В.Н. Тарасов, Н.Ф. Бахарева

ПРОГРАММНО РЕАЛИЗОВАННАЯ МАРКОВСКАЯ МОДЕЛЬ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ПОСТУПЛЕНИЯ И ОБСЛУЖИВАНИЯ ДЛЯ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В статье рассмотрена двумерная диффузионная модель системы массового обслуживания с конечной очередью и параметрами, зависящими от состояния системы (саморегулирующиеся системы). Изложена методика расчета ее характеристик, а также рассмотрены области ее применения.

Системы массового обслуживания (СМО), в которых интенсивности и дисперсии времен поступления и обслуживания заявок зависят от состояния системы (например от количества заявок в СМО), при произвольных распределениях входного потока и времен обслуживания, являются наиболее сложными системами, и для их анализа не существует точных методов.

Для анализа вышеуказанных систем рассмотрим такую же область распределения двумерного диффузионного процесса (x_1,x_2), как и для СМО GI/G/1/m с потерями /4,5/ (рисунок 1а). При этом траектория процесса (x_1,x_2), достигнув границы Γ_2 (поглощающий экран), остается там случайное время, равное времени дообслуживания текущей заявки, а потом распределяется в области, определенной условиями N≥0 и N_{max}=m, пока не достигнет поглощающей границы Γ_1 (m-емкость накопителя). Область между границами Γ_1и Γ_2 разобьем на квадраты D_k^i (рисунок 1б), где D_k^i означает, что в СМО находится К заявок (k=1,…,m; i=1,2,…). Область D_k^i характеризуется своими интенсивностями и поступления заявок $\mu_k = \bar{\tau}_{\mu k}^{-1}$ и $\lambda_k = \bar{\tau}_{\lambda k}^{-1}$, а также дисперсиями этих времен $D\mu_k$ и $D\lambda_k$, зависящими от состояния системы.

Следовательно, диффузионные процессы x_1 и x_2 в области D_k^i характеризуются переменными коэффициентами сноса $a_1^{(k)} = \lambda_k$, $a_2^{(k)} = \mu_k$ и коэффициентами диффузии

$$b_1^{(k)} = D_{\lambda k} \cdot \lambda_k^{-3},\ b_2^{(k)} = D_{\mu k} \cdot \mu_k^{-3}.$$

Распределения ординат процессов x_1(t) и x_2(t) в моменты достижения ими уровней x_1=k+1 и $x_2 = k - \varphi_k^i(y_2)$ и $\psi_i^k(y_1)$, выраженные через решение уравнения Колмогорова ω(t,x_1,x_2) в области D позволяют определить все основные характеристики узла типа GI/G/1/m с переменными параметрами. При этом распределения $\varphi_k^i(y_2)$ и $\psi_i^k(y_1)$ определяются рекуррентными формулами аналогично СМО с бесконечной очередью. Для этого подробно рассмотрим область D_k^i (рисунок 1б), где обозначены распределения $\varphi_k^i(y_2), \varphi_{k-1}^i(y_2')$, $\psi_i^k(y_1)$, $\psi_{i-1}^k(y_1')$, а также функции вероятностей переходов ординат процессов x_1 и x_2 – Q_φ, Q_φ', Q_ψ, Q_ψ'. Функция Q_φ' и Q_ψ' определяются аналогично функциям $Q\varphi$ и $Q\psi$ из /4, 5/:

$$Q_\varphi'(y_2 / y_1') = \frac{y_1'}{\pi\sqrt{b_1 b_2}} \exp\left[\frac{a_1}{b_1} y_1' + \frac{a_2}{b_2}(1 - y_2)\right] \cdot$$

$$\cdot \left\{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta_4'}} K_1\left(2\sqrt{\beta_1'\gamma}\right) - \sqrt{\frac{\gamma}{\beta_2'}} K_1\left(2\sqrt{\beta_2'\gamma}\right)\right\};$$

$$\beta_1' = \frac{(y_1')}{2b_1} + \frac{(1 - y_2)^2}{2b_2};\ \beta_2^1 = \frac{(y_1')^2}{2b_1} + \frac{(1 + y_2)^2}{2b_2};$$

$$\gamma = \frac{a_1^2}{2b_1} + \frac{a_2^2}{2b_2};\ y_2 \in [0,1],\ y_1' \in [0,1];$$

$$Q_\psi'(y_1 / y_1') = \frac{1}{\pi\sqrt{b_1 b_2}} \exp\left[(y_1' - y_1)\frac{a_1}{b_1} + \frac{a_2}{b_2}\right] \cdot$$

$$\cdot \left\{\sqrt{\frac{\gamma}{\beta_3'} K_1\left(2\sqrt{\beta_3'}\right) - \sqrt{\frac{\gamma}{\beta_4'} K_1\left(2\sqrt{\beta_4 \gamma}\right)}}\right\};$$

$$\beta_3' = \frac{(y_1' - y_1)^2}{2b_1} + \frac{1}{2b_2};\ \beta_4' = \frac{(y_1' + y_1)^2}{2b_1} + \frac{1}{2b_2};$$

$$y_1 \in [0,1].$$

Теперь можно записать рекуррентные формулы для распределений

$$\varphi_k^i(y_2) \text{ и } \psi_i^k(y_1):$$

$$\varphi_k^i(y_2) = \int_0^1 \varphi_{k-1}^i(y_2') Q_\varphi(y_2 / y_2') dy_2' +$$

$$+ \int_0^1 \psi_{i-1}^k(y_1') Q_\varphi'(y_2 / y_1) dy_1' \quad (1)$$

$$\psi_i^k(y_1)=\int_0^1\varphi_{k-1}^i(y_2')Q_\psi(y_1/y_2')dy_2'+$$

$$+\int_0^1\psi_{i-1}^k(y_1')Q_\varphi'(y_2/y_1)dy_1' \qquad (2)$$

(k=1,…,m; I=1,2,…).

Далее запишем формулы для определения основных характеристик системы через параметры двумерного диффузионного приближения, аналогично СМО с бесконечной очередью и СМО GI/G/1/m с потерями /4, 5/. Вероятность ρ_0' того, что обслуженная заявка оставляет узел свободным

$$p_0'=1/\sum_{i=1}^{\infty}i\cdot p_i, \qquad (3)$$

где $p_i=\int_0^1\psi_i'(y_1)dy_1$.

Среднее время простоя

$$\bar{\tau}_\lambda'=\bar{I}=\bar{\tau}_\lambda\cdot m_\psi, \qquad (4)$$

а дисперсия этого времени

$$D_\lambda'=D_\lambda\cdot m_\psi+\bar{\tau}_\lambda^2\cdot D_\psi, \qquad (5)$$

где $\bar{\tau}_\lambda$ и D_λ среднее и дисперсия интервала времени между заявками во входном потоке;

$$m_\psi=\int_0^1 y_1\psi(y_1)dy_1; \qquad D_\psi=\int_0^1 y_1^2\psi(y_1)dy_1-m_\psi^2;$$

$\psi(y_1)=\sum_{i=1}^{\infty}\psi_i^1(y_1)$ (см. рисунок 1а).

Средний интервал времени между заявками в выходном потоке

$$\bar{\tau}_{вых}=\bar{\tau}_\mu+p_0'\bar{\tau}_\lambda', \qquad (6)$$

где $\bar{\tau}_\mu$ – среднее время обслуживания на периоде занятости

$$\bar{\tau}_\mu=p_0'(\bar{\tau}_{\mu1}+\bar{\tau}_\lambda')+p_1'\cdot\bar{\tau}_{\mu2}+...+p_{m-1}^1\cdot\bar{\tau}_{\mu m}.$$

В последнем выражении $\bar{\tau}_{\mu i}$ среднее время обслуживания заявки при условии, что в СМО находится i -заявок (i=1,…,m), а p_i' – вероятность того, что уходящая из СМО заявка оставляет после себя i – заявок (i=1,…,m-1). Вероятности p_i' определяются аналогично p_0' и $\sum_{l=0}^{m-1}p_l'=1$. Дисперсия интервала времени между заявками в выходном потоке

$$D_{вых}=p_0'\left[D_{\mu_1}+D_\lambda'+(\bar{\tau}_{\mu_1}+\bar{\tau}_\lambda')^2\right]+$$

$$+\sum_{i=1}^{m-1}p_i'(D_{\mu_i}+\bar{\tau}_{\mu_i}). \qquad (7)$$

Формулы (6) и (7) для параметров выходного потока отдельного узла могут быть получены при аналогичных рассуждениях, что и формулы в /5/.

Среднее количество заявок, прошедших через систему за время периода занятости

$$\bar{N}_T=1/p_0'. \qquad (8)$$

Среднее время ожидания заявки в системе на периоде занятости

$$\bar{W}=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left[\int_0^1\varphi_k^i(x)xdx\right]\bar{\tau}_{\mu k}/\bar{N}_T, \qquad (9)$$

а средняя длина очереди

$$\bar{N}_q=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m}\left[\int_0^1\varphi_k^i(x)xdx\right]\rho_k/\bar{N}_T, \qquad (10)$$

где ρ_k – средняя загрузка системы при условии, что в ней находится К -заявок (k=1,…,m).

Средняя длина периода занятости

$$\bar{Y}=\bar{\tau}_{\mu1}+(1-p_1)\bar{\tau}_{\mu2}+(1-p_1-p_2)\bar{\tau}_{\mu3}+... \qquad (11)$$

Средний коэффициент загрузки узла

$$\rho_{cp}=\bar{Y}/(\bar{Y}+\bar{I}), \qquad (12)$$

а среднее количество заявок в узле

$$\bar{N}=\bar{N}_q+\rho_{cp}. \qquad (13)$$

Приведенная выше методика расчета характеристик СМО типа GI/G/1/m с конечной очередью и параметрами, зависящими от состояния системы, реализована в виде программного модуля в пакете прикладных программ вероятностного моделирования сложных систем.

Области применения

Вычислительные системы

К анализу таких СМО приводят многие модели мультипрограммирования, в частности циклическая модель для мультипрограммирования (рисунок 2). Это модель с центральным обслуживающим прибором, которая позволяет включить периферийное устройство. Центральный обслуживающий прибор представляет собой центральный процессор (ЦП), а периферийное устройство (ПУ) может быть моделью любого устройства, обеспечивающего хранение данных (НМГД, НМЖД). В такой модели задания циркулируют между двумя устройствами, требуя обращения к ЦП, а затем к ПУ и обратно. В модели допускается ровно К заданий.

Автоматизированное поточное производство изделий

Рассмотрим пример построения модели для одного варианта процесса поточного производства штучных изделий. В производственном процессе выделим три основные операции (абстрактные): обработки, сборки и управления. Пусть линия сборки состоит из одного устройства, где каждое устройство выполняет одну определенную операцию сборки.

Важнейшей характеристикой **операции обработки** является ее длительность $\tau_{обр}$, зависящая от свойств станка и параметров заготовок. На практике считается достаточным описать случайную величину $\tau_{обр}$ с точностью до двух **первых моментов распределений.**

Абстрактную **операцию сборки** можно представить как переработку информации о состоянии заготовок, участвующих в сборке. Пусть в сборке участвует узел (ведущий полуфабрикат) и m деталей (ведомых полуфабрикатов). Координаты их состояний до начала операции обозначим $\alpha_{ky}, \alpha_{k1}, ..., \alpha_{km}$. В результате операции сборки получают сборный узел с новыми значениями координат α^*_{ky}. Тогда математическое описание операции сборки задается соотношением $\alpha^*_{ky} = \alpha^*_{ky}(\alpha_{ky}, \alpha_{k1}, ..., \alpha_{km}, \beta_1, ..., \beta_l)$, где β_i – параметры сборочного оборудования. Величины α^*_{ky} в общем случае являются **случайными.** Для их определения необходимо задавать соответствующие **законы распределения** или же другие **вероятностные характеристики.**

Операции обработки заготовок и сборки изделий являются основными производственными операциями, составляющими фундамент любого производственного процесса. В отличие от этого **операции управления** не имеют непосредственного отношения к обработке и сборке. В качестве примеров операций управления можно назвать регулирование скорости производственного процесса, регулирование режимов работы станков, выработку признаков прекращения или возобновления подачи заготовок к станку или линии в зависимости от длины **очереди** и другие. Выполнение операций управления обеспечивает управляющее устройство.

Комбинация операций обработки со сборкой изделия и с операциями управления и дает абстрактный процесс поточного производства штучных изделий. Для моделирования широкого круга реальных производственных процессов такого вида, с учетом отклонения течения производственного процесса от нормального, используется аппарат **теории массового обслуживания.**

Во многих случаях в системе поточного производства следует учитывать тот факт, что в системе массового обслуживания **время обслуживания** зависит от **характеристик входного потока** (от свойств заготовок, отклонения их размеров от номинальных, температуры и других). Кроме этого необходимо учитывать **ограниченность накопителей** заготовок, деталей инструментов и местных складских ячеек. Все эти и другие особенности поточного производства в полной мере не могут быть проанализированы существующими методами аналитического вероятностного моделирования.

Анализ моделей равновесия в рыночной экономике

Модели равновесия означают, что в идеале достигается совокупная пропорциональность: а) производства и потребления; б) ресурсов и их использования; в) предложения и спроса; г) факторов производства и его результатов; д) материально-вещественных и финансовых потоков. Существенную роль в разработку этих моделей внесли Л. Вальрас, В. Леонтьев, В. Парето и другие. Вкратце эти модели сводятся к схемам «затраты - выпуск», «предложение - спрос».

В таблице 1 приведены уравнения пяти групп моделей равновесия.

Здесь приняты следующие условные обозначения:

p_j – цена j-го товара (j=1,2…n); $\overline{p}=(p_1, p_2 \ldots p_n)$ – вектор цен выпускаемых товаров;

$\overline{p}_1$ – цена i-го фактора производства, i=1…m;

$\overline{p} = (\overline{p}_1, \overline{p}_2 ... p_m)$ – вектор цен факторов производства;

F – число фирм, f=1,…,F;

H – число потребителей;

a^f – количество первичного фактора, купленного на рынке и затрачиваемого на производство продукции в течение года фирмой $f - a^f = (a_1^f, a_2^f ... a_m^f)$;

q_f^f – объем выпуска j-го продукта;

$q^f = (q_1^f, q_2^f ... q_\upsilon^f)$;

$\Phi^f(q_1^f, q_2^f ... q_n^f, a_1^f, a_2^f ... a_m^f) = \Phi^f(q^f, q^f) = 0$ – производственная функция каждой фирмы[1];

Таблица 1.

Уравнения моделей поведения фирм, потребителей, общего равновесия и цели субъектов рынка	
для фирмы	модель: $\pi^f = \sum_{j=1}^{n} p_j q^f{}_j - \sum_{i=1}^{m} \bar{p}_i a^f{}_i$, в векторной форме: $\pi^f = pq^f - \bar{p}a^f$; целевая производ- max $\pi^{f+} = \bar{p}q^f - pa^f$ ственная при $\bar{\Phi}^f(q^f, a^f) = 0$, функция или в словесном выражении: прибыль каждой фирмы есть разность между валовым доходом от продажи производственной продукции за вычетом стоимости расходов на факторы производства;
для потребителей	модель: $\sum_{i=1}^{m} \bar{p}_i a_i^h + \sum_{f=1}^{F} S^{hf} \cdot \pi^f = \sum_{j=1}^{n} p_j g_j^h$, в векторной форме: $pa^h + S^h \pi = pg^h$; целевая потреби- max $V^h(g^h, a^h)$ при тельская $\bar{p}a^h + S^{h\pi} = pg^h$, функция: или: общий расход потребителей на покупку товаров и услуг равен сумме их общего дохода от продажи или факторов производства фирмам и доходов потребителей как собственников капитала;
для рынка товаров потребления	модель: $\sum_{h=1}^{H} g_f^h \sum_{f=1}^{F} q_j^f$, или: сумма покупок товаров потребления равна сумме продаж фирм;
для рынка факторов производства	модель: $\sum_{f=1}^{F} a_i^f = \sum_{h=1}^{H} a_i^h$, или: сумма потребленных фирмами производственных факторов равна сумме этих факторов, проданных потребителями;
для общего равновесия (закон Вальраса с добавлением варианта получения прибыли владельцами капитала)	модель: $\sum_{h=1}^{H} \sum_{i=1}^{m} \bar{p}_i a_i^h + \pi = \sum_{h=1}^{H} \sum_{j=1}^{h} p_j g_j^h$, или: общий доход всех потребителей вместе с общей прибылью всех фирм равняется общей (суммарной) цене потребительских товаров (спрос равен предложению).

g_j^h – общее количество j-го товара, купленного потребителем h;

$$U^h = U^h\left(g_1^h, g_2^h ... g_n^h, a_1^h, a_2^h ... a_m^h\right) = U^h\left(g^h, a^h\right)$$

– функция общей полезности потребления товаров и услуг и от проданных факторов для потребителя h;

S^{hf} – доля участия потребителя h в капитале фирм F;

π – прибыль всех фирм – $\pi = \pi^1, \pi^2 ... \pi^F$).

Приведенные модели равновесия (пять групп) можно анализировать с помощью СМО с переменными параметрами поступления и обслуживания (саморегулирующиеся системы), учитывая четыре следующих основных момента. Во-первых, в этих моделях на лицо действие случайных факторов (колебания на рынке, банкротства фирм, различные экзогенные перемены и другие). Во-вторых, по аналогии с длиной очереди N в виде разности $[x_1] - [x_2]$ здесь от равенств легко можно перейти к разности вследствие того, что эти равенства могут быть выполнены только в идеале, а не на практике. И, в-третьих, с появляющейся возможностью прогнозирования падения и роста этих показателей в зависимости от параметров распределений случайных факторов. В-четвертых – это наличие ограниченности ресурсов.

Масштабированием переменных, области решения уравнения Колмогорова можно привести к стандартной форме, показанной на рисунке 1.

Приведенная выше методика реализована в виде программного модуля в пакете прикладных программ вероятностного моделирования сложных систем.

Список использованной литературы:

1. Бусленко Н.П. Моделирование сложных систем. – М.:Наука, 1978. – 399с.
2. Смирнов А.Д. и др. Рыночная экономика.: Учебник.– М.: СОМИНТЭК, 1992. –256с.
3. Котлер Ф. Основы маркетинга. – С.Петербург.: АО «КОРУНА», АОЗТ «ЛИТЕРА ПЛЮС», 1994. – 699с.
4. Тарасов В.Н. Расчет сетевых моделей вычислительных систем с конечной очередью. Изв.ВУЗов СССР – Приборостроение, 1982, №11, – 53-57с.
5. Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф. Непрерывные диффузионные модели массового обслуживания и методика расчета их характеристик. Вестник ОГУ, 2002, №2.