Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра медико-биологической техники

А.Д. Стрекаловская, А.В. Рачинских, Т.А. Санеева

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ

Методические указания
к лабораторной работе

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 615.47(07)
ББК 53я7
С84

Рецензент – заведующий отделением медицинской техники ФГУ МНТК «Микрохирургия глаза» имени академика С.Н. Федорова В.И. Канюков

Стрекаловская, А.Д.
С84 Метод последовательных приближений: методические указания к лабораторной работе / А.Д. Стрекаловская, А.В. Рачинских, Т.А. Санеева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2011. – 27

Методические указания устанавливают объем и содержание лабораторной работы, содержат основные методы последовательных приближений.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по программе высшего профессионального образования по специальности «Инженерное дело в медико-биологической практике» при изучении дисциплины «Эксплуатация и техническое обслуживание изделий медицинской техники».

УДК 615.47(07)
ББК 53я7

Содержание

Введение

В настоящее время происходит насыщение лечебно-профилактических учреждений изделиями медицинской техники (ИМТ), позволяющими использовать эффективные методики лечения и диагностики больных. Медицинская промышленность предоставляет врачам большой выбор изделий медицинской техники. Однако более или менее интенсивная эксплуатация ИМТ может привести к выходу их из строя. Для того, чтобы избежать дорогостоящего ремонта этих изделий после выхода их из строя, необходимо регулярно проводить их техническое обслуживание, что намного дешевле.

Только с помощью полноценного технического обслуживания ИМТ возможна минимизация затрат на их нормальную эксплуатацию в течение всего срока службы.

1 Принципы сервисного обслуживания

Карьера в сфере сервисного обслуживания электрических и электронных устройств может быть финансово привлекательной и приносить подлинное удовлетворение от работы. Эксперт обладает уникальным набором знаний в области электронной теории, техники решения проблем и квалификации в выполнении работ. Большинство электронных изделий и приборов содержат такие сходные элементы, как резисторы, конденсаторы, диоды, транзисторы, выводы, разъемы, провода. Понимание причин стандартных поломок этих элементов и способов их тестирования является необходимой предпосылкой для специалиста. В этой главе вы научитесь основам анализа решения проблем, узнаете распространенные неполадки и основные процедуры проверки работоспособности наиболее часто встречающихся электрических и электронных компонентов.

2 Анализ решения проблем

Прежде чем пытаться обслуживать прибор, вы должны сначала разработать концепцию решения проблем и применить ее к поиску неисправностей и ремонту. Первоначальный план действий таков:

1) анализ ситуации;

2) определение причин возникновения проблемы;

3) принятие решения.

Вы должны поступать именно в таком логическом порядке, в противном случае могут возникнуть ошибки, несчастные случаи, потери времени и лишние расходы. Например, многие специалисты по ремонту, обнаружив сгоревший предохранитель, просто заменяют его, вместо того, чтобы сначала определить причину возникновения проблемы. В результате может сгореть и следующий предохранитель.

Поэтому первым шагом в обслуживании устройства является анализ ситуации. Он предполагает критический обзор и всестороннее исследование возникшей проблемы, что позволяет специалисту понять причины, которые не позволяют прибору правильно работать. Это определяется простым осмотром общего состояния устройства.

Начните этот этап, задав вопросы заказчику и проведя наблюдения по следующим пунктам:

1) обсудите дефект с владельцем или пользователем;
2) сравните проблему с другими из вашего прошлого опыта;
3) может быть, неисправности и нет, а имеет место ошибка пользователя;
4) определите различия между текущим состоянием устройства и тем, которое должно быть при правильной работе;
5) оцените ситуацию в целом, отметив симптомы и необходимые изменения.

Определение причин возникновения проблемы вступает в силу, когда наблюдается отклонение от стандартного или желаемого состояния устройства. Примером является неправильно функционирующее или неработающее устройство. Поиск неисправностей представляет собой процесс определения причин проблемы. Первым шагом является организация работы. Начните с подготовки соответствующих схем, спецификаций производителя и руководств по техническому обслуживанию, инструментов и оборудования. Не старайтесь сократить этот этап, бросаясь сразу работать и тратя много времени на исправление устройства, в то время как простое чтение руководства по техническому обслуживанию может способствовать скорейшему решению проблемы. Другими словами, кто провалил этап планирования, тот гарантировал провал на пути устранения неполадок. Когда вы подготовились, выполните следующие операции:

1) опишите проблему;

2) сравните ситуацию с условиями работы устройства до возникновения неисправности;

3) опишите такие различия, как симптомы, шумы, запахи, которые были замечены при возникновении дефекта;

4) сравните, что есть и чего нет; какие компоненты в порядке, а какие нет, и до какой степени они дефектны;

5) проанализируйте разницу с помощью тестирования, обращая особое внимание на неочевидные и непрямые связи. Например, небольшие изменения допусков элементов или цвета могут указывать на причину неисправности.

Когда вы определили истинную причину возникновения проблемы, то готовы перейти к заключительной фазе, которая называется «принятие решений».

На этом этапе специалист рассматривает различные варианты решения проблемы и выбор наилучшего. Например, если выяснено, что причиной неполадок стал электродвигатель, может быть несколько способов исправления. В зависимости от условий работы всей системы в целом можно починить двигатель или поставить новый той же модели. Третий вариант: выбрать более современную версию двигателя. Принимая решение, вы должны обратить внимание на преимущества и недостатки каждого способа. Планирование действий при аварийной ситуации учитывает будущие изменения всей системы: ожидаемый срок службы, условия работы и внесенные изменения. Например, может быть не совсем разумно ставить новый двигатель, если вся система в скором времени морально устареет и, в любом случае, будет заменена.

Помните о необходимости всегда выполнять все три фазы: ситуационный анализ, определение причин возникновения проблемы (поиск неисправностей) и принятие решения (ремонт). Для того чтобы стать умелым экспертом необходимо понимать важность этой последовательности и не изменять ей.

3 Неисправности схем

Большинство людей хотели бы, чтобы электрические и электронные изделия были гарантированно предохранены от неисправностей, но, к несчастью, это невозможно. Вероятно, большинство поломок - прямо или косвенно - возникают в результате неправильного использования или неудовлетворительного технического обслуживание.

Электрические или электронные неисправности можно классифицировать по основным причинам их возникновения следующим образом:

- тепло;
- влага;
- грязь и загрязнения;
- ненормальное или излишнее перемещение;
- неправильная установка;
- производственные дефекты;
- животные и грызуны.

Когда электронные приборы подвергаются слишком сильному тепловому воздействию, то возникают проблемы. Тепло увеличивает сопротивление некоторых элементов схем, что в свою очередь приводит к возрастанию тока. Высокая температура заставляет материалы расширяться, высыхать, трескаться, вздуваться и изнашиваться гораздо быстрее, и, рано или поздно, устройство выйдет из строя.

Влага вызывает больший ток в цепях и может привести к поломке элементов. Вода и другие жидкости вызывает расширение, деформацию, ускоренный износ материалов и аномальный ток (короткие замыкания). Грязь, дым, испарения, абразивные материалы, сажа, жир, масла приводят к тому, что электронные устройства засоряются и покрываются липким налетом, начинают работать в ненормальном режиме и затем выходят из строя.

4 Метод последовательных приближений

Нахождение корней уравнения - это одна из древнейших математических проблем, которая не потеряла своей остроты и в наши дни: она часто встречается в самых разнообразных областях науки, техники и экономики.

Рассмотрим общеизвестное квадратное уравнение:

$$ax^2 + bx + c = 0. \tag{1}$$

Говорят, что значения

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2}$$

являются корнями этого уравнения, потому что для этих значений x уравнение удовлетворяется. В более общем случае, если имеется некоторая функция $F(x)$, то бывает необходимо найти такие значения аргумента x, для которых

$$F(x) = 0. \tag{3}$$

Функция $F(x)$ может быть алгебраической или трансцедентной, мы обычно будем предполагать, что она дифференцируема.

В общем случае функции, которые мы будем рассматривать, не имеют аналитических формул для своих корней в противоположность, например, квадратному уравнению. Поэтому приходится пользоваться приближенными методами нахождения корней, которые в основном состоят из двух этапов:

1) отыскание приближенного значения корня;

2) уточнение приближенного значения до некоторой заданной степени точности.

Мы не будем заниматься первым этапом и лишь кратко расскажем о нем. Очень часто приближенное значение корня бывает известно из физических соображений, в других случаях можно использовать графические методы. Кроме того, существуют специальные методы нахождения приближенного корня для того практически важного случая, когда $F(x)$ является полиномом.

В этом разделе будут в основном рассмотрены различные методы, относящиеся ко второму этапу - уточнению первоначального приближения. Численный метод, в котором производится последовательное, шаг за шагом, уточнение первоначального грубого приближения, называется *методом итераций.* Каждый шаг в таком методе называется *итерацией.* Если при последовательных итерациях получаются значения, которые все ближе и ближе приближаются к истинному значению корня, то говорят, что метод итераций *сходится.*

Сейчас мы рассмотрим несколько различных методов итераций для решения уравнений и исследуем, при каких условиях эти методы сходятся.

Предположим, что функция (3) переписана в виде:

$$x = f(x). \tag{4}$$

Это преобразование можно сделать различными путями. Например, если

$$F(x) = x^2 - c = 0, \tag{5}$$

где $c \geq 0$, то можно прибавить к правой и к левой частям x

$$x = x^2 + x - c\,, \tag{6}$$

или можно разделить все выражение на x и получить

$$x = \frac{c}{x}. \tag{7}$$

Наконец, можно преобразовать уравнение к следующему виду

$$x = x - \left(\frac{x^2 - c}{2x}\right) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right). \tag{8}$$

Очевидно, что значения *x,* являющиеся корнями этого уравнения, равны $\pm\sqrt{c}$.

Пусть x_0 будет исходным приближенным значением корня уравнения (4). Тогда в качестве следующего приближения примем:

$$x_1 = f(x_0). \qquad (9)$$

В качестве следующего приближения возьмем

$$x_2 = f(x_1). \qquad (10)$$

Продолжая этот процесс дальше, в качестве *n*-го приближения необходимо положить

$$x_n = f(x_{n-1}). \qquad (11)$$

Основной вопрос, который необходимо выяснить при пользовании этим методом, сходится ли x_n к решению уравнения (4) при возрастании n?

Мы выведем сейчас *достаточные* условия для сходимости метода, иными словами, выведем условия, которые являются гарантией того, что последовательные значения x_n будут приближаться к решению уравнения (4). Необходимо отметить, что эти условия *не являются необходимыми,* так как существуют функции, для которых эти условия не выполняются, но для которых тем не менее с помощью (8) можно найти их решения.

Рассмотрим сначала геометрическое представление процесса. При решении уравнения (4) отыскивается точка пересечения кривой $y = f(x)$ и прямой $y = x$. Рассмотрим рисунок 1, на котором изображена некоторая кривая $y = f(x)$. Кривая эта может представлять собой какую угодно функцию, но для нас сейчас важно, то обстоятельство, что производная этой кривой положительна и меньше 1, т.е. $0 < f'(x) < 1$. Пусть $x = a$ - значение x в точке пересечения; тогда a является корнем этого уравнения. Естественно, приступая к решению задачи, мы не знаем значения корня.

Зададимся некоторым x_0. Значение x_1 равно $f(x_0)$. Так как *OA* на рисунке 1 равно $f(x_0)$, то найти x_1 можно следующим образом: проведем через точку *A* горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$ в точке *B,* как показано на рисунке. Значение $x_2 = f(x_1)$ можно найти, проведя через точку *B* вертикальную линию до пересечения с кривой $y = f(x)$. При этом мы получаем отрезок ОС, равный $f(x_1)$, и проводя через точку С горизонтальную линию до пересечения с прямой $y = x$, получаем x_2. Процесс продолжается в том же порядке и дальше; на рисунке последовательность операций показана стрелками.

На рисунке 1 видно, как последовательные значения x сходятся к $x = a$. Важно помнить, что для рассмотрения мы взяли кривую, производная которой положительна и меньше 1.

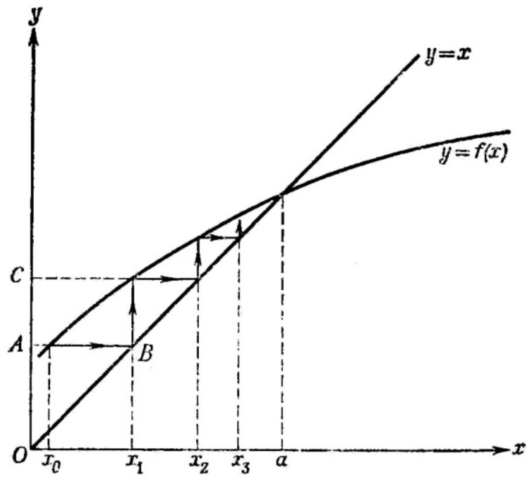

Рисунок 1 - Геометрическое представление метода последовательных приближений для $0 < f'(x) < 1$

Рассмотрим теперь другую кривую $y = f(x)$, производная которой отрицательна, но меньше 1 по абсолютной величине. Этот случай изображен на рисунке 2. Последовательные операции вычисления решения этого уравнения снова изображены стрелками; приближения опять сходятся к решению $x = a$. В противоположность тому, что имело место для функции с положительной производной (см. рисунок 1), на этот раз каждое последующее приближение находится с противоположной стороны от $x = a$. Для функции с положительной производной все последовательные приближения находились с одной стороны от истинного значения корня.

Наконец, рассмотрим случаи, когда производная функции больше 1 (рисунок 3) и меньше - 1 (рисунок 4). В обоих случаях метод расходится. Каждое последующее значение x отстоит дальше от истинного значения корня, чем предшествующее. Поэтому кажется обоснованным предположение, что итерации по формуле (8) сходятся при условии, что производная $f'(x)$ меньше 1 по абсолютной величине.

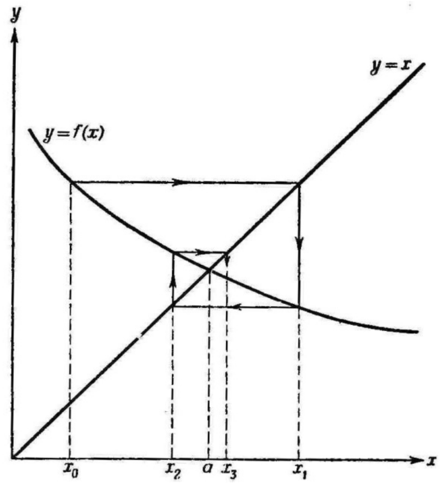

Рисунок – 2 Геометрическое представление метода последовательных приближений для $0 > f'(x) > -1$

Действительно, именно так и обстоит дело, и сейчас мы в этом убедимся с помощью элементарных выкладок. Заметим, что

$$a = f(a),$$
$$x_n = f(x_{n-1}), \tag{12}$$

так что

$$x_n - a = f(x_{n-1}) - f(a). \tag{13}$$

Умножая правую часть на $(x_{n-1} - a)/(x_{n-1} - a)$ и используя теорему о среднем значении, получаем

$$x_n - a = f'(\xi)(x_{n-1} - a), \tag{14}$$

где ξ лежит между x_{n-1} и a.

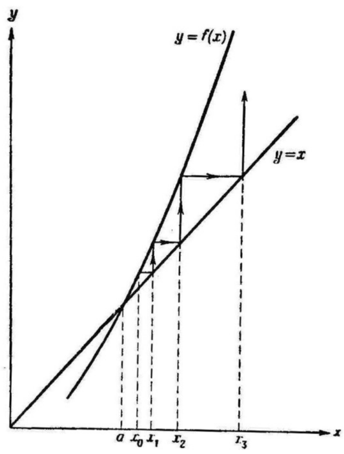

Рисунок 3 - Геометрическое представление метода последовательных приближений для $f'(x) > 1$

Теперь пусть m будет максимальным значением $f'(x)$ во всем рассматриваемом интервале, т. е. в интервале, включающем в себя $x_0, x_1, x_2, ..., x_n, a$. Тогда

$$|x_n - a| \le m|x_{n-1} - a|. \qquad (15)$$

Таким же образом получаем

$$|x_{n-1} - a| \le m|x_{n-2} - a|; \qquad (16)$$

и поэтому

$$|x_n - a| \le m^2|x_{n-2} - a|. \qquad (17)$$

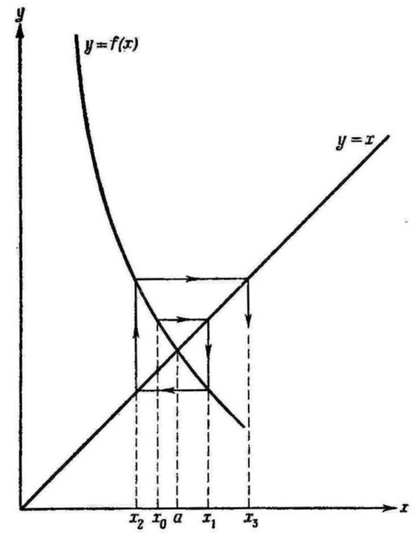

Рисунок 4 - Геометрическое представление метода последовательных приближений для $f'(x) < -1$

Продолжая те же выкладки, получаем

$$|x_n - a| \le m^n|x_0 - a|. \qquad (18)$$

Очевидно, что, если во всем интервале m<1, то независимо от выбора начального значения x_0 с возрастанием n правая часть неравенства становится малой и x_n сходится к a.

С другой стороны, для случая $|f'(x)|>1$ величина $|x_n - a|$ неограниченно возрастает с ростом n. Доказательство этого мы предоставляем читателям.

Таким образом, если $|f'(x)|<1$*, то процесс сходится, если же* $|f'(x)|>1$*, то процесс расходится*. Обратите внимание, что неравенства должны выполняться при *всех* значениях x_n, вычисляемых в ходе решения задачи.

Что произойдет в случае, когда производная $f'(x)$ в некоторых точках x_i меньше, а в других точках x_j больше 1 по абсолютной величине? Точного ответа на этот вопрос не существует, процесс иногда сходится, иногда расходится.

Вернемся к примеру, рассмотренному в начале раздела, где корнями уравнения являются $\pm\sqrt{c}$. В формуле (17)

$$f(x)=x^2+x-c\,, \tag{19}$$

так что $|f'(x)|<1$, если $-1<x<0$. В этом случае, если число c меньше 1, то процесс сходится к отрицательному значению корня.

С другой стороны, если воспользоваться формулой (4), то

$$f'(x)=-\frac{c}{x^2} \tag{20}$$

и при x, близких к $\sqrt{c}$ (как и должно быть при отыскании корня уравнения), $|f'(x)|$ становится почти равным 1; можно проверить, что процесс расходится.

Наконец, применяя формулу (5), получаем выражение для $f'(x)$ в виде

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{c}{x^2}\right). \tag{21}$$

В этом случае когда $x\approx\sqrt{c}$, то $f'(x)\approx 0$ и процесс очень быстро сходится.

Вообще говоря, хотя для всякого уравнения можно найти большое количество соответствующих ему функций f(x) в выражении (2), нужно с большой осторожностью подходить к их конкретному выбору, так как от него зависит сходимость метода итераций.

5 Усовершенствованный метод последовательных приближений

Рассмотрим рисунок 5. Нетрудно заметить, что, хотя каждое последующее значение x_n находится ближе к решению уравнения, чем предшествующее, все они сильно отличаются от a. По-видимому, можно было бы добиться более быстрой сходимости метода, если при каждой очередной итерации делать большую поправку к очередному значению x_n.

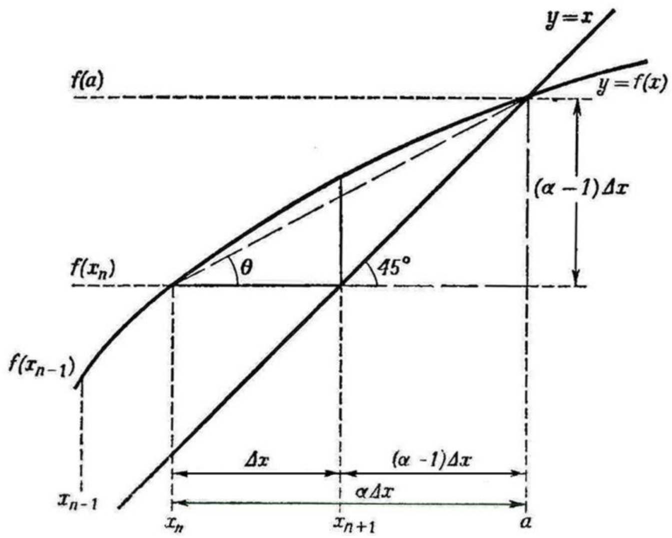

Рисунок 5 - Геометрическое представление усовершенствованного метода последовательных приближений для $0 < f'(x) < 1$

Иначе говоря, вместо того, чтобы полагать

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x, \tag{22}$$

где

$$\Delta x = f(x_n) - x_n, \tag{23}$$

можно принять следующую формулу для x_{n+1}:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha \Delta x_n, \tag{24}$$

где $\alpha > 1$.

Эта идея поясняется на рисунке 5, где в увеличенном виде изображена небольшая часть рисунка 1. Наилучшим выбором a следует признать тот, что изображен на рисунке, так как тогда x_{n+1} получается равным a. Попытаемся определить это наилучшее значение α.

Заметим, что расстояние между x_{n+1} и a равно $(\alpha-1)\Delta x$, и так как $y=x$ есть прямая линия, идущая под углом 45° к осям координат, расстояние между $f(a)$ и $f(x_n)$ также равно $(\alpha-1)\Delta x$. Поэтому тангенс угла θ равен

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(\alpha-1)\Delta x}{\alpha\Delta x} = \frac{\alpha-1}{\alpha}. \quad (25)$$

С другой стороны,

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{f(a)-f(x_n)}{a-x_n} \quad (26)$$

и, используя теорему о среднем значении,

$$\operatorname{tg}\theta = f'(\xi), \quad (27)$$

где $x_n \le \xi \le a$.

Из уравнения (25) и уравнения (27) получаем значение a в виде

$$\alpha = \frac{1}{1-f'(\xi)}. \quad (28)$$

Значение ξ, конечно, остается неизвестным, но для значения $f'(\xi)$ можно принять следующее приближение:

$$f'(\xi) \approx \frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} = \frac{f(x_n)-x_n}{x_n - x_{n-1}}. \quad (29)$$

Геометрически процесс отыскания следующего приближения, x_{n+1}, сводится к тому, что проводится хорда между точками $(x_n, f(x_n))$ и $(x_{n-1}, f(x_{n-1}))$ и определяется точка ее пересечения с прямой $y=x$.

Формула итерационного метода приобретает при этом следующий вид:

$$x_{n+1} = x_n + \alpha(f(x_n)-x_n), \quad (30)$$

где α определяется по формулам (28) и (29).

Возникает вопрос, как это усовершенствование влияет на сходимость метода. Из формулы (28) видно, что при $0 < f'(x) < 1$ должно получиться $1 < \alpha < \infty$. Этот случай изображен на рисунке 1, где последовательные поправки были слишком малы, так как $\alpha > 1$, усовершенствованный метод увеличит эти поправки и ускорит сходимость вычислений.

При $-1 < f'(x) < 0$ имеем $1/2 < \alpha < 1$. Этот случай изображен на рисунке 5, где каждая поправка также была слишком велика. В усовершенствованном методе все поправки уменьшаются на коэффициент, расположенный между 1/2 и 1, сходимость метода при этом, естественно, также улучшается.

Более важны случаи, когда простой метод последовательных приближений расходится. Если $f'(x) < 1$, то $\alpha < 0$. Как показано на рисунке 3, каждая очередная поправка имеет неправильный знак и соответствующее приближение отстоит от α дальше, чем предыдущее. Так как α для этого случая отрицательно, то в усовершенствованном методе знаки поправок изменяются нужным образом.

Наконец, при $f'(x) < -1$ имеем $0 < \alpha < 1/2$. В этом случае, как показано на рисунке 4, поправки были слишком велики, при усовершенствованном методе каждая поправка умножается на коэффициент, расположенный между 0 и 1/2. Естественно, что уменьшение поправок должно быть в этом случае более резким, чем на рисунке 2, где приближения сходятся, в то время как на рисунке 4 они расходятся.

Описанная модификация метода принадлежит Вегстейну. Процессы экстраполяции и интерполяции характерны для итерационных методов.

Небольшая дальнейшая модификация метода последовательных приближений приводит к одному из наиболее известных численных методов – к методу Ньютона-Рафсона для нахождения корней уравнения. Однако в некоторых случаях методы, описанные выше, предпочтительнее метода Ньютона – Рафсона. К этому вопросу мы вернемся в разделе 6 после того, как рассмотрим метод Ньютона – Рафсона.

6 Метод Ньютона – Рафсона

Вспомним, что в формуле (29) мы заменяли производную разностью. Вспомним также, что оптимальное значение ξ лежало в интервале $x_n \le \xi \le a$.

Предположим, что для простоты вычислений мы выбрали $\xi = x_n$. Тогда формула (28) приобретает следующий вид:

$$\alpha = \frac{1}{1 - f'(x_n)}, \tag{31}$$

x_{n+1} находим из формулы

$$x_{n+1} = \frac{f(x_n) - x_n f'(x_n)}{1 - f'(x_n)}. \tag{32}$$

Нетрудно видеть, что формула (32) эквивалентно простому методу последовательных приближений

$$x_{n+1} = g(x_n), \tag{33}$$

где

$$g(x) = \frac{f(x) - xf'(x)}{1 - f'(x)}. \tag{34}$$

Вспомним также, что если $|g'(x)| < 1$, то метод сходится. Для $g'(x)$ имеем

$$g'(x) = \frac{f''(x)\,[f(x) - x]}{[1 - f'(x)]^2}. \tag{35}$$

Но поскольку $f(x)$ подчиняется соотношению (2), то для x, достаточно близких к a, выражение в скобках становится малым. Поэтому итерационный метод, описываемый формулой (32), сходится, если:

1) x_0 выбрано достаточно близко к решению $x = f(x)$;

2) производная $f''(x)$ не становится слишком большой;

3) производная $f'(x)$ не слишком близка к 1.

Это и есть знаменитый метод Ньютона - Рафсона. Обычно его записывают в более привычной форме

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \tag{36}$$

где

$$F(x) = f(x) - x = 0. \tag{37}$$

Таким образом, мы возвращаемся к уравнению в форме (1), и условия сходимости принимают следующий вид:

1) x_0 выбрано достаточно близко к корню уравнения $F(x) = 0$;

2) производная $F''(x)$ не становится очень большой;

3) производная $F'(x)$ не слишком близка к нулю.

Последнее условие означает, что никакие два корня не находятся слишком близко один к другому. В следующем разделе мы вернемся к этому вопросу.

Рассмотрим геометрическое толкование метода Ньютона - Рафсона. В формуле (31) мы выбрали точку ξ совпадающей с x_n. На рисунке 5 это соответствует тому, что угол θ равен углу наклона касательной к $y = f(x)$ в точке $x = x_n$. Нахождение следующего приближения сводится при этом к тому, что проводится касательная к кривой $y = f(x)$ в точке $x = x_n$ и отыскивается точка ее пересечения с прямой $y = x$. Эта точка и будет новым приближением x_{n+1}. Чтобы найти $f(x_{n+1})$, через значение x_{n+1} проводится вертикальная линия. После этого проводится новая касательная, точка пересечения которой с прямой $y = x$ даст значение

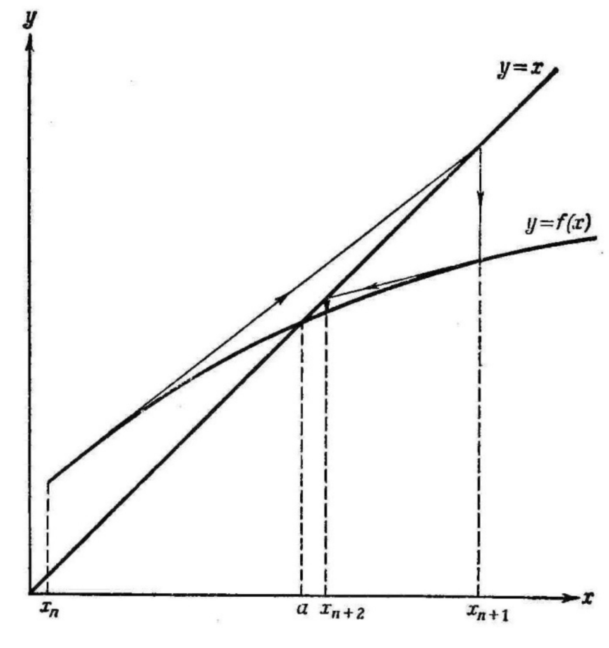

Рисунок 6 - Геометрическое представление метода Ньютона – Рафсона для $f(x) = x$

Последовательность операций показана на рисунке 6, где изображен случай $0 < f'(x) < 1$.

Заметим, что теперь сходимость гораздо лучше, чем для простого метода последовательных приближений, изображенного на рисунке 1. Такая быстрая сходимость типична для метода Ньютона - Рафсона, так как величина $g'(x)$ очень мала.

Если уравнение задано в форме (1) и используется итерационная формула (37), то геометрически можно представить себе ход вычислений по рисунку 7. В этом случае отыскивается точка пересечения кривой $y = F(x)$ с осью x. Исходя из некоторого начального приближения x_n, находим соответствующее ему значение $F(x_n)$, проводим касательную к кривой $y = F(x)$ и ищем точку пересечения этой касательной с осью x. Легко видеть, что эта точка и будет значением x_{n+1} из формулы (37), так как там и требуется провести через точку с координатами x_n, $F(x_n)$ прямую с угловым коэффициентом $F'(x_n)$ и затем найти ее пересечение с осью x.

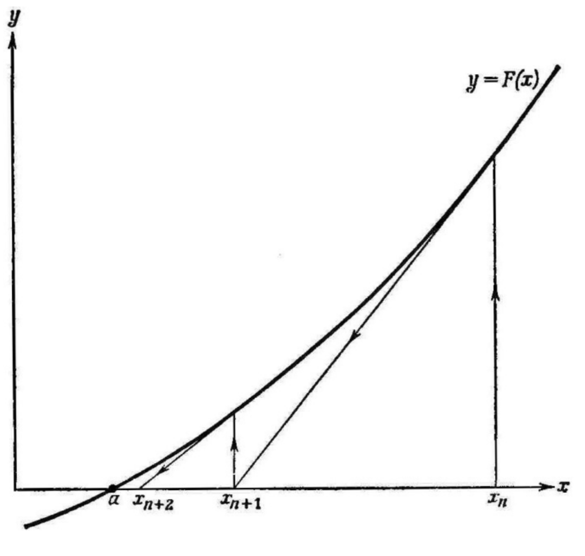

Рисунок 7 - Геометрическое представление метода Ньютона - Рафсона для $F(x) = 0$

7 Случай почти равных корней

Мы уже указывали, что при решении уравнений методом Ньютона - Рафсона могут возникнуть трудности в том случае, если уравнения (1) или (2) имеют пары близко расположенных корней. В этом случае условие сходимости метода нарушается вблизи такой пары корней. Соответствующая ситуация проиллюстрирована на рисунке 8 (масштаб сильно увеличен). Заметим, что производная $f'(x)$ близка к 1 при x, равном обоим значениям корней a_1 и a_2. Более того, на основании теоремы о среднем значении, можно утверждать, что $f'(x)$ равна 1 где-то между a_1 и a_2.

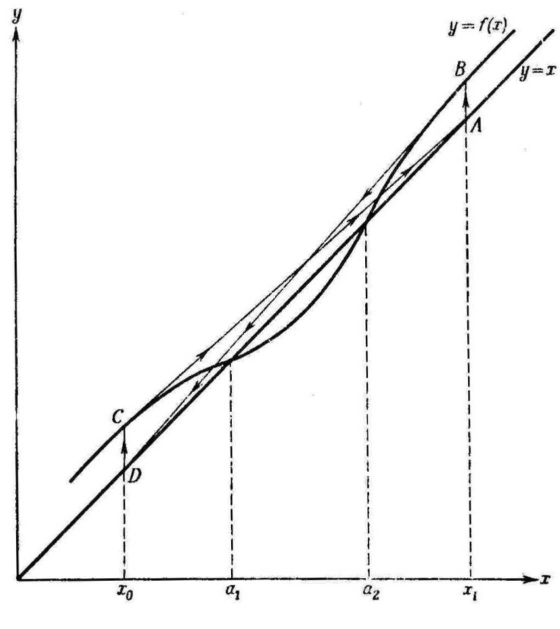

Рисунок 8 - Геометрическое представление того случая, когда с помощью метода Ньютона - Рафсона нельзя определить значение корня ($f'(x)$ близка к 1)

Рассмотрим, что случится, если принять x_0 в качестве исходного значения для корня a_1. Касательная, проведенная через точку C, пересечет прямую $y = x$ в точке A, и следующее приближение будет равно x_1. Касательная, проведенная через точку B, пересекает прямую $y = x$ в точке D, и в качестве следующего приближения снова получается x_0.

Итерационный процесс, таким образом, осциллирует между x_0 и x_1 до бесконечности, не сходясь ни к одному значению корня. Другими словами, не удается отделить эти два корня, потому что они расположены слишком близко один к другому. Конечно, мы вправе сказать в этом случае, что нарушено условие сходимости метода и что начальное значение x_0 было недостаточно близко к a_1.

Это утверждение совершенно верно. Поэтому мы попытаемся разработать метод, с помощью которого можно было бы найти начальное приближение, достаточно близкое к искомому значению корня. Трудности возникают потому, что вычисление знаменателя в формуле (33) включает в себя вычитание двух почти равных чисел, а мы уже неоднократно убеждались, что такое вычитание приводит к снижению точности.

Натаниель Мейкон предложил метод, согласно которому сначала находится значение x, при котором $f'(x)=1$, т. е. решается уравнение:

$$x = x + f'(x) - 1. \tag{38}$$

Пусть решением этого уравнения будет некоторое $x=\bar{x}$. Эта точка расположена между двумя корнями, a_1 и a_2. Чтобы получить начальное приближение для решения уравнения, предположим, что $\bar{x}$ лежит посредине между a_1 и a_2. (Этот случай изображен на рисунке 9.) Другими словами, мы предполагаем, что $\bar{x}+d$ и $\bar{x}-d$ являются корнями уравнения (2). Разлагая $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $\bar{x}$ и замечая, что $f'(x)=1$, получаем

$$f(x) = f(\bar{x}) + (x-\bar{x}) + \frac{1}{2} f''(\bar{x})(x-\bar{x})^2 + \ldots \;. \tag{39}$$

Как показано, мы ограничиваем ряд тремя членами. Подставляя $\bar{x}+d$ вместо x, имеем

$$f(\bar{x}+d) = f(\bar{x}) + d + \frac{1}{2} f''(\bar{x}) d^2 . \tag{40}$$

Но по условию

$$f(\bar{x}+d) = \bar{x} + d \,, \tag{41}$$

поэтому, решая эти уравнения относительно d, получаем

$$d = \sqrt{\frac{2(\bar{x} - f(\bar{x}))}{f''(\bar{x})}} . \tag{42}$$

Не воспроизводя выкладки, скажем также, что если уравнение задано в форме (1)

$$F(x) = 0, \tag{43}$$

то для d получаем

$$d = \sqrt{\frac{-2F(\bar{x})}{F''(\bar{x})}} , \tag{44}$$

так как приходится решать уравнение $F'(x) = 0$. Рассматривая рисунок 8, читатель может легко убедиться в том, что величина под корнем положительна.

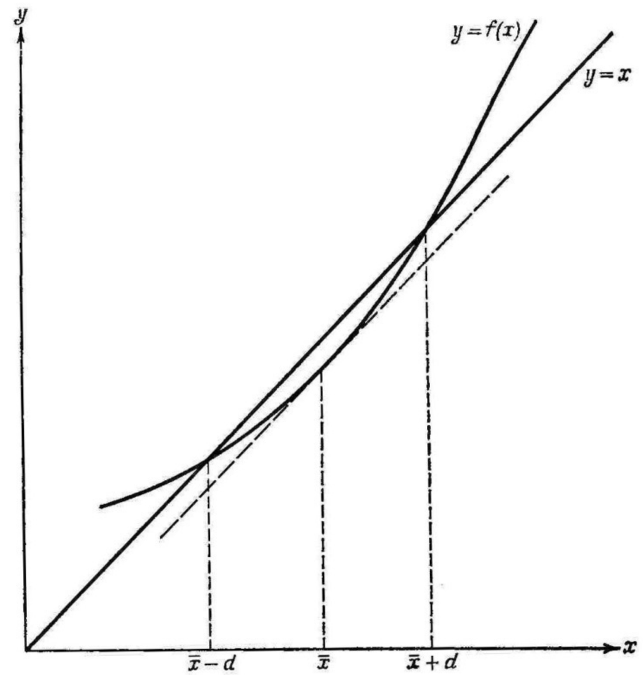

Рисунок 9 - Геометрическое представление усовершенствованного метода Ньютона - Рафсона для $f'(x)$, близкой к 1

Процесс решения уравнения сводится теперь к следующему. Если дано уравнение с двумя почти равными корнями, то, определив приблизительно местонахождение этих корней, необходимо решить уравнение и определить значение x.

$$x = x + f'(x) - 1 \tag{45}$$

Для решения этого уравнения можно использовать любой подходящий метод, например, метод Ньютона – Рафсона. Найдя значение x, можно определить значение d. Наконец, значения $\bar{x}-d$ и $\bar{x}+d$ используются в качестве начальных приближений для определения соответственно a_1 и a_2.

Конечно, и в этом случае можно не суметь отделить корни, если $f''(x)$ близко к нулю. Это означает, что уравнение $f'(x)=1$ имеет более, чем один корень вблизи x. В этом случае сначала необходимо найти решение уравнения $f''(x)=0$. Интересующийся читатель может найти необходимые сведения в книге Н. Мейкона.

8 Сравнение методов и их ошибок округления

Так как метод Ньютона - Рафсона сходится гораздо быстрее, чем метод последовательных приближений, возникает вопрос, почему все же используется и тот и другой. Дело в том, что при использовании метода Ньютона - Рафсона при каждой очередной итерации требуется вычислять не только функцию, но и ее производную. Эти вычисления могут оказаться трудными, длительными или даже вообще невозможными. Например, функция $f(x)$ может быть задана не формулой, а таблицей значений. Производная может даже не существовать в некоторых точках. В таких случаях часто применяется метод последовательных приближений или различные его модификации.

Другими словами, выбор метода зависит от конкретного вида функции $f(x)$ или $F(x)$.

Интересно и важно отметить тот факт, что ошибка округления не накапливается при использовании итерационных методов решения уравнений. Общая ошибка округления равна ошибке, возникшей в последней итерации, и не зависит от арифметических операций, выполнявшихся в предыдущих итерациях. Это общее свойство всех итерационных методов; оно является одним из важнейших преимуществ итерационных методов перед всеми другими. Причина того, что ошибки округления не накапливаются, ясна – каждое новое приближение, включая и предпоследнее, можно рассматривать как исходное приближение. Ошибка округления при вычислении последнего приближения зависит, таким образом, только от арифметических операций, с помощью которых это последнее приближение получается из предпоследнего.

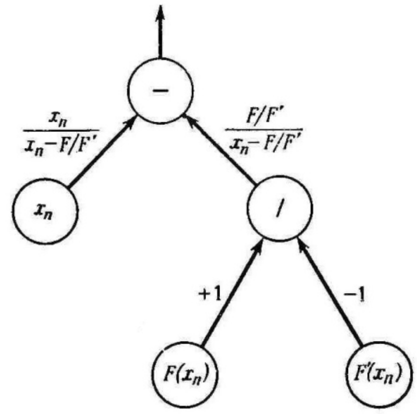

Рисунок 10 - Граф вычислительного процесса для метода Ньютона - Рафсона

Граф вычислительного процесса для метода Ньютона – Рафсона изображен на рисунке 10. Исходная ошибка в x_n отсутствует можно считать, что x_n представляется в виде бесконечной десятичной дроби, которая содержит одни нули, начиная с некоторой цифры. При вычислении $F(x_n)$ и $F'(x_n)$ появляются относительные ошибки округления; назовем их соответственно r и r'. Обозначим относительную ошибку округления при делении и при вычитании соответственно через d и s. Тогда абсолютная ошибка округления при вычислении x_{n+1} будет равна

$$e = \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}(r - r' + d) + s \qquad (46)$$

В большинстве случаев общая ошибка определяется неточностью r и r' при вычислении $F(x_n)$ и $F'(x_n)$.

Список использованных источников

1 Неразрушающий контроль и диагностика : справочник / под ред. В.В.Клюева. – М. : Машиностроение, 2005. – 490 с.

2 Неразрушающий контроль металлов и изделий : справочник / под ред. Г.С. Самойловича. – М. : Машиностроение, 2004. – 456 с.

3 Политехнический словарь / гл. ред. И.И. Артоболевский. – М. : Советская энциклопедия, 2008. – 607 с.

4 РД 03-606–03. Инструкция по визуальному и измерительному контролю. – М. : Из-во государственного унитарного предприятия «Научно-технический центр по безопасности в промышленности Госгортехнадзора России», 2003. – 101 с.

5 Воронкин, Ю.Н. Методы профилактики и ремонта промышленного оборудования / Ю.Н. Воронкин, Н.В. Поздняков. – М. : Академия, 2002.-240с.

6 Кормильцин, Г.С. Основы монтажа и ремонта технологического оборудования / Г.С. Кормильцин, О.О. Иванов. – Тамбов : Изд-во ТГТУ, 2001. – 87 с.