leq$$

►Так как в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеется максимум, то для достаточно малых Δx будем иметь $f(x_0 + \Delta x, y_0) < f(x_0, y_0)$. Тогда получим $f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) < 0$. Кроме того, из $\Delta x \to +0$ следует $\Delta x > 0$. Отсюда $\dfrac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} < 0$. Далее используем, что предел отрицательной величины является неположительным.◄

≤ 0.

С другой стороны

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \geq$$

►Так как в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеется максимум, то для достаточно малых Δx будем иметь $f(x_0+\Delta x, y_0)<f(x_0, y_0)$. Тогда получим $f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)<0$. Кроме того, из $\Delta x \to -0$ следует $\Delta x<0$. Отсюда $\dfrac{f(x_0+\Delta x, y_0)-f(x_0, y_0)}{\Delta x}>0$. Далее используем, что предел положительной величины является неотрицательным.◄

≥ 0.

Из соотношений $f'_x(x_0, y_0)\leq 0$ и $f'_x(x_0, y_0)\geq 0$ следует равенство $f'_x(x_0, y_0)=0$.

Аналогично можно доказать, что $f'_y(x_0, y_0)=0$.

Теорема доказана.

Замечание 1. Из данной теоремы следует, что функция может иметь экстремум, только в критических точках, то есть в точках, где все частные производные равны 0 (такие точки называются стационарными) или не существуют. Таким образом, доказанная теорема выражает необходимое условие экстремума.

Следует отметить, что данное необходимое условие не является достаточным. Действительно, рассмотрим функцию $f(x, y)=xy$.

Для нее имеем $f'_x(x, y)=y$, $f'_y(x, y)=x$. Обе частные производные в точке $O(0;0)$ равны 0, но в начале координат данная функция (см. рисунок 29, на котором показаны знаки функции $f(x, y)=xy$ в координатных углах) очевидно экстремума не имеет.

Рисунок 29

Теперь рассмотрим достаточное условие экстремума функции двух переменных. С целью упрощения преобразований введем следующие обозначения: $A=f''_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f''_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f''_{yy}(x_0, y_0)$, $\Delta=AC-B^2$.

Теорема 4.1.2. Пусть выполняются условия:

1) $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка функции $z=f(x, y)$;

2) функция $z=f(x, y)$ дважды непрерывно дифференцируема в точке $M_0(x_0, y_0)$.

Тогда:

1) если $\Delta < 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ не имеет экстремума;

2) если $\Delta = 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум может, как быть так и не быть;

3) если $\Delta > 0$, то в точке $M_0(x_0, y_0)$ функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум (если $A < 0$ - минимум, а если $A > 0$ - максимум).

Доказательство.

Запишем формулу Тейлора в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ при $n = 2$ с остаточным членом в форме Пеано

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}} + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}} +$$

$$+ o\left(|M_0 M|^2\right).$$

Так как $M_0(x_0, y_0)$ - стационарная точка функции $z = f(x, y)$, то $f'_x(x_0, y_0) = 0$ и $f'_y(x_0, y_0) = 0$. Отсюда следует, что $df(x_0, y_0)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}} = 0$.

Таким образом, получаем:

$$f(x,y) - f(x_0, y_0) = \frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}} + o\left(|M_0 M|^2\right).$$

Так как при сужении окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ слагаемое $o\left(|M_0 M|^2\right)$ является бесконечно малой более высокого порядка, чем бесконечно малая $\frac{1}{2!} d^2 f(x_0, y_0)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}}$, то в достаточно узкой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ знак разности $f(x, y) - f(x_0, y_0)$ будет определяться знаком $d^2 f(x_0, y_0)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}}$.

Рассмотрим

$$d^2 f(x_0, y_0)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}} = \Big(f''_{xx}(x_0, y_0)dx^2 + 2 f''_{xy}(x_0, y_0)dxdy +$$

$$+ f''_{yy}(x_0, y_0)dy^2\Big)\Big|_{\substack{dx = x - x_0 \\ dy = y - y_0}} = A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2 =$$

►Так как в определении экстремума фигурирует проколотая окрестность точки $M_0(x_0, y_0)$, то разности $x - x_0$ и $y - y_0$ не могут одновременно обращаться в 0. Рассмотрим случай, когда $y - y_0 \neq 0$. Случай $x - x_0 \neq 0$ рассматривается аналогично.◄

$$= (y - y_0)^2 \left[A\left(\frac{x - x_0}{y - y_0}\right)^2 + 2B\frac{x - x_0}{y - y_0} + C \right] =$$

►Введем обозначение $t = \dfrac{x - x_0}{y - y_0}$.◄

$= (y - y_0)^2 \left(At^2 + 2Bt + C\right)$.

Если $\Delta = AC - B^2 > 0$, то квадратный трехчлен $At^2 + 2Bt + C$ имеет отрицательный дискриминант, что влечет сохранение знака квадратного трехчлена при любом t. Таким образом, знак разности $f(x,y) - f(x_0, y_0)$ сохраняется в достаточно узкой проколотой окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$. Отсюда следует наличие экстремума в этой точке.

В случае $A > 0$ имеем $f(x,y) - f(x_0, y_0) > 0$ - в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеется минимум, а если $A < 0$, то $f(x,y) - f(x_0, y_0) < 0$ - в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеется максимум.

Пусть теперь $\Delta = AC - B^2 < 0$. Тогда квадратный трехчлен $At^2 + 2Bt + C$ имеет положительный дискриминант, что влечет наличие у него действительных корней. В этом случае трехчлен (и, следовательно, разность $f(x,y) - f(x_0, y_0)$) может принимать как положительные, так и отрицательные значения. В этом случае в точке $M_0(x_0, y_0)$ нет экстремума.

Теорема доказана.

Замечание 2. Если $\Delta = 0$, то в стационарной точке $M_0(x_0, y_0)$ экстремум может, как быть, так и не быть.

Например, функции $z = x^3 + y^3$, $z = x^4 + y^4$, $z = -x^4 - y^4$ имеют стационарную точку $O(0;0)$, для которой $\Delta = 0$. Первая функция в начале координат не имеет экстремума, вторая имеет минимум, а третья – максимум.

Замечание 3. Из **замечания 2** следует, что доказанное достаточное условие экстремума не являются необходимым.

Задача. Найти экстремумы функции $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$.

Решение.

1. Используем необходимое условие экстремума. Для этого найдем все частные производные первого порядка данной функции:

1) $f'_x(x,y) = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)'_x = 3x^2 + 3y^2 - 15$;

2) $f'_y(x,y) = \left(x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y\right)'_y = 6xy - 12$.

Полученные частные производные существуют при любых значениях x и y. Тогда найдем стационарные точки, решив систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x,y) = 0, \\ f'_y(x,y) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}.$$

Данная система уравнений имеет множество решений

$$\{(1;2), (-1;-2), (2;1), (-2;-1)\}.$$

Получили четыре стационарные точки: $M_1(1;2)$, $M_2(-1;-2)$, $M_3(2;1)$, $M_4(-2;-1)$.

2. Используем достаточное условие экстремума. Для этого найдем частные производные второго порядка:

1) $f''_{xx}(x,y) = \left(3x^2+3y^2-15\right)'_x = 6x$;

2) $f''_{xy}(x,y) = \left(3x^2+3y^2-15\right)'_y = 6y$;

3) $f''_{yy}(x,y) = (6xy-12)'_y = 6x$.

Исследуем найденные стационарные точки на экстремум.

Стационарная точка $M_1(1;2)$.

$A_1 = f''_{xx}(1;2) = 6\cdot 1 = 6$, $B_1 = f''_{xy}(1;2) = 6\cdot 2 = 12$, $C_1 = f''_{yy}(1;2) = 6\cdot 1 = 6$.

Так как $\Delta_1 = A_1C_1 - B_1^2 = 6\cdot 6 - 12^2 < 0$, то в точке $M_1(1;2)$ данная функция не имеет экстремума.

Стационарная точка $M_2(-1;-2)$.

$A_2 = f''_{xx}(-1;-2) = 6\cdot(-1) = -6$, $B_2 = f''_{xy}(-1;-2) = 6\cdot(-2) = -12$,
$C_2 = f''_{yy}(-1;-2) = 6\cdot(-1) = -6$.

Так как $\Delta_2 = A_2C_2 - B_2^2 = -6\cdot(-6)-(-12)^2 < 0$, то в точке $M_2(-1;-2)$ данная функция не имеет экстремума.

Стационарная точка $M_3(2;1)$.

$A_3 = f''_{xx}(2;1) = 6\cdot 2 = 12$, $B_3 = f''_{xy}(2;1) = 6\cdot 1 = 6$, $C_3 = f''_{yy}(2;1) = 6\cdot 2 = 12$.

Так как $\Delta_3 = A_3C_3 - B_3^2 = 12\cdot 12 - 6^2 > 0$, то в точке $M_3(2;1)$ данная функция имеет экстремум. Из того, что $A_3 > 0$ следует, что в точке $M_3(2;1)$ имеется минимум

$$f_{\min}(2;1) = 2^3 + 3\cdot 2\cdot 1^2 - 15\cdot 2 - 12\cdot 1 = -28.$$

Стационарная точка $M_4(-2;-1)$.

$A_4 = f''_{xx}(-2;-1) = 6\cdot(-2) = -12$, $B_4 = f''_{xy}(-2;-1) = 6\cdot(-1) = -6$,
$C_4 = f''_{yy}(-2;-1) = 6\cdot(-2) = -12$.

Так как $\Delta_4 = A_4C_4 - B_4^2 = (-12)\cdot(-12)-(-6)^2 > 0$, то в точке $M_4(-2;-1)$ данная функция имеет экстремум. Из того, что $A_4 < 0$ следует, что в точке $M_4(-2;-1)$ имеется максимум

$$f_{\max}(-2;-1) = (-2)^3 + 3\cdot(-2)\cdot(-1)^2 - 15\cdot(-2) - 12\cdot(-1) = 28.$$

4.2 Глобальные экстремумы

Определение 4.2.1. Пусть функция $z = f(x,y)$ определена на некоторой области $D \subset R^2$. Будем говорить, что в точке $M_0(x_0, y_0) \in D$ функция $z = f(x,y)$ имеет глобальный максимум (минимум), если для всех точек $M(x,y)\in D$ выполняется неравенство $f(x,y)\le f(x_0,y_0)$ $(f(x,y)\ge f(x_0,y_0))$.

По второй теореме Вейерштрасса, непрерывная функция на ограниченном замкнутом множестве всегда достигает минимального и максимального значений, то есть имеет оба глобальных экстремума.

Очевидно, что глобальные экстремумы непрерывных функций могут достигаться либо на границе области D, либо в точках локальных экстремумов, лежащих внутри области D. Так как локальные экстремумы могут находиться только критических точках, то для нахождения глобальных экстремумов достаточно:

1) найти критические точки функции $z=f(x,y)$, лежащие внутри области D;

2) вычислить значения функции $z=f(x,y)$ в этих точках;

3) найти минимальное и максимальное значения функции $z=f(x,y)$ на границе области D;

4) выбрать из значений, найденных в пунктах 2) и 3), наименьшее и наибольшее.

Задача. Найти глобальные экстремумы функции $f(x,y)=x^2-y^2$ в круге $K: x^2+y^2\le 1$.

Решение.

1. Найдем критические точки функции $f(x,y)=x^2-y^2$, лежащие внутри круга $K: x^2+y^2\le 1$.

$$f'_x(x,y)=\left(x^2-y^2\right)'_x=2x,\ f'_y(x,y)=\left(x^2-y^2\right)'_y=-2y.$$

Полученные частные производные первого порядка существуют всюду на R^2. Найдем стационарные точки, решив систему $\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0. \end{cases}$

Очевидно, что $M(0;0)$ - единственная стационарная точка функции $f(x,y)=x^2-y^2$. Она принадлежит кругу $K: x^2+y^2\le 1$.

2. Найдем значение функции $f(x,y)=x^2-y^2$ в стационарной точке $M(0;0)$.

$f(0;0)=0^2-0^2=0$.

3. Найдем минимальное и максимальное значения функции $f(x,y)=x^2-y^2$ на границе круга $K: x^2+y^2\le 1$, то есть на окружности $x^2+y^2=1$.

Зададим окружность $x^2+y^2=1$ в параметрической форме. Получим:

$$\begin{cases} x(t)=\cos t, \\ y(t)=\sin t, \end{cases} \text{, где } t\in[0,2\pi].$$

Подставив выражения для x и y в функцию $f(x,y)=x^2-y^2$, будем иметь функцию одной переменной $F(t)=f(x(t),y(t))=\cos^2 t-\sin^2 t=\cos 2t$.

Из свойств функции $y=\cos x$ получаем, что минимальное значение функции $F(t)=\cos 2t$ на отрезке $[0;2\pi]$ будет равно -1 и оно будет достигаться при $t_1=\dfrac{\pi}{2}$ (точка $M_1(0;1)$) и при $t_2=\dfrac{3\pi}{2}$ (точка $M_2(0;-1)$), а максимальное значение будет равно 1 и оно будет достигаться в точках $t_3=0$ (точка $M_3(1;0)$), $t_4=\pi$ (точка $M_4(-1;0)$), $t_5=2\pi$ (точка $M_3(1;0)$).

4. Выбрав из значений, полученных в пунктах 2 и 3, минимальное и максимальное значения, получим глобальные экстремумы.

1) $\min\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2-y^2\right)=-1$, минимальное значение функции достигается в точках $M_1(0;1)$, $M_2(0;-1)$;

2) $\max\limits_{x^2+y^2\le 1}\left(x^2-y^2\right)=1$, максимальное значение функции достигается в точках $M_3(1;0)$, $M_4(-1;0)$.

Задача. Найти глобальные экстремумы функции $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y-1$ в треугольнике T ограниченном прямыми $x=0$, $y=0$ и $x+y=4$.

Решение.

1. Сделаем чертеж.

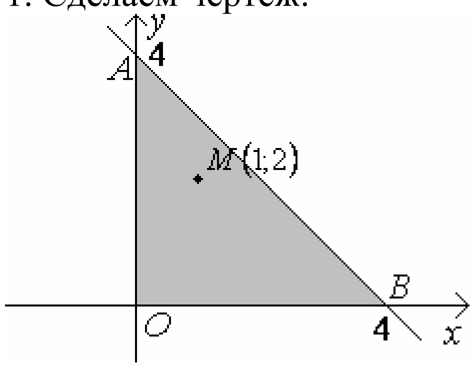

Рисунок 30

2. Найдем критические точки функции $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y-1$, лежащие внутри треугольника T.

$f'_x(x,y)=(x^2+y^2-2x-4y-1)'_x=2x-2$,

$f'_y(x,y)=(x^2+y^2-2x-4y-1)'_y=2y-4$.

Полученные частные производные первого порядка существуют всюду на R^2. Найдем стационарные точки, решив систему $\begin{cases} f'_x(x,y)=0, \\ f'_y(x,y)=0. \end{cases}$

Очевидно, что $M(1;2)$ - единственная стационарная точка функции $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y-1$. Она принадлежит треугольнику T.

3. Найдем значение функции $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y-1$ в стационарной точке $M(1;2)$.

$f(1;2)=1^2+2^2-2\cdot 1-4\cdot 2-1=-6$.

4. Найдем минимальное и максимальное значения функции $f(x,y)=x^2+y^2-2x-4y-1$ на границе треугольника T.

Граница треугольника T состоит из трех отрезков: $[AO]$, $[BO]$ и $[AB]$.

Отрезок $[AO]$: $x=0$, $y\in[0;4]$.

$f(0,y)=0^2+y^2-2\cdot 0-4y-1=y^2-4y-1=(y-2)^2-5$.

Отсюда следует, что минимальное значение функции $f(0,y)$ при $y\in[0;4]$ достигается при $y=2$ и равно -5.

Найдем еще значения функции $f(0,y)$ на концах отрезка $[0;4]$. Получим $f(0;0)=-1$ и $f(0;4)=-1$.

Получили, что минимальное значение функции $f(x,y)$ на отрезке $[AO]$ равно -5, а максимальное значение равно -1.

Отрезок $[BO]$: $x\in[0;4]$, $y=0$.

$f(x,0)=x^2+0^2-2\cdot x-4\cdot 0-1=x^2-2x-1=(x-1)^2-2$.

Отсюда следует, что минимальное значение функции $f(x,0)$ при $x\in[0;4]$ достигается при $x=1$ и равно -2.

Найдем еще значения функции $f(x,0)$ на концах отрезка $[0;4]$. Получим $f(0;0)=-1$ и $f(4;0)=7$.

Получили, что минимальное значение функции $f(x,y)$ на отрезке $[BO]$ равно -2, а максимальное значение равно 7.

Отрезок $[AB]$: $x\in[0;4]$, $y=4-x$.

$f(x,4-x)=x^2+(4-x)^2-2\cdot x-4\cdot(4-x)-1=2x^2-6x-1$.

Минимум этой функции достигается в точке вершины параболы $x_в=-\dfrac{b}{2a}=-\dfrac{-6}{2\cdot 2}=1{,}5$, и он равен $2\cdot 1{,}5^2-6\cdot 1{,}5-1=-5{,}5$.

Найдем еще значения функции $f(x,4-x)=2x^2-6x-1$ на концах отрезка $[0;4]$. Получим $f(0;4)=-1$ и $f(4;0)=7$.

Получили, что минимальное значение функции $f(x,y)$ на отрезке $[AB]$ равно $-5{,}5$, а максимальное значение равно 7.

Таким образом, на границе треугольника T минимальное значение функции $f(x,y)$ равно $-5{,}5$, а максимальное значение равно 7.

5. Из пунктов 3-4 имеем, что:

1) $\min\limits_{M(x,y)\in T}\left(x^2+y^2-2x-4y-1\right)=-6$, минимальное значение функции достигается в точке $M_1(1;2)$;

2) $\max\limits_{M(x,y)\in T}\left(x^2+y^2-2x-4y-1\right)=7$, максимальное значение функции достигается в точке $M_2(4;0)$.

4.3 Условные экстремумы

Решение практических задач на максимум и минимум часто сводится к нахождению так называемых условных экстремумов. В качестве примера рассмотрим следующую задачу об оптимальном распределении ресурсов

Задача. Пусть производственная функция, выражающая зависимость результативности работы предприятия от затрат на оборудование (Затраты на оборудование обозначим K, а стоимость единицы оборудования обозначим за p_K.) и от затрат на рабочую силу (Затраты на рабочую силу обозначим L, а ее цену за p_L.) имеет вид $z=AK^aL^{1-a}$ $\left(A>0, 0<a<1\right)$.

Требуется так разделить инвестиции в объеме D между затратами на оборудование и рабочую силу, так чтобы предприятие работало наиболее эффективно.

В данном случае мы должны найти максимум функции двух переменных $z(K,L)=AK^aL^{1-a}$ при условии, что переменные K и L связаны равенством $p_K\cdot K+p_L\cdot L=D$. Экстремумы такого типа и будем называть **условными**.

Определение 4.3.1. Будем говорить, что функция $y=f(x_1,x_2,...,x_n)$ имеет в точке $\overline{M}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)$ условный максимум (минимум) при ограничениях (уравнениях связи):

$$\begin{cases} g_1(x_1,x_2,...,x_n)=0,\\ g_2(x_1,x_2,...,x_n)=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ g_m(x_1,x_2,...,x_n)=0,\end{cases}$$

если для всех точек $M(x_1,x_2,...,x_n)$, принадлежащих некоторой проколотой окрестности точки $\overline{M}(\bar{x}_1,\bar{x}_2,...,\bar{x}_n)$, чьи координаты удовлетворяют уравнениям связи, выполняется неравенство $f(M)<f(\overline{M})$ $\left(f(M)>f(\overline{M})\right)$.

Для нахождения условных экстремумов можно применять метод исключения части переменных.

Из системы ограничений выражаем m переменных через оставшиеся $n-m$ переменных

$$x_1=\varphi_1(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n),$$
$$x_2=\varphi_2(x_{m+1},x_{m+2},...,x_n),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$x_m = \varphi_m(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$.

Подставим теперь выражения для переменных x_1, x_2,…, x_m в функцию $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ и получим функцию $n-m$ переменных $y = F(x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n)$. Экстремум найденной функции будем искать методами нахождения безусловного экстремума функций одной или нескольких переменных.

Задача. Найти условный максимум функции $u = xyz$ ($x > 0, y > 0$) при ограничении $2x + y + z = 6$.

Решение.

Выразим из уравнения связи одну из переменных, например z, через оставшиеся переменные. Получим $z = 6 - 2x - y$.

Подставив выражение для z в данную функцию, будем иметь

$$u = xy(6 - 2x - y) = 6xy - 2x^2y - xy^2.$$

Найдем максимум полученной функции.

Используем необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} u'_x(x, y) = 0, \\ u'_y(x, y) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left(6xy - 2x^2y - xy^2\right)'_x = 0, \\ \left(6xy - 2x^2y - xy^2\right)'_y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} 6y - 4xy - y^2 = 0, \\ 6x - 2x^2 - 2xy = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(6 - 4x - y) = 0, \\ x(6 - 2x - 2y) = 0. \end{cases}$$

Так как по условию $x > 0, y > 0$, то уравнения можно разделить соответственно на y и x.

$$\begin{cases} 6 - 4x - y = 0, \\ 6 - 2x - 2y = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 1, \\ y = 2. \end{cases}$$

Получили стационарную точку $M(1; 2)$.

Используем теперь достаточное условие экстремума.

$$u''_{xx} = \left(6y - 4xy - y^2\right)'_x = -4y, \qquad A = u''_{xx}(1; 2) = -4 \cdot 2 = -8;$$

$$u''_{xy} = \left(6y - 4xy - y^2\right)'_y = 6 - 4x - 2y, \ B = u''_{xy}(1; 2) = 6 - 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = -2;$$

$$u''_{yy} = \left(6x - 2x^2 - 2xy\right)'_y = -2x, \qquad C = u''_{yy}(1; 2) = -2 \cdot 1 = -2;$$

$\Delta = AC - B^2 = -8 \cdot (-2) - (-2)^2 = 12 > 0$ - в точке $M(1; 2)$ имеется экстремум. Из того, что $A = -8 < 0$ делаем вывод, что в точке $M(1; 2)$ имеется максимум.

При $x = 1$, $y = 2$ имеем $z = 6 - 2 \cdot 1 - 2 = 2$. Таким образом условный максимум функция имеет в точке $\overline{M}(1; 2; 2)$. Он равен $u_{\max}(1; 2; 2) = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4$.

Чаще всего выразить одни переменные через другие или очень сложно, или совсем невозможно. В этом случае применяют метод множителей Лагранжа.

Рассмотрим простейшую задачу на условный экстремум.

Пусть требуется найти условные экстремумы функции $z = f(x, y)$ при одном уравнении связи $g(x, y) = 0$.

Предположим, что уравнение связи задает неявно функцию $y = y(x)$, тогда нам нужно будет найти экстремумы функции одной переменной $F(x) = f(x, y(x))$.

Используем необходимое условие экстремума. Как известно, если дифференцируемая функция одной переменной в некоторой точке имеет экстремум, то ее производная в этой точке должна равняться нулю.

Тогда получим

$$F'(x) = [f(x, y(x))]' =$$

►Используем формулу для производной сложной функции

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}. \blacktriangleleft$$

$$= f'_x(x, y(x)) \cdot x' + f'_y(x, y(x)) \cdot y'(x) = f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot y'(x) =$$

$$= f'_x(x, y) + f'_y(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} = 0.$$

Отсюда, умножив последнее равенство на dx, получим

$$f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy = 0. \quad (4)$$

Найдем теперь дифференциал от обеих частей уравнения связи $g(x, y) = 0$. Получим

$$g'_x(x, y)dx + g'_y(x, y)dy = 0. \quad (5)$$

Равенство (5) умножим на λ и прибавим к равенству (4).

$$(f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y))dx + (f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y))dx = 0. \quad (6)$$

Выберем λ так, чтобы $f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0$. Тогда из (6) имеем равенство $f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0$.

Объединив последние два равенства с уравнением связи, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} f'_x(x, y) + \lambda g'_x(x, y) = 0, \\ f'_y(x, y) + \lambda g'_y(x, y) = 0, \\ g(x, y) = 0. \end{cases}$$

Данная система уравнений выражает необходимое условие безусловного экстремума для так называемой функции Лагранжа $L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$.

В общем случае для поиска условных экстремумов функции $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ при ограничениях:

$$\begin{cases} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ g_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \\ .... \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, \end{cases}$$

следует использовать необходимое условие безусловного экстремума для функции Лагранжа

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+ \lambda_2 g_2(x_1, x_2, ..., x_n) + ... + \lambda_m g_m(x_1, x_2, ..., x_n).$$

Чаще всего при решении практических задач для функции $L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$ можно ограничиться применением необходимого условия экстремума, а то, что в полученной стационарной точке действительно достигается условный экстремум, обычно следует из смысла задачи.

Задача. Найти условный максимум функции $f(x, y) = xy$ ($x > 0, y > 0$) при ограничении $x^2 + 2y^2 = 4$.

Решение.

В данном случае функция Лагранжа будет иметь вид

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = xy + \lambda(x^2 + 2y^2 - 4).$$

Применив к ней необходимое условие экстремума, и учитывая, что $x > 0, y > 0$, получим

$$\begin{cases} L'_x(x, y, \lambda) = 0, \\ L'_y(x, y, \lambda) = 0, \\ L'_\lambda(x, y, \lambda) = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} y + 2\lambda x = 0, \\ x + 4\lambda y = 0, \\ x^2 + 2y^2 - 4 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2\lambda = -\dfrac{y}{x}, \\ 4\lambda = -\dfrac{x}{y}, \\ x^2 + 2y^2 - 4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 = \dfrac{x^2}{y^2}, \\ x^2 + 2y^2 = 4; \end{cases} \quad \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = 1. \end{cases}$$

Из смысла данной задачи следует, что в полученной точке $\overline{M}(\sqrt{2}, 1)$ данная функция имеет условный экстремум $f_{\max}(\sqrt{2}; 1) = \sqrt{2} \cdot 1 = \sqrt{2}$.

4.4 Задачи на максимум и минимум

В практической деятельности часто приходится находить условия, при которых интересующая нас величина (прибыль, прочность, КПД и т.д.) будет максимальной или минимальной (например, величины: расход материалов, издержки, потребляемая мощность, пройденное расстояние и т. д.).

В качестве примеров рассмотрим следующие задачи.

Задача (метод наименьших квадратов). Пусть известно, что величина y линейно зависит от величины x:

$$y = ax + b.$$

Предположим, что мы должны определить значения параметров a и b с помощью экспериментального нахождения значений y_i для различных значений x_i. В результате измерений будет получена таблица вида

Таблица 4

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\ldots$	y_n

Требуется найти такие значения параметров a и b, чтобы сумма квадратов абсолютных ошибок $S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2$ была минимальной.

Решение.

Используем необходимое условие экстремума

$$\begin{cases} S'_a(a,b) = 0, \\ S'_b(a,b) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i - x_i y_i\right) = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i) = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i - \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = 0, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb - \sum_{i=1}^{n} y_i = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a\sum_{i=1}^{n} x_i + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i. \end{cases}$$

Решив данную систему, получим

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Из смысла задачи следует, что при таких a и b сумма квадратов абсолютных ошибок будет минимальной.

Задача (метод наименьших квадратов). Пусть известно, что величина y линейно зависит от величины x:

$$y = ax + b.$$

В результате измерений была получена таблица

Таблица 5

x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5
y_i	2	5	4	8	9	11	15	15	20	19

Определить значения параметров a и b.

Построить на одном чертеже график линейной зависимости и точки, соответствующие экспериментальным данным.

Решение.

Используем формулы для параметров a и b:

$$a = \frac{n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}, \quad b = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i y_i}{n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2}.$$

Вычисления выполним в табличной форме.

Таблица 6

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	Σ
x_i	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5	5,5	32,5
y_i	2	5	4	8	9	11	15	15	20	19	108
x_i^2	1	2,25	4	6,25	9	12,25	16	20,25	25	30,25	126,25
$x_i y_i$	2	7,5	8	20	27	38,5	60	67,5	100	104,5	435

$$a = \frac{10 \cdot 435 - 32{,}5 \cdot 108}{10 \cdot 126{,}25 - 32{,}5^2} \approx 4{,}07;$$

$$b = \frac{126{,}25 \cdot 108 - 32{,}5 \cdot 435}{10 \cdot 126{,}25 - 32{,}5^2} \approx -2{,}4.$$

Таким образом, получаем линейную зависимость $y = 4{,}07x - 2{,}4$.

Построим на одном чертеже график линейной зависимости и точки, соответствующие экспериментальным данным.

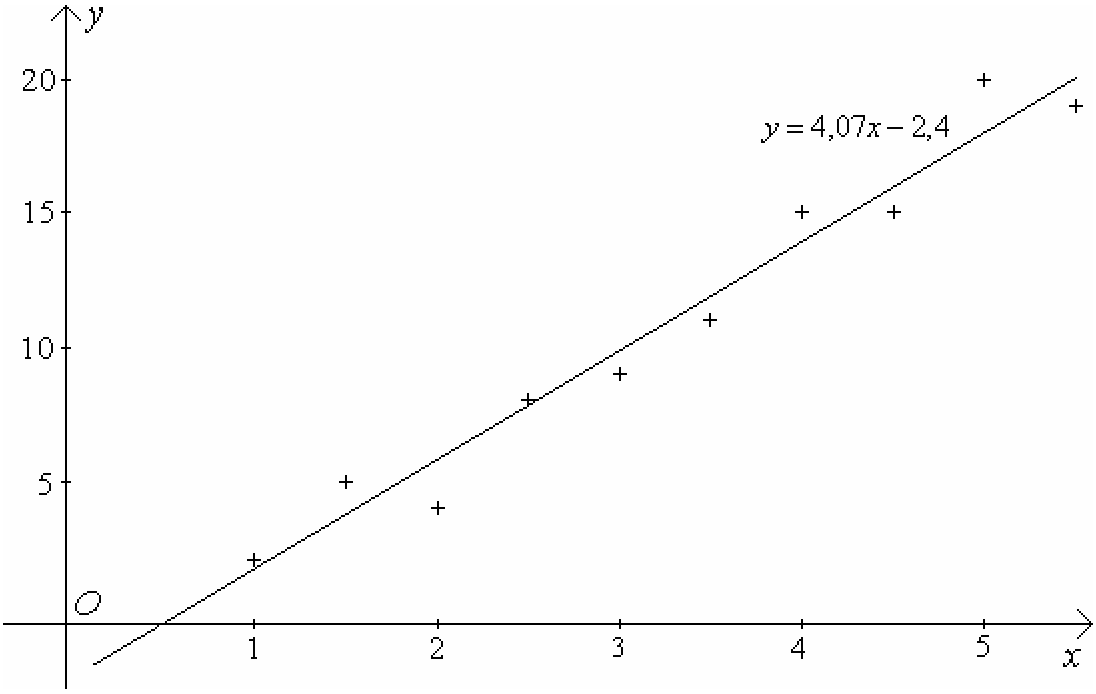

Рисунок 31

Задача. Известно, что прочность бруса с прямоугольным поперечным сечением пропорциональна величине bh^2, где b - ширина бруса, а h - его высота. Найти размеры бруса наибольшей прочности, который можно сделать из бревна радиусом $R = 3$ дм.

Решение.

1. Сделаем чертеж.

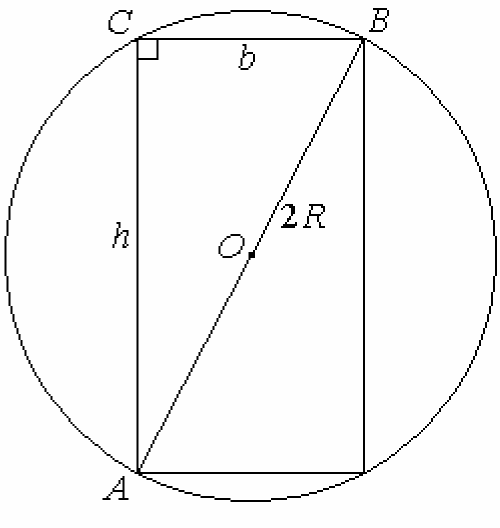

Рисунок 32

Из треугольника ABC по теореме Пифагора имеем $AC^2 + BC^2 = AB^2$, $h^2 + b^2 = 4R^2$, $h^2 + b^2 = 4 \cdot 3^2$, $h^2 + b^2 = 36$.

Таким образом, получили задачу на условный экстремум: требуется найти максимум функции $f(b,h) = bh^2$ при ограничении $h^2 + b^2 = 36$ $(b > 0, h > 0)$.

2. Получим для данной задачи функцию Лагранжа

$$L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y).$$

В данном случае будем иметь:

$$L(b,h,\lambda)=bh^2+\lambda\left(h^2+b^2-36\right).$$

Используем необходимое условие для локального экстремума. Для этого решим систему

$$\begin{cases} L'_b(b,h,\lambda)=0, \\ L'_h(b,h,\lambda)=0, \\ L'_\lambda(b,h,\lambda)=0; \end{cases} \quad \begin{cases} h^2+2b\lambda=0, \\ 2bh+2h\lambda=0, \\ h^2+b^2-16=0; \end{cases} \quad \begin{cases} h^2+2b\lambda=0, \\ b+\lambda=0, \\ h^2+b^2-16=0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} h=\sqrt{24}, \\ b=\sqrt{12}, \\ \lambda=-\sqrt{12}. \end{cases}$$

Из смысла задачи следует, что при $b=\sqrt{12}\approx 3{,}46$ (дм.), $h=\sqrt{24}\approx 4{,}90$ (дм.) прочность балки будет максимальной.

Список использованных источников

1 Фихтенгольц, Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: В 3 т. Т. 1 / Г. М. Фихтенгольц. – 8-е изд. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 680 с.

2 Архипов, Г. И. Лекции по математическому анализу.: Учебник для университетов и пед. вузов / Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков. – М.: Высш. шк., 1999. – 695 с.

3 Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2006. – 640 с.