

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

В.П. АПСИН, Е.В. БОНДАРЕНКО, В.И. РАССОХА

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ НАДЕЖНОСТИ И ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальностям 190702 «Организация и безопасность движения» направления подготовки дипломированных специалистов 653400 «Организация перевозок и управление на транспорте», 190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство», 190603 «Сервис транспортных и технологических машин оборудования (автомобильный транспорт)» направление подготовки дипломированных специалистов 653300 «Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования».

Оренбург 2008

УДК 656.1/.5(075.8)

ББК 39.33-08я73

A77

Рецензент

доцент, кандидат технических наук А.Н. Мельников

Апсин В.П.

A77 Специальные главы надежности и основы планирования экспериментов: учебное пособие / В.П. Апсин, Е.В. Бондаренко, В.И. Рассоха. – Оренбург: ИПК ГОУ ВПО ОГУ, 2008. – 133с.

ISBN

Изложены методы прикладной теории надежности автомобилей и их составных частей. Приведены методы расчета и прогнозирования показателей надежности составных частей автомобилей на этапах производства и эксплуатации, по планированию экспериментов и проведению инженерных наблюдений. Большое внимание уделено использованию изложенных методик в практике решения инженерных задач.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 190702 «Организация и безопасность движения» направления подготовки дипломированных специалистов 653400 «Организация перевозок и управление на транспорте», 190601 «Автомобили и автомобильное хозяйство» и 190603 «Сервис транспортных и технологических машин и оборудования (автомобильный транспорт)» направления подготовки дипломированных специалистов 653300 «Эксплуатация наземного транспорта и транспортного оборудования».

A 3203010000

ISBN

© Апсин В.П.,
Бондаренко Е.В.,
Рассоха В.И., 2008
© ГОУ ОГУ, 2008

Содержание

Введение.....	4
1 Специальные главы надежности.....	5
1.1 Связь надежности с экономичностью.....	5
1.2 Модель изменения надежности изделия в период отработки и производства.....	6
1.3 Прогнозирование надежности конструкции в процессе эксплуатации	13
1.4 Прогнозирование характеристик конструкции методом марковской аппроксимации.....	14
1,5 Прогнозирование наработки методом канонического разложения случайного процесса.....	19
1.6 Универсальный комплексный показатель ремонтпригодности.....	27
1.7 Прогнозирование показателей ремонтпригодности на этапе проектирования.....	31
1.8 Расчет метода структурных схем надежности сложных систем.....	45
1.9 Контрольные вопросы.....	55
2 Основы планирования эксперимента.....	57
2.1 Основные понятия и определения.....	57
2.2 Выбор параметров оптимизации, факторов и уровней их варьирования.....	58
2.3 Математическая модель объекта исследования.....	60
2.4 Ранжирование факторов.....	61
2.5 Методы экспериментального отсеивания факторов.....	71
2.5.1 Метод случайного баланса.....	71
2.5.2 Исследование факторов методами дисперсионного анализа.....	82
2.6 Полный факторный эксперимент.....	89
2.7 Исследование объектов методом пассивных экспериментов.....	99
2.8 Контрольные вопросы.....	112
Список использованных источников.....	114
Приложение А.....	115

Введение

Надежность автомобилей закладывается на этапе проектирования, обеспечивается в процессе производства и поддерживается на заданном уровне во время эксплуатации и имеет комплексный характер, вызывающий необходимость решения ряда научно-технических проблем. В проблеме надежности можно выделить два направления: обеспечение надежности и ее расчет. Первое направление основано на традиционных конструкторских и технологических методах создания высококачественных автомобилей и их составных частей, где формируется потенциальная работоспособность и технико-экономические показатели и правила их эксплуатации. Второе направление связано с привлечением специальных математических методов.

К настоящему времени оба направления в основе слиты, что позволило перенести продуктивные идеи из одной области в другую и на этой основе сформировать науку о надежности машин.

Однако прикладные инженерные методы расчета надежности на этапе проектирования и прогнозирования эксплуатационных свойств, особенно методического обеспечения, изложены недостаточно. Это относится также к учебной литературе.

Учебное пособие написано по материалам лекций и опыта подготовки инженеров на Транспортном факультете Оренбургского государственного университета.

В первом разделе пособия рассматриваются задачи, решение которых формирует у студентов знания о связи надежности с экономичностью, определением надежности изделия в период отработки и производства, прогнозирования показателей ремонтпригодности на этапе проектирования изделия на основе использования показателей его конструктивно-технологических особенностей; формирование математической модели универсального комплексного показателя ремонтпригодности.

В силу стохастической природы надежности при изложении отдельных задач используются математические модели, главным образом, теория случайных процессов и теория вероятностей. Использование математических методов позволяет решать ряд задач надежности: выявлять факторы, определяющие показатели надежности; устанавливать математические модели между факторами и выходными параметрами изделия; нормировать и прогнозировать показатели надежности.

Во втором разделе изложены основные методы планирования экспериментов, статистический анализ результатов испытания. Подробно изложены методы: априорного ранжирования факторов, экспериментального отсеивания факторов, проведения активных и пассивных экспериментов. Для уяснения сущности каждого из методов приводятся примеры их использования.

1 СПЕЦИАЛЬНЫЕ ГЛАВЫ НАДЕЖНОСТИ

1.1 Связь надежности с экономичностью

При обеспечении требуемого уровня надежности необходимо исходить из получения наибольшей суммарной экономической эффективности с учетом затрат на разработку, производство и эксплуатацию и положительного эффекта от использования автомобиля по назначению.

Затраты C_H на создание автомобиля включают затраты на проектирование, материалы, производство, опытную отработку и другие статьи. Затраты $C_э$ связаны с потреблением трудовых и материальных ресурсов на поддержание и восстановление работоспособности автомобиля в эксплуатации, которые по мере увеличения наработки растут. Сумма затрат $C_H+C_э$ в балансе эффективности (рисунок 1.1) является отрицательной. В то же время использование автомобиля приносит положительную эффективность C_p . Суммарная эффективность использования автомобиля определяется выражением

$$C(t)=C_H+C_э(t)+C_p(t). \quad (1.1)$$

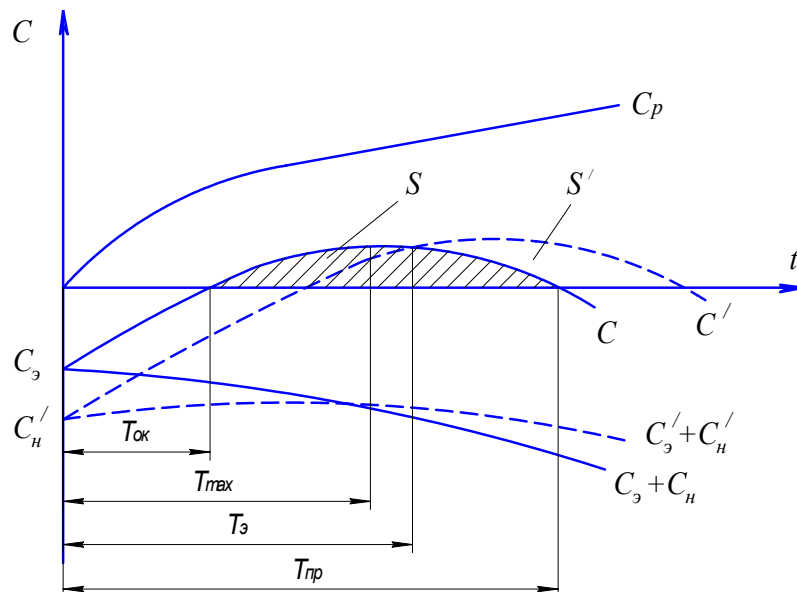


Рисунок 1.1 - Зависимость экономической эффективности изделия во времени

В момент наработки $T_{ок}$ (срок окупаемости) затраты на создание автомобиля и эксплуатационные издержки окупаются. С этого момента дальнейшее использование автомобиля дает положительный эффект $[C(t)>0]$. Этот показатель по мере увеличения наработки снижается и в момент времени $t=T_{пр}$ $C(t)=0$. Это объясняется дальнейшим увеличением эксплуатационных издержек. При $t>T_{пр}$ величина $C(t)<0$.

Экономическая целесообразность использования автомобилей определяется условием $T_{\max} < T_3 < T_{\text{пр}}$, где T_{\max} – наработка, при которой эффективность использования автомобиля максимальна.

Экономическая целесообразность использования автомобиля определяется площадью под кривой S на интервале от $T_{\text{ок}}$ до $T_{\text{пр}}$.

Повышение надежности автомобиля сопряжено с увеличением начальных затрат C'_H (применение материалов с повышенными физико-механическими свойствами, введение дополнительного резервирования, повышение ремонтной технологичности и т.д.), что приводит к снижению эксплуатационных издержек C'_3 за счет уменьшения числа ремонтов и восстановлений, увеличения периодичности технического обслуживания и др. Повышение надежности приводит к увеличению суммарной эффективности, срока окупаемости и времени T_3 экономически целесообразной эксплуатации автомобиля. Целесообразность повышения надежности оправдывается, при $S' > S$. Таким образом, повышение и обеспечение надежности экономическая эффективность должна быть основным критерием при конструктивном исполнении конструкции и при разработке системы ее технического обслуживания и ремонта.

1.2 Модель изменения надежности изделия в период отработки и производства

В процессе отработки конструкции изделия надежность обеспечивается доработкой ее в процессе серии испытаний. После проведения каждого испытания результаты могут быть как положительными, так и отрицательными, т.е. отказными. Полученная информация о состоянии изделия используется для разработки мероприятий по повышению уровня надежности. Процесс доработки является целенаправленным, а по своей природе – случайным. Ход отработки связан с последовательностью испытаний (событий) $j=1,2,\dots,N$. Поэтому целесообразно рассматривать дискретную функцию надежности, которая зависит от номера испытаний $P(j)=P_j$.

Обозначим вероятность успешного исхода в j -м испытании через P_j , а через Π_1 и Π_2 – вероятности проведения доработок после успешного исхода и отказа соответственно. После проведения любого испытания могут наступить два несовместимых события: проведение или отсутствие доработки. Вероятность отсутствия доработки после успешного испытания равна $1-\Pi_1$, а после отказа – $(1-\Pi_2)$. Приращение надежности за счет доработок после положительного исхода обозначим через ΔP_{1j} , а после отказа ΔP_{2j} .

В соответствии с этим прирост надежности определяется линейными операторами:

$$\Delta P_{1j} = a_{1j}(1-P_{j-1}) - b_{1j}P_{j-1} \quad (1.2)$$

и

$$\Delta P_{2j} = a_{2j}(1-P_{j-1}) - b_{2j}P_{j-1} \quad (1.3)$$

где a_{1j} и a_{2j} – коэффициенты, характеризующие эффективность доработки;
 b_{1j} и b_{2j} – коэффициенты, характеризующие отрицательный результат доработки (уменьшение достигнутой к j -му испытанию надежности P_{j-1}).

При известных моментах выполнения доработки вместо двух операторов (1.2) и (1.3) можно использовать только один оператор изменения надежности после i -й доработки

$$\Delta P_i = a_i(1 - P_{i-1}) - b_i P_{i-1}, \quad (1.4)$$

где a_i и b_i – коэффициенты, отражающие эффективность i -й доработки.

Используя допущения, что $a_i = c_i a$ и $b_i = c_i b$ оператор (1.4) принимает вид:

$$\Delta P_i = c_i a(1 - P_{i-1}) - c_i b P_{i-1}, \quad (1.5)$$

где c_i – число причин отказов, устраняемых в одной доработке (определяется после проведения испытаний);

a , b – постоянные коэффициенты, характеризующие эффективность устранения причин отказов в ходе отработки.

Искомая функция зависит от трех параметров:

$$P_i = P(P_0, a, b, i) \quad (1.6)$$

где P_0 – начальное значение показателя надежности.

Функция P_i при условии, что при доработке показатель надежности увеличивается дискретно, имеет вид:

$$P_i = P_0 + \sum_{i=1}^k \Delta P_i, \quad (1.7)$$

где k – число доработок ($i=1, 2, \dots, k$)

После подстановки оператора (1.5) в формулу (1.7), полагая $A = a + b$ и $P_{пр} = \frac{a}{a + b}$, после преобразования получим:

$$P_i = P_{пр} - (P_{пр} - P_{i-1})(1 - A \cdot c_i) \quad (1.8)$$

где $P_{пр}$ – предельное значение показателя надежности.

На основании формулы (1.8) составляем ряд последовательностей значений P_i , который в итоге имеет вид:

$$P_i = P_{np} - (P_{np} - P_0) \prod_1^i \left(1 - \frac{Ac_i}{P_{np}} \right) \quad (1.9)$$

При одинаковом числе причин отказов, устраняемых в каждой доработке уравнение (1.9) упрощается.

$$P_i = P_{np} - (P_{np} - P_0) \left(1 - \frac{ac}{P_{np}} \right)^i. \quad (1.10)$$

$$P_i = P_{np} - (P_{np} - P_0) e^{\Delta_i}, \quad (1.11)$$

где $\Delta_i = 1_n \left(1 - \frac{ac}{P_{np}} \right)$ – среднее увеличение вероятности безотказной работы за счет одной доработки.

Функция (1.11) описывается изменение надежности в процессе доработок при неизвестных параметрах P , P_{np} , a и c_i , что осложняет её решение.

Задача статистической оценки функции может быть решена при установлении закона распределения оценок P_i^* для всех $i=1,2,\dots,k$. При нормальном законе распределения:

$$P_i^* = P_{np}^* - (P_{np}^* - P_0^*) \prod_1^k \left(1 - \frac{a^* c}{P_{np}^*} \right). \quad (1.12)$$

Доверительные оценки границы в каждом сечении:

$$P_i^* - u_j \sigma_i < P_i < P_i^* + u_j \sigma_i, \quad (1.13)$$

где u_j – квантиль нормального распределения при уровне значимости γ ;
 σ_i – среднее квадратичное отклонение оценки P_i^* .

Сущность инженерной методики определения оценок заключается в следующем. Пусть число испытаний между $(i-1)$ и i -ой доработками составляет n_i ; число отказов в n_i испытаниях – m_i ; число устраняемых причин отказов в i -ой доработке – c_i . Задача определения оценок a^* и P^* заключается в определении таких параметров функции (1.9), при которых значения функции (1.12) адекватны экспериментальным оценкам $P_i^* = \frac{m_i}{n_i}$. Наиболее распространенным

случаем является ситуация когда значение мало и часто $p_i=1$. В этом случае опытные значения P^* будут равны 0 или 1. Для решения задачи оценок a^* , P^* и $P_{пр}^*$ рекомендуется использовать метод максимума правдоподобия. Задача решается следующим образом.

Так как $P_{пр}^* \approx 1$, то принимается $P_{пр}^* = 1$. Оценка P_{oi}^* определяется по результатам первых $e=5 \dots 10$ испытаний. С учетом этого можно записать:

$$P_{oi}^* = 1 - \frac{m_i}{e}, \quad (1.14)$$

где m_i – число отказов в первых e испытаниях.

Для оценки a^* используют последние $Z=5 \dots 10$ испытаний:

$$P_{ni}^* = 1 - \frac{m_Z}{Z}, \quad (1.15)$$

где m_Z – число отказов в последних Z испытаниях.

Среднее значение числа устраняемых причин c^* отказов в одной доработке составляет:

$$c^* = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k c_i \quad (1.16)$$

Значение коэффициента a^* , характеризующего эффективность устранения причин отказов, определяется по формуле:

$$a^* = \frac{1}{c^*} \left[1 - \left(\frac{1 - P_{nz}^*}{1 - P_{oi}^*} \right)^{\frac{1}{k}} \right]. \quad (1.17)$$

Оценка среднего квадратичного отклонения составляет:

$$\sigma_{p^*} = (0,8 \dots 0,9) \sqrt{\frac{P_{nz}^* (1 - P_{nz}^*)}{n}}, \quad (1.18)$$

где P_n^* - оценка в сечении $i=n$.

Пример. В результате обработки конструкции на надежность, получены исходные данные, представленные в таблице 1.1. Определить кривую роста надежности по результатам доработок.

Таблица 1.1 – Исходная информация по результатам обработки конструкции на надежность

Наименование	Показатели по результатам доработок															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Номер i-ой доработки																
Число n_i испытаний	2	1	1	2	1	1	1	2	1	1	1	2	1	1	3	1
Число m_i отказов	2	0	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
Число c_i устраняемых отказов	0	1	2	4	1	2	1	3	1	6	2	1	1	2	1	1

$$\text{Общее число испытаний } n = \sum_1^k n_i = 22.$$

$$\text{Общее число отказов } m = \sum_1^k m_i = 10.$$

$$\text{Общее число доработок } k = \sum_1^k i = 15.$$

Среднее число устраняемых причин отказов в одной доработке:

$$c^* = \frac{1}{k} \sum_1^k c_i = \frac{29}{15} = 1,87 \dots$$

Оценка приближения по первым шести испытаниям ($e=6$):

$$P_{oi}^* = 1 - \frac{m_i}{e} = 1 - \frac{4}{6} = 0,33.$$

Оценка приближения по последним шести испытаниям:

$$P_{nz}^* = 1 - \frac{m}{z} = 1 - \frac{2}{6} = 0,67.$$

С учетом вычисленных значений P_{oi}^* и P_{nz}^* по формуле (1.17) получаем:

$$a^* = \frac{1}{1,87} \left[1 - \left(\frac{1-0,67}{1-0,33} \right)^{\frac{1}{15}} \right] = 0,33.$$

Функция роста надежности имеет вид:

$$P_i^* = 1 - (1 - P_{oi}^*) \prod (1 - a^* c_i). \quad (1.19)$$

Для каждого i -го сечения можно записать:

$$\sigma_{P_i^*} = 0,85 \sqrt{\frac{P_i^*(1 - P_i^*)}{n_i}}. \quad (1.20)$$

При заданной доверительной вероятности $\gamma=0,9$ нижняя граница вероятности безотказной работы:

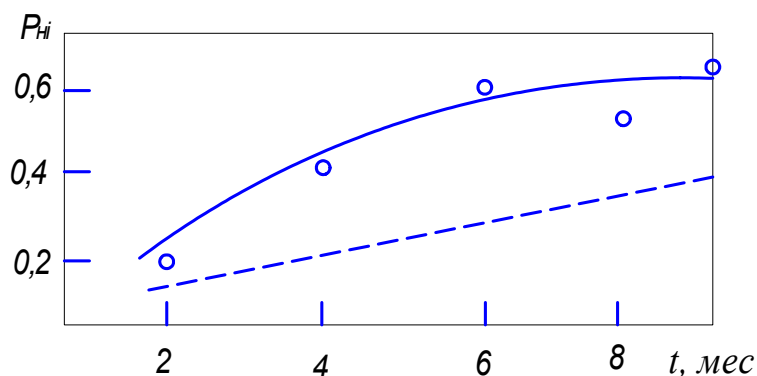
$$P_{Hi} = P_i - u_j \sigma_j. \quad (1.21)$$

Результаты расчета P_{Hi} и P_i^* представлены в таблице 1.2.

Таблица 1.2. – Результаты расчета P_{Hi} и P_i^*

Показатель	i							
	0	2	3	6	8	10	12	14
c_i	0	3	8	10	14	22	24	27
$\sigma_{P_i^*}$	0,28	0,24	0,16	0,14	0,10	0,09	0,09	0,07
P_i^*	0,33	0,39	0,47	0,50	0,56	0,65	0,67	0,70
P_{Hi}	0	0,08	0,26	0,32	0,40	0,53	0,75	0,83

Изменение вероятности безотказной работы изделия показано на рисунке 1.2.



- нижняя граница вероятности безотказной работы;
- нижняя доверительная зависимость роста надежности;
- o – экспериментальные значения

Рисунок 1.2 – Изменение нижней границы вероятности безотказной работы во времени

1.3 Прогнозирование надежности конструкции в процессе эксплуатации

В процессе эксплуатации автомобилей и их составных частей под воздействием разрушительных процессов происходит их старение (износ, деформация, разрушение материала детали, коррозия, эрозия, кавитация), что снижает надежность конструкции. Для восстановления утраченной работоспособности с определенной периодичностью и глубиной ремонтных воздействий проводят техническое обслуживание и ремонты. Прогнозирование позволяет определить изменение свойств автомобилей под действием перечисленных факторов.

На временном промежутке $[0, T]$ задают периодичность проверок. Продолжительность между проверками $(j - 1) - й$ и $j - ой$ составляет τ_j . Полагая, что вероятность безотказной работы на интервалах между проверками снижается по экспоненциальному закону с интенсивностью λ , можно записать:

$$P_j = P_{j_0} e^{-\lambda \tau_j}. \quad (1.22)$$

В результате проведения профилактических работ вероятность безотказной работы изменяется на величину:

$$\Delta P_j = a_{T,0} K_j (1 - P_{j-1}) - b_{T,0} K_j P_{j-1}, \quad (1.23)$$

где $a_{т.о.}$ и $b_{т.о.}$ - коэффициенты, характеризующие эффективность и неполное устранение неисправностей вследствие необеспечения качества технического обслуживания и ремонта;

K_j - частота устранения неисправностей при j -м техническом обслуживании.

Используя уравнения (1.22) и (1.23) для определения процесса изменения надежности, можно составить ряд рекуррентных соотношений, где неизвестными параметрами являются P_o , λ , $a_{т.о.}$, $b_{т.о.}$, τ_j .

Решение рекуррентных соотношений в практическом использовании представляет сложную задачу. Для практического применения целесообразно использовать упрощенную экспоненциальную модель, аналогичную (1.11).

$$P_j(t) = P_{пр} - (P_{пр} - P_o)e^{-\Theta t}, \quad (1.24)$$

где P_{∞} - предельный уровень надежности;

P_o - начальный уровень надежности;

Θ - эффективность технического обслуживания.

Принимая $P_{пр}=1$ исходя из (1.24) получим модель изменения надежности, зависящую от двух параметров.

$$P_j(t) = 1 - (1 - P_o)e^{-\Theta t}, \quad (1.25)$$

Для определения оценок P^* , P_o^* и Θ^* целесообразно использовать метод наименьших квадратов. Логарифмируем выражение (1.25), введем обозначения $A = \ln(1 - P_o)$, $Z_i = (1 - P_j)$ и введем обозначение:

$$Z_i = A - \Theta t \quad (1.26)$$

Для полученной линейной функции Z_i относительно аргумента t нормальные уравнения в соответствии с (1.25) имеют вид:

$$\sum_1^n (Z_i + \Theta t - A)t = 0, \quad (1.27)$$

$$\sum_1^n (Z_i + \Theta t - A) = 0. \quad (1.28)$$

Решение уравнений (1.27) и (1.28) дает искомые параметры:

$$\left. \begin{aligned} \Theta^* &= \frac{\sum_1^n Z_i t_i + t^* \sum_1^n Z_i}{nt^* - \sum_1^n t_i^2}; \\ A^* &= \frac{1}{\Pi_1} \sum_1^n Z_i + \Theta^* t^*; \\ t^* &= \frac{1}{\Pi_1} \sum_1^n t_i; \end{aligned} \right\} \quad (1.29)$$

Начальная вероятность безотказной работы оценивается по формуле:

$$P_o^* = 1 - e^{-L^*}, \quad (1.30)$$

где L^* - суммарная интенсивность отказов.

1.4 Прогнозирование характеристик конструкции методом марковской аппроксимации

Для количественного прогнозирования работоспособности изделия в эксплуатации необходимо формализовать его функционирование. На основе формализации выбирается математическая модель. В общем случае совокупность параметров изделия, определяющих его работоспособность, можно представить в виде компонента случайного вектора $V(t)$ в n -мерном пространстве. Здесь n -число параметров. Каждый из параметров y_i характеризуется допусками $[a_i, b_i]$, которые обеспечивают нормальное функционирование изделия. В общем случае прогнозирование состояния изделия в любой момент времени производится решением стохастического уравнения:

$$V(t) - \underline{a} = 0, \quad (1.31)$$

где \underline{a} – допусковая область;

$V(t)$ – случайный вектор параметров.

Решение этого уравнения весьма трудоемко. Для упрощения решения задачи рекомендуется использовать марковский процесс с кусочно-линейной аппроксимацией. Марковский процесс определяется двумерной плотностью вероятностей:

$$f(y_0, y_1, t_0, t_1) = f(y_0, t_0) P\left(\frac{y_1, t_1}{y_0, t_0}\right), \quad (1.32)$$

где $f(y_0, t_0)$ – одномерная плотность вероятности;

$P\left(\frac{y_1, t_1}{y_0, t_0}\right)$ - плотность вероятности перехода y_0 в состоянии y_1 .

Использование свойств (1.32) позволяет осуществить прогнозирование состояния изделия только по одному параметру. С учетом этого, решение задачи сводится к определению вероятности того, что в некоторый момент времени $t > t_0$ параметр состояния изделия находится в заданной допусковой зоне $a < y < b$.

Пусть работоспособность изделия прогнозируется параметром $y(t)$, например, значением зазора в сопряжении. Произведем квантование уровня случайной функции $y(t)$, которое заключается в разбиении допусковой зоны $[a, b]$ на несколько уровней, например, $\Delta y_1, \Delta y_2, \Delta y_3$ (рисунок 1.3)

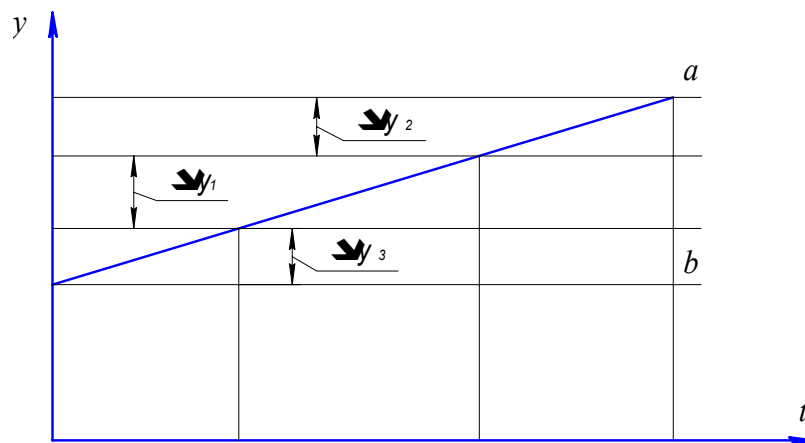


Рисунок 1.3 – Квантование функции по времени

Изделие находится в работоспособном состоянии, если $y(t)$ лежит в интервале квантования $(a, b) = \Delta y_i, i=0,1,2$. Интенсивность пересечения процессом $y(t)$ уровня квантования Δy обозначим через ν . Величина ν_i характеризует среднюю скорость увеличения параметра y в интервале квантования и определяется по статистическим данным.

Вероятность пребывания изделия в момент времени t в i -м уровне квантования определяется уравнениями марковского процесса:

$$P_i = -\nu_i P_i(t) + \nu_{i-1} P_{i-1}(t), \quad i=0,1,2. \quad (1.33)$$

Начальные условия: при $t=0, P_i(0)=P_0$.

Решение системы уравнений (1.33) с помощью преобразования Лапласа дает:

$$P_0(t) = P_0 e^{-\nu_0 t}, \quad (1.34)$$

$$P_1(t) = \frac{\nu_0 P_0}{\nu_1 - \nu_0} e^{-\nu_0 t} + \left(P_1 - \frac{\nu_0 P_0}{\nu_1 - \nu_0} \right) e^{-\nu_1 t}, \quad (1.35)$$

$$P_2(t) = \frac{\nu_0 \nu_1 P_0}{(\nu_1 - \nu_0)(\nu_2 - \nu_0)} e^{-\nu_0 t} + \left(\frac{\nu_1 P_1}{\nu_2 - \nu_1} + \frac{\nu_0 \nu_1 P_0}{(\nu_0 - \nu_1)(\nu_2 - \nu_1)} \right) e^{-\nu_1 t} + \left(P_2 + \frac{\nu_1 P_1}{\nu_1 - \nu_2} + \frac{\nu_0 \nu_1 P_0}{(\nu_0 - \nu_2)(\nu_1 - \nu_2)} \right) e^{-\nu_2 t}, \quad (1.36)$$

$$P_3(t) = 1 - \sum_0^2 P_i(t). \quad (1.37)$$

Вероятность работоспособного состояния изделия определяется зависимостями:

$$P(t) = \sum_{i=0}^3 P_i(t) = \sum_{i=0}^3 a_i e^{-\nu_i t}, \quad (1.38)$$

$$\text{где } a_0 = P_0 \left[1 + \frac{\nu_0}{\nu_1 - \nu_0} + \frac{\nu_0 \nu_1}{(\nu_1 - \nu_0)(\nu_2 - \nu_0)} \right]; \quad (1.39)$$

$$a_1 = P_0 \left[\frac{\nu_0}{\nu_0 - \nu_1} + \frac{\nu_0 \nu_1}{(\nu_0 - \nu_1)(\nu_2 - \nu_1)} + P_1 \left(1 + \frac{\nu_1}{\nu_2 - \nu_1} \right) \right]; \quad (1.40)$$

$$a_2 = P_0 \frac{\nu_0 \nu_1}{(\nu_0 - \nu_2)(\nu_1 - \nu_2)} + P_1 \frac{\nu_1}{\nu_1 - \nu_2} + P_2. \quad (1.41)$$

Пример. Партия изделий выборкой $n=20$ подвергалась наблюдению в процессе эксплуатации. Результаты контроля зазора в одном из сопряжений изделия представлены в таблице 1.3. Необходимо определить изменение зазора во времени.

Таблица 1.3 – Результаты контроля величины зазоров в сопряжении

Время, ч	0	500	1500	2000	3000
Зазор $\delta \cdot 10^3$, мм	18	24	27	27,5	29,5

При формировании сопряжения технологическими методами обеспечивают минимальное значение зазора δ_{\min} . На основании этого в качестве начальных значений вероятности состояний в момент времени $t=0$ принимаем $P_0=1$, $P_1=P_2=P_3=0$.

На рисунке 1.4 показаны экспериментальные значения зазоров и границы поля допуска: $\delta_{\max}=0$, $\delta_{\min}=b$.

Квантование поля износа во времени:

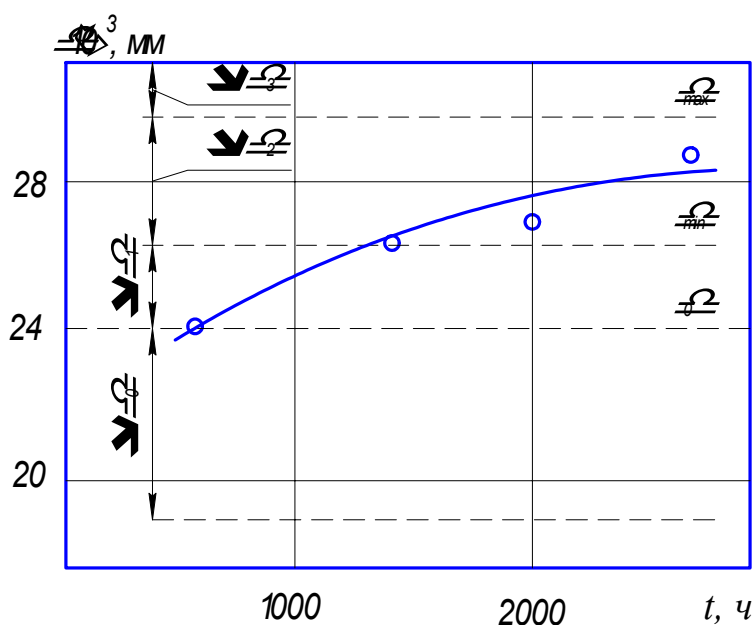
$$t_0=500 \text{ ч; } \Delta\delta_0=\delta(t_0)-\delta_0(0)=(24-18)10^{-3}=6 \cdot 10^{-3} \text{ мм;}$$

$$t_1=1500 \text{ ч; } \Delta\delta_1=\delta(1500)-\delta(500)=(27-24)10^{-3}=3 \cdot 10^{-3} \text{ мм;}$$

$$t_2=3300 \text{ ч; } \Delta\delta_2=\delta(3300)-\delta(500)=(29,5-27)10^{-3}=2,5 \cdot 10^{-3} \text{ мм;}$$

Выбираем интервалы квантования во времени:

$$t_0^* = 500 \text{ ч; } t_1^* = 1000 \text{ ч; } t_2^* = 1800 \text{ ч.}$$



— выровненное значение;

O – экспериментальные точки

Рисунок 1.4 – Изменение зазора в сопряжении

Интенсивность перехода по уровням квантования коэффициентов в соответствии с формулами (1.34) - (1.36) составляет:

$$\nu_0 = \frac{1}{t_0^*} = \frac{1}{500} = 2 \cdot 10^{-3}; \nu_1 = \frac{1}{t_1^*} = \frac{1}{1000} = 1 \cdot 10^{-3}; \nu_2 = \frac{1}{t_2^*} = \frac{1}{1800} = 0,56 \cdot 10^{-3}.$$

По уравнениям (1.38)-(1.41) находим значения a_i :

$$a_0=0,39; a_1=-2,55; a_2=3,16.$$

Результаты расчета вероятностей P_i переходов представлены в таблице 1.4.

Таблица 1.4 – Результаты расчета вероятностей P_i

t, ч	$\nu_0 t$	$\nu_1 t$	$\nu_2 t$	P_0	P_1	P_2	P_3	$m_\delta \cdot 10^{-3}$
0	0	0	0	1	0	0	0	
500	1	0,5	0,28	0,37	0,48	0,25	0	25
1000	2	1,0	0,56	0,14	0,46	0,40	0	25,4
1500	3	1,5	0,84	0,05	0,34	0,43	0,18	26,8
2000	4	2,0	1,12	0,02	0,24	0,43	0,31	27,6
2500	5	2,5	1,40	0,01	0,14	0,45	0,40	28,21
3000	6	3,0	1,68	0,002	0,10	0,37	0,53	28,7
3500	7	3,5	1,96	0	0,06	0,30	0,64	29,1
4000	8	4,0	2,24	0	0,04	0,21	0,75	29,6
4500	9	4,5	2,52	0	0,03	0,20	0,78	30,3

По формуле $\delta_i^* = \delta_i - k\Delta\delta_i^*$ ($k=0,67...0,8$ – коэффициент осреднения) определяем оптимальные уровни квантования.

$$\delta_0^* = \delta_0 - k\Delta\delta_0^* = 24 \cdot 10^{-3} - 0,67 \cdot 10^{-3} = 20 \cdot 10^{-3};$$

$$\delta_1^* = 25 \cdot 10^{-3}; \delta_2^* = 27,8 \cdot 10^{-3}; \delta_3^* = 30,3 \cdot 10^{-3}.$$

По формуле $m_\delta = \sum \delta_i^* \cdot P_i$ определим значение математического ожидания зазора (последняя колонка таблицы 1.4) и вероятность того, что за время $t=4000$ часов зазор не выйдет за допустимые пределы:

$$P(4000) = \sum a_i e^{-\nu_i t} = 0,39 \cdot 1 - 2,55 \cdot 0,02 + 3,16 \cdot 0,11 = 0,71.$$

Результаты расчета представлены на рисунке 1.4.

1.5 Прогнозирование наработки методом канонического разложения случайного процесса

Суть прогнозирования эксплуатационных свойств на основе канонического разложения заключается в следующем. С увеличением наработки для множества изделий изменение структурных параметров представляет собой случайную функцию, которая характеризуется функциями математического ожидания, дисперсии и автокорреляционной функции (рисунок 1.5).

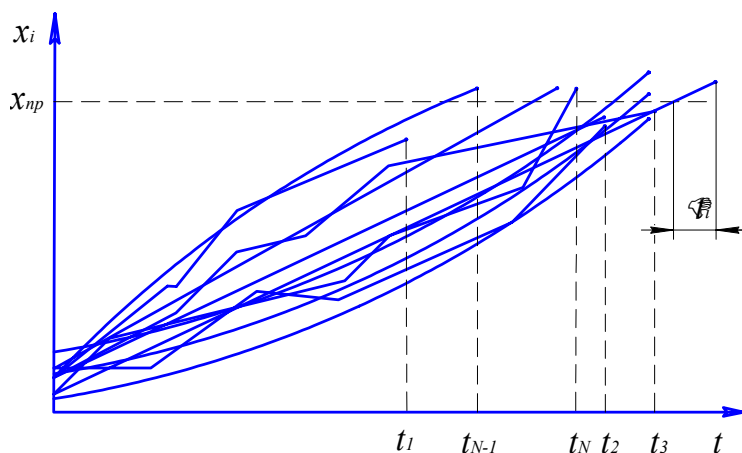
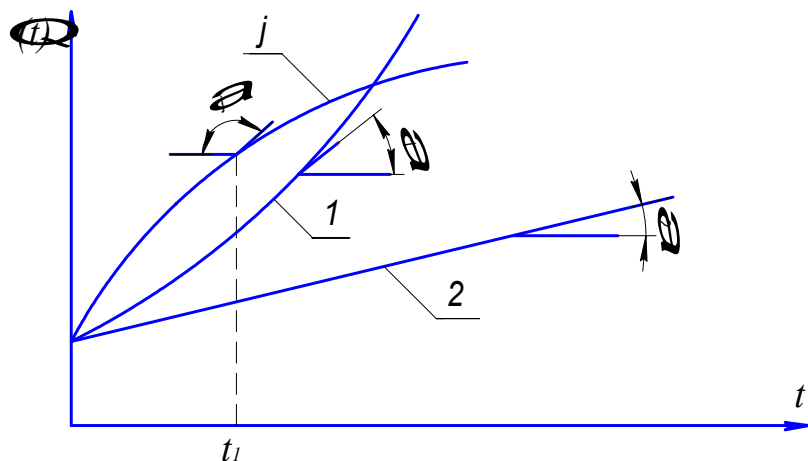


Рисунок 1.5 – Реализация изменения параметра показателя, характеризующего работоспособность элемента автомобиля

На этом рисунке к постепенным отказам относятся все необозначенные реализации, а реализации 1 и 2 – к внезапным отказам. Если продолжать эксплуатировать механизмы, у которых величина параметра x_i достигла предельного состояния, то после наработки Δt_i обязательно произойдет внезапный отказ.

Анализ рисунка 1.5 показывает, что для конкретного изделия даже при одинаковом исходном значении параметра качества заранее определить ход единичной реализации довольно трудно, так как на ее изменение оказывают влияние другие технологические показатели качества.

Для оценки изменения единичных реализаций используют так называемую координатную функцию, которая представляет собой скорость изменения технологического параметра в зависимости от его исходной величины и начальных значений других структурных параметров на различных временных интервалах. Эта величина может быть охарактеризована углом, образованным j -й реализацией и осью абсцисс в дискретный момент времени t_1 (рисунок 1.6)



α_{j1} - угол наклона касательной к оси абсцисс в момент времени t_1

Рисунок 1.6 – Определение координатной функции 1, 2, ..., j – реализации случайного процесса

Информация о влиянии технологических показателей на работоспособность изделия с заданным лимитирующим диагностическим параметром в определенных условиях эксплуатации оценивается функциями $\theta_1(t)$ и $t(\theta_1)$ (рисунок 1.7), полученными в дискретные моменты времени в сечениях, параллельных осям абсцисс и ординат. С учетом этого могут быть оценены единичные реализации по указанным моментным функциям, а также определены регрессивные зависимости вида:

$$\alpha_j = \alpha_j + \sum_{i=1}^n b_j \theta_j, \quad (1.42)$$

где $\alpha_j b_j$ - коэффициенты;

θ_j - факторы, лежащие в зоне допуска.

Для решения уравнения (1.42) используется план полного факторного эксперимента первого порядка. Выразим функции $\theta'_1(t)$ и $t(\theta_1)$ в виде сумм, т.е.:

$$\theta_1(t) = \theta'_1(t) + u_\theta; \quad t(\theta_1) = t'(\theta_1) + u_t, \quad (1.43)$$

где $\theta'_1(t)$ и $t'(\theta_1)$ - постоянные составляющие функций $\theta_1(t)$ и $t(\theta_1)$, несущие информацию о влиянии параметров, лежащих в поле допуска, на работоспособность изделия при определенных условиях эксплуатации;

u_θ и u_t - случайные величины, учитывающие влияние параметров, лежащих вне поля допуска при тех же условиях эксплуатации.

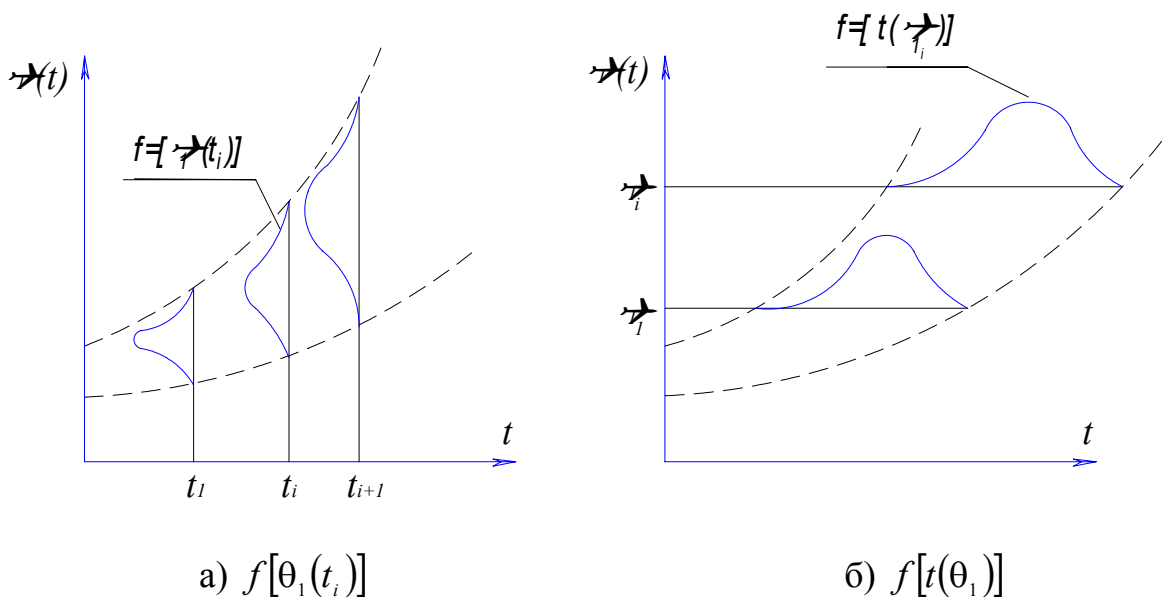


Рисунок 1.7 - Оценка параметров функций распределений

В общем случае значения координатных функций на временных интервалах целесообразно выражать в безразмерных величинах. С учетом этого координатная функция (1.42) может быть записана в виде

$$\varphi(t_k) = 1 + \mu t g \alpha_j, \quad (1.44)$$

где t_k – k-й интервал;
 μ - масштабный коэффициент.

Координатная функция имеет определенную дисперсию, которая определяется решением системы уравнений с двумя неизвестными

$$D_{ut} + D_{\varphi i} [\varphi(t_i)]^2 = D_{ii}; \quad D_{ut} + D_{\varphi k} [\varphi(t_k)]^2 = D_{kk}, \quad (1.45)$$

где D_{ut} – дисперсия случайной величины u_t ;
 $D_{\varphi ik}$ - дисперсия координатной функции $\varphi(t)$;
 D_{ii} и D_{kk} - дисперсия наработок в i-м и k-м сечениях;
 $\varphi(t_i)$ и $\varphi(t_k)$ – значения координатной функции соответственно в тех же сечениях (определяются экспериментально).

Обработка результатов наблюдений за изменением параметра θ_1 у партии изделий позволяет охарактеризовать случайную функцию $t(\theta_1)$ системой n случайных величин. Оценки математического ожидания $\bar{t}(\theta_1)$, дисперсии $\bar{D}(t)$ и автокорреляционной функции $K(\theta_1)$ находят по общеизвестной методике.

С учетом гипотезы о нормальном распределении величин θ_1 и t и канонического разложения случайной функции прогнозирование наработки осуществляется по формуле:

$$t^{ps} = \frac{K_{\theta,t}}{D_o} (\theta_1 - \overline{\theta_1}) m_t + V_t, \quad (1.46)$$

где t^{ps} – прогнозируемая наработка;

$K_{\theta,t}$ – корреляционный момент между значением исходного параметра и наработкой;

D_o – дисперсия исходного значения параметра;

θ_1 – начальное значение технологического параметра для конкретного изделия;

$\overline{\theta_1}$ – оценка математического ожидания начального значения технологического параметра;

m_t – оценка математического ожидания наработки

V_t – случайная величина, учитывающая рассеяние наработки на фоне одинаковых условий эксплуатации.

Дисперсия случайной величины V_t определяется по формуле:

$$D_V = D_t - \frac{[K(\theta_1, t)]^2}{D_o}, \quad (1.47)$$

где D_t – дисперсия наработки до первого отказа, определяемая по формуле:

$$D_t = D_{\varphi} [\varphi(t)]^2 + D_m, \quad (1.48)$$

где D_{φ} – дисперсия наработки изделий с конкретными значениями Q_1 ;

$\varphi(t)$ – значение координационной функции при наработке t ;

D_m – дисперсия, учитывающая рассеяние наработки изделий с параметрами θ_i , лежащими вне оговоренных допусков, а также учитывающая влияние эксплуатационных факторов.

Дисперсия прогноза может быть уменьшена путем канонического разложения функции $t(\theta_1)$:

$$t(\theta_1) = m(t) + \sum_{i=1}^n V_i \varphi_i(t), \quad (1.49)$$

где $m(t)$ – математическое ожидание функции;

$\varphi_i(t)$ – координатные функции ;

V_i – некоррелированные случайные величины с математическим ожиданием, равным нулю.

Разложение корреляционной функции представлено формулой:

$$K(\theta, t) = \sum_{i=1}^n \varphi_i(\theta) \varphi_i(t) D_i, \quad (1.50)$$

D_i – дисперсия случайной величины V_i .

Дисперсия случайной функции

$$D_i = \sum_{i=1}^n [\varphi_i(t)]^2 D_i \quad (1.51)$$

Пример. Информация для использования прогнозирующего уравнения была получена по результатам исследования нескольких порций экспериментальных и серийно отремонтированных коробок передач в эксплуатационных условиях.

По результатам наблюдений установлено: оценка математического ожидания и дисперсия исходной ошибки механизма $m_0=168$ угловых минут и $D_0=752$ мин²; оценки распределения наработки до первого отказа $m_t=47,4$ тыс.км; и $D_t=106,3$ (тыс.км)²; корреляционный момент $K(\theta, t) = -83$ мин.тыс.км; среднее значение предельной ошибки механизма 650 . Учитывая, что изменение $m_t(\theta)$ является линейным, распределения θ и t подчинены нормальному закону, найти каноническое разложение функции $t(\theta_1)$, имеющим значения при $\theta_1=650$ угловых минут $t_1=32$ тыс.км; $\bar{t}_2=47,4$ тыс.км; $t_3=62,8$ тыс.км, которые отражают различные условия эксплуатации. Условия эксплуатации характеризуются интенсивностью изменения ошибок механизмов:

$$I_{h1} = \frac{650}{32} = 20,3 \frac{\text{мин}}{\text{тыс.км}}; \quad I_{h2} = \frac{650}{47,4} = 13,7 \frac{\text{мин}}{\text{тыс.км}}; \quad I_{h3} = \frac{650}{62,8} = 10,4 \frac{\text{мин}}{\text{тыс.км}}.$$

Графики координатной функции для этих условий приведены на рис.1.8

Решение. В данном примере координатные функции проходят через общую точку с координатами (0; 168). Первая функция проходит также через точку с координатами (32; 650), вторая – через точку (47,4; 650), третья – через точку (62,8; 650). Соответствующие этим линиям уравнения имеют вид:

$$\bar{t}_1 = 0,066 \theta_1 - 11; \quad \bar{t}_2 = 0,098 \theta_1 - 16,5; \quad \bar{t}_3 = 0,13 \theta_1 - 21,9.$$

В соответствии с формулой (1.51) и теоремой о дисперсии линейной функции

$$D_1 = 0,066^2 D_t; \quad D_2 = 0,098^2 D_t; \quad D_3 = 0,13^2 D_t.$$

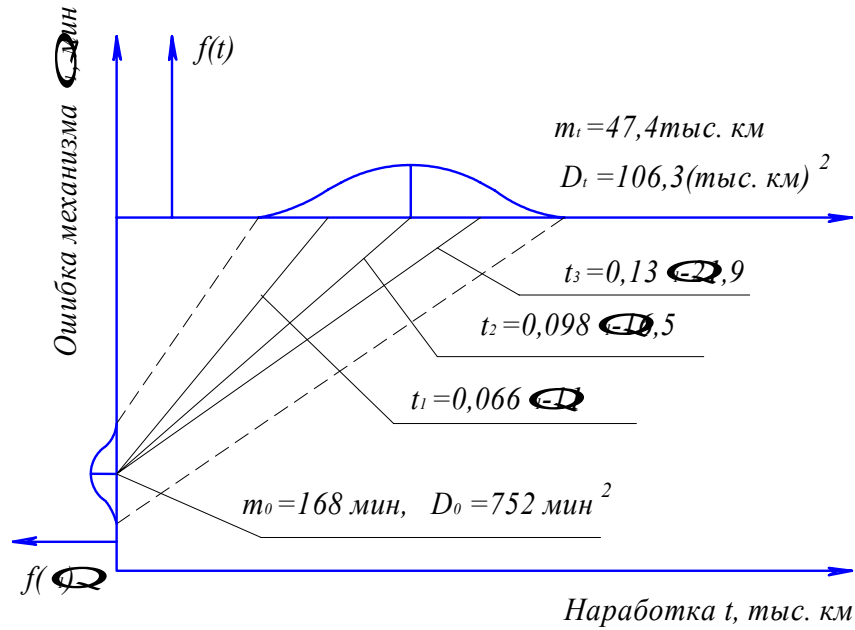


Рисунок 1.8 – График случайной функции $t(\theta_1)$ и координатных функций $t_i(\theta_1)$

В равенствах (1.52) коэффициенты можно рассматривать как весовые характеристики g_i значений дисперсии D_i в сечениях функции $t(\theta)$. В соответствии с этим сумма весов g_i составляет:

$$\sum_{i=1}^3 g_i = 0,066^2 + 0,098^2 + 0,13^2 = 0,0386.$$

Для выполнения условий равенства $\sum_{i=1}^3 D_i = D_t$ рассчитываем значения:

$$D_1 = \frac{0,066^2 \cdot 106,3}{0,0386} = 15 \text{ (тыс.км)}^2;$$

$$D_2 = \frac{0,098^2 \cdot 106,3}{0,0386} = 13,1 \text{ (тыс.км)}^2;$$

$$D_3 = \frac{0,13^2 \cdot 106,3}{0,0386} = 58,2 \text{ (тыс.км)}^2.$$

В соответствии с теоремой о сложении некоррелированных случайных функций корреляционный момент $K(\theta_1, t)$ разложим в соответствии с суммой весовых коэффициентов, в качестве которых принимаются произведения дисперсий D_i на $\varphi_i(t)$ в заданных точках 32; 47,4 и 68,2:

$$\sum_{i=1}^3 G_i = 32 \cdot 15 + 47,4 \cdot 33,1 + 62,8 \cdot 58,2 = 480 + 1569 + 3655 = 5704.$$

Расчет корреляционных моментов дает следующие результаты:

$$K_1(\theta_1, t) = \frac{-83 \cdot 480}{5704} = -7 \text{ мин.тыс.км.},$$

$$K_2(\theta_1, t) = \frac{-83 \cdot 1569}{5704} = -23 \text{ мин.тыс.км.},$$

$$K_3(\theta_1, t) = \frac{-83 \cdot 3655}{5704} = -53 \text{ мин.тыс.км.}.$$

Имея полученные данные по формулам (1.46) и (1.47) можно оценить прогнозную величину наработки.

Пример. Определить наработку коробки передач автомобиля ЗИЛ-130 до первого отказа для доверительной вероятности $\alpha=0,9$, если начальная ошибка механизма $\theta_{10}^0=200$ мин, а ошибки находятся в полях допусков технических условий на капитальный ремонт. По данным априорной информации $D_0=752$ мин², $m_t=47,4$ тыс.км, $m_0=168$ мин, корреляционный момент $K(\theta_1, t) = -83$ мин.тыс.км.

Решение. В соответствии с формулой (1.46)

$$t^{ps} = \frac{-83}{752} (200 - 168) + 47,4 + V_t.$$

Дисперсия случайной величины V_t составляет

$$D_V = D_t - \frac{[K(\theta_1, t)]^2}{D_0} = 106,3 - \frac{(-83)^2}{752} = 97,1 \text{ (тыс.км)}^2.$$

Наработка на отказ рассчитывается по формуле:

$$t^{ps} = m_t - t_\alpha \sqrt{D_V},$$

t_α – квантиль нормального распределения, (при $\alpha=0,9$ $t_\alpha=1,29$)

$$t^{ps} = 47,4 - 1,29 \sqrt{97,1} = 34,7 \text{ тыс.км.}$$

Пример. Для условий предыдущего примера определить наработку, если коробки передач установлены на автобусах, работающих по маршрутам с интенсивностями износа I_{h1} , I_{h2} , I_{h3} .

Каноническое разложение функции $t(\theta_1)$ представлено на рисунке 1.9.

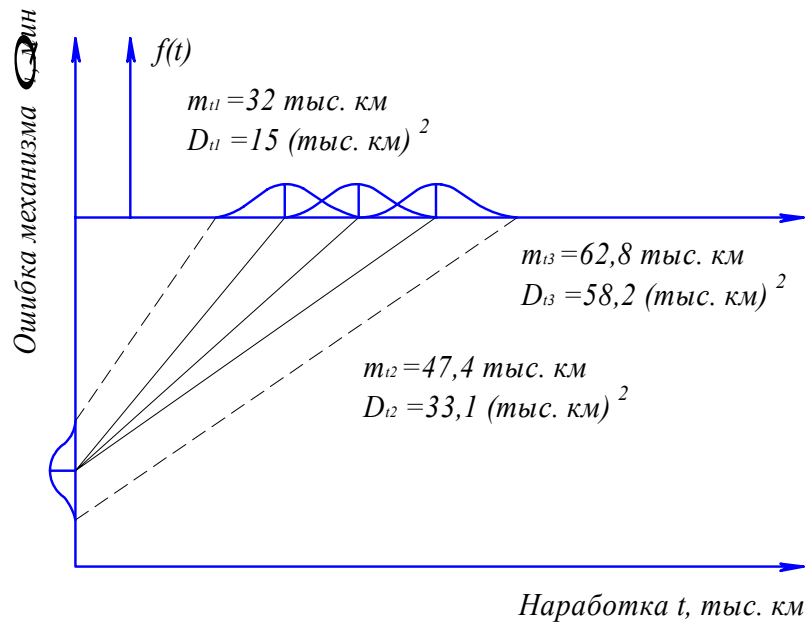


Рисунок 1.9 – Каноническое разложение функции $t(\theta_1)$

Решение. В соответствии с формулой (1.46):
Для условия I_{h1} :

$$t_1^{PS} = \frac{-7}{752}(200 - 168) + 32 + V_{t_1} = 31,7 + V_{t_1} .$$

$$D_{V_1} = D_1 - \frac{[K_1(\theta_1, t)]^2}{D_0} = 15 - \frac{(-7)^2}{752} = 14,9 \text{ (тыс.км)}^2 .$$

$$t_1^{PS} = 31,7 - 1,29\sqrt{14,9} = 26,7 \text{ тыс.км.}$$

Для условия I_{h2} :

$$t_2^{PS} = \frac{-23}{752}(200 - 168) + 47,4 + V_{t_2} = 46,4 + V_{t_2} .$$

$$D_{V_2} = 33,1 - \frac{(-23)^2}{752} = 32,4 \text{ (тыс.км)}^2 .$$

$$t_2^{PS} = 46,4 - 1,29\sqrt{32,4} = 39 \text{ тыс.км.}$$

Для условия I_{h3} :

$$t_3^{PS} = \frac{-53}{752}(200 - 168) + 62,8 + V_{t_3} = 60,5 + V_{t_3} .$$

$$D_{V_3} = 58,2 - \frac{(-53)^2}{752} = 54,4 \text{ (тыс.км)}^2 .$$

$$t_3^{PS} = 60,5 - 1,29\sqrt{54,4} = 51 \text{ тыс.км.}$$

Для оценки точности прогнозирования можно использовать величину энтропии $H(x)$, как меру неопределенности случайной величины. Для нормального распределения расчетная формула имеет вид:

$$H(x) = \log \left[\frac{\sqrt{2\pi e D_x}}{\Delta x} \right], \quad (1.53)$$

где D_x – дисперсия прогнозируемой величины;
 Δx - погрешность определения дисперсии (принят $\Delta x = 5$ тыс.км).

Для общего случая можно записать выражения:

$$H_1(t) = \log \left[\frac{\sqrt{2\pi e 14,9}}{5} \right] = 1,7 \text{ дв.ед.}$$

$$H_2(t) = \log \left[\frac{\sqrt{2\pi e 32,4}}{5} \right] = 2,2 \text{ дв.ед.}$$

$$H_3(t) = \log \left[\frac{\sqrt{2\pi e 54,4}}{5} \right] = 2,6 \text{ дв.ед.}$$

Результаты показывают, что с использованием канонического разложения неопределенность прогноза уменьшается.

1.6 Универсальный комплексный показатель ремонтпригодности

Вопросам теории и практики обеспечения надежности посвящен комплекс научных исследований, усилия инженеров, конструкторских и технологических служб предприятий – изготовителей автомобильной техники, работников эксплуатационных предприятий. Для оценки свойств и показателей надежности разработана и действует обширная номенклатура нормативной документации,

базирующаяся на фундаментальных разработках, имеющих несомненную практическую ценность.

В ряду свойств надежности особое значение имеет ремонтпригодность. Показатели ремонтпригодности бывают единичными (продолжительность, трудоемкость, стоимость, вероятность в заданное время выполнения определенного вида технического обслуживания или ремонта) и комплексными, например, коэффициенты технической и оперативной готовности.

Существующие методики и рекомендации по оценке показателей надежности базируются на анализе информации, полученной в процессе длительной эксплуатации автомобилей. Этот период составляет 3-5 лет. При неудовлетворительном значении полученных показателей доработка конструкции сопряжена со значительными экономическими издержками.

Обоснование и регламентация показателей и нормативов ремонтпригодности определяют необходимость разработки дополнительных универсальных показателей, которые были бы общими как для изделия (автомобиль, сборочная единица), так и для его составной части, а также содержали в себе информацию о качестве новых и отремонтированных изделий и потребляемых трудовых и материальных ресурсов.

Кроме того, эти показатели должны быть общими для семейства изделия одного класса, что обеспечит возможность сопоставления уровня их ремонтпригодности и прогнозирования ремонтпригодности новых изделий на этапе их проектирования.

Рассмотрим иерархическое дерево конструкции (автомобиль, сборочная единица и др.). Ветвь этого дерева имеет, например, вид, приведенный на рисунке 1.10.

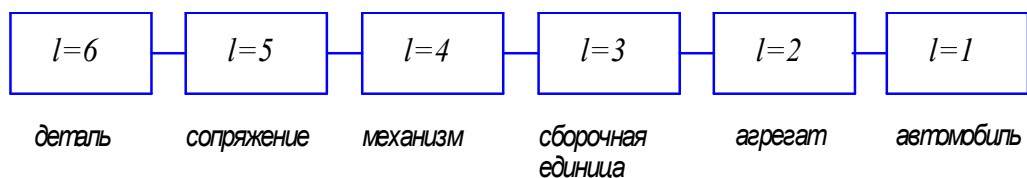


Рисунок 1.10 - Иерархическое дерево конструкций

Значение **1** определяет уровень иерархии. Длины ветвей иерархического дерева могут быть различны, но самый нижний уровень иерархии – деталь.

Рассмотрим два последовательных уровня иерархии (рисунок 1.11).

Сформулированное допущение – это исходная аксиома рассматриваемой математической модели процесса восстановления, т.е. восстановления «усредненного» автомобиля, восстановления агрегатов этого автомобиля, сборочных единиц, комплектующих и т.д. Основное допущение предполагает, что любой комплектующий элемент при очередном ремонте независимо от его предыстории удовлетворяет техническим требованиям по состоянию и экономическим требованиям по уровню затрат на восстановление. Поэтому независимо от системы ремонта (обезличенной или индивидуальной) происходит накопление затрат на восстановление автомобиля, его агрегатов, сборочных единиц и т.д. от одного капитального ремонта к другому.

В соответствии с этим обозначим:

L_n – наработка элемента за доремонтный цикл;

L_p – наработка элемента за один межремонтный цикл;

S_n – стоимость нового элемента;

S_p – затраты на восстановление элемента на один межремонтный цикл;

$S_{сб}$ – затраты на сборочно-разборочные работы, связанные с комплектованием элемента следующего иерархического уровня.

Рассмотрим i -й элемент $(l-1)$ -го иерархического уровня – составную часть v -го элемента l -го иерархического уровня. В соответствии с (1.54) показатель удельного полезного эффекта от его ремонта к началу l -го межремонтного цикла в силу основного допущения определяется соотношением:

$$\mathfrak{E}_{r(i,l+1)}^{(l+1)} = k_{r(N,l+1)} \frac{L_{p(i,l+1)}}{S_{n(i,l+1)} + rS_{p(i,l+1)}}, \quad (1.55)$$

где $r=r(i,l+1)$.

Показатель (1.55) имеет размерность $[\mathfrak{E}] = [\text{наработка}] \cdot [\text{стоимость}]^{-1}$.

Соответственно величину имеющую вид:

$$\mathfrak{E}_{0(i,l+1)}^{(l+1)} = k_{0(i,l+1)} \frac{L_{n(i,l+1)}}{S_{n(i,l+1)}}, \quad (1.56)$$

где $k_{0(i,l+1)} = 1$.

назовем показателем удельного эффекта нового элемента.

Поделив (1.55) на (1.56), введем безразмерный показатель:

$$\Pi_{r(i,l+1)}^{(l+1)} = \mathfrak{E}_{r(i,l+1)}^{(l+1)} / \mathfrak{E}_{0(i,l+1)}^{(l+1)}. \quad (1.57)$$

Показатель (1.57) будем называть собственным показателем ремонтпригодности N-го элемента (l+1)-го уровня иерархии к началу r-го межремонтного цикла. В силу (1.55)-(1.57) запишем:

$$\Pi_{r(i,l+1)}^{(l+1)} = \frac{k_{r(i,l+1)}L_{p(i,l+1)}}{(1 + rS_{p(i,l+1)}/S_{n(i,l+1)})L_{n(i,l+1)}}. \quad (1.58)$$

Соответственно определяются показатели удельного полезного эффекта от ремонта и ремонтпригодности N-го элемента (l+1)-го уровня иерархии к началу r-го межремонтного цикла относительно v-го элемента l-го иерархического уровня:

$$\Xi_{r(i,l+1)}^{(l)} = k_{r(i,l+1)} \frac{L_{p(i,l+1)}^*}{S_{n(i,l+1)} + r(S_{p(i,l+1)} + S_{сб(i,l+1)})}, \quad (1.59)$$

$$\Pi_{r(i,l+1)}^{(l)} = \frac{k_{r(i,l+1)}L_{p(i,l+1)}^*}{(1 + r(S_{p(i,l+1)} + S_{сб(i,l+1)})/S_{n(i,l+1)})L_{n(v,l)}}, \quad (1.60)$$

Приведенную межремонтную наработку $L_{p(i,l+1)}^*$ можно определить соотношением:

$$L_{p(i,l+1)}^* = \begin{cases} L_{p(i,l+1)}, & \text{если } L_{p(i,l+1)} \leq L_{n(v,l)}, \\ L_{n(v,l)}, & \text{если } L_{p(i,l+1)} > L_{n(v,l)}. \end{cases} \quad (1.61)$$

Отметим, что для показателя ремонтпригодности всегда выполняется условие $0 < \Pi_r < 1$, и он убывает с ростом r.

1.7 Прогнозирование показателей ремонтпригодности на этапе проектирования

Конструктивно-технологические факторы и сложный характер нагружения формируют общие свойства, характеризующие ремонтпригодность и ремонтную технологичность автомобилей и их составных частей, определяют в конечном итоге уровень восстанавливаемости их эксплуатационных свойств.

Объективный расчет показателей ремонтпригодности на стадии технического задания, технического предложения и эскизного проекта затрудняется из-за отсутствия необходимой информации. Поэтому приходится разрабатывать прогнозные процедуры оценивания показателей

ремонтпригодности, что связано с необходимостью построения комплексных показателей конструктивно-технологических особенностей изделий, несущих в себе информацию о возможной их работоспособности.

Выбор и обоснование комплексных показателей конструктивно-технологических особенностей, расчетное определение их значений, установление взаимосвязи с эксплуатационными свойствами определяется функциональным назначением изделия, особенностями конструктивного и технологического исполнения и другими факторами. Вряд ли можно ожидать появления универсального метода выбора и обоснования такого рода показателей. Наиболее удовлетворительное решение этой задачи основывается на использовании информации об изделиях-аналогах, опыте их разработки, изготовления, эксплуатации и ремонта.

Выбор комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей изделия рассмотрим на примере блока цилиндров дизельных двигателей, как наиболее сложной, материалоемкой и трудоемкой в изготовлении и ремонте базовой детали. В литературе предложены некоторые обобщенные показатели, к которым прежде всего относится удельная материалоемкость, которая определяется отношением:

$$m=G/N_e, \quad (1.62)$$

где G - масса блока цилиндров, кг;
 N_e – эффективная мощность двигателя, кВт.

Очевидно, что показатель несет в себе информацию о напряженно-деформируемом состоянии детали и, следовательно, оказывает влияние на образование силовых трещин.

В ряде основополагающих работ по проектированию двигателей внутреннего сгорания указывается, что размеры, жесткость блока и двигателя в сборе зависят от показателя:

$$\varphi=D/L_0, \quad (1.63)$$

где L_0 – межцилиндровое расстояние между осями соседних отверстий под гильзы цилиндров, мм;

D - диаметр поверхности под верхний посадочный буртик гильзы цилиндра, мм.

Этот показатель зависит от размеров и конструктивного исполнения жидкостной полости, конструкции гильзы и от компоновочной схемы двигателя. Учет жесткости блока имеет важное значение, т.к. от его деформации зависит форма рабочей поверхности гильзы цилиндра, влияющая на расход масла, удельную эффективную мощность двигателя, изнашивание цилиндропоршневой группы, а в ряде случаев влияет на образование трещин на межцилиндровых перемычках.

На глубину и характер повреждаемости конструктивных элементов детали оказывает материал, из которого она изготовлена. В качестве характеристики физико-механических свойств материала может быть использовано соотношение значений критических коэффициентов интенсивности роста напряжений проектируемого и базового блока цилиндров:

$$K_{\text{и.отн}} = K_{\text{и}}^i / K_{\text{и}}^{\delta}, \quad (1.64)$$

где $K_{\text{и}}^i$ – значение критического коэффициента интенсивности роста напряжений материала проектируемого блока цилиндров;

$K_{\text{и}}^{\delta}$ – то же для сравниваемого варианта двигателя.

Коэффициенты $K_{\text{и}}^i$ и $K_{\text{и}}^{\delta}$ характеризуют сопротивление распространения трещин в используемых для изготовления блоков цилиндров материалах. Следовательно они несут информацию о величине нагрузки, выдерживаемой материалом при наличии в материале деталей концентраторов напряжений (внутренние микротрещины, посторонние включения и др.)

Для оценки влияния характера организации рабочего процесса рекомендуется использовать величину максимальной суммарной силы $P_{\Sigma \text{max}}$ за цикл работы двигателя. С учетом этого влияние нагруженности, возникающей под действием силы P_{Σ}^{max} в работающем двигателе можно учитывать с помощью коэффициента приведения:

$$K_{\text{пр}} = P_{\text{Уmax}}^{\delta} / P_{\text{Уmax}}^i, \quad (1.65)$$

где $P_{\Sigma \text{max}}^{\delta}$ – максимальная суммарная сила за цикл работы эталонного двигателя, МН;

$P_{\Sigma \text{max}}^i$ – то же для сравниваемого варианта двигателя.

Аналогично для любого изделия могут быть выбраны обобщенные показатели, характеризующие его основные эксплуатационные свойства.

Введем понятие комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей применительно к блоку цилиндров дизельных двигателей

$$K_{\text{кт}} = \frac{m}{\varphi} K_{\text{и.отн}} K_{\text{пр}}. \quad (1.66)$$

Построенный показатель может быть использован для прогнозной оценки уровня повреждаемости конструктивных элементов блока цилиндров, определения наработок до появления критических повреждений, расчета показателей ремонтпригодности и других целей на этапах проектирования, доводки и опережающего выпуска новых изделий. Возможные повреждения

конструктивных элементов блока цилиндров можно разделить на несколько групп. В особую группу отнесены так называемые критические повреждения. К критическим, здесь относятся такие повреждения детали, с возникновением которых она становится практически неремонтопригодной.

Например, для блока цилиндров – это трещины на рубашке охлаждения, на коренных опорах и перемычках на привалочных плоскостях под головки блока цилиндров и другие виды повреждений материала детали.

Структура и содержание комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей определяются характером работы, выполняемой анализируемой конструкцией, областью применения и другими условиями. Численные значения комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей определяют по результатам анализа конструкторской, технологической и другой нормативно-технической документации, по данным научных исследований как для оцениваемой конструкции, так и для изделий-аналогов.

Для прогнозирования оценки показателей ремонтпригодности и ремонтной технологичности на этапе проектирования полезно в наибольшем объеме использовать информацию об изделиях-аналогах.

Рассмотрим методику определения показателей ремонтпригодности блока цилиндров проектируемого двигателя внутреннего сгорания, для которого в качестве двигателей-аналогов могут быть использованы двигатели №1-4 (желательно иметь как можно больше двигателей-аналогов), для которых исходные данные для определения численных значений комплексного показателя $K_{кт}$ и результаты его расчета приведены в таблице 1.5.

Таблица 1.5 – Формирование показателей конструктивно-технологических особенностей двигателей-аналогов

Двигатель-аналог	Масса блока, кг	Мощность, кВт	φ	$K_{и.отн}$	$K_{пр}$	$K_{кт}$
№1	190	154	0,911	1,0	1,0	1,35
№2	292	176	0,802	1,0	1,057	2,19
№3	269	132	0,802	1,0	1,057	2,68
№4	530	141	0,963	1,0	1,0	3,90

Для изделий-аналогов путем проведения статистических исследований устанавливаются возможные повреждения, которые классифицируются по определенным признакам. В отдельную классификационную группу относятся повреждения, по которым изделие является неремонтопригодным. Одновременно фиксируются наработки до появления того или иного повреждения. Исследования и анализ проводятся для доремонтной и межремонтной наработок.

Для количественной оценки уровня повреждаемости примем показатель, определяемый по формуле:

$$g_i = \frac{\sum_{k=1}^{N_i} 1/L_{ik}}{N_i}, \quad (1.67)$$

где L_{ik} – наработка k -го изделия до появления i -го повреждения;
 N_i – количество изделий, имеющих i -й вид повреждений.

Обработанные по формуле (1.67) результаты статистического исследования технического состояния блоков цилиндров на авторемонтных предприятиях представлены в таблице 1.6.

Таблица 1.6 – Показатели удельной повреждаемости для двигателей-аналогов

Показатель	Двигатель-аналог			
	№1	№2	№3	№4
$K_{кт}$	1.35	2.19	2.68	3.90
g_1	0.2710	0.0833	0.0379	0.0014
g_2	0.2080	0.0237	0.0056	0.0014
g_3	0.1020	0.0268	0.0158	0.0014

В этой таблице приведены показатели удельной повреждаемости для следующих критических повреждений блока цилиндров: g_1 – трещины на рубашке охлаждения; g_2 – трещины по перемычкам на привалочных плоскостях под головки цилиндров; g_3 – трещины по коренным опорам.

Данные табл. 1.5.2 позволяют установить эмпирическую зависимость между показателями удельной повреждаемости g_1 ; g_2 ; g_3 и показателем конструктивно-технологических особенностей $K_{кт}$ для блока цилиндров.

Указанную эмпирическую зависимость будем искать в виде

$$g_i = a \exp\left\{\frac{b}{K_{кт}}\right\}, \quad i=1,2,3, \quad (1.68)$$

где a и b – параметры, подлежащие определению.

Логарифмируя (1.5.7), получим:

$$\ln g_i = \ln a + \frac{b}{K_{кт}}. \quad (1.69)$$

Замена переменных $Z = \ln g_i$, и $t = \frac{1}{k_{KT}}$ приводит выражение (1.69) к линейной зависимости:

$$Z = At + B \quad (1.70)$$

Параметры уравнений (1.5.7) и (1.5.10) связаны соотношениями:

$$a = e^B, \quad b = A \quad (1.71)$$

где A и B – определяют по методу наименьших квадратов.

Результаты расчетов представлены в таблице 1.7.

Таблица 1.7 – Формирование эмпирических зависимостей

Параметр	Двигатель-аналог			
	№1	№2	№3	№4
k_{KT}	1,35	2,19	2,68	3,90
$t=1/k_{KT}$	0,741	0,457	0,373	0,256
g_1	0,2710	0,0833	0,0379	0,0014
$Z = \ln g_1$	-1,3056	-2,4853	-3,2728	-6,5713
	A=9,535; B=-7,7638		a=4,248·10 ⁻⁴ ; b=9,535	
Выровненное значение g_1	0,4974	0,03316	0,01489	0,004879
g_2	0,2080	0,0237	0,0056	0,0014
$Z = \ln g_2$	-1,5702	-3,7423	-5,1850	-6,5713
	A=10,195; B=8,9240		a=1,332·10 ⁻⁴ ; b=10,195	
Выровненное значение g_2	0,2543	0,01406	0,005669	0,001811
g_3	0,1020	0,0268	0,0158	0,0014
$Z = \ln g_3$	-2,2828	-3,6194	-4,1478	-6,5713
	A=7,937; B=7,7804		a=4,178·10 ⁻⁴ ; b=7,937	
Выровненное значение g_3	0,1497	0,01571	0,008067	0,003187

Таким образом, получены эмпирические зависимости показателей удельной повреждаемости от значений комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей для следующих критических повреждений блока цилиндров:

трещины на рубашке охлаждения:

$$g_1 = 4,248 \cdot 10^{-4} \exp \left\{ \frac{9,535}{K_{KT}} \right\}; \quad (1.72)$$

трещины по перемычкам на привалочных плоскостях под головки цилиндров:

$$g_2 = 1,332 \cdot 10^{-4} \exp\left\{\frac{10,195}{K_{\text{КТ}}}\right\}; \quad (1.73)$$

для трещин по коренным опорам:

$$g_3 = 4,178 \cdot 10^{-4} \exp\left\{\frac{7,937}{K_{\text{КТ}}}\right\}; \quad (1.74)$$

Эти зависимости представлены на рисунках 1.12-1.14.

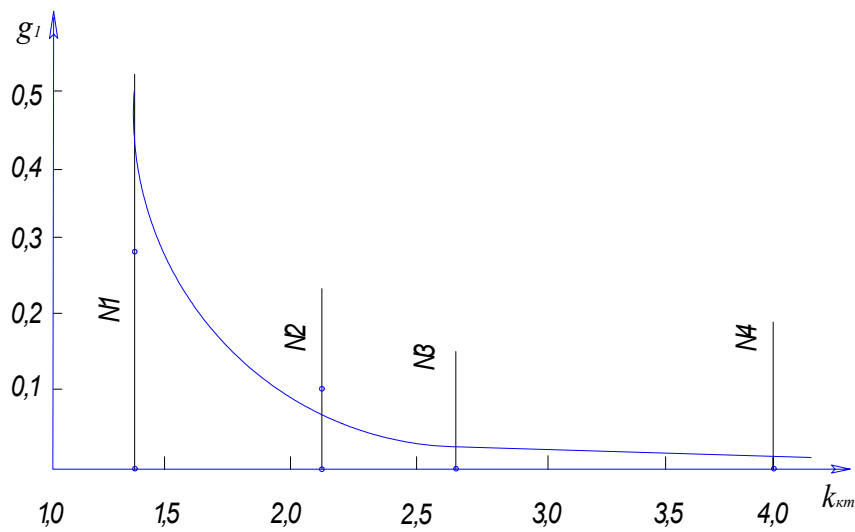


Рисунок 1.12 - График зависимости удельного значения трещинообразования на рубашке охлаждения от значения $K_{\text{КТ}}$

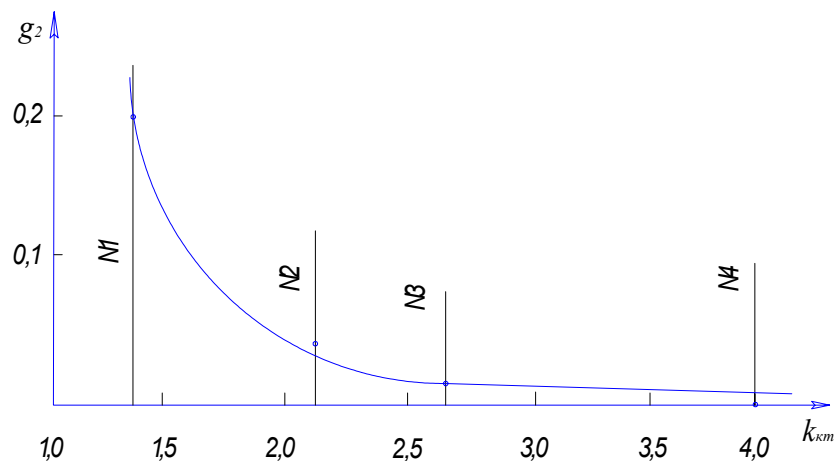


Рисунок 1.13 - График зависимости удельного значения трещинообразования на межцилиндровых перемычках от $K_{кт}$

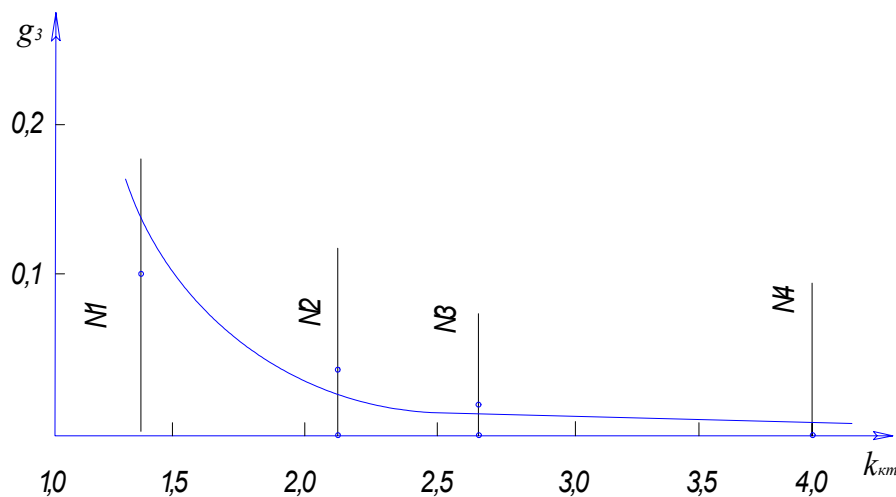


Рисунок 1.14 - График зависимости удельного значения трещинообразования на коренных опорах от $K_{кт}$

По формулам (1.72)-(1.74) можно определить прогнозные оценки уровня повреждаемости по критическим дефектам в зависимости от величины комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей блоков цилиндров дизельных двигателей. Полученные зависимости справедливы для $K_{кт}$, лежащих в пределах 1,35-3,9. Для других значений $k_{кт}$ формулы (1.72)-(1.74) должны быть подвергнуты корректировке.

Пусть, например, по данным конструкторской документации определено численное значение комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей блока цилиндров проектируемого двигателя $K_{кт}=1,79$. Используя зависимости (1.72)-(1.74), по значению $k_{кт}$ определяют оценки показателей удельной повреждаемости блока цилиндров проектируемого двигателя по критическим дефектам:
трещины на рубашке охлаждения

$$g_1 = 4,248 \cdot 10^{-4} \exp\left\{\frac{9,535}{k_{\text{КТ}}}\right\} = 0,0874;$$

трещины по перемычкам на привалочных плоскостях под головки цилиндров

$$g_2 = 1,332 \cdot 10^{-4} \exp\left\{\frac{10,195}{k_{\text{КТ}}}\right\} = 0,0396;$$

трещины по коренным опорам

$$g_3 = 4,178 \cdot 10^{-4} \exp\left\{\frac{7,937}{k_{\text{КТ}}}\right\} = 0,0352.$$

Для определения оценки минимальной наработки изделия до появления того или иного вида повреждений необходимо рассмотреть задачу о построении соответствующей прогнозной процедуры.

Учитывая, что появление трещин является случайной величиной относящейся к внезапным отказам, а наработка X до появления их подчиняется экспоненциальному закону можно записать:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & X < X_0 \\ \lambda e^{-\lambda(X-X_0)} & X \geq X_0 \end{cases} \quad (1.75)$$

где λ – интенсивность потока отказов;

X_0 – смещение случайной величины наработки.

Математическое ожидание случайной величины X можно определить по формуле:

$$M(X) = \int_{X_0}^{\infty} \lambda \cdot e^{-\lambda(X-X_0)} dX = X_0 + \frac{1}{\lambda} = \bar{X}, \quad (1.76)$$

где \bar{X} - точечная статистическая оценка для $M(X)$.

В формулах (1.75) и (1.76) можно принять:

$$\bar{X} - X_0 = \frac{1}{\lambda} = y, \quad (1.77)$$

где σ – точечная статистическая оценка для среднего квадратичного отклонения.

Исходя из условия (1.77) можно записать выражение:

$$X_0 = \bar{X} - y \quad (1.78)$$

Вероятность отказа изделия на интервале наработки (X_0, X) в силу выражения (1.75) можно определить как:

$$q(X) = \int_{X_0}^X \lambda \cdot e^{-\lambda(X-X_0)} dX = 1 - e^{-\lambda(X-X_0)}, \quad (1.79)$$

а вероятность безотказной работы на этом интервале:

$$P(x) = 1 - q(x) = e^{-\lambda(x-X_0)} \quad (1.80)$$

Согласно (1.80) вероятность безотказной работы детали может быть определена как:

$$P(x) = e^{-\lambda(x-X_0)} = k(X) \quad (1.81)$$

где $k(X)$ - коэффициент повторного использования массы детали с наработкой X .

На основании уравнения (1.81) можно определить наработку

$$X = X_0 - \frac{\ln k(X)}{\lambda}. \quad (1.82)$$

Задаваясь значением k и используя информацию по потокам возникновения повреждений по уравнению (1.82) можно рассчитать прогнозные значения наработок за доремонтный и межремонтный цикл для каждого изделия-аналога.

Для оценки наработки проектируемого блока цилиндров до появления одного из рассмотренных критических повреждений за доремонтный и межремонтный циклы $L_{нб}$ и $L_{рб}$ объединим статистически по $L_{ик}$, полученные для определения показателей удельной повреждаемости g_i для каждого двигателя-аналога, получим значения \bar{X} и σ . На основании этого по формулам (1.77) и (1.78) вычисляются интенсивность потока отказов λ и смещение X_0 .

Используя формулу (1.82), определяем наработку детали на отказ и интенсивность потока отказов $\lambda = \frac{1}{\sigma}$

$$X_{отк} = X_0 - \ln \frac{K_{пред}}{\lambda} = \bar{X}. \quad (1.83)$$

Из этой формулы на основании (1.81) и (1.76) определяем:

$$K_{\text{пред}} = P(X = \bar{X}) = e^{\ln(X_0 - \bar{X})} = \frac{1}{e} = 0,368. \quad (1.84)$$

Очевидно, что наработке блока цилиндров как базовой детали двигателя за доремонтный $L_{\text{нд}}$ и межремонтный циклы работы двигателя $L_{\text{рд}}$ должны соответствовать достаточно большие значения коэффициентов повторного использования массы.

С учетом сделанного предположения в дальнейших расчетах принимаем:

$$K=K(L_{\text{нд}})=0,99; K=K(L_{\text{нд}}+L_{\text{рд}})=0,97.$$

Информация о наработках блоков цилиндров двигателей-аналогов, полученная на основании (1.84), (1.82) и принятых предположений, приведена в таблице 1.8.

Таблица 1.8 – Информация по блокам цилиндров двигателей-аналогов

Показатель	Двигатель-аналог			
	№1	№2	№3	№4
$k_{\text{КТ}}$	1,35	2,19	2,68	3,90
Доремонтный цикл				
L_{min} , тыс.км	102,9	158,8	160,5	700
λ , 1/тыс.км	0,01044	0,01076	0,01665	-
$k_{\text{пред}}$	0,368	0,368	0,368	-
$L_{\text{нб}}$, тыс.км	198,7	251,7	220,6	700
$k(L_{\text{нд}})$	0,99	0,99	0,99	-
$L_{\text{нд}}$, тыс.км	103,9	159,7	161,1	700
Межремонтный цикл				
L_{min} , тыс.км	59,9	139,5	141,8	500
λ , 1/тыс.км	0,01533	0,02544	0,02587	-
$k_{\text{пред}}$	0,368	0,368	0,368	-
$L_{\text{рб}}$, тыс.км	125,1	178,8	180,5	-
$k(L_{\text{рд}})$	0,97	0,97	0,97	500
$L_{\text{рд}}$, тыс.км	61,9	140,7	143,0	500

Зависимость прогнозной наработки блока цилиндров от показателя $k_{\text{КТ}}$ может иметь вид

$$x = ak_{\text{КТ}}^b, \quad (1.85)$$

где a и b – параметры, подлежащие определению.

Логарифмируя (1.85), получим:

$$\ln x = \ln a + b \ln k_{\text{КТ}}. \quad (1.86)$$

Замена переменных $Z = \ln x$ и $t = \ln k_{\text{КТ}}$ приводит (1.86) к линейной зависимости:

$$Z = At + B. \quad (1.87)$$

Параметры уравнений (1.85) и (1.87) связаны соотношениями

$$a = e^B, \quad b = A, \quad (1.88)$$

где A и B определяются по методу наименьших квадратов.

Результаты статистической обработки информации о наработках блоков цилиндров до образования за доремонтной и межремонтной наработках хотя бы одного из критических повреждений представлены в таблице 1.9.

Таблица 1.9 – Формирование эмпирических зависимостей

Параметр	Двигатель-аналог			
	№1	№2	№3	№4
$k_{\text{КТ}}$	1,35	2,19	2,68	3,90
$t = \ln k_{\text{КТ}}$	0,3001	0,7839	0,9858	1,3610
$L_{\text{нб}}$	198,7	251,7	220,6	700
$Z = \ln L_{\text{нб}}$	5,2918	5,5282	5,3964	6,5511
	A=1,0745; B=4,7703		c=117,95; d=1,0745	
Выровненное значение $L_{\text{нб}}$	162,8	273,9	340,2	509,1
$L_{\text{нд}}$	103,9	159,7	161,1	700
$Z = \ln L_{\text{нд}}$	4,6434	5,0733	5,0820	6,5511
	A=1,6800; B=3,8965		c=49,23; d=1,6800	
Выровненное значение $L_{\text{нд}}$	81,5	183,7	257,9	484,4
$L_{\text{рб}}$	125,1	178,8	180,5	500
$Z = \ln L_{\text{рб}}$	4,8291	5,1863	5,1957	6,2146
	A=1,2250; B=4,3058		c=72,13; d=1,2250	
Выровненное значение $L_{\text{рб}}$	107,1	193,6	248,0	321,5
$L_{\text{рд}}$	61,9	140,7	143,0	500
$Z = \ln L_{\text{рд}}$	4,1255	4,9466	4,9628	6,2146
	A=1,8736; B=3,4554		c=31,67; d=1,8736	
Выравненное значение $L_{\text{рд}}$	55,6	137,6	200,8	405,6

В соответствии с выражением (1.85) наработка за доремонтный цикл описывается зависимостями:

$$k=k_{\text{пред}}=0,368, \quad L_{\text{ноб}}=117,95 K_{\text{КТ}}^{1,0745} \text{ тыс. км}; \quad (1.89)$$

$$k=0,99, \quad L_{\text{нд}}=49,23 K_{\text{КТ}}^{1,6800} \text{ тыс. км.} \quad (1.90)$$

Для межремонтной наработки имеют место зависимости:

$$k=k_{\text{пред}}=0,368, \quad L_{\text{рб}}=72,13 K_{\text{КТ}}^{1,2250} \text{ тыс. км}; \quad (1.91)$$

$$k=0,97, \quad L_{\text{рд}}=31,67 K_{\text{КТ}}^{1,8736} \text{ тыс. км.} \quad (1.92)$$

Пусть по данным конструкторской документации определено числовое значение комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей блока цилиндров проектируемого двигателя $k_{\text{КТ}}=1,79$. Используя зависимости (1.89)-(1.92) по значению $k_{\text{КТ}}$ получим прогнозные оценки наработки:

$$L_{\text{ноб}}=117,951,79^{1,0745} = 220,5 \text{ тыс. км}; \quad (1.93)$$

$$L_{\text{нд}}=49,231,79^{1,6800} = 130,9 \text{ тыс. км}; \quad (1.94)$$

$$L_{\text{рб}}=72,131,79^{1,2250} = 147,2 \text{ тыс. км}; \quad (1.95)$$

$$L_{\text{рд}}=31,671,79^{1,8736} = 94,3 \text{ тыс. км.} \quad (1.96)$$

Оценим показатели ремонтпригодности блока цилиндров проектируемого двигателя.

Пусть проектная стоимость двигателя составляет 200000 р. Полагая, что стоимость деталей двигателя пропорциональна их массе, определим стоимость нового блока цилиндров $S_{\text{н}}=24000$ р. Стоимость ремонта блока цилиндров $S_{\text{р.ном}}=9500$ р. (можно определить по расчетным данным и опыту ремонта двигателей-аналогов). Стоимость сборочных работ – $S_{\text{сб}}=0,15 \cdot S_{\text{р.ном}}=1425$ р.

Собственный показатель ремонтпригодности блока цилиндров определяется при условиях:

$$k=k_{\text{крат}}=0,368, \quad k_{\text{см}}=1-k=0,632, \quad k_{\text{р}}=1-k_{\text{см}}=0,368.$$

Стоимость ремонта блока цилиндров составляет:

$$S_{\text{р}}=k_{\text{см}}S_{\text{н}}+k_{\text{рем}}S_{\text{р.ном}}=0,632 \cdot 24000+0,368 \cdot 9500=18664 \text{ р.}$$

С учетом (1.93) и (1.5.95) по формуле (1.58) получим оценку собственного показателя ремонтпригодности блока цилиндров проектируемого двигателя:

$r=1$ - к началу первого межремонтного цикла

$$P_{1\sigma} = \frac{0,368 \cdot 147,2}{(1 + 18664/200000)220,5} = 0,138;$$

$r=2$ – к началу второго межремонтного цикла

$$P_{2\sigma} = \frac{0,368 \cdot 147,2}{(1 + 2 \cdot 18664/200000)220,5} = 0,097.$$

Показатель ремонтпригодности блока цилиндров относительно проектируемого двигателя при условии:

$$k=0.99, \quad k_{cm}=1-k=0.01, \quad k_p=0.685.$$

Стоимость ремонта блока цилиндров составит:

$$S_p = k_{cm} S_H + k_p S_{p.ном} = 0,01 \cdot 24000 + 0,685 \cdot 9500 = 6748 \text{ р.}$$

С учетом (1.94) и (1.96) по формуле (1.60) получим оценку ремонтпригодности блока цилиндров относительно двигателя:

$r=1$ - к началу первого межремонтного цикла двигателя:

$$P_{1д} = \frac{0,99 \cdot 94,3}{(1 + (6748 + 1425)/240000)130,9} = 0,532;$$

$r=2$ – к началу второго межремонтного цикла двигателя:

$$P_{2д} = \frac{0,97 \cdot 94,3}{(1 + 2 \cdot (6748 + 1425)/240000)130,9} = 0,416.$$

1.8 Расчет метода структурных схем надежности сложных систем

Под сложной системой понимают объект, предназначенный для выполнения заданных функций, который может быть расчленен на элементы, каждый из которых также выполняет определенные функции и находится во взаимодействии с другими элементами системы.

Сложные системы с позиций надежности обладают следующими отличительными особенностями:

а) большое число элементов, отказ одного из которых может привести к отказу всей системы;

б) даже у систем одинакового конструктивного исполнения каждый экземпляр имеет свои индивидуальные черты, сказывающиеся на входных параметрах системы;

в) сложным системам присуща в определенной мере самоорганизация, саморегулирование или самоприспособление, когда система способна найти наиболее устойчивое для своего функционирования состояние;

г) для сложной системы часто возможно восстановление работоспособности по частям без прекращения ее функционирования;

д) не все элементы одинаково влияют на надежность сложных систем, многие из них сказываются лишь на эффективности ее работы.

Факторы (а) – (б) отрицательно влияют на надежность сложных систем, (в) – (д) - положительно.

Под элементом понимают составную часть сложной системы, которая может характеризоваться самостоятельными входными и выходными параметрами. Расчленение сложной системы на элементы достаточно условно и зависит от постановки задачи расчета надежности. Например, при анализе работоспособности технологической линии, ее элементами могут считаться отдельные установки и станки, транспортные и загрузочные устройства и т.д. В свою очередь, станки и устройства также могут считаться сложными системами и при оценке их надежности должны быть разделены на элементы - узлы, блоки, которые, в свою очередь делятся на детали и т.д.

При определении структуры сложной системы в первую очередь необходимо оценить влияние каждого элемента и его работоспособности на работоспособность системы в целом. С этой точки зрения целесообразно разделить все элементы на четыре типа:

а) элементы, отказ которых сам по себе или в сочетании с отказами других элементов вызывает отказ всего изделия (детали коробки передач);

б) элементы, влияющие на формирование одного или нескольких входных параметров изделия (стеклоочиститель, светотехника и др.);

в) элементы, влияющие на работоспособность других элементов (водяной и масляный насосы, термостат и др.). Их изменение для остальных частей изделия аналогично изменению внешних условий работы (повышение температуры и вибраций, газовыделение и т.п.);

г) элементы, отказ которых практически не влияет на работоспособность системы (деформация кожуха, изменение окраски поверхности и т.п.).

Очевидно, что при анализе надежности сложных систем имеет смысл включать в рассмотрение только элементы первого типа. У сложных систем, состоящих только из таких элементов, необходимо и достаточно обеспечить безотказную работу каждого элемента в отдельности. Такие системы более характерны для радиоэлектроники.

Автомобиль состоит из элементов всех четырех типов. В этом случае элементы нельзя считать независимыми, и необходимо рассматривать систему или подсистему в целом.

С позиций надежности можно выделить следующие структуры сложных систем:

а) расчлененные - у которых надежность отдельных элементов может быть заранее определена, т.к. их отказы являются независимыми событиями;

б) связанные - у которых отказ элементов является зависимым событием, связанным с изменением параметров всей системы;

в) комбинированные - состоящие из подсистем со связанной структурой и с независимым формированием показателей надежности для каждой из подсистем.

Автомобиль относится к объектам с комбинированной системой.

Для сложных систем безотказность работы элементов - необходимое, но не достаточное условие для безотказной работы всей системы. Во-первых, большую роль играют взаимосвязи, когда работоспособные элементы оказывают побочные воздействия на другие элементы и могут вывести их из строя (например, ослабление болтов крепления ведущего колеса может привести к выходу из строя деталей трансмиссии). Во-вторых, малые изменения параметров каждого из элементов (в пределах нормы) могут дать такое сочетание, которое неблагоприятно отразится на работоспособности системы.

При расчете обычно требуется определить вероятность безотказной работы $P(t)$ всей системы.

Наиболее характерен случай, когда отказ одного элемента выводит из строя всю систему, как это имеет место при последовательном соединении элементов, схема которого представлена на рис. 1.15.

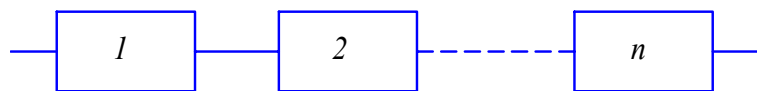


Рисунок 1.15 – Последовательное соединение элементов

Этому условию подчиняются большинство приводов машин и механизмы передач. Так, если в приводе машины выйдет из строя любая шестерня, подшипник, муфта и т.д., то весь привод перестанет функционировать. При этом отдельные элементы не обязательно должны быть соединены последовательно.

Например, подшипники на валу редуктора работают конструктивно параллельно друг с другом, однако выход из строя любого из них приводит к отказу системы.

В системе с последовательным соединением для безотказной работы в течение некоторой наработки t необходимо и достаточно, чтобы каждый из ее n элементов работал безотказно в течении этой наработки.

Расчет надежности таких систем основан на допущении о том, что все распределения наработки до отказа и времени восстановления отдельных элементов являются экспоненциальными, то есть процесс функционирования системы является стационарным, без последствия и ординарным.

Стационарность процесса означает постоянство параметра потока отказов в течение заданного промежутка времени.

Отсутствие последствия означает независимость появления отказов элементов системы, то есть отказы элементов системы взаимно независимы и не влияют друг на друга.

Ординарность процесса означает практическую невозможность появления двух или более отказов в одно и то же время. Принятое допущение справедливо, если средняя наработка до отказа элементов системы значительно больше времени их восстановления. На практике это условие обычно выполняется.

Считая отказы элементов независимыми, вероятность одновременной безотказной работы n элементов определяется по теореме умножения вероятностей: вероятность совместного появления независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(t) = p_1(t)p_2(t)\dots p_n(t) = \prod_{i=1}^n p_i(t) = \prod_{i=1}^n (1 - q_i(t)) . \quad (1.97)$$

При одинаковой надежности элементов эта формула принимает вид

$$P(t) = P_i^n. \quad (1.98)$$

Сложные системы, состоящие из элементов с достаточно высокой надежностью, могут иметь общую низкую надежность из-за большого количества элементов. Например, если узел состоит всего из 50 деталей, а вероятность безотказной работы каждой детали за выбранный промежуток времени составляет $P_i = 0,99$, то вероятность безотказной работы узла будет составлять:

$$P(t) = (0,99)^{50} = 0,55.$$

Если же узел состоит из 400 деталей с аналогичной безотказностью, то $P(t) = 0,018$, то есть система практически неработоспособна.

Высокий уровень надежности систем с последовательным соединением элементов достигается в результате использования надежных элементов, правильного назначения периодичности технического обслуживания,

обеспечения быстрого восстановления или замены отказавших элементов в процессе эксплуатации.

При параллельном соединении элементов, схема которого представлена на рисунке 1.16, отказ любого элемента не приводит к отказу системы, пока не откажут все соединенные элементы.

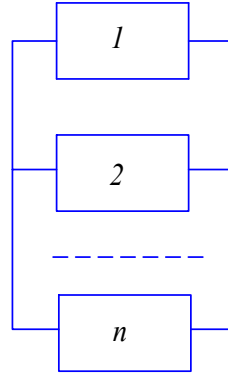


Рисунок 1.16 – Параллельное соединение элементов

Для отказа системы с параллельным соединением элементов в течение наработки t необходимо и достаточно, чтобы все ее элементы отказали в течение этой наработки. Так что отказ системы заключается в совместном отказе всех элементов, вероятность чего (при допущении независимости отказов) может быть найдена по теореме умножения вероятностей как произведение вероятностей отказа элементов:

$$Q = q_1 q_2 \dots q_n = \prod_{i=1}^n q_i = \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (1.99)$$

Соответственно, вероятность безотказной работы определяется:

$$P = 1 - Q = 1 - \prod_{i=1}^n q_i = 1 - \prod_{i=1}^n (1 - p_i). \quad (1.100)$$

Для систем из равнонадежных элементов ($p_i = p$) можно записать:

$$Q = q^n, \quad (1.101)$$

$$P = 1 - (1 - p)^n, \quad (1.102)$$

т.е. надежность системы с параллельным соединением повышается при увеличении числа элементов (например, при $p = 0,9$ и $n = 2$ $P = 0,99$, а при $n = 3$ $P = 0,999$).

В зависимости от поставленной задачи на основании результатов расчета характеристик надежности сложных систем делаются выводы и принимаются решения о необходимости изменения или доработки элементной базы, резервировании отдельных элементов или узлов, об установлении определенного режима профилактического обслуживания, о номенклатуре и количестве запасных элементов для ремонта и т.д.

Для повышения надежности сложных систем часто применяют структурное резервирование, то есть введение в структуру объекта дополнительных элементов, выполняющих функции основных элементов в случае их отказа.

Классификация различных способов резервирования осуществляется по следующим признакам:

а) по схеме включения резерва:

- общее резервирование, при котором резервируется объект в целом;
- раздельное резервирование, при котором резервируются отдельные элементы или их группы;
- смешанное резервирование, при котором различные виды резервирования сочетаются в одном объекте;

б) по способу включения резерва:

- постоянное резервирование - без перестройки структуры объекта при возникновении отказа его элемента;
- динамическое резервирование, при котором при отказе элемента происходит перестройка структуры схемы. В свою очередь оно подразделяется на:

1) резервирование замещением, при котором функции основного элемента передаются резервному только после отказа основного;

2) скользящее резервирование, при котором несколько основных элементов резервируется одним или несколькими резервными, каждый из которых может заменить любой основной (т.е. группы основных и резервных элементов идентичны);

в) по состоянию резерва:

- нагруженное (горячее) резервирование, при котором резервные элементы (или один из них) постоянно присоединены к основным и находятся в одинаковом с ними режиме работы; оно применяется тогда, когда не допускается прерывания функционирования системы во время переключения отказавшего элемента на резервный;

- облегченное резервирование, при котором резервные элементы (по крайней мере один из них) находятся в менее нагруженном режиме по сравнению с основными, и вероятность их отказа в этот период мала;

- ненагруженное (холодное) резервирование, при котором резервные элементы до начала выполнения ими функций находятся в ненагруженном режиме. В этом случае для включения резерва необходимо соответствующее устройство. Отказ ненагруженных резервных элементов до включения вместо основного элемента невозможен.

Основной характеристикой структурного резервирования является кратность резервирования - отношение числа резервных элементов к числу

резервируемых ими основных элементов, выраженное несокращаемой дробью (типа 2:3; 4:2 и т.д.). Резервирование одного основного элемента одним резервным (т.е. с кратностью 1:1) называется дублированием.

Количественно повышение надежности системы в результате резервирования или применения высоконадежных элементов можно оценить по коэффициенту выигрыша надежности, определяемому как отношение показателя надежности до и после преобразования системы. Например, для системы из n последовательно соединенных элементов после резервирования одного из элементов (k -го) аналогичным по надежности элементом коэффициент выигрыша надежности по вероятности безотказной работы составит

$$G_p = \frac{P''}{P} = \frac{p_1 p_2 \dots p_{k-1} [1 - (1 - p_k)^2] p_{k+1} \dots p_n}{p_1 p_2 \dots p_{k-1} p_k p_{k+1} \dots p_n} = \frac{1 - (1 - p_k)^2}{p_k} = 2 - p_k, \quad (1.103)$$

где P и P'' – вероятности безотказной работы соответственно до и после преобразования системы.

Из формулы следует, что эффективность резервирования (или другого приема повышения надежности) тем больше, чем меньше надежность резервируемого элемента (при $p_k = 0,9$ $G_p = 1,1$, при $p_k = 0,5$ $G_p = 1,5$). Следовательно, при структурном резервировании максимального эффекта можно добиться при резервировании самых ненадежных элементов (или групп элементов).

Расчет количественных характеристик надежности систем с резервированием отдельных элементов или групп элементов во многом определяется видом резервирования. При этом расчетные зависимости получены без учета надежности переключающих устройств, обеспечивающих перераспределение нагрузки между основными и резервными элементами (т.е. для «идеальных» переключателей). В реальных условиях введение переключателей в структурную схему необходимо учитывать и в расчете надежности систем.

Расчет систем с *нагруженным резервированием* осуществляется по формулам последовательного и параллельного соединения элементов. При этом считается, что резервные элементы работают в режиме основных как до, так и после их отказа, поэтому надежность резервных элементов не зависит от момента их перехода из резервного состояния в основное и равна надежности основных элементов.

Для системы с последовательным соединением n элементов при общем резервировании с кратностью l можно записать выражение:

$$P_{об} = 1 - (1 - P)^{l+1} = 1 - \left(1 - \prod_{i=1}^n p_i\right)^{l+1}. \quad (1.104)$$

Схема системы с последовательным соединением при общем резервировании представлена на рисунке 1.17.

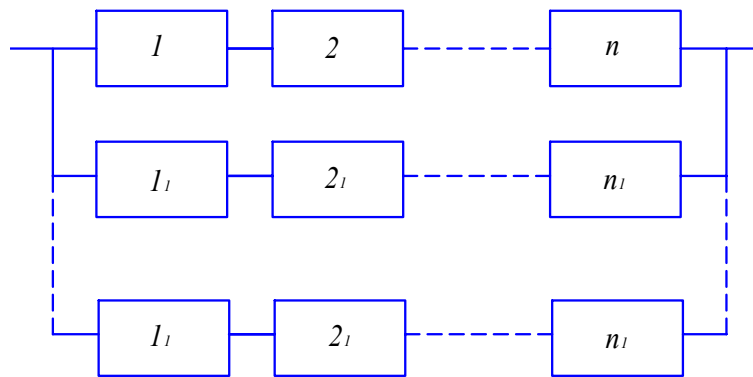


Рисунок 1.17 – Общее нагруженное резервирование

В частности, при дублировании ($l = 1$) выражение (1.104) принимает вид:

$$P_{об} = 1 - (1 - P)^2 = P(2 - P). \quad (1.105)$$

При *раздельном резервировании*, схема которого представлена на рисунке (1.18), справедливо выражение:

$$P_{раз} = \prod_{i=1}^n [1 - (1 - p_i)^{l+1}], \quad (1.106)$$

а при раздельном дублировании ($l=1$)

$$P_{раз} = \prod_{i=1}^n [1 - (1 - p_i)^2] = \prod_{i=1}^n p_i(2 - p_i) = p \prod_{i=1}^n (2 - p_i). \quad (1.107)$$

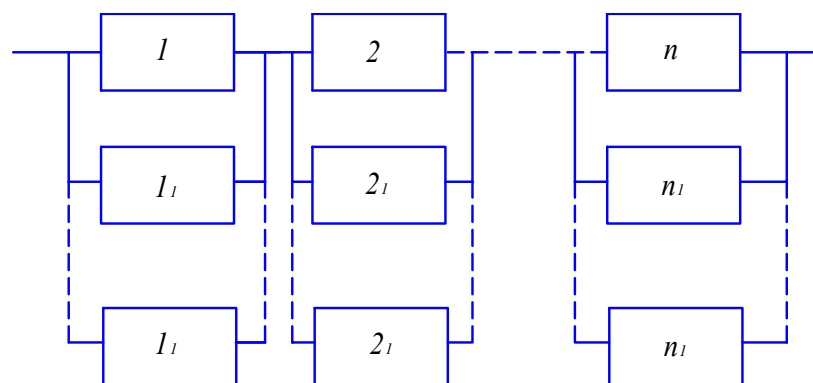


Рисунок 1.18 – Раздельное нагруженное резервирование

Тогда коэффициенты выигрыша надежности по вероятности безотказной работы при дублировании:

$$G_{об} = \frac{P_{об}}{P} = 2 - P, \quad (1.108)$$

$$G_{раз} = \frac{P_{раз}}{P} = \prod_{i=1}^n (2 - p_i), \quad (1.109)$$

откуда следует, что отдельное резервирование эффективнее общего (например, для системы из трех одинаковых элементов при $p = 0,9$ $G_{об} = 1,27$, $G_{раз} = 1,33$).

При *ненагруженном резервировании* (рисунок 1.19) резервные элементы последовательно включаются в работу при отказе основного, затем первого резервного и т.д. элементов, поэтому надежность резервных элементов зависит от момента их перехода в основное состояние. Такое резервирование в различных сложных системах встречается наиболее часто, т.к. оно, по сути, аналогично замене отказавших элементов и узлов на запасные.

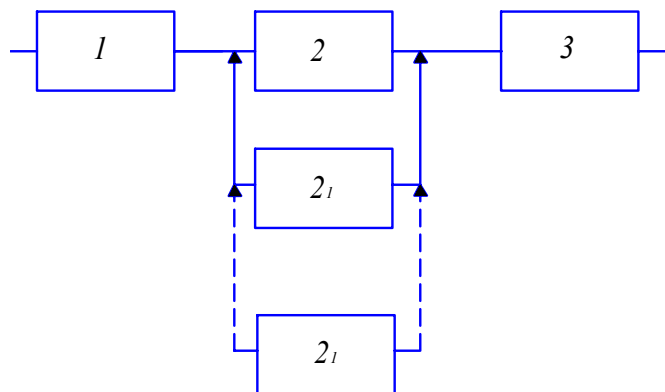


Рисунок 1.19 – Ненагруженное резервирование

В таких системах надежность резервных элементов зависит от момента их перехода в основное состояние. Такое резервирование в различных сложных системах встречается наиболее часто, т.к. оно, по сути, аналогично замене отказавших элементов и узлов на запасные.

Если резервные элементы до их включения абсолютно надежны, то для системы с ненагруженным резервированием кратности l (всего элементов $l+1$) можно записать выражения:

$$Q = \frac{1}{(l+1)!} \prod_{i=1}^{l+1} q_i; \quad (1.110)$$

$$P = 1 - \frac{1}{(l+1)!} \prod_{i=1}^{l+1} (1 - p_i), \quad (1.111)$$

т.е. вероятность отказа в $(l+1)!$ раз меньше, чем при нагруженном (параллельном) соединении.

Для идентичных по надежности основного и резервного элементов:

$$P = 1 - \frac{1}{(l+1)!} (1 - p)^{l+1}. \quad (1.112)$$

При экспоненциальном распределении наработки (простейшем потоке отказов) в случае $\lambda t \ll 1$ можно воспользоваться приближенной формулой:

$$P \approx 1 - \frac{(\lambda t)^{l+1}}{(l+1)!}. \quad (1.113)$$

Облегченное резервирование используется при большой инерционности переходных процессов, происходящих в элементе при его переходе из резервного в основной режим, и нецелесообразности применения нагруженного резервирования из-за недостаточного выигрыша в надежности. Очевидно, облегченный резерв занимает промежуточное положение между нагруженным и ненагруженным.

Точные выражения для расчета надежности систем при облегченном резервировании весьма громоздки и неоднозначны, однако при экспоненциальном распределении наработки справедлива приближенная формула:

$$P = \frac{1}{(l+1)!} \lambda (\lambda + \lambda_0)(\lambda + 2\lambda_0) \dots [\lambda + l\lambda_0] \cdot t^{l+1} = \frac{t^{l+1}}{(l+1)!} \prod_{i=0}^l (\lambda + i\lambda_0), \quad (1.114)$$

где λ_0 - интенсивность отказов элементов в облегченном режиме, l - кратность резервирования.

Скользящее резервирование используется для резервирования нескольких одинаковых элементов системы одним или несколькими одинаковыми резервными (рисунок 1.20, здесь все элементы идентичны, а элемент 4 - избыточный). Очевидно, отказ системы произойдет, если из общего количества идентичных элементов (основных и резервных) число отказавших превышает число резервных.

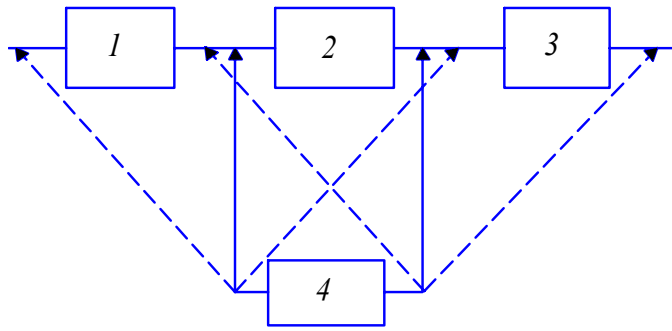


Рисунок 1.20 – Скользящее резервирование

Метод резервирования для механических систем применяется в чистом виде сравнительно редко. В автомобиле примером могут служить двойные задние колеса (нагруженный резерв), запасное колесо и ручной тормоз (ненагруженный резерв). В общем машиностроении в ответственных узлах используют двойную систему смазки, двойные и тройные уплотнители.

Для механических систем более характерно для повышения надежности применение принципа избыточности (создание запаса прочности за счет повышения площади опоры и т.д.), который является более общим, чем резервирование. При создании надежных систем принцип проявляется в том, что ресурс изделия устанавливается намного ниже среднего срока службы до отказа. Недоиспользование потенциальной долговечности изделия дает гарантию его безотказной работы.

Пример. Пусть для простейшей системы из четырех звеньев (это может быть часть более сложной системы) известны значения вероятности безотказной работы каждого звена (рисунок 1.21, а): $p_1 = 0,99$; $p_2 = 0,9$; $p_3 = p_4 = 0,98$.

Тогда вероятность безотказной работы всей системы, подсчитанная по формуле (1.97), будет равна:

$$P(t) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot p_4 = 0,855$$

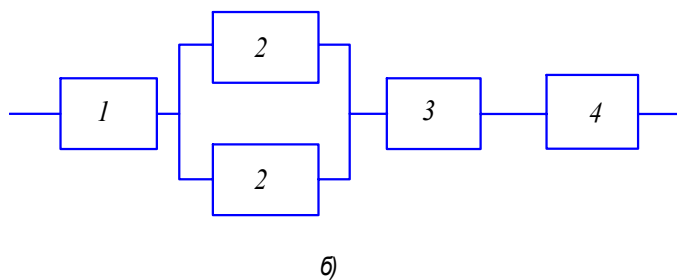
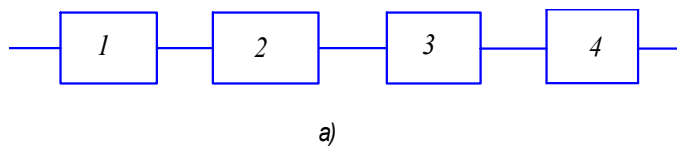


Рисунок 1.20 – Схема для расчета системы из четырех элементов

Если необходимо повысить надежность системы без изменения качества самих элементов, то это можно сделать за счет дублирования второго элемента, надежность которого значительно ниже остальных элементов (рисунок 1.20, б).

В этом случае вероятность безотказной работы основного и резервного элементов 2 и 2_1 вычисляется по формуле (1.115):

$$P_{2_{рез}} = 1 - (1 - p_2)^2 = p_2(2 - p_2) = 1 - (1 - 0,9)^2 = 0,99.$$

Таким образом, надежность резервированного элемента стала на порядок выше, чем у элементов пары.

Поэтому вероятность безотказной работы всей системы возрастет и станет равной:

$$P(t) = p_1 \cdot p_3 \cdot p_4 \cdot (2 - p_2) = 0,99 \cdot 0,99 \cdot 0,98 \cdot 0,98 = 0,94.$$

Для сложных систем обычно просчитывают аналогичным образом различные варианты соединения и выбирают оптимальное решение.

1.9 Контрольные вопросы

1. Зависимость экономической эффективности изделия во времени.
2. Определение роста надежности по результатам испытания на этапе отработки и производства изделия.
3. Определение сущности марковского процесса с кусочно-линейной аппроксимацией.
4. Понятие квантования функции во времени.
5. Преимущества и недостатки действующих методик по оценке показателей ремонтпригодности.
6. Структура показателей удельного полезного эффекта от ремонта элемента иерархического уровня к началу очередного межремонтного цикла.
7. Правила формирования универсального комплексного показателя ремонтпригодности.
8. Определение удельной материалоемкости двигателя внутреннего сгорания.
9. Оценочный показатель жесткости двигателя внутреннего сгорания.
10. Показатель характеристики физико-механических свойств материала детали.
11. Оценочный показатель, характеризующий организацию рабочего процесса двигателя внутреннего сгорания.

12. Структура комплексного показателя конструктивно-технологических особенностей применительно к блоку цилиндров дизельных двигателей.
13. Понятие уровня повреждаемости конструктивных элементов детали и ее количественная оценка.
14. Метод установления эмпирической зависимости между показателем удельной повреждаемости и показателем конструктивно-технологических особенностей на примере блока цилиндров двигателя внутреннего сгорания.
15. Метод установления эмпирической зависимости между минимальной наработкой до появления критических повреждений и показателем конструктивно-технологических особенностей на примере блока цилиндров двигателя внутреннего сгорания.
16. Поясните понятие сложной системы и ее особенности с позиций надежности.
17. Перечислите четыре группы элементов сложных систем.
18. Поясните отличия основных типов структур сложных систем - расчлененных, связанных и комбинированных.
19. Поясните расчет схемной надежности сложных систем при последовательном соединении элементов.
20. Поясните расчет схемной надежности сложных систем при параллельном соединении элементов.
21. Поясните термин структурного резервирования.
22. Перечислите виды резервирования в зависимости от схемы включения резерва.
23. Перечислите виды резервирования в зависимости от способа включения резерва.
24. Перечислите виды резервирования в зависимости от состояния резерва.
25. Дайте определения характеристикам резервирования - кратности и коэффициенту выигрыша надежности.
26. Что такое дублирование?
27. Поясните расчет схемной надежности при нагруженном резервировании.
28. Поясните расчет схемной надежности при раздельном резервировании.
29. Поясните расчет схемной надежности при ненагруженном резервировании.
30. В чем заключается принцип избыточности при повышении надежности?

2 ОСНОВЫ ПЛАНИРОВАНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

2.1 Основные понятия и определения

В соответствии с требованиями мировой автомобилизации как на этапах проектирования, так и в процессе эксплуатации и последующей утилизации необходимо обеспечить ряд свойств автомобилей: безопасность движения, производительность, топливную экономичность, надежность, эргономику и другие свойства. Особое значение имеют всестороннее изучение, анализ и разработка методов научного прогноза развития и обеспечения требуемых свойств автомобиля.

Задача эффективного решения этих и других задач, необходимость оптимизации принимаемых решений требуют перехода от частных эмпирических зависимостей и связей к созданию и математическому описанию объектов, перехода от детерминистических закономерностей к закономерностям более широкого характера – стохастических или вероятностных. Для этих целей проводят научные исследования, которые базируются на результатах проведенного эксперимента и содержат соответствующие теоретические обобщения. В общем случае научное исследование включает ряд этапов: подготовку к исследованию; проведение экспериментального исследования и обработку опытных данных; анализ и синтез полученных результатов; проверку результатов обобщения и оценку экономической эффективности результатов исследования.

Подготовка к исследованию включает четкое формулирование цели, предмета и выбор объекта исследования. Под целью исследования понимается результат проводимого исследования. Цель исследования должна быть сформулирована точно и иметь количественную оценку. Под предметом исследования понимается содержательная ее часть. Она должна быть зафиксирована в наименовании темы и связана с установлением свойств и связей исследуемых объектов необходимых и достаточных для достижения цели исследования. В качестве объекта исследования следует выбирать типичный представитель, характерный для изучения сущности явления или раскрытия закономерности. Этот этап базируется на основании накопленных знаний (патентный поиск, изучение результатов ранее выполненных исследований по данной проблеме, публикациями в специальной литературе и других источниках информации). На основе этого формулируется рабочая гипотеза и задача исследования, разрабатывается программа и общая методика.

Рабочая гипотеза – это научное предположение о возможных механизмах, причинах и факторах, обуславливающих изучаемое явление, которое еще не доказано, но вполне вероятно. Основное требование, которым должна удовлетворять гипотеза – это возможность ее экспериментальной проверки. Она определяет круг решаемых задач для достижения поставленной цели.

Программа и методика обосновывают метод исследования. Метод исследования – это путь или способ, обеспечивающий получение практических результатов. Различают конкретно-научные или специальные и философские методы. К конкретно-научным методам относятся: математический, регрессионный, и корреляционный анализ, методы индукции и дедукции, системный анализ и т.д.

Программа и методика исследования в общем случае включают:

- составление календарного плана выполнения работ с укрупненным поэтапным содержанием;
- обоснование методических положений проведения исследования;
- выбор технических средств и экспериментального оборудования;
- математическое моделирование объекта исследования;
- планирование эксперимента;
- обоснование методов статистической обработки опытных данных и анализ результатов эксперимента;
- оптимизацию выходных показателей исследуемых процессов;
- выбор метода экономической оценки результатов исследования.

В каждом конкретном случае этапы уточняются.

При изучении влияния факторов на выходные показатели объектов исследования технических систем возникает необходимость решения трех типов задач. К первому типу относятся задачи, связанные с оценкой факторов на существенность их влияния; ко второму – установление вида уравнения на основе раскрытия связей между факторами, оценки их взаимодействия и влияние на выходные параметры; к третьему – поиск условий, обеспечивающих требуемый уровень параметра оптимизации.

Из-за трудности выделения влияния факторов обычно используют статистический метод, а проведение эксперимента – активным или пассивным методом. Для управляемых объектов исследования, которые предполагают возможность активного воздействия на факторы, используются активные эксперименты. Для этого применяют математические методы планирования. Если такой возможности не имеется, то проводится «пассивный эксперимент».

2.2 Выбор параметров оптимизации, факторов и уровней их варьирования

Под параметром оптимизации понимается количественная характеристика цели экспериментального исследования. Обоснованный выбор параметра оптимизации определяет обоснованную постановку задачи исследования. Каждый реальный объект может характеризоваться одним или несколькими параметрами. Возможные параметры могут быть классифицированы на:

- экономические (прибыль, рентабельность, суммарные затраты на приобретение и последующую эксплуатацию и др.);

- технико-экономические (дифференциальные и комплексные показатели качества и др.);
- эргономические;
- технологические (физико-механические свойства, точностные параметры сборочной единицы или изделия в целом и др.);
- экологические (выбросы вредных веществ и влияние на окружающую среду и др.) и др.

Параметр оптимизации должен иметь физический смысл, быть количественным, однозначным и универсальным. Требования однозначности заключаются в том, что заданному набору количественных значений факторов должно соответствовать одно значение параметра оптимизации, а универсальность – способность параметра всесторонне оценивать объект исследования. Параметр оптимизации должен подчиняться определенному закону распределения. Если объект характеризуется несколькими выходными параметрами, то необходимо обосновать возможность уменьшения их числа. Эта задача решается путем использования корреляционного анализа, позволяющего с помощью коэффициента парной корреляции установить тесноту связи между отдельными парами выходных параметров. Правомочность использования коэффициента парной корреляции возможна только в том случае, если связь между параметрами имеет линейный вид, и каждый из них подчиняется нормальному закону. Значимость коэффициента парной корреляции сравнивается с критическим табличным значением при определенном уровне надежности.

После выбора параметра оптимизации, устанавливаются факторы, влияющие на объект исследования. Фактором называют независимую переменную, оказывающую один из возможных способов воздействия на объект исследования. Фактор должен иметь конкретное наименование и область определения, в которой он может иметь несколько значений, определяющих его состояние. Принятые в эксперименте количественные и качественные состояния фактора называют его уровнями. В качестве факторов рекомендуется использование независимых переменных, отвечающих следующим требованиям: управляемость, однозначность, совместимость с другими, не связанными между собой линейными корреляционными связями. В этом случае можно воспользоваться математической теорией планирования активных многофакторных статистических экспериментов. Если это условие не выполняется, то используют метод пассивных экспериментов.

Число опытов, определяющих объем экспериментального исследования, зависит от количества учитываемых факторов и подчиняется показательной функции. С целью сокращения объемов экспериментального исследования используют объективные методы отсеивания несущественных факторов.

2.3 Математическая модель объекта исследования

В общем случае при исследовании систем можно использовать методы математического и физического моделирования. В отличие от физических моделей, которые менее сложны, чем натуральный объект, математические модели описывают структуру функциональных связей между варьируемым составом значимых факторов и выходными параметрами. При этом необходимо обеспечивать подобие реакции «выхода» на «вход», которые должны находиться как в статическом, так и динамическом математическом равновесии, т.е. объект представляется в виде так называемого «черного ящика» (рисунок 2.1).

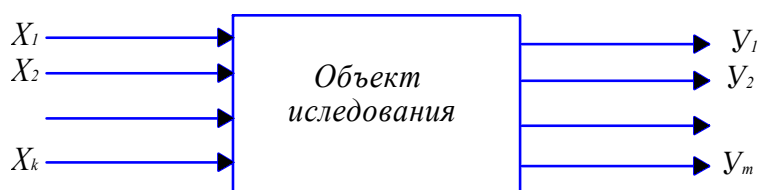


Рисунок 2.1 – Схема объекта исследования, используемая при разработке математической модели

Каждой из стрелок, направленной к объекту исследования, приписан соответствующий фактор, сумма которых образует «вход». Каждая из стрелок, направленная от объекта исследования, характеризует параметр оптимизации, а их совокупность – «выход». Использование изложенного положения позволяет при помощи математических моделей выразить функциональную связь между реализациями входных факторов и выходных параметров в виде функционала

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.1)$$

Функционал (2.1) характеризует поверхность отклика в векторном пространстве. Так как функциональная связь неизвестна, то в качестве отклика рекомендуется использовать полиномиальные уравнения следующего вида:

$$y = B_0 + \sum_{i=1}^k B_i X_i + \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^k B_{ij} X_i X_j + \sum_{i=1}^k B_{ii} X_i^2 + \dots, \quad (2.2)$$

где y – параметр оптимизации;

x_i – варьируемые при проведении эксперимента факторы, $i=1, 2, \dots, k$;

$\beta_0, \beta_i, \beta_{i,j}, \beta_{ii}$ – теоретические коэффициенты регрессии для линейных взаимодействий и членов второго порядка.

После установления в результате проведенного эксперимента численных значений коэффициентов регрессии уравнение (2.2) можно записать в виде:

$$\hat{y} = b_0 + \sum_{i=1}^k b_i x_i + \sum_{\substack{ij \\ i \neq j}}^k b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^k b_{ii} x_i^2 + \dots, \quad (2.3)$$

где \hat{y} - расчетное значение параметра оптимизации;
 $b_0, b_i, b_{i,j}, b_{ii}$ – оценки коэффициентов регрессии;
 k – число факторов.

Величины коэффициентов регрессии характеризуют степень влияния соответствующих факторов на величину параметра оптимизации. При исследовании вначале принимают полином первой степени и оценивают адекватность опытным данным. Если результаты неудовлетворительны, то степень полинома последовательно повышают до тех пор, пока не будет адекватным опытным данным.

Пример линейной модели для двух факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2, \quad (2.4)$$

где b_1, b_2 – коэффициенты при линейных эффектах.

Модель второго порядка для двух факторов:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + b_{12} x_1 x_2 + b_{11} x_1^2 + b_{22} x_2^2, \quad (2.5)$$

где b_1 и b_2 – коэффициенты эффекта парного взаимодействия;
 b_{11}, b_{22} – коэффициенты эффекта второго порядка.

Если исследуемая система характеризуется несколькими параметрами оптимизации, то для каждого из них устанавливается своя математическая модель (функция отклика) типа (2.3).

2.4 Ранжирование факторов

Ранжированием называют определенное расположение факторов по ожидаемой степени их влияния на параметр оптимизации. Каждому фактору присваивается номер места (ранг). Первое место присваивается наиболее значимому фактору, а последнее – наименее значимому. Остальные факторы располагают между ними в соответствии с их влиянием на параметр оптимизации.

Процедура ранжирования заключается в следующем. Вначале разрабатывают анкету, которая включает параметр оптимизации, факторы и уровни их варьирования, вопросы к эксперту. Формулирование вопросов должно обеспечивать однозначность их толкования и оценку каждого из них в количественном виде. Выбор экспертов производится на основе компетентности специалистов в области исследуемой проблемы. Заполняя анкету, эксперт определяет место факторов в ранжируемом ряду. Эксперту предоставляется право на включение дополнительных вопросов и излагать свое мнение об изменении интервалов варьирования.

После проведения опроса анкеты с мнением экспертов подвергаются математическому анализу с целью оценки согласованности мнений специалистов; оценке неслучайного характера совпадения мнений специалистов и формировании правил отсева несущественных факторов.

Общий вид матрицы результатов в обобщенном виде представляются в виде сводной таблицы 2.1.

Таблица 2.1 - Матрица результатов экспертного опроса

Факторы	Эксперты					
	1	2	...	i	...	k
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1i}	...	a_{1k}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2i}	...	a_{2k}
...
j	a_{j1}	a_{j2}	...	a_{ji}	...	a_{jk}
...
m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mi}	...	a_{mk}

Математическая обработка матрицы проводится в следующей последовательности.

1. Определяется сумма рангов $\sum_{i=1}^m a_{ij}$ матрицы по каждому из факторов.
2. Рассчитывается средняя сумма рангов по формуле:

$$T = \frac{\sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^m a_{ij}}{k}, \quad (2.6)$$

где m – число экспертов;
 k – число факторов.

3. Определяется разность между суммой рангов i -го фактора и средней суммой рангов по формуле:

$$\Delta_i = \sum_{i=1}^m a_{ij} - T. \quad (2.7)$$

4. Рассчитывается сумма квадратов разностей:

$$S = \sum_{i=1}^m (\Delta_i)^2. \quad (2.8)$$

5. Оцениваются согласованность мнений экспертов с помощью коэффициента конкордации W , представляющего собой общий коэффициент ранговой корреляции для группы, состоящей из m экспертов:

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k)}, \quad (2.9)$$

или

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k) - m \sum_{i=1}^m T_j}, \quad (2.10)$$

$$\text{где } T_j = \sum (t_j^3 - t_j); \quad (2.11)$$

t_j – число одинаковых рангов i -м ряду.

Формулой (2.11) пользуются в том случае, когда эксперт присваивает одинаковые ранги нескольким факторам.

Коэффициент конкордации может изменяться в пределах от 1 до 0. Значение 1 означает полное совпадение мнений экспертов, а 0 – связь мнений экспертов полностью отсутствует.

6. Оценка значимости коэффициента конкордации с помощью распределения X^2 .

Расчетное значение $X^2_{\text{расч}}$ определяется по одной из формул:

$$X^2_{\text{расч}} = \frac{12S}{mk(k+1)}, \quad (2.12)$$

или

$$X^2_{\text{расч}} = \frac{12S}{mk(k+1) - \frac{1}{k-1} \sum_{i=1}^m T_j}. \quad (2.13)$$

Расчетное значение $X^2_{\text{расч}}$ сравнивают с табличным значением $X^2_{\alpha, f}$. Табличное значение X^2 определяют для заданного числа степеней свободы $f=k-1$ и уровне значимости $\alpha=0,05$. Гипотеза о согласованности мнения экспертов принимается при $X^2_{\alpha, f} < X^2_{\text{расч}}$. После подтверждения согласованности мнения экспертов строят диаграмму рангов. Для этого по оси абсцисс откладывают факторы в последовательности влияния их на параметр оптимизации, по оси ординат – суммы рангов. Чем меньше сумма рангов у фактора, тем выше его место на диаграмме. По распределению факторов на диаграмме принимается решение о целесообразности включения их для проведения эксперимента. Если факторы на диаграмме распределяются по закону неравномерного экспоненциального убывания, то экспериментатор по результатам анализа решает вопрос о возможности исключения некоторых факторов из последующих экспериментов. При равномерном распределении в эксперимент включают все факторы.

Рассмотрим примеры использования приведенной методики.

Пример. Для обоснования нормативов неуравновешенности отдельных деталей и узлов, влияющих на уровень вибрации двигателя, проводится эксперимент. По результатам анализа научных и технических источников выбраны следующие десять факторов:

X_1 – неуравновешенность коленчатого вала в сборе;

X_2 – масса шатунно-поршневой группы;

X_3 – диаметральный зазор в коренных подшипниках;

X_4 – несоосность опор коренных подшипников;

X_5 – неуравновешенность шкива коленчатого вала;

X_6 – жесткость закрепления двигателя;

X_7 – диаметральный зазор в шатунных подшипниках;

X_8 – диаметральный зазор между цилиндрами и поршнями;

X_9 – качество сборки – укладка вала в блок;

X_{10} – неуравновешенность распределительного вала в сборе с шестерней распределения.

Разработанная анкета включала указанные десять факторов ($k=10$), их размерность и уровни варьирования. В группу включено 8 специалистов ($m=8$), каждому из которых был присвоен условный номер. Результаты анкетирования приведены в таблице 2.2.

Сумма рангов по каждому фактору приведена в матрице. Математическая обработка по формулам (2.6), (2.8) и (2.9) и (2.12) результатов ранжирования дала следующие результаты:

$$T = \frac{12 + 19 + \dots + 51}{10} = \frac{440}{10} = 44.$$

$$S = 1024 + 625 + \dots + 49 = 2970.$$

Таблица 2.2 - Матрица рангов

Эксперты (m=8)	Факторы (k=10)									
	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	X ₈	X ₉	X ₁₀
1	1	2	3	7	4	6	8	5	10	9
2	2	3	4	5	10	1	9	6	8	7
3	1	2	4	8	5	3	7	6	9	10
4	2	4	5	9	8	3	6	10	7	1
5	3	2	4	6	5	9	8	1	10	7
6	1	2	3	4	5	9	7	10	8	6
7	1	2	3	4	6	10	7	9	8	5
8	1	2	3	7	4	9	5	8	10	6
$\sum_{ij}^m a_{ij}$	12	19	29	50	47	50	57	55	70	51
Δ_i	-32	-25	-15	6	3	6	13	11	26	7
Δ_i^2	1024	625	225	36	9	36	169	121	676	49

$$W = \frac{12 \cdot 2970}{64(1000 - 10)} = 0,563.$$

$$X_{расч}^2 = \frac{12 \cdot 2970}{8 \cdot 10 \cdot 11} = 40.$$

приняв $\alpha=0,05$; $f=10-1=9$, определяем $X_{0,05;9}^2=16,92$ и $X_{расч}^2 = 40$, $X_{расч}^2 > X_{0,05;9}^2$.

Соотношение критического и расчетного значений X^2 показывает, что с доверительной вероятностью 95% мнения экспертов о влиянии факторов на параметр оптимизации согласуются с коэффициентом конкордации $W=0,563$. Построенная диаграмма рангов приведена на рисунке 2.2.

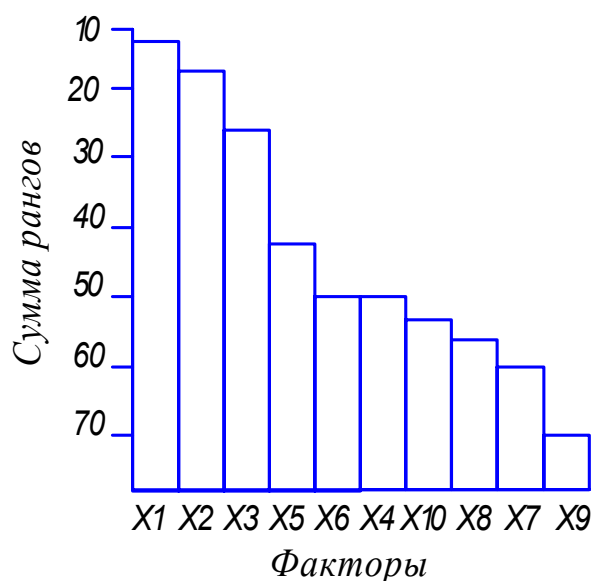


Рисунок 2.2 - Диаграмма рангов

Из диаграммы видно, что распределение факторов соответствует неравномерному экспоненциальному закону. Это позволяет исключить из проведения последующего эксперимента следующие три фактора: диаметральный зазор в шатунных подшипниках; диаметральный зазор между цилиндрами и поршнем; качество сборки – укладка вала на блок. Значение этих факторов должны находиться в заданной допусковой зоне, а их влияние будет учитываться на шумовом поле.

Пример.. Для выявления узлов автомобилей КамАЗ с низкой надежностью исследователем была отобрана следующая номенклатура:

- X_1 – двигатель;
- X_2 – сцепление, делитель, коробка передач;
- X_3 – мосты;
- X_4 – задняя подвеска;
- X_5 – пневмопривод тормозной системы;
- X_6 – узлы электрооборудования;
- X_7 – передняя подвеска;
- X_8 – рулевое управления;
- X_9 – другие механизмы и системы управления

Индекс и должности сформированной группы экспертов:

1 – главный механик; 2 – заместитель директора; 3 – механик-эксплуатационник; 4 – технолог-ремонтник; 5 – механик-ремонтник; 6,7,8,9 – водители.

В этом примере $k=9$, $m=10$. Результаты анкетирования приведены в таблице 2.3.

Таблица 2.3. - Матрица результатов экспертного опроса о надежности узлов автомобилей семейства КамАЗ

Эксперты $m=9$	Узлы (факторы) $K=9$								
	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9
1	1	4	1	4	8	6	9	5	7
2	1	3	2	5	9	7	6	4	8
3	1	2	2	4	6	8	7	6	9
4	2	3	1	5	6	7	9	4	8
5	2	1	3	6	5	9	7	4	8
6	3	4	1	2	6	8	7	5	9
7	2	1	4	4	6	7	8	4	9
8	5	2	1	5	4	8	6	5	9
9	2	1	2	6	4	8	9	7	6
Σa_{ij}	19	21	17	41	54	68	68	44	73
Δ_i	-26	-24	-28	-4	9	23	23	-1	28
$(\Delta_i)^2$	676	576	784	16	81	529	529	1	784

Промежуточные расчеты приведены в таблице 2.3.

$$T=45; S=3976.$$

Анализ матрицы показывает, что в некоторых строках имеются связанные ранги, то есть эксперт присвоил одинаковые ранги нескольким факторам (формула 2.11).

Первая строка таблицы 2.3 содержит два связанных ранга одного типа: 1,1 и 4,4

$$T_1=(2^3-2)+(2^3-2)=12.$$

Вторая строка не имеет связанных рангов, $T_2=0$.

Третья строка имеет два связанных ранга: 2,2 и 6,6

$$T_3=(2^3-2)+(2^3-2)=12.$$

Четвертая, пятая и шестая строки связанных рангов не имеют:

$$T_4=T_5=T_6=0$$

Седьмая строка имеет один тип связанных рангов, но имеет место тройная связка: 4,4,4,

$$T_7=(3^3-3)=24.$$

Восьмая строка имеет один трижды связанный ранг: 5,5,5,

$$T_8=(3^3-3)=24.$$

Девятая строка имеет связанные ранги 2,2 и 6,6

$$T_9=(2^3-2)+(2^3-2)=12.$$

По формуле (2.11) имеем:

$$T_j=12+12+24+24+12=84.$$

Коэффициент конкордации при этом будет равен:

$$W = \frac{12 \cdot 3976}{9^2(9^3 - 9) - 9 \cdot 84} = 0,829$$

$$X_{\text{расч.}}^2 = 59,688.$$

При $f=9-1=8$ и $\alpha=0,05$ $X_{0,05;8}^2 = 15,07$

$$X_{\text{расч.}}^2 = 59,688 > X_{0,05;8}^2 = 15,07.$$

Следовательно, гипотеза о согласованности мнений экспертов подтверждается.

Диаграмма рангов приведена на рисунке 2.3.

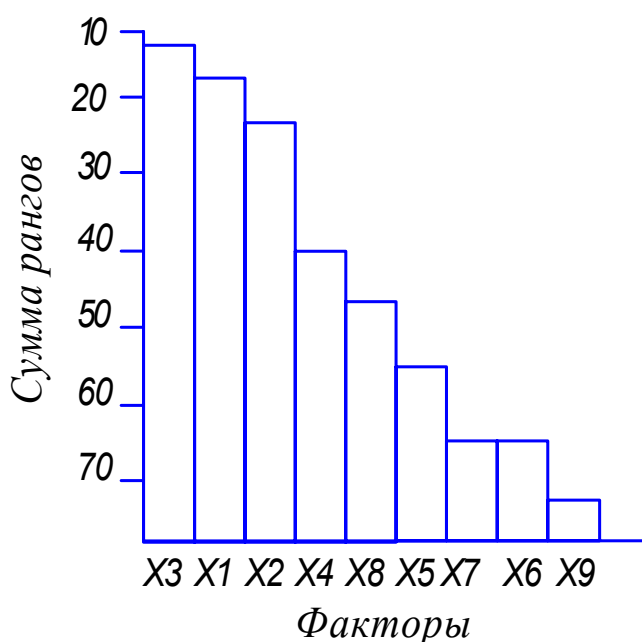


Рисунок 2.3 - Диаграмма рангов

Пример. Необходимо проранжировать основные виды транспорта по критериям эффективности их использования для крупных отправителей по шести критериям (таблица 2.4).

По формулам (2.8) и (2.9), используя промежуточные расчеты, представленные в таблице 4.4, имеем:

$$W=0,078.$$

Для оценки существенности коэффициента конкордации W по формуле (2.12) расчетное значение критерия $X_p^2=1,872$. Критическое значение критерия X^2 при уровне значимости $\alpha=0,05$ и числе степеней свободы $f=k-1=5-1=4$ составляет 9,488, т.е.

$$X_p^2 = 1,872 < X_{(0,05;4)}^2 = 9,488.$$

Таблица 2.4 - Оценка видов транспорта по критериям крупных отправителей

Критерий эффективности видов транспорта	Железнодорожный	Водный	Автомобильный	Трубопроводный	Воздушный
Скорость время доставки франко склад	3	4	2	5	1
Частота отправки в сутки	4	5	2	1	3
Надежность (соблюдение графиков доставки)	3	4	2	1	5
Перевозочная способность перевозить широкую номенклатуру грузов	2	1	3	5	4
Доступность (число обслуживаемых точек)	2	4	1	5	3
Стоимость за тонно-милю	3	1	4	2	5
$\sum_{i=1}^m a_{ij}$	17	19	14	19	21
Δ_i	-1	1	-4	1	3
$(\Delta_i)^2$	1	1	16	1	9

Гипотеза о справедливости присвоенных рангов видам транспорта отклоняется. В таких ситуациях экспериментатор при использовании данных, содержащихся в таблице 2.4, обязан в максимальной степени использовать указанную информацию в полном объеме. Более глубокий анализ содержания таблицы 2.4 показывает, что ранги, образующие совокупность, неразличимы, отличия между ними несущественны, объем информации для их определения недостаточен. Так, в общей методике при оценке существенности W , использовались только m и f , т.е. не сами ранги, являющиеся существенной информацией (в данном примере количество рангов равно тридцати).

Способ Кендалла позволяет оценивать согласованность суммарных рангов в совокупности. В реальной ситуации может оказаться, что некоторые ранги определены экспертами четко и однозначно, а остальные являются практически не различимыми, так как суммарные ранги искажают картину. Для оценки этого обстоятельства необходимо использовать способ исключения резко выделяющихся наблюдений.

Для этого по данным таблицы 2.4 строят вариационный ряд суммарных рангов: 14, 17, 19, 19, 21. Из этого ряда с помощью специального ζ -критерия устанавливаются резко выделяющиеся значения, которые по праву занимают свое место в ранжире суммарных рангов.

Значение ζ -статистики вычисляется по формуле:

$$\zeta(n, S^*) = \max(j) |\eta_i - \bar{\eta}| / S^* \quad (2.14)$$

где η_i – i -й член вариационного ряда;

$\bar{\eta}$ – среднее значение членов вариационного ряда;

S^* – среднее квадратичное отклонение членов вариационного ряда.

Гипотеза о принадлежности η_i к исследуемому вариационному ряду отвергается при условии $\zeta(\eta, S^*) > \zeta_{кр}(\eta, S^*)$.

Вспомогательные вычисления представлены в таблице 2.5.

Таблица 2.5 - Параметры для вычисления ζ – статистика

Среднее значение рангов по столбцам	17/6=2,83	19/6=3,17	14/6=2,33	19/6=3,17	21/6=3,5
Оценка дисперсий по столбцам	0,57	2,97	1,07	4,17	2,3
Сумма оценок дисперсий	11,07/5=2,21				
Среднее квадратичное отклонение	$2,21^{0,5}=1,49$				
Среднее значение вариационного ряда	$\bar{\eta} = \frac{14 + 17 + 19 + 19 + 21}{5} = 18$				

В рассматриваемом вариационном ряду выделяются суммарные ранги 14 и 21. Для суммарного ранга 14 значение ζ – статистики составляет:

$$\zeta(\eta, S^*) = \frac{|14 - 18|}{1,49} = 2,68 > \zeta_{кр}(5, 0; 0,5) = 1,917.$$

Гипотеза о принадлежности ранга 14 вариационному ряду отвергается. Для суммарного ряда 21 значение ζ статистики составляет:

$$\zeta(\eta, S^*) = \frac{|21 - 18|}{1,49} = 2,08 > \zeta_{кр}(5, 0; 0,5) = 1,917,$$

т.е. гипотеза о принадлежности ранга 21 вариационному ряду отвергается.

Значение ζ – статистики для остальных членов вариационного ряда, имеющих абсолютное отклонение от среднего значения равное единице:

$$\zeta(\eta, S^*) = \frac{|19 - 18|}{1,49} > \zeta_{кр}(5, 0; 0,5) = 1,917$$

Полученное соотношение показывает, что гипотеза о принадлежности трех членов вариационного ряда (17, 19, 19) не отвергается.

На основании результатов проведенного анализа вытекает, что автомобильный транспорт для перевозок грузов крупными отправителями наиболее эффективен, воздушный – самый неэффективный, остальные виды транспорта по эффективности однородны и делят второе, третье и четвертое места.

2.5 Методы экспериментального отсеивания факторов

2.5.1 Метод случайного баланса

Методы отсеивания существенных факторов в основном основываются на использовании информации, полученной в результате реализации предварительно спланированных экспериментов. Для этих целей можно использовать аппарат дисперсионного анализа, метод последовательного отсеивания факторов и метод случайного баланса, который имеет широкое применение.

Сущность метода случайного баланса состоит в том, что все эффекты, принятые экспериментаторами, оцениваются на основании проведения небольшого числа опытов. Полученные результаты располагаются в ранжированный ряд в порядке убывания вносимого ими вклада в дисперсию параметра оптимизации. Если распределение окажется неравномерным быстрым убыванием экспоненциального типа, то на основании этого несколько существенных факторов отсеивают и включают их в последующие эксперименты. Выделенные незначимые эффекты относят к шумовому полю. Использование метода случайного баланса позволяет выделить и оценить существенные линейные и парные взаимодействия. Выделенные значимые факторы можно оценить на шумовом поле остальных факторов с помощью методов регрессионного анализа. Отсеивание существенных факторов методом случайного баланса проводится в такой последовательности. Сначала составляется матрица, обеспечивающая условия проведения отдельных опытов. Факторы в матрицу планирования записывают в кодированном виде при варьировании их на двух уровнях: верхний уровень +1; нижний уровень -1. Кодирование производится по следующим формулам:

$$X_i = \frac{\tilde{X}_i - \tilde{X}_i^0}{\Delta \tilde{X}_i} \quad (2.15)$$

$$\tilde{X}_i^0 = \frac{\tilde{X}_{i\max} + \tilde{X}_{i\min}}{2}, \quad (2.16)$$

$$\Delta \tilde{X}_i = \frac{\tilde{X}_{i \max} - \tilde{X}_{i \min}}{2}, \quad (2.17)$$

где X_i – кодированное значение факторов;
 \tilde{X}_i - натуральное значение факторов, соответствующее одному из уровней его варьирования;
 \tilde{X}_i^0 - натуральное значение фактора на нулевом уровне (основной уровень);
 $\Delta \tilde{X}_i$ - натуральное значение интервала варьирования фактора.

При построении матрицы планирования используют дробную реплику. Дробные реплики подразделяются на регулярные и нерегулярные. Регулярные дробные реплики образуют из матрицы полнофакторного эксперимента путем деления ее на число частей, кратным двум в какой-либо степени. Если план разделить на 2, то получается полуреплика, если на 4 – одна четвертая полуреплика и т.д. Нерегулярные реплики образуются, если от матрицы полнофакторного эксперимента берут ее часть, как, например, 3/4, 3/8 и т.д. Обычно используют полуреплику.

В качестве примера в таблице 2.6 приведена полуреплика трехфакторного эксперимента

Таблица 2.6 - Полуреплика трехфакторного эксперимента

№ опыта	X_0	X_1	X_2	$X_3=X_1X_2$
1	+	-	-	+
2	+	+	-	-
3	+	-	+	-
4	+	+	+	+

В данной матрице влияние фактора X_3 выражается взаимодействием факторов X_1 и X_2 .

При использовании метода случайного баланса для одной половины существенных факторов полуреплика используется непосредственно, а для другой полуреплики уровни факторов устанавливаются с использованием таблиц случайных чисел. По результатам проведенного эксперимента строят диаграммы рассеяния параметра оптимизации по каждому уровню соответствующего фактора. На основании этого определяют центр распределения параметра оптимизации, нанеся его медианное значение. После этого на диаграмме обозначают смещение положения медиан для двух распределений выходного параметра при верхнем и нижнем уровне фактора X_i . Значимость фактора X_i оценивают по величине смещения одной медианы относительно другой на значимую величину. После графического представления для каждого фактора по величине наибольших смещений центров распределения величин параметра

оптимизации y и наибольшему числу выступающих точек методом статистического анализа выделяют два первых значимых фактора. После исключения выделенных существенных эффектов вновь строят диаграммы рассеяния и устанавливают следующие по значимости эффекты. Эта процедура выполняется до тех пор, пока не останется достаточно различимых эффектов. Влияния выделенных эффектов учитываются прибавлением их значений с обратным знаком ко всем значениям параметра оптимизации, которые соответствуют верхнему уровню выделенных эффектов. После снятия значимых эффектов дополнительно к ним вводят их взаимодействие. Момент отсеивания эффектов оценивается критерием Фишера:

$$F = \frac{S_{cp}^2}{S_{\{y\}}^2}, \quad (2.18)$$

где S_{cp}^2 – дисперсия результатов опыта относительно среднего арифметического всех результатов экспериментов после последней корректировки;

$S_{\{y\}}^2$ - дисперсия результатов нескольких параллельных опытов в центре плана.

Дисперсию результатов опыта оценивают относительно центра плана по формуле:

$$S_{cp}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y})^2}{N - 1}. \quad (2.19)$$

Дисперсия параллельных опытов в центре плана определяется по формуле:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i^0 - \bar{y}_i^0)^2}{n - 1}, \quad (2.20)$$

где y_i^0 - значение параметра оптимизации после последней корректировки по всем опытам;

\bar{y}_i^0 - среднее арифметическое значение параметра оптимизации в центре плана по результатам параллельных опытов;

n – число опытов.

Расчетное значение F-критерия сравнивают с табличным при обусловленном уровне значимости α и числе степеней свободы: для числителя $f_1=N-(k-1)$, для знаменателя $f_2=n-1$.

Если $F < F_{\alpha(f_1, f_2)}$, то процедура выделения значимых факторов прекращается. В противном случае – выделение значимых эффектов продолжается.

Пример. Используя метод случайного баланса, необходимо провести отсеивание существенных факторов при изучении их влияния на вибрацию двигателя ЗИЛ-130.

По результатам априорного ранжирования (см. п. 2.4) отобрано семь факторов. Факторы, их размерность и уровни варьирования приведены в таблице 2.7.

Таблица 2.7 - Факторы, их размерность и уровни их варьирования, оказывающие влияние на уравновешенность (вибрацию) двигателя ЗИЛ-130

Факторы	Нижний уровень -1	Верхний уровень +1	Основной уровень 0	Интервал варьирования
X_1 – дисбаланс коленчатого вала в сборе; г·см	40	200	120	80
X_2 – масса комплекта шатунно-поршневой группы в сборе, г	2390	2510	2450	60
X_3 – зазор в коренных подшипниках, мм	0,06	0,18	0,12	0,06
X_4 – дисбаланс шкива коленчатого вала, г·см	0	40	20	20
X_5 – несоосность опор коренных подшипников, мм	0,02	0,08	0,05	0,03
X_6 – момент затяжки болтов крепления двигателя	2	6	4	2
X_7 – дисбаланс распределительного вала в сборе с шестерней, г·см	0	12	6	6

Факторы кодировали, используя формулы (2.15), (2.16) и (2.17). Матрица планирования разработана случайным смешиванием полуреплики факторного эксперимента, используя формулу:

$$P^{k-1} = 2^{4-1} \quad (2.21)$$

где P – число уровней варьирования;
 k – число факторов полуреплики ($k=4$).

Для реализации полуреплики в соответствии с (2.21) необходимо провести восемь опытов. Для первых двух факторов уровни варьирования берутся из

плана 2^{4-1} , а уровни остальных факторов достраивались по строчкам при помощи случайных чисел. Матрица планирования приведена в таблице 2.8.

Таблица 2.8 - Матрица планирования и результаты отсеивающего эксперимента.

№ опыта	X ₀	X ₁	X ₂	X ₃	X ₄	X ₅	X ₆	X ₇	\bar{Y}_i
1	+	-	-	+	-	+	-	+	70,0
2	+	+	-	-	-	+	-	-	80,0
3	+	-	+	-	+	-	-	+	78,2
4	+	+	+	+	-	-	+	+	81,0
5	+	-	-	-	+	+	+	-	68,0
6	+	+	-	+	+	-	+	+	74,0
7	+	-	+	+	-	+	-	-	73,1
8	+	+	+	-	+	-	+	-	84,0

По результатам проведения эксперимента построены диаграммы рассеяния для каждого уровня факторов

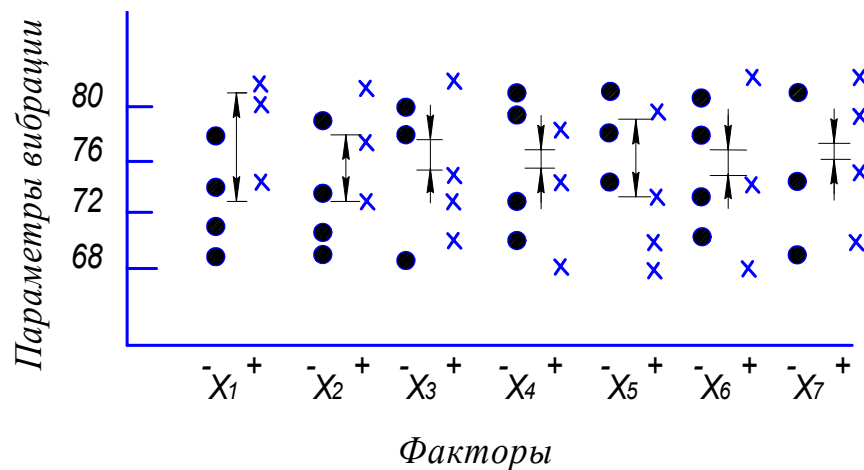


Рисунок 2.4 – Диаграмма рассеяния факторов вибрации для каждого уровня факторов

Значимые эффекты определялись визуально по расстоянию между медианами распределения параметра оптимизации для каждого уровня фактора и числу выделяющихся точек. Анализ рисунка 2.4 показывает, что к существенным факторам можно отнести факторы X₁ и X₂. Этот вывод обоснован тем, что расстояние между медианами у этих факторов больше, чем у других.

Для количественной оценки вкладов X_1 и X_2 строится вспомогательная таблица 2.8.

Таблица 2.8 - Расчет исходных данных для количественной оценки вкладов факторов X_1 и X_2 в параметр оптимизации (уровень вибрации двигателя)

Факторы	+ X_1	- X_1
+ X_2	84,0	78,2
	81,0	73,1
	$\Sigma Y_1=165,0$	$\Sigma Y_2=151,3$
	$\bar{Y}_1 = 82,5$	$\bar{Y}_2 = 75,65$
- X_2	74,0	70,0
	80,0	68,0
	$\Sigma Y_3=154$	$\Sigma Y_4=138,9$
	$\bar{Y}_3 = 77,0$	$\bar{Y}_4 = 69$

Формирование таблицы осуществлено следующим образом. В первую клетку на пересечении двух факторов + X_1 и + X_2 зафиксированы значения \bar{y}_1 из опытов, где эти факторы варьируют на верхнем уровне, т.е. в 4-м и 8-м опытах. Аналогично заполнены другие клетки. В каждой клетке таблицы 2.8 определено среднее значение параметра оптимизации \bar{y}_i .

Определение значений коэффициентов регрессии определены по формулам:

$$b_1 = \frac{(\bar{Y}_1 + Y_3) - (\bar{Y}_2 + Y_4)}{2} = \frac{(82,5 + 77) - (75,65 + 69)}{2} = +7,5. \quad (2.22)$$

$$b_2 = \frac{(\bar{Y}_1 + Y_2) - (\bar{Y}_3 + Y_4)}{2} = \frac{(82,5 + 75,65) - (77,0 + 69,0)}{2} = +6,0. \quad (2.23)$$

Значимость полученных значений коэффициентов регрессии проверяются использованием t-критерия:

$$t = \frac{2b_i}{2} > t_{\alpha, f}; \quad (2.24)$$

$$S_R = S_{\text{ост}} \sqrt{\sum \frac{1}{n_j}}, \quad (2.25)$$

где $t_{\alpha, f}$ – квантиль t-критерия для $\alpha=0,05$ и числа степеней свободы f , определяемому разностью общего числа опытов и числа клеток вспомогательной таблицы:

$$f = \sum^R n_j - 4 = \sum^4 2 - 4 = 4$$

где n_j – число наблюдений в j -ой клетке ($n_j=2$);
 R – число клеток вспомогательной таблицы ($R=4$);
 $S_{\text{ост}}$ – остаточная квадратичная ошибка.

Величина остаточной квадратичной ошибки $S_{\text{ост}}$ оценивается по результатам наблюдений, проводя расчеты по схеме, представленной в таблице 2.9.

Таблица 2.9 - Расчет величины остаточной квадратичной ошибки $S_{\text{ост}}$

№ клетки сайд	Число опытов n_j	ΣY_j	$(\Sigma Y_j)^2$	ΣY_j^2	$S^2_{\text{ост}} = \frac{\Sigma Y_j^2}{n_j - 1} - \frac{(\Sigma Y_j)^2}{n_j - (n_j - 1)}$	$\frac{S^2_{\text{ост}}}{n_j}$
1	2	165	27.625	13617	4	2
2	2	151.3	22892	11458	12	6
3	2	151	28716	11876	18	9
4	2	138	19044	9524	2	1
						$\Sigma 18$

После оценивается значимость коэффициентов регрессии b_1 и b_2

$$t_1 = \frac{2b_1}{S_R} = \frac{2 \cdot 7,5}{\sqrt{18}} = 3,75 > t(0,05;4) = 2,078$$

$$t_2 = \frac{2b_2}{S_R} = \frac{2 \cdot 6,0}{\sqrt{18}} = 2,86 > t(0,05;4) = 2,078$$

С 95%-ной доверительной вероятностью можно считать, что коэффициенты эффектов можно считать значимыми.

Для снятия выделенных эффектов проводится корректировка результатов эксперимента. С этой целью ко всем результатам прибавляем -7,5 на уровне $+X_1$ и -0,6 на уровне $+X_2$. После снятия факторов X_1 и X_2 составляется новая матрица (таблица 2.10).

Таблица 2.10 - Скорректированная матрица планирования после снятия факторов X_1 и X_2

№ опыта	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_1X_2	\bar{Y}	\bar{Y}
1	+	-	+	-	+	+	70	70
2	-	-	+	-	-	-	80-7,5	72,5
3	-	+	-	-	+	-	78,2-6	72,2
4	+	-	-	+	+	+	81-7,5-6	67,5
5	-	+	+	+	-	+	68	68
6	+	+	-	+	+	-	74-7,5	66,5
7	+	-	+	-	-	-	73,1-6	67,0
8	-	+	-	+	-	+	84-7,5-6	70,5

С учетом нового вектора-столбца результатов опыта у строим новую диаграмму рассеяния, которая учитывает линейные эффекты и парное взаимодействие факторов X_1X_2 (рисунок 2.5).

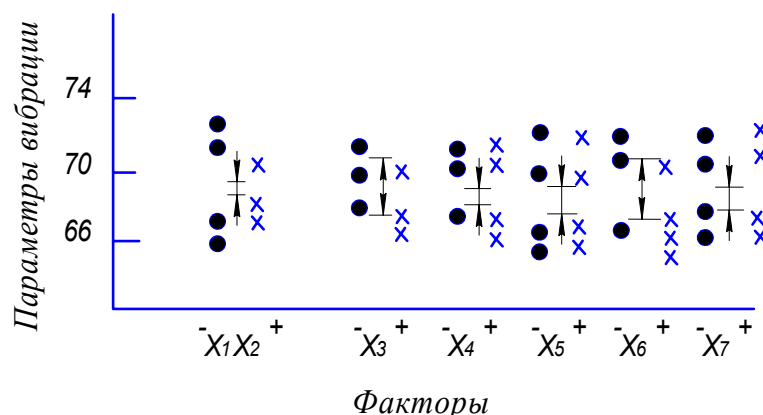


Рисунок 2.5 – Диаграмма рассеяния факторов вибрации после снятия эффектов X_1 и X_2

Из анализа рисунка 2.5 вытекает, что наибольшую разницу между положениями медиан имеют эффекты X_3 и X_6 . Для оценки влияния этих эффектов составляется новая вспомогательная таблица с двумя входами (таблица 2.11).

Таблица 2.11 - Расчет исходных данных для количественной оценки вкладов факторов X_3 и X_6 в параметр оптимизации (уровень вибрации двигателя)

Факторы	+ X_6	- X_6
+ X_3	67,5	70,0
	66,5	67,0
	$\Sigma Y_1=134$	$\Sigma Y_2=137,0$
	$\bar{Y}_1 = 67,0$	$\bar{Y}_2 = 68,5$
- X_3	68,0	72,5
	70,5	72,0
	$\Sigma Y_3=138,5$	$\Sigma Y_4=144,5$
	$\bar{Y}_3 = 69,25$	$\bar{Y}_4 = 72,25$

Значения коэффициентов регрессии:

$$b_3 = \frac{(67,0 + 68,5) - (69,25 + 72,25)}{2} = -3$$

$$b_6 = \frac{(67,0 + 69,25) - (68,5 + 72,25)}{2} = -2,25$$

Расчет квадратичной ошибки представлен в таблице 2.12.

Таблица 2.12 - Результаты расчетов по оценке квадратичной ошибки

Номер клетки	n_j	ΣY_j	$(\Sigma Y_j)^2$	ΣY_j^2	$S^2_{\text{ост}}$	$S^2_{\text{ост}} n_j$
1	2	134	17956	8978	0,0	0,0
2	2	137	18769	9389	4,0	2,0
3	2	138,5	19182	9594	3,0	1,5
4	2	144,5	20880	10440	0	0
						$\Sigma 3,5$

Оценка значимости выделенных эффектов

$$t_3 = \frac{2|b_3|}{S_R} = \frac{6}{\sqrt{3,5}} = 3,2 > t_{(0,05;4)} = 2,78$$

$$t_6 = \frac{2|b_6|}{S_R} = \frac{4,25}{\sqrt{3,5}} = 2,4 < t_{(0,05;4)} = 2,78$$

Очевидно, что с доверительной вероятностью 95 %, эффект X_3 значим, а эффект X_6 незначим.

Для снятия выявленных эффектов и выявления значимых из числа оставшихся в очередной раз корректируются результаты эксперимента. Для этой цели прибавляем +3 ко всем результатам на уровне $+X_3$ и +2,25 на уровне $+X_6$.

Скорректированная матрица представлена в таблице 2.13.

Таблица 2.13 - Скорректированная матрица планирования эксперимента после снятия эффектов X_3 и X_6

№ опыта	X_4	X_5	X_7	X_1X_2	X_3X_6	\bar{Y}	\bar{Y}
1	-	+	+	+	-	70+3	73,0
2	-	+	-	-	+	72,0	72,0
3	+	-	+	-	+	72,0	72,0
4	-	-	+	+	+	67+3+2,25	72,25
5	+	+	-	+	-	68+2,25	70,25
6	+	-	+	-	+	66+2,25+3	71,25
7	-	+	-	-	-	67+3	70,0
8	+	-	-	+	-	70+2,25	72,25

После снятия эффектов X_3 и X_6 разброс параметров значительно снизился (рисунок 2.6)

Для снятия ошибки опыта проводится серия параллельных опытов, в результате чего установлено $S_{\{y\}}^2 = 3,5$.

Значение дисперсии S_{cp}^2 результатов всех опытов определяли после второй корректировки (таблица 2.14).

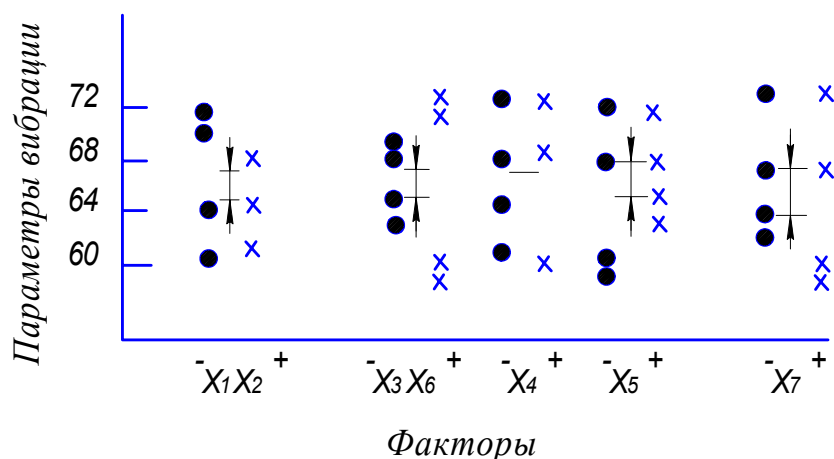


Рисунок 2.6 - Диаграмма рассеяния факторов вибрации после снятия эффектов X_3 и X_6

Таблица 2.14 - Расчет для оценки S_{cp}^2

Последовательность расчетов	Номер опыта								Среднее и суммарное значения
	1	2	3	4	5	6	7	8	
y_u	73,0	72,0	72,0	72,25	70,25	71,25	70,0	72,25	$\bar{y}=71,63$
$y_u - \bar{y}$	1,37	0,37	0,37	0,62	-1,38	-0,38	-1,63	0,62	-
$(y_u - \bar{y})^2$	1,88	0,13	0,13	0,38	1,9	0,14	2,66	0,38	$\Sigma=7,60$

Используя формулу:

$$S_{cp}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N (Y_u - \bar{Y}_u)^2}{N-1}, \quad (2.27)$$

определяем:

$$S_{cp}^2 = \frac{7,6}{7} = 1,09 .$$

Значение дисперсии результатов эксперимента меньше ошибки опыта. На основании этого проводить оценку различия дисперсии при помощи F-критерия нет необходимости. Это дает основание сделать вывод, что среди оставшихся эффектов значимых не содержится. Проведение отсеивающего эксперимента прекращается.

В результате проведенного эксперимента установлено, что на уравновешенность двигателя ЗИЛ-130 при капитальном ремонте оказывают доминирующее влияние: X_1 – дисбаланс коленчатого вала в сборе с маховиком и сцеплением; X_2 – масса комплекта шатунно-поршневой группы; X_3 – зазор в коренных подшипниках.

2.5.2 Исследование факторов методами дисперсионного анализа

Дисперсионный анализ позволяет оценивать влияние на исследуемый признак как количественных, так и качественных факторов, а также их взаимодействий. Сущность метода заключается в разложении полной дисперсии признака на сумму дисперсий каждого из факторов или их взаимодействий. Влияние каждого из факторов оценивают его вкладом в полную дисперсию.

Выражение для полной дисперсии имеет вид:

$$y_{\text{п}}^2(Y) = \sum_{i=1}^l \bar{b}_i y_i^2(Y) + y_{\text{ош}}^2(Y) \quad (2.28)$$

где Y – исследуемый признак;
 $\sigma_{\text{п}}^2(Y)$ - полная дисперсия изменчивости признака Y ;
 l – количество исследуемых факторов и их взаимодействий;
 $\sigma_i^2(Y)$ - дисперсия, характеризующая изменчивость признака в результате изменения фактора или взаимодействия факторов;
 d_i – коэффициент, зависящий от объема наблюдений;
 $\sigma_{\text{ош}}^2(Y)$ - дисперсия ошибки опыта.

Отбор значимых факторов и их взаимодействий производится по значению дисперсионного отношения и сопоставления его величины с табличным значением F -критерия, который определяется при заданном уровне значимости α и числе степеней свободы дисперсии f_1 и f_2 числителя и знаменателя:

$$F_i = \frac{y_i^2(Y)}{y_j^2(Y)} \phi F_{\bar{b}(f_i; f_j)}, \quad (2.29)$$

где $\sigma_j^2(Y)$ - дисперсия, с которой сравнивается дисперсия числителя.

Вид дисперсии $\sigma_j^2(Y)$ определяется типом эксперимента. В дисперсионном анализе рассматриваются три типа экспериментов:

- эксперименты с фиксированными значениями всех факторов;
- эксперименты со случайными значениями уровней факторов;
- эксперименты, у которых часть факторов фиксированы, а часть – случайны.

В общем случае значения теоретических дисперсий неизвестны. Поэтому вместо дисперсий $\sigma_i^2(Y)$ и $y_j^2(Y)$ используются их оценки $S_i^2(Y)$ и $S_j^2(Y)$. Оценочные значения дисперсий определяются как средние квадраты соответствующих сумм квадратов отклонений, т.е.

$$S_i^2(Y) = \frac{Q_i}{f_i}, \quad (2.30)$$

где Q_i – сумма квадратов отклонений, вызванных воздействием или взаимодействия факторов;

f_i – число степеней свободы, соответствующие рассматриваемому среднему квадрату.

Рассмотрим применение использования дисперсионного анализа при обработке результатов эксперимента третьего типа. Пусть уровень фактора **A** фиксирован, а уровень фактора **B** и взаимодействия **AB** – случайны (случай двухфакторной смешанной модели).

Оценочные значения дисперсий проводится по формулам:

$$\left. \begin{aligned} S_1^2(Y) &= \pi \cdot \nu \cdot S_B^2(Y) + \pi S_{AB}^2 + S_{\text{ош}}^2(Y); \\ S_2^2(Y) &= \pi \cdot a \cdot S_B^2(Y) + S_{\text{ош}}^2(Y); \\ S_3^2(Y) &= \pi \cdot S_{AB}^2(Y) + S_{\text{ош}}^2(Y); \\ S_4^2(Y) &= S_{\text{ош}}^2(Y) \end{aligned} \right\} \quad (2.31)$$

Для оценки существенности эффекта взаимодействия и фактора **B** нужно их средние квадраты сравнить со средним квадратом $S_4^2(Y)$, а фактор **A** – со средним квадратом $S_3^2(Y)$, т.е.

$$F_A = \frac{S_1^2(Y)}{S_3^2(Y)} \phi F_{\alpha(f_A; f_{AB})}; \quad (2.32)$$

$$F_B = \frac{S_2^2(Y)}{S_{\text{ош}}^2(Y)} \phi F_{\alpha(f_B; f_{\text{ош}})}; \quad (2.33)$$

$$F_{AB} = \frac{S_3^2(Y)}{S_{\text{ош}}^2(Y)} \phi F_{\alpha(f_{AB}; f_{\text{ош}})}. \quad (2.34)$$

Для вычислений сумм квадратов отклонений используют следующие формулы:

$$Q = \sum_{i,j,k} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{N} \left(\sum_{ijk} Y_{ijk} \right)^2; \quad (2.35)$$

$$Q_1 = \frac{1}{\text{пв}} \sum_{i=1}^a Y_{\Sigma_i}^2 - \frac{1}{N} (\sum_{ijk} Y_{ijk})^2 ; \quad (2.36)$$

$$Q_2 = \text{па} \sum_{j=1}^b Y_j^2 - \frac{1}{N} (\sum_{ijk} Y_{ijk})^2 ; \quad (2.37)$$

$$Q_3 = \frac{1}{\text{п}} \sum_{i,j} Y_{ij}^2 - \frac{1}{\text{п} \cdot \text{в}} \sum_{i=1}^a Y_i^2 - \frac{1}{\text{па}} \sum_{j=1}^b Y_j^2 + \frac{1}{N} (\sum_{ijk} Y_{ijk})^2 ; \quad (2.38)$$

$$Q_4 = \sum_{ijk} Y_{ijk}^2 - \frac{1}{\text{п}} \sum_{ij} Y_{ij}^2 , \quad (2.39)$$

где $Y_i, Y_j, Y_{\Sigma_{ij}}$ - соответственно суммы для i -го и j -го уровней и сумма в ячейки таблицы результатов наблюдений;
 k - число наблюдений в каждом варианте $k=1,2,\dots,n$;
 a и b – число уровней факторов.

При выборе числа уровней факторов можно руководствоваться следующими рекомендациями. При гипотезе о линейном характере связи между факторами и изучаемым признаком число уровней принимается равным двум. Если указанная зависимость второго порядка – трем. Общее число уровней факторов должно быть на единицу больше предполагаемого порядка зависимости.

Пример. Требуется оценить существенность влияния на продолжительность обслуживания машин технической оснащенности пунктов обслуживания (фактор **A**), величины наработки (фактор **B**) и их взаимодействия (эффект **AB**). Техническое обслуживание машин проводилось на четырех пунктах обслуживания с разными уровнями оснащенности (соотношение 1:1,25:1,5:1,75). На обслуживание поступают две группы машин с наработкой в соотношении 1:1,5. Каждый вариант обслуживания повторялся 4 раза ($n=4$). Отбор машин из каждой группы на каждый из пунктов обслуживания осуществлялся случайным образом.

Результаты проведенного эксперимента приведены в таблице 2.15.

Таблица 2.15 - Продолжительность обслуживания, мин

Уровни факторов		Фактор			
		I	II	III	IV
Фактор В	I	54	55	56	49
		58	56	50	50
		55	54	53	56
		55	52	53	52
Фактор В	II	57	59	58	56
		57	64	53	57
		60	58	61	56
		65	56	54	50

Для облегчения вычислений результаты экспериментов целесообразно представить в кодированном виде путем уменьшения их на 50. (таблица 2.16). В этой же таблице приведены результаты вспомогательных вычислений.

По формулам (2.35) – (2.39) определяем значения Q , Q_1 , Q_2 , Q_3 и Q_4

$$Q = 1437 - \frac{179^2}{32} = 435,7;$$

$$Q_1 = \frac{61^2 + 54^2 + 38^2 + 26^2}{8} - \frac{179^2}{32} = 1094,6 - 1001,3 = 93,3;$$

Таблица 2.16- Результаты эксперимента в кодированном виде и вспомогательных вычислений

Уровни факторов		Фактор А				$y_{\sum j}$	
		I	II	III	IV		
Фактор В	I	4	5	6	-1	58	
		8	6	0	0		
		5	4	3	6		
		5	2	3	2		
		22	17	12	7		
Фактор В	II	7	9	8	6	121	
		7	14	3	7		
		10	8	11	6		
		15	6	4	0		
		39	37	26	18		
$Y_{\sum i}$		61	54	38	25	$\sum_{ijk} Y_{ijk} = 179$	
$\sum_{ik} Y_{ik}^2$		553	458	264	162	$\sum_{ik} Y_{ik}^2 = 1437$	

$$Q_2 = \frac{58^2 + 121^2}{16} - \frac{179^2}{32} = 1125,3 - 1001,3 = 124;$$

$$Q_3 = \frac{22^2 + 39^2 + 17^2 + 37^2 + 12^2 + 26^2 + 9^2}{4} - \frac{179^2}{32} - 93,3 - 124 = 1246,5 - 1001,3 - 93,3 - 124 = 27,9;$$

$$Q_4 = 1437 - 1246,5 = 190,5$$

В таблице 2.17 приведены результаты дисперсионного анализа.

Таблица 2.17 - Результаты дисперсионного анализа

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Математическое ожидание среднего квадрата
1	2	3	4	5
Фактор А	3	93,3	31,1	$8\sigma_A^2(Y) + \sigma_{ou}^2(Y)$
Фактор В	1	124,0	124,0	$16\sigma_B^2(Y) + \sigma_{ou}^2(Y)$
Взаимодействие АВ	3	27,9	9,3	$4\sigma_{AB}^2(Y) + \sigma_{ou}^2(Y)$
Ошибка	24	190,5	7,93	$\sigma_{ou}^2(Y)$
Сумма	31	435,7	-	-

По формулам (2.32) – (2.34) проверяем гипотезу о значимости эффектов при $\alpha=0,05$

$$F_A = \frac{31,1}{7,93} = 3,93 \phi F_{0,05(3;24)} = 3,009$$

$$F_B = \frac{124}{7,93} = 15,7 \phi F_{0,05(1;24)} = 4,26$$

$$F_{AB} = \frac{9,3}{7,93} = 1,17 < F_{0,05(3;24)} = 3,009$$

Анализ полученных результатов показывает, что фактор В оказывает более существенное влияние ($F_B=15,7$) на продолжительность технического обслуживания по сравнению с фактором А ($F_A=3,93$). Отсюда следует вывод, что

оба фактора являются значимыми, а влияние взаимодействия факторов несущественно.

Используя формулы для оценки математических ожиданий средних квадратов и данные таблицы 2.17, определяем оценки дисперсий:

$$y_A^2(Y) = \frac{1}{nb} [S_1^2(Y) - S_{\text{ош}}^2(Y)] = \frac{1}{8} (3,31 - 7,93) = 2,986,$$

$$y_B^2(Y) = \frac{1}{na} [S_2^2(Y) - S_{\text{ош}}^2(Y)] = \frac{1}{16} (124 - 7,93) = 7,254,$$

$$S_{AB}^2(Y) = \frac{1}{n} [S_3^2(Y) - S_{\text{ош}}^2(Y)] = \frac{1}{4} (9,3 - 7,93) = 0,342.$$

В соответствии с полученными результатами полная дисперсия равна

$$S_n^2(Y) = S_A^2(Y) + S_B^2(Y) + S_{AB}^2(Y) + S_{\text{ош}}^2(Y) = 2,986 + 7,254 + 0,342 + 7,930 = 18,512.$$

В рассмотренном примере время обслуживания машин в оговоренных условиях на $\frac{2,9}{18,512} \cdot 100 \% = 16,1 \%$ обусловлена фактором А, на $\frac{7,254}{18,512} \cdot 100 \% =$

39,18 % фактором В, на $\frac{0,342}{18,512} \cdot 100 \% = 1,8 \%$ взаимодействием факторов А и В и на 44,72 % влиянием неучтенных факторов.

При использовании изложенной методики априори предполагалось, что имеет место линейный характер связи между значениями факторов и временем обслуживания машины.

Выделение линейных, квадратических и кубических эффектов рассмотрим на примере фактора А, действующего на четырех уровнях.

Для вычисления квадратов рекомендуется использовать значения ортогональных коэффициентов C_i , содержащихся в приложении. Данные для вычисления сумм квадратов, характеризующих линейные, квадратические и кубические эффекты приведены в таблице 2.18. Величина F_S представляет сумму квадратов коэффициентов.

Таблица 2.18 - Значения ортогональных коэффициентов C_i .

Суммы		$y_{\Sigma^1} = 61$	$y_{\Sigma^2} = 54$	$y_{\Sigma^3} = 38$	$y_{\Sigma^4} = 25$	F_S
Эффекты	Линейные	-3	-1	+1	+3	20
	квадратические	+1	-1	-1	+1	4
	кубические	-1	+3	-3	+1	20

Суммы, соответствующие линейным, квадратическим и кубическим эффектам, определяются по формуле:

$$y_{\sum s} = \sum_{i=1}^a C_{is} y_{\sum i}. \quad (2.40)$$

Следовательно,

$$y_{\sum \text{Л}} = -3 \cdot 61 - 1 \cdot 54 + 1 \cdot 38 + 3 \cdot 25 = -124$$

$$y_{\sum \text{КВ}} = 1 \cdot 61 - 1 \cdot 54 - 1 \cdot 38 + 1 \cdot 25 = -7$$

$$y_{\sum \text{КУБ}} = -1 \cdot 61 + 3 \cdot 54 - 3 \cdot 38 + 1 \cdot 25 = 2$$

Определение соответствующих сумм квадратов определяется по формуле:

$$Q_{is} = \frac{y_{\sum s}^2}{v \cdot n \cdot F_s}. \quad (2.41)$$

Используя эту формулу, имеем:

$$Q_{is} = \frac{y_{\text{Л}}^2}{8 \cdot F_{\text{Л}}} = \frac{(-124)^2}{8 \cdot 20} = 96,1,$$

$$Q_{\text{КК}} = \frac{y_{\text{КВ}}^2}{8 \cdot F_{\text{КВ}}} = \frac{(-7)^2}{8 \cdot 4} = 0,31,$$

$$Q_{\text{ККУ}} = \frac{y_{\sum \text{куб}}^2}{8 \cdot F_{\text{куб}}} = \frac{2^2}{8 \cdot 20} = 0,02.$$

Значения статистических характеристик приведены в таблице 2.19.

Таблица 2.19 - Значения статистических характеристик

Источник изменчивости	Число степеней свободы	Сумма квадратов	Средний квадрат	Дисперсионные отношения F_i
Фактор А	3	93,3	31,1	-
$y_{\Sigma л}$	1	91,4	91,4	11,5
$y_{\Sigma кв}$	1	0,5	0,5	0,10
$y_{\Sigma куб}$	1	1,3	1,3	0,14
Ошибка	24	190,5	7,93	-

Уровень значимости при $\alpha=0,1$ составляет $F_{0,1(1;24)}=2,927$. Это значение позволяет сделать вывод о том, что значимым является только линейный эффект фактора А, т.е. при планировании эксперимента достаточно было бы использовать два его уровня.

2.6 Полный факторный эксперимент

Активные, планируемые эксперименты позволяют минимизировать число опытов, упрощают статистическую обработку, и анализ полученных результатов повышают их достоверность при условии, что математическая модель содержит несколько управляемых и независимых факторов.

Для решения различных задач с учетом условий проведения опытов, исследуемого параметра оптимизации и числа учитываемых факторов, используются различные методы планирования экспериментов, среди которых наибольшее применение имеют полнофакторные планы и планы, являющиеся их частью.

Полнофакторными называются планы, в которых содержится все возможные комбинации сочетаний учитываемых факторов и уровней их варьирования. Опыты проведения по этим планам называются полным факторным экспериментом.

Количество опытов N в полном факторном эксперименте определяются по формуле

$$N=p^k, \quad (2.42)$$

где p – число уровней;
 k – количество факторов.

Запись условий эксперимента и обработка экспериментальных данных по отдельным факторам записывают в матрицу планирования в условном масштабе, т.е. в кодированном виде и выполняется с использованием формул (2.5.1)-(2.5.3). Матрица планирования полного факторного эксперимента заполняется следующим образом. В первом столбце указывают номера опытов. Последующие столбцы, кроме последнего, отводят факторам. В первом из них указывают кодированное значение фиктивной переменной (всегда $x_0=+1$). В остальных - учитываемые факторы и их взаимодействия, а в последнем – результаты опытов, т.е. значения параметров оптимизации. Каждый столбец матрицы называют вектором-столбцом, а каждую строку – вектором-строкой. При заполнении матрицы можно использовать следующее правило. В столбце для первого фактора знаки меняют поочередно, для второго фактора в столбце чередуются через два по два, для третьей – через четыре по четыре, для четвертого – восемь по восемь и т.д. по степеням двойки.

Матрица планирования эксперимента трехфакторного эксперимента для оценки коэффициентов уравнения вида:

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \quad (2.43)$$

имеет вид, представленный в таблице 2.20.

Если с линейными эффектами оценивается значимость эффектов взаимодействия, то уравнение регрессии для $k=3$ имеет вид:

$$\hat{y} = b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_{12}x_1x_2 + b_{13}x_1x_3 + b_{23}x_2x_3 + b_{123}x_1x_2x_3 \quad (2.44)$$

Таблица 2.20 – Матрица планирования эксперимента 2^3 с линейными эффектами

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	Y_n
1	+	-	-	-	Y_1
2	+	+	-	-	Y_2
3	+	-	+	-	Y_3
4	+	+	+	-	Y_4
5	+	-	-	+	Y_5
6	+	+	-	+	Y_6
7	+	-	+	+	Y_7
8	+	+	+	+	Y_8

Матрица планирования эксперимента в этом случае имеет вид представленный в таблице 2.21.

Таблица 2.21 - Матрица планирования 2^3 с включением эффектов взаимодействия

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	X_1X_2	X_1X_3	X_2X_3	$X_1X_2X_3$	$Y_{\text{п}}$
1	+	-	-	-	+	+	+	-	Y_1
2	+	+	-	-	-	-	+	+	Y_2
3	+	-	+	-	-	+	-	+	Y_3
4	+	+	+	-	+	-	-	-	Y_4
5	+	-	-	+	+	-	-	+	Y_5
6	+	+	-	+	-	+	-	-	Y_6
7	+	-	+	+	-	-	+	-	Y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	Y_8

Знаки в столбце для факторов взаимодействия определяют умножением знаков соответствующих строк в столбцах учитываемых факторов. Матрицы планирования полных факторных экспериментов обладают рядом свойств, которые определяют качество модели. В ряду этих свойств важное значение принадлежит *ортогональности* и *рототабельности*. Матрица планирования называется ортогональной, если сумма почленных произведений любых двух ее столбцов равна нулю. Свойство ортогональности заключается в том, что план эксперимента позволяет получать оценки для коэффициентов регрессии независимыми друг от друга. Это позволяет исключить те факторы, при которых коэффициенты оказываются незначимыми. Свойство *рототабельности* состоит в том, что благодаря подбору точек в матрице планирования точность прогнозирования параметра оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления. Следует иметь в виду, что одновременно ортогональными и рототабельными могут быть планы только первой степени, т.е. для линейной модели.

Полный факторный эксперимент обладает большой избыточностью опытов. Поэтому при большом числе факторов используют дробный факторный эксперимент (см. п. 2.5).

После построения матрицы планирования ее преобразуют в рабочую матрицу, для чего кодированные значения факторов заменяют на именованные значения. В соответствии с рабочей матрицей проводят эксперимент. После получения экспериментальных данных вновь составляется матрица планирования с включением в нее интересующих эффектов и результаты эксперимента. На основании этого определяют оценки коэффициентов регрессии.

Свободный член b_0 , линейные коэффициенты регрессии и коэффициенты регрессии, характеризующие парное взаимодействие факторов вычисляют по формулам:

$$b_0 = \frac{\sum_{u=1}^{N_i} X_0 Y_u}{N} = \frac{\sum_{u=1}^N Y_u}{N}; \quad (2.45)$$

$$b_i = \frac{\sum_{u=1}^{N_i} X_{i_u} Y_u}{N}; \quad (2.46)$$

$$b_{i_j} = \frac{\sum_{u=1}^{N_i} X_{i_u} X_{j_u} Y_u}{N}; \quad (2.47)$$

где X_{i_u} - значение i -го фактора в u -м опыте;

X_{j_u} - значение j -го фактора в u -м опыте;

Y_u – значение параметра оптимизации в u -м опыте;

N – число опытов в матрице.

После вычисления коэффициентов уравнения регрессии оценивают их значимость и проверяют адекватность модели опытным данным.

Для оценки ошибок отдельного опыта проводят несколько параллельных опытов при обеспечении одинаковых условий эксперимента. По результатам параллельных наблюдений рассчитывают:

среднее арифметическое значение

$$\bar{Y}_u = \frac{Y_{u_1} + Y_{u_2} + \dots + Y_{u_q}}{n} = \frac{\sum_{q=1}^n Y_{u_q}}{n} \quad (2.48)$$

и оценку дисперсии

$$X^2 = \frac{\sum_{q=1}^n (Y_{u_q} - \bar{Y}_u)^2}{n - 1}; \quad (2.49)$$

где Y_{u_q} - результат в q -м параллельном наблюдении в u -м опыте;

n – число параллельных наблюдений в одном опыте.

Для проверки гипотезы однородности дисперсии при одинаковом числе параллельных наблюдений используют критерий Кокрена:

$$G = \frac{S_{u \max}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2}; \quad (2.50)$$

где $S_{u \max}^2$ - наибольшее значение оценки дисперсии для u -го опыта.

После подтверждения гипотезы однородности дисперсии оценивают дисперсию параметра оптимизации:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{q=1}^q (Y_{u_q} - \bar{Y}_u)^2}{N(n-1)}; \quad (2.51)$$

где $u=1,2,3 \dots N$,
 $q=1,2,3, \dots n$.

При разном числе параллельных наблюдений для проверки гипотезы используют критерий Бартлетта:

$$B = \frac{1}{c} \left(f \lg S_{\{y\}}^2 - \sum f_u \lg S_u^2 \right) \approx X^2, \quad (2.52)$$

где c - коэффициент, определяемый по формуле:

$$c = 0,4343 \left[1 + \frac{1}{3(N-1)} \left(\sum \frac{1}{f_u} - \frac{1}{f} \right) \right]; \quad (2.53)$$

$$f = \frac{\sum_{u=1}^N f_u S_u^2}{\sum_{u=1}^N f_u}. \quad (2.54)$$

Для расчета дисперсии воспроизводимости при $n \neq n_1 \neq \dots \neq n_u$ используется формула:

$$S_{\{y\}}^{2*} = \frac{\sum_{u=1}^N f_u S_u^2}{\sum_{u=1}^N f_u}. \quad (2.55)$$

Определенное по формуле (2.49) значение X^2 сравнивают с табличным $X_{\alpha,f}^2$. Если $X^2 < X_{\alpha,f}^2$, то гипотеза об однородности N дисперсий принимается с доверительной вероятностью $P=(1-\alpha)$.

Значимость коэффициентов регрессии проверяют при помощи t -критерия:

$$t = \frac{|b_j|}{S_{\{b_j\}}}, \quad (2.56)$$

где $S_{\{b_j\}}$ - квадратичная ошибка коэффициента регрессии.

Для линейных моделей:

$$S_{\{b_j\}}^2 = \frac{S^2(y)}{N \cdot n}; \quad (2.57)$$

и

$$S_{\{b_j\}} = \sqrt{S_{\{b_j\}}^2}. \quad (2.58)$$

Вычисленное значение t_j -критерия сравнивают с табличным $t_{\alpha,f}$. При $t_j > t_{\alpha,f}$ коэффициент регрессии b_j значим. Число степеней свободы $f=N(n-1)$. Все значимые коэффициенты b_j оставляют в уравнении регрессии.

Проверка гипотезы об адекватности выбранной модели проводится с помощью F -критерия:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2}; \quad (2.59)$$

где $S_{ад}^2$ – дисперсия неадекватности;

$S_{\{y\}}^2$ - дисперсия воспроизводимости.

Дисперсии неадекватности при одинаковом повторении n наблюдений оценивают по формуле:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{n}{N - (k + 1)} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{\epsilon}_u)^2, \quad (2.60)$$

а для эксперимента с разным числом параллельных наблюдений:

$$S_{\text{ад}}^2 = \frac{n}{N - (k + 1)} \sum_{u=1}^N n_u (\bar{y}_u - \hat{\epsilon}_u)^2, \quad (2.61)$$

где $(k+1)$ – число оценок коэффициентов уравнения регрессии;
 $\hat{\epsilon}_u$ – расчетное значение параметра оптимизации в u -ой точке;
 n_u – число параллельных наблюдений в u -ой точке.

Дисперсию воспроизводимости от распределения числа параллельных наблюдений определяют по формуле (2.55), а для случая $n_u \neq \text{const}$:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{\sum_{u=1}^N \sum_{g=1}^{n_u} (y_{ug} - \bar{y}_u)^2}{\sum_{u=1}^N (n_u - 1)}. \quad (2.62)$$

Расчетное значение F-критерия сравнивают с табличным. При $F > F_{\alpha(f_{\text{ад}}; f)}$ гипотеза об адекватности модели не отвергается при выбранном уровне значимости α и числа степеней свободы для числителя $f_{\text{ад}} = N - (k + 1)$ и знаменателя $F = N(n - 1)$. Если линейная модель оказывается неадекватной, то в нее вводят эффекты взаимодействия и вновь оценивают ее. Если и в этом случае модель будет неадекватной, то необходимо перейти к моделям второго и более высоких порядков.

Пример построения модели с использованием планирования полного факторного эксперимента. По результатам проведения отсеивающего эксперимента (п.2.5) установлено, что на вибрацию двигателя ЗИЛ-130 доминирующее влияние оказывают: неуравновешенность коленчатого вала в сборе с маховиком и сцеплением – X_1 ; масса комплекта шатунно-поршневой группы X_2 ; зазор в коренных подшипниках – X_3 .

Числовые значения верхнего, нижнего, основного уровней факторов и интервалов варьирования приведены в таблице 2.22.

Таблица 2.22 - Значения верхнего, нижнего, основного уровней факторов и интервалов варьирования

Факторы	\tilde{X}_{b_i}	\tilde{X}_{n_i}	\tilde{X}_{o_i}	$\Delta\tilde{X}_i$
Дисбаланс коленчатого вала в сборе с маховиком – X_1	200	40	120	80
Масса комплекта шатунно-поршневой группы – X_2	2510	2390	2450	60
Зазор в коренных подшипниках – X_3	0,18	0,06	0,12	0,06

Для линейной модели $y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3$ требуется установить оценки коэффициентов регрессии и проверить ее адекватность опытным данным. Принимаем варьирование факторов на двух уровнях. Число опытов $N = 2^3 = 8$, число параллельных наблюдений в каждом опыте $n = 3$. общее число опытов составляет 24.

Матрица планирования и результаты проведения полнофакторного эксперимента и результаты опыта представлены в таблице 2.23.

Таблица 2.23 – Матрица планирования эксперимента и результаты опыта

Номер опыта	X_0	X_1	X_2	X_3	\bar{Y}_u , дБ
1	+	+	+	+	81,02
2	+	-	+	+	73,60
3	+	+	-	+	72,30
4	+	-	-	+	66,67
5	+	+	+	-	84,17
6	+	-	+	-	78,30
7	+	+	-	-	75,33
8	+	-	-	-	68,06

Расчетные значения оценок дисперсии для каждого опыта приведены в таблице 2.24.

Таблица 2.24 – Расчетные значения дисперсии для каждого опыта

Дисперсия	Номера опытов								$\sum_{u=1}^N S_u^2$
	1	2	3	4	5	6	7	8	
S_u^2	2.97	2.09	2.71	1.62	2.52	1.29	1.33	1.16	15.69

Однородность дисперсий S_u^2 оценивается с использованием G-критерия при $\alpha = 0,05$, $f = n - 1 = 2$ и $N = 8$.

$$G = \frac{S_{u \max}^2}{\sum_{u=1}^N S_u^2} = \frac{2,97}{15,69} = 0,189 < G_{0,05(2;8)} = 0,516 \quad (2.63)$$

Полученное критериальное условие подтверждает однородность дисперсий во всех опытах. Среднее значение дисперсии $S_{\{y\}}^2$ параметра оптимизации

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N S_u^2 = \frac{15,69}{8} = 1,96 \quad (2.64)$$

Дисперсия, связанная с ошибками в определении коэффициентов регрессии составляет:

$$S_{\{b_j\}}^2 = \frac{S_{\{y\}}^2}{N \cdot n} = \frac{1,96}{8 \cdot 3} = 0,082 \quad (2.65)$$

Откуда $S_{\{b_j\}} = 0,286$.

Оценки коэффициентов регрессии рассчитывали по формулам:

$$b_0 = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N \bar{Y}_u ; \quad (2.66)$$

$$b_i = \frac{1}{N} \sum_{u=1}^N X_{u,i} \bar{Y}_u . \quad (2.67)$$

Расчетные коэффициенты регрессии равны:

$$b_0=74,93 \quad b_1=3,27 \quad b_2=4,34 \quad b_3=-1,53.$$

Значимость коэффициентов регрессии оценивали при $\alpha=0,05$ и $f=N(n-1)=8(3-1)=16$. для этих условий $t_{0,05;16}=2,13$.

Расчетные значения t-критерия:

$$t_{b_0} = \frac{|b_0|}{S_{b_0}} = \frac{74,93}{0,286} = 261,9 ; \quad (2.68)$$

$$t_{b_1} = \frac{|b_1|}{S_{b_1}} = \frac{3,27}{0,286} = 11,43 ; \quad (2.69)$$

$$t_{b_2} = 15,17; t_{b_3} = 5,34.$$

Полученные значения t_{b_i} свидетельствуют о том, что все коэффициенты линейной модели значимыми, а уравнение регрессии имеет вид:

$$\bar{y} = 74,93 + 3,27X_1 + 4,34X_2 - 1,53X_3. \quad (2.70)$$

Для проверки адекватности полученного уравнения регрессии опытным данным необходимо определить расчетные значения параметра оптимизации, после чего установить значение дисперсии неадекватности. Вспомогательные вычисления представлены в таблице 2.25.

Таблица 2.25 – Расчетные значения параметра оптимизации и дисперсии неадекватности

Номер опыта	Факторы				\bar{Y}_u	\hat{Y}_u	$\bar{Y}_u - \hat{Y}_u$	$(\bar{Y}_u - \hat{Y}_u)^2$
	X_0	X_1	X_2	X_3				
1	+	+	+	+	81,02	81,01	0,01	0,0001
2	+	-	+	+	73,06	74,47	0,87	0,7569
3	+	+	-	+	72,30	72,33	0,03	0,0009
4	+	-	-	+	66,67	65,79	0,88	0,7744
5	+	+	+	-	84,17	84,07	0,10	0,0100
6	+	-	+	-	78,30	77,53	0,77	0,5925
7	+	+	-	-	75,33	75,39	0,06	0,0036
8	+	-	-	-	68,06	68,85	0,79	0,6231

$$\sum_{n=1}^N (\bar{Y}_u - \hat{Y}_u)^2 = 2,768 \quad (2.71)$$

Расчетные значения параметра оптимизации определяются на основе использования формулы (2.70) с учетом условий опытов из таблицы 2.25.

$$\hat{Y}_1 = 74,93 + 3,27(+1) + 4,34(+1) - 1,53(+1) = 81,01$$

$$\hat{Y}_2 = 74,93 + 3,27(-1) + 4,34(+1) - 1,53(+1) = 74,47 \text{ и т.д.}$$

$$\hat{Y}_3 = 72,33; \hat{Y}_4 = 65,79; \hat{Y}_5 = 84,07; \hat{Y}_6 = 77,53; \hat{Y}_7 = 75,39; \hat{Y}_8 = 68,85.$$

Величина дисперсии неадекватности составляет

$$S_{ад}^2 = \frac{n}{N - (k + 1)} \sum_{u=1}^N (\bar{y}_u - \hat{y}_u)^2 = \frac{3 \cdot 2,768}{8 - 3 - 1} = 2,076 \quad (2.72)$$

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2} = \frac{2.076}{1.96} = 1.06 < F_{0.05(4,16)} = 3,01 \quad (2.73)$$

при условии $\alpha=0,05$;

$$f_{ад}=N-(k+1)=4; \quad f=N(n-1)=16 \quad (2.74)$$

Адекватность полученного управления регрессии оценивали при $\alpha=0,05$;
 $f_{ад}=N-(k+1)=4$; $f=N(n-1)=16$. Значение F-критерия:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2} = \frac{2,076}{1,96} = 1,06 < F_{0,05(4;16)} = 3,01. \quad (2.75)$$

Вывод: уравнение (2.70) с 95%-ой доверительной вероятностью является адекватным опытным данным.

2.7 Исследование объектов методами пассивных экспериментов

При невозможности управления изменением факторов объекта исследования применяют метод пассивных экспериментов, проведение которых сопряжено с необходимостью длительного времени получения необходимой информации на основе полученных, как правило, результатов эксплуатационных испытаний. Для получения статистических моделей используют методы корреляционного и регрессионного анализа. Эти методы позволяют решить следующие основные задачи:

- оценить параметры математической модели
- выявить наличие и количественную оценку связи между факторами x_i и выходным параметром y
- оценить значимость коэффициентов уравнения регрессии
- оценить адекватность модели (уравнения регрессии) опытным данным.

В основе решения этих задач лежат предпосылки, что зависимая переменная y и независимые переменные x_i являются случайными нормально распределенными величинами, между которыми может существовать стохастическая связь корреляционного или регрессионного вида.

Для случаев, когда связь между выходным параметром и факторами имеет линейный вид, модель может быть представлена в виде:

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \dots + b_k x_k; \quad (2.76)$$

где $b_0, b_1 \dots b_k$ – значения оценок коэффициентов регрессии;
 k – число факторов.

При обработке результатов пассивного эксперимента оценки коэффициентов регрессии целесообразно определять не в натуральном, а в стандартизированном масштабе. Это осуществляется нормировкой всех значений случайных величин по формулам:

$$t_{y_u} = \frac{y_u - \bar{y}}{S_{\{y\}}} \quad (2.77)$$

и

$$t_{x_{iu}} = \frac{x_{iu} - \bar{x}_i}{S_{\{x_i\}}} \quad (2.78)$$

где t_{y_u} и $t_{x_{iu}}$ - соответственно нормированные и центрированные значения параметра оптимизации и факторов;

\bar{y} и \bar{x}_i - соответственно оценка средних значений параметра оптимизации и факторов;

$S_{\{y\}}$ и $S_{\{x_i\}}$ - средние квадратические отклонения y и x_i соответственно:

$$S_{\{y\}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}(y_u - \bar{y})^2}, \quad i=1,2,\dots,k, \quad (2.79)$$

$$S_{\{x_i\}} = \sqrt{\frac{1}{N-1}(x_{iu} - \bar{x}_i)^2}, \quad u=1,2,\dots,N. \quad (2.80)$$

После замены значений y и x_i в уравнении (2.76) на t_y и t_{x_i} получаем новое уравнение регрессии:

$$t_y = a_1 t_{x_1} + \dots + a_k t_{x_k}, \quad (2.81)$$

где a_1, \dots, a_k – стандартизированные коэффициенты регрессии.

Выборочные коэффициенты корреляции при использовании стандартизированного масштаба оценивают по формулам:

$$r_{t_y t_{x_i}} = \frac{1}{N-1} \sum t_{y_u} t_{x_{iu}} \quad (2.82)$$

и

$$r_{t_{x_i} t_{x_j}} = \frac{1}{N-1} \sum_{u=1}^N t_{x_{iu}} t_{x_{ju}} . \quad (2.83)$$

Значение выборочного коэффициента парной корреляции $r_{t_{y_i} t_{x_i}}$ равно коэффициенту корреляции r_{yx_i} в натуральном выражении. Коэффициент уравнения регрессии (2.81) находят по методу наименьших квадратов. Полученная система нормальных уравнений, представленная через коэффициенты корреляции имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} r_{yx_1} &= a_1 1 + a_2 r_{x_1 x_2} + \dots + a_k r_{x_1 x_k} ; \\ r_{yx_2} &= a_1 r_{x_1 x_2} + a_2 1 + \dots + a_k r_{x_2 x_k} ; \\ &\dots\dots\dots \\ r_{yx_k} &= a_1 r_{x_k x_1} + a_2 r_{x_k x_2} + \dots + a_k 1 . \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Статистическая значимость выборочных коэффициентов корреляции, входящих в систему уравнений (2.84) оценивают условием

$$\frac{|r_{yx_i}| \sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r_{yx_i}^2}} > t_{\alpha(f=N-2)} , \quad (2.85)$$

где $t_{\alpha(f=N-2)}$ - табличное значение t-критерия при уровне значимости α и числе степеней свободы $f=N-2$.

По результатам проверки статистически не значимые коэффициенты корреляции исключаются из системы уравнений (2.84).

Вычисление коэффициентов регрессии целесообразно проводить, используя прием матричной алгебры. В соответствии с этим составляется корреляционная матрица:

$$R_m = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_k} \\ r_{x_2 x_1} & 1 & \dots & r_{x_2 x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_k x_1} & r_{x_k x_2} & \dots & 1 \end{vmatrix} , \quad (2.86)$$

где $m=k+1$.

Используя метод определителей для установления стандартизированных коэффициентов регрессии (2.81) имеем:

$$a_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \quad (2.87)$$

где Δ_i – определитель матрицы R_m , в которой i -столбец элементов заменен столбцом сводных членов $(r_{yx_1}, \dots, r_{yx_k})$ уравнений (2.84);

Δ – определитель матрицы R_m .

Вычисление значений коэффициентов уравнения (2.76) в натуральном масштабе проводится по формулам:

$$b_i = a_i \frac{S_{\{y\}}}{S_{\{x_i\}}} \quad (2.88)$$

и

$$b_0 = \bar{y} - \sum_{i=1}^k b_i \bar{x}_i \quad (2.89)$$

Расчет средних квадратических отклонений коэффициентов регрессии b_0, b_1, \dots, b_k проводятся по следующим формулам:

$$S_{\{b_0\}} = \frac{S_{\{y\}}}{\sqrt{N}} \quad (2.90)$$

и

$$S_{\{b_i\}} = \frac{S_{\{y\}}}{\sqrt{N} S_{\{x_i\}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - R_{yx_1x_2 \dots x_k}^2}}{\sqrt{1 - R_{x_1x_2 \dots x_k}^2}}, \quad (2.91)$$

В формулах (2.90) и (2.91):

$S_{\{y\}}$ - среднее квадратическое отклонение случайной величины y ;

$S_{\{x_i\}}$ - среднее квадратическое отклонение фактора x_i ;

$R_{yx_1x_2 \dots x_k}$ - множественный коэффициент корреляции между y и всеми факторами;

$R_{x_1x_{i+1} \dots x_k}$ - множественный коэффициент корреляции между фактором x_i и всеми остальными факторами.

Коэффициент множественной корреляции $R_{yx_1x_2 \dots x_k}$ рассчитывают по формуле

$$R_{yx_1x_2\dots x_k} = \sqrt{a_1 r_{yx_1} + a_2 r_{yx_2} + \dots + a_k r_{yx_k}} \quad (2.92)$$

Для выборки небольшого объема величина вычисленная по формуле (2.92) покажет превышенную силу связи. В этой связи для коррекции значения коэффициента множественной корреляции можно использовать формулу:

$$\bar{R} = \sqrt{1 - (1 - R^2) \frac{N-1}{N-m}} \quad (2.93)$$

\bar{R} - исправленное значение коэффициента множественной корреляции;
 $m=k+1$ – количество коэффициентов математической модели;
 k – число факторов.

Статистическую значимость проверяют при помощи t- критерия. Оценка дисперсии коэффициента множественной корреляции производится по формуле:

$$S_{\{R\}}^2 = \frac{1 - R^2}{\sqrt{N - m}} \quad (2.94)$$

Коэффициент множественной корреляции между фактором x_i и всеми остальными рассчитывается по следующей формуле:

$$R_{x_i x_{i+1} \dots x_k} = \sqrt{\frac{\Delta_i^*}{\Delta_i}} \quad (2.95)$$

где

$$\Delta_i^* = (-1)^k \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & r_{x_1 x_i} & \dots & r_{x_1 x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_i x_1} & r_{x_i x_2} & \dots & 0 & \dots & r_{x_i x_k} \\ r_{x_k x_1} & r_{x_k x_2} & \dots & r_{x_k x_i} & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (2.96)$$

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} 1 & r_{x_1 x_2} & \dots & \dots & r_{x_1 x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_{i+1} x_1} & r_{x_{i+1} x_{i+2}} & \dots & \dots & r_{x_{i+1} x_k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{x_k x_1} & r_{x_k x_{i+1}} & \dots & \dots & 1 \end{vmatrix} \quad (2.97)$$

Определитель Δ_i^* образуется из матрицы (2.86), если подставить в последнюю на пересечении i -й строки с i -м столбцом вместо единицы ноль. Определитель Δ_i равен первому без i -й строки и i -го столбца.

Например, для трех факторов расчетные формулы имеют вид:

$$R_{x_1x_2x_3} = \sqrt{\frac{r_{x_1x_2}^2 + r_{x_1x_3}^2 - 2r_{x_1x_3} \cdot r_{x_2x_3}}{1 - r_{x_2x_3}^2}}; \quad (2.98)$$

$$R_{x_2x_1x_3} = \sqrt{\frac{r_{x_1x_2}^2 + r_{x_2x_3}^2 - 2r_{x_1x_3} \cdot r_{x_1x_2} \cdot r_{x_2x_3}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}; \quad (2.99)$$

$$R_{x_3x_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{x_1x_3}^2 + r_{x_2x_3}^2 - 2r_{x_1x_2} \cdot r_{x_1x_3} \cdot r_{x_2x_3}}{1 - r_{x_1x_3}^2}} \quad (2.100)$$

Значимость коэффициентов уравнения регрессии проверяют соотношением (2.101) при уровне значимости α и числа степеней свободы $f=N-1$

$$\frac{|b_i|}{S_{\{b_i\}}} = t_{\{b_i\}} t_{(\alpha, f)}, \quad (2.101)$$

Если это условие соблюдается, то коэффициент b_i значим. Если некоторые коэффициенты незначимы, то их исключают из уравнения. После этого составляют новую систему нормальных уравнений и повторяют все расчеты. В том случае, когда значения коэффициентов корреляции между факторами $r_{x_i x_j}$ близки к единице, то один из этих парных факторов исключается.

Полнота учета совокупности факторов оценивается коэффициентом конкордации, который численно равен $R_{yx_1x_2\dots x_k}^2$. При значении коэффициента конкордации более 0,5 можно утверждать, что моделью факторы учитываются с достаточной полнотой.

Адекватность математической модели проверяется при помощи F- критерия Фишера:

$$F = \frac{S_{ад}^2}{S_{\{y\}}^2} \langle F_{\alpha(f_1, f_2)} \rangle, \quad (2.102)$$

где $S_{ад}^2$ - оценка дисперсии неадекватности;

$S_{\{y\}}^2$ - оценка дисперсии ошибки опыта (дисперсия воспроизводимости);

$F_{\alpha(f_1, f_2)}$ - значения критерия Фишера для уровня значимости α и числе степеней свободы числителя $f_1=Nn-k-1$ и знаменателя $f_2= N(n-1)$;

N – количество опытов;

n - число параллельных опытов;

k – число значимых факторов модели.

Оценка дисперсии составляет:

$$S_{ад}^2 = \frac{n}{N(n-m)} \sum_{u=1}^N (\bar{y} - \hat{y}_u)^2, \quad (2.103)$$

где m - число значимых коэффициентов уравнения регрессии.

Величина дисперсии ошибки опыта:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{n}{N(n-1)} \sum_{u=1}^N \sum_{i=1}^n (y_{u_i} - \bar{y}_u)^2. \quad (2.104)$$

В ситуации, когда параллельные наблюдения провести не удастся, то дисперсию опыта рассчитать не возможно. В этом случае проверку проводят сравнением остаточной дисперсии $S_{ост}^2$ и дисперсии относительно среднего $S_{\{y\}}^2$:

$$S_{\{y\}}^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{u=1}^N (y_u - \bar{y})^2, \quad (2.105)$$

y_u – значение выходного параметра в u -м опыте;

\bar{y} - среднее значение выходного параметра.

Оценку остаточной дисперсии можно вычислить по формуле:

$$S_{ост}^2 = \frac{1}{N-m} \sum_{u=1}^N (y_u - \hat{y}_u)^2. \quad (2.106)$$

Адекватность модели опытными данным может быть подтверждена и уравнением регрессии можно пользоваться при выполнении неравенства:

$$F = \frac{S_{\{y\}}^2}{S_{ост}^2} < F_{\alpha(f_1, f_2)} \quad (2.107)$$

$F_{\alpha(f_1, f_2)}$ - табличное значение F-критерия для принятого уровня значимости и числа степеней свободы числителя $f_1=N-1$ и знаменателя $f_2=N-m$.

Пример. С использованием проведения метода пассивного эксперимента установить математическую модель зависимости ресурса коренных подшипников блока цилиндров двигателя ЗИЛ- 130 от технологических факторов: биение коренных шеек коленчатого вала – x_1 ; несоосности гнезд под вкладыша коренных опор блока цилиндров - x_2 и искажения макрогеометрии опор под вкладыши коренных подшипников - x_3 . Исходные значения факторов x_1 , x_2 и x_3 приведены в таблице 2.26. В этой же таблице приведены результаты наблюдений за 29 двигателями в эксплуатации.

Таблица 2.26 - Исходные данные значений факторов и результаты наблюдений по установлению ресурса коренных подшипников двигателей ЗИЛ-130

Номер п/п	$X_1, \text{мм}$	$X_2, \text{мм}$	$X_3, \text{мм}$	$U_u, \text{тыс. км}$
1	0,06	0,00	0,035	105,3
2	0,08	0,04	0,02	98,18
3	0,15	0,05	0,06	76,70
4	0,08	0,05	0,02	85,50
5	0,16	0,00	0,05	80,46
6	0,00	0,04	0,01	109,45
7	0,10	0,04	0,00	98,99
8	0,03	0,015	0,03	115,21
9	0,12	0,06	0,08	77,10
10	0,11	0,02	0,02	103,30
11	0,08	0,04	0,03	102,05
12	0,05	0,03	0,05	86,75
13	0,19	0,01	0,04	73,52
14	0,05	0,02	0,05	90,20
15	0,17	0,025	0,07	62,10
16	0,10	0,06	0,02	85,90
17	0,08	0,05	0,04	87,00
18	0,00	0,04	0,035	118,00
19	0,07	0,065	0,06	74,15
20	0,04	0,01	0,07	86,45
21	0,10	0,04	0,07	84,75
22	0,07	0,03	0,05	82,05
23	0,12	0,035	0,04	88,95
24	0,15	0,025	0,00	107,05
25	0,13	0,035	0,01	78,50
26	0,09	0,020	0,03	95,55
27	0,11	0,045	0,03	100,10
28	0,09	0,03	0,03	97,95
29	0,07	0,045	0,05	83,53

На основании ранее выполненных исследований выдвигается гипотеза, что зависимость величины ресурса коренных подшипников от факторов x_1 , x_2 и x_3 может быть описана линейной моделью вида:

$$y=b_0+b_1X_1+b_2X_2+b_3X_3. \quad (2.108)$$

Для доказательства использования корреляционного анализа необходимо проверить выполнения условия распределения случайных величин по нормальному закону и взаимной независимости факторов x_1 , x_2 и x_3 .

Алгоритм решения задачи.

1. Определим оценку средних значений переменных, их выборочные дисперсии и значения W-статистики (как критерия для проверки гипотезы о нормальности распределения случайных величин) для величин y , x_1 , x_2 , и x_3 . Результаты вычислений приведены в таблице 2.27

Таблица 2.27 - Результат вычисления случайных величин

Факторы	Среднее значение	Выборочная дисперсия	Среднее квадратичное отклонение	W
X_1	0,0914	0,002098	0,046	0,9819
X_2	0,0336	0,000291	0,017	0,9717
X_3	0,0379	0,000432	0,021	0,9684
Y	90,86	173,77	13,2	0,98

При $N=29$ и уровне значимости $\alpha=0,05$ критическое значение $W_{\alpha,f}=0.926$. Гипотеза о нормальности распределения всех случайных величин не отвергается, т.к. расчетные значения W- статистики превышают $W_{\alpha,f}$.

2. Используя формулу (2.83), оцениваем коэффициенты парной корреляции, а по формуле (2.85) и их статистическую значимость

$$r_{x_1x_2} = -0,0857; \quad t_{(r_{x_1x_2})} = 0,4472$$

$$r_{x_1x_3} = -0,0859; \quad t_{(r_{x_1x_3})} = 0,4482$$

$$r_{x_2x_3} = -0,0453; \quad t_{(r_{x_2x_3})} = 0,2354$$

Расчет соответствующих t-статистик проводился при значениях $f=N-2=27$ и $\alpha=0,05$. Табличное значение $t_{\alpha,f}=2,06$.

Сопоставление расчетных t-статистик и табличные значения подтверждают гипотезу о взаимной линейной независимости факторов x_i и не противоречит опытным данным, т.к. во всех случаях $t < t_{\alpha, f}$.

3. Расчетные значения коэффициентов парной корреляции между зависимыми и независимыми переменными представлены в таблице 2.28.

Таблица 2.28 – Результаты расчетов коэффициентов парной корреляции между зависимой и независимыми переменными

Факторы	У	X ₁	X ₂	X ₃
У	1	-0,5841	-0,1866	-0,05995
X ₁	-0,5841	1	0,0857	0,0859
X ₂	-0,1866	-0,0857	1	0,0453
X ₃	-0,5995	0,0859	0,0453	1

4. Используя формулы (2.77)–(2.78) и равенство (2.81), составим уравнение в стандартизированном масштабе

$$t_y = a_1 t_{x_1} + a_2 t_{x_2} + a_3 t_{x_3} \quad (2.109)$$

5. Система нормальных уравнений на основе (2.84) имеет вид

$$\left. \begin{aligned} r_{yx_1} &= a_1 + a_2 r_{x_1 x_2} + a_3 r_{x_1 x_3} \\ r_{yx_2} &= a_1 r_{x_2 x_1} + a_2 + a_3 r_{x_2 x_3} \\ r_{yx_3} &= a_1 r_{x_3 x_1} + a_2 r_{x_3 x_2} + a_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.110)$$

6. Используя корреляционную матрицу (2.86) и данные таблицы 2.28 составим и решаем определители уравнений Δ и Δ_i .

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -0,0857 & 0,0859 \\ -0,0857 & 1 & 0,0453 \\ 0,0859 & 0,0453 & 1 \end{vmatrix} = 0,9826$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -0,5841 & -0,0857 & 0,0859 \\ -0,1866 & 1 & 0,0453 \\ -0,5995 & 0,0453 & 1 \end{vmatrix} = -0,5459$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -0,05841 & 0,0859 \\ -0,0857 & -0,1866 & 0,0453 \\ 0,0859 & -0,05995 & 1 \end{vmatrix} = -0,206$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -0,0857 & -0,5841 \\ -0,0857 & 1 & -0,1866 \\ 0,0859 & 0,0453 & -0,5995 \end{vmatrix} = -0,5323$$

7. Расчет оценок стандартизированных коэффициентов уравнения регрессии:

$$a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{0,5459}{0,986} = -0,556; \quad a_2 = -0,21; \quad a_3 = -0,542.$$

8. Определим оценки коэффициентов регрессии в натуральном масштабе:

$$b_1 = a_1 \frac{S_{\{y\}}}{S_{\{x_1\}}} = -0,556 \frac{13,2}{0,046} \cong -160$$

$$b_2 = a_2 \frac{S_{\{y\}}}{S_{\{x_2\}}} = -0,21 \frac{13,2}{0,017} \cong -163$$

$$b_3 = a_3 \frac{S_{\{y\}}}{S_{\{x_3\}}} = -0,542 \frac{13,2}{0,021} \cong -341$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}_1 - b_2 \bar{x}_2 - b_3 \bar{x}_3 = 90,86 + 160 \cdot 0,0914 + 163 \cdot 0,0336 + 341 \cdot 0,0379 \cong 124$$

9. Подставим значения коэффициентов регрессии в уравнение (2.108), имеем:

$$\bar{y} = 124 - 160x_1 - 163x_2 - 341x_3$$

10. Оценка полноты отобранных факторов с использованием коэффициента детерминации

$$\begin{aligned} R^2_{y x_1 x_2 x_3} &= a_1 r_{y x_1} + a_2 r_{x_1 x_2} + a_3 r_{x_1 x_3} = \\ &= (-0,556)(-0,5841) + (-0,21)(-0,1866) + (-0,542)(-0,5995) = 0,689 \end{aligned}$$

Полученный результат свидетельствует о том, что на 68,9 % ресурс коренных подшипников отремонтированного двигателя обуславливается рассматриваемыми факторами, а остальные – действием неучтенных моделью факторов.

Коэффициент множественной корреляции $R_{y_1x_1x_2x_3} = 0,89$.

11. Определим значения коэффициентов множественной корреляции между факторами $R_{x_1x_2 \dots x_{i+1} \dots x_k}$:

$$R_{x_1x_2x_3}^2 = \frac{r_{x_1x_2}^2 + r_{x_1x_3}^2 - 2r_{x_1x_2} \cdot r_{x_1x_3} \cdot r_{x_2x_3}}{1 - r_{x_2x_3}^2} =$$

$$= \frac{0,0857^2 + 0,0859^2 - 2(-0,0857) \cdot 0,0859 \cdot 0,0453}{1 - 0,0453^2} = 0,0154;$$

$$R_{x_2x_1x_3}^2 = \frac{r_{x_1x_2}^2 + r_{x_2x_3}^2 - 2r_{x_1x_2} \cdot r_{x_1x_3} \cdot r_{x_2x_3}}{1 - r_{x_1x_3}^2} =$$

$$= \frac{0,0857^2 + 0,0453^2 - 2 \cdot 0,0857 \cdot 0,0859 \cdot 0,0453}{1 - 0,0859^2} = 0,01;$$

$$R_{x_3x_1x_2}^2 = \frac{r_{x_1x_3}^2 + r_{x_2x_3}^2 - 2r_{x_1x_2} \cdot r_{x_1x_3} \cdot r_{x_2x_3}}{1 - r_{x_1x_2}^2} =$$

$$= \frac{0,0859^2 + 0,0453^2 - 2 \cdot 0,0857 \cdot 0,0859 \cdot 0,0453}{1 - 0,0857^2} = 0,012;$$

12. Оценка средних квадратических отклонений коэффициентов регрессии:

$$S_{b_1} = \frac{S_y}{\sqrt{NS_{x_1}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - R_{yx_1x_2x_3}^2}}{\sqrt{1 - R_{x_1x_2x_3}^2}} = \frac{13,2\sqrt{1 - 0,689}}{\sqrt{29 \cdot 0,046}\sqrt{1 - 0,0154}} = 29,98$$

$$S_{b_2} = \frac{S_y}{\sqrt{NS_{x_2}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - R_{yx_1x_2x_3}^2}}{\sqrt{1 - R_{x_2x_1x_3}^2}} = \frac{13,2\sqrt{1 - 0,689}}{\sqrt{29 \cdot 0,017}\sqrt{1 - 0,01}} = 80,7$$

$$S_{b_3} = \frac{S_y}{\sqrt{NS_{x_3}}} \cdot \frac{\sqrt{1 - R_{y x_1 x_2 x_3}^2}}{\sqrt{1 - R_{x_3 x_1 x_2}^2}} = \frac{13,2 \sqrt{1 - 0,689}}{\sqrt{29} \cdot 0,012} = 65,4$$

$$S_{b_0} = \frac{S_y}{\sqrt{N}} = \frac{13,2}{\sqrt{29}} = 2,44$$

13. Оценка значимости коэффициентов регрессии при $\alpha=0,05$, $f=N-1$ с помощью t- критерия. Табличные значения $t_{\alpha,f} = 2,05$

$$t_{b_0} = \frac{|b_0|}{S_{b_0}} = \frac{124}{2,44} = 50,8 > t_{\alpha,f} = 2,05$$

$$t_{b_1} = \frac{|b_1|}{S_{b_1}} = \frac{160}{29,98} = 5,34 > t_{\alpha,f} = 2,05$$

$$t_{b_2} = \frac{|b_2|}{S_{b_2}} = \frac{163}{80,7} = 2,02 < t_{\alpha,f} = 2,05$$

$$t_{b_3} = \frac{|b_3|}{S_{b_3}} = \frac{341}{65,4} = 5,21 > t_{\alpha,f} = 2,05$$

Анализ полученных результатов показывает, что фактор x_2 является не значимым. Это обстоятельство позволяет упростить модель путем исключения из нее фактора x_2 .

После исключения фактора x_2 все вычисления повторяют. Результат окончательных расчетов приведены в таблице 2.29.

Таблица 2.29 - Результаты окончательных расчетов

Факторы	b_i	S_{b_i}	t_{b_i}
X_{00}	118,2	1,54	77,0
X_{01}	-154,3	33,7	4,58
X_{03}	-349,6	74,1	4,72

Анализ показал, что после исключения фактора x_2 коэффициент множественной корреляции $R_{y x_1 x_3} = 0,803$; $t_{\{R\}} = 11,5$; $R_{y x_1 x_3}^2 = 0,645$. Табличное значение $t_{0,05;28} = 2,05$. Это значение позволяет сделать вывод о том, что коэффициенты уравнения регрессии значимы.

14. Проверка гипотезы о соответствии уравнения регрессии опытным данным проводятся в соответствии с условием (2.107).

$$F = \frac{S_y^2}{S_{\text{ост}}^2}, \quad (2.109)$$

При проведении расчетов принято:

$\alpha=0,05$; $f_1=29-1=28$ – для числителя; $f_2=29-3=26$ – для знаменателя.

$$F=26,17 > F_{\alpha(f_1;f_2)}=1,9$$

Адекватность уравнения подтверждена.

Таким образом:

$$\bar{y} = 118,2 - 154,3x_1 - 349,6x_3$$

При проведении экспериментов неучтенные технологические факторы поддерживались на уровне допусковых зон, установленных действующей нормативной документацией завода-изготовителя ЗИЛ – 130.

2.8 Контрольные вопросы

1. Понятие цели, предмета и объекта исследования.
2. Основные этапы научного исследования.
3. Понятие рабочей гипотезы и основные требования, предъявляемые к ней.
4. Понятие параметра оптимизации.
5. Выбор факторов, влияющих на объект исследования и требования, предъявляемые к ним.
6. Математическая модель объекта исследования.
7. Ранжирование и процедура ранжирования факторов.
8. Оценка согласованности мнений экспертов по результатам экспертного опроса.
9. Оценка значимости согласованности мнений экспертов.
10. Сущность метода случайного баланса при проведении экспериментального отсеивания факторов.
11. Кодирования верхнего, нижнего и среднего уровней факторов.
12. Правило разработки матрицы проведения опытов.
13. Правила выделения значимых факторов по результатам проведения отсеивающего эксперимента.
14. Сущность метода исследования факторов методами дисперсионного анализа.
15. Условие применения полнофакторного эксперимента.

16. Разработка матрицы планирования эксперимента с учетом значимости линейных факторов.
17. Разработка матрицы планирования эксперимента с учетом значимости эффектов взаимодействия.
18. Оценка значимости коэффициентов регрессии при помощи t-критерия.
19. Проверка гипотезы об адекватности выбранной модели экспериментальным данным.
20. Исследование объектов методами пассивных экспериментов.
21. Оценка коэффициентов регрессии не в натуральном, а в стандартизированном масштабе.
22. Оценка коэффициентов корреляции при использовании стандартизированного масштаба.
23. Условия доказательства правомочности использования методов корреляционного анализа при обработке результатов проведенного пассивного эксперимента.
24. Условие проверки гипотезы о соответствии уравнения регрессии опытным данным.

Список использованных источников

1. Адлер, Ю.П. Планирование эксперимента при поиске оптимальных условий / Ю.П. Адлер, Е.В. Маркова, Ю.В. Грановский. - М.: Наука, 1976. – 279 с.
2. Алифанов, А.Л. Прогнозирование надежности дорожных машин: учебное пособие / А.Л. Алифанов. – Норильск, 1994. – 128 с.
3. Алифанов, А.Л. Маркетинг: Решения исследовательских задач: учебное пособие / А.Л. Алифанов, Л.А. Алифанов. - Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2005. - 95 с.
4. Барлоу, Р. Математическая теория надежности: перев. с англ. / Р. Барлоу, Ф.М. Прошан; под ред. акад. АН УССР Гнеденко Б.В. . – М.: «Советское радио», 1969. - 488 с.
5. Венцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Венцель - 4-е изд. - М.: Наука, 1969. - 576 с.
6. Митропольский, А.К. Техника статистических вычислений / А.К. Митропольский - 2-е изд. - М.: Наука, 1971. - 576 с.
7. Моделирование процессов восстановления машин / В.П. Апсин, Л.В. Дехтеринский, С.Б. Норкин, В.М. Приходько. - М.: Транспорт, 1996 – 311 с.
8. Налимов, В.В. Теория эксперимента / В.В. Налимов. - М.: Наука, 1971. - 207 с.
9. Рассоха, В.И. Основы теории надежности и диагностика автомобилей: учебное пособие / В.И. Рассоха. – Оренбург: ОГУ, 2002. – 144 с.
10. Ремонтпригодность машин / под ред. д-ра тех. наук проф. П.Н. Волкова. - М.: Машиностроение, 1975. – 368 с. с ил.
11. Сырицин, Т.А. Эксплуатация и надежность гидро- и пневмоприводов: учебник для вузов / Т.А. Сырицын. – М.: Машиностроение, 1990. – 248 с. с ил.
12. Технология ремонта автомобилей: учебник / Л.В. Дехтеринский [и др.]. – М.: Транспорт, 1979. – 342 с., ил., табл.
13. Хьюстон, А. Дисперсионный анализ / А. Хьюстон; перев. с англ. А.Г.Кругликова. - М.: «Статистика», 1971. - 186 с.
14. Шор, Я.Б. Таблицы для анализа и контроля надежности / Я.Б. Шор, Ф.И. Кузьмин. - М.: «Советское радио», 1968. - 284 с.

Приложение А
(обязательное)

Таблицы математической статистики

Таблица А.1 - Значение плотности нормального распределения $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

х	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	х
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973	0,0
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918	0,1
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825	0,2
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697	0,3
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538	0,4
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352	0,5
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144	0,6
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920	0,7
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685	0,8
0,9	2661	3637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444	0,9
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	12275	2251	2227	2203	1,0
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965	1,1
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736	1,2
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518	1,3
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315	1,4
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127	1,5
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957	1,6
1,7	0940	0925	0909	0893	10878	0863	0848	0833	0818	0804	1,7
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669	1,8
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551	1,9
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	10478	0468	0459	0449	2,0
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0388	0379	0371	0363	2,1
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290	2,2
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229	2,3
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	10189	0184	0180	2,4
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139	2,5
2,6	0,0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107	2,6
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081	2,7
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061	2,8
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046	2,9
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034	3,0
3,1	0033	0032	0031	0030	10029	0028	0027	10026	0025	0025	3,1
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018	3,2
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013	3,3
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009	3,4
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006	3,5
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004	3,6
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003	3,7
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	10002	0002	0002	0002	0002	3,8
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	3,9

Таблица А.2 - Значение функции нормального распределения

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	0	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	0	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	0	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	0	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	0	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	0	7275	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	0	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	0	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	0	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	0	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	0	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	0,9	0320	0490	0658	0824	0988	1149	1308	1466	1621	1774
1,4	0,9	1924	2073	2220	2364	2507	2647	2785	2922	3056	3189
1,5	0,9	3319	3448	3574	3699	3822	3943	4062	4179	4295	4408
1,6	0,9	4520	4630	4738	4845	4950	5053	5154	5254	5352	5449
1,7	0,9	5543	5637	5728	5818	5907	5994	6080	6164	6246	6327
1,8	0,9	6407	6485	6562	6637	6712	6784	6856	6926	6995	7062
1,9	0,9	7128	7193	7257	7320	7381	7441	7500	7558	7615	7670
2,0	0,9	7725	7778	7831	7882	7932	7982	8030	8077	8124	8169
2,1	0,9	8214	8257	8300	8341	8382	8422	8461	8500	8537	8574
2,2	0,9	8610	8645	8679	8713	8745	8778	8809	8840	8870	8899
2,3	0,9	8928	8956	8983	9010	9036	9061	9086	9111	9134	9158
2,4	0,92	1802	2024	2240	2451	2656	2857	3053	3244	3431	3613
2,5	0,92	3790	3963	4132	4297	4457	4614	4766	4915	5060	5201
2,6	0,92	5339	5473	5603	5731	5855	5975	6093	6207	6319	6427
2,7	0,92	6533	6636	6736	6833	6928	7020	7110	7197	7282	7365
2,8	0,92	7445	7523	7599	7673	7744	7814	7882	7948	8012	8074
2,9	0,92	8134	8193	8250	8305	8359	8411	8462	8511	8559	8605
3,0	0,92	8650	8694	8736	8777	8817	8856	8893	8930	8965	8999
3,1	0,93	0324	0646	0957	1260	1553	1836	2112	2378	2636	2886
3,2	0,93	3129	3363	3590	3810	4024	4230	4429	4623	4810	4991
3,3	0,93	5166	5335	5499	5658	5811	5959	6103	6242	6376	6505
3,4	0,93	6631	6752	6869	6982	7091	7197	7299	7398	7493	7585
3,5	0,93	7674	7760	7842	7922	7999	8074	8146	8215	8282	8347
3,6	0,93	8409	8469	8527	8583	8637	8689	8739	8787	8834	8879
3,7	0,93	8922	8964	9004	9043	9080	9116	9150	9184	9216	9247
3,8	0,94	2765	3052	3327	3593	3848	4094	4331	4558	4777	4988
3,9	0,94	5190	5385	5573	5753	5926	6092	6252	6406	6554	6696
4,0	0,94	6833	6964	7090	7211	7327	7439	7546	7649	7748	7843

Примечания: 1. Для отрицательных значений аргумента $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$.

2. Индекс у цифры 9 означает ее повторение, например при $x=3,95$ имеем $\Phi(x)=0,9_4 \cdot 6092=0,99996092$.

Таблица А.3 - Значение квантилей нормального распределения

$$\Phi(u_\gamma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{u_\gamma} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \gamma; u_{1-\gamma} = -u_\gamma$$

0,50	0	0,66	0,412	0,82	0,915	0,97	1,881
0,51	0,025	0,67	0,440	0,83	0,954	0,975	1,960
0,52	0,050	0,68	0,468	0,84	0,994	0,980	2,054
0,53	0,075	0,69	0,496	0,85	0,036	0,990	2,326
0,54	0,100	0,70	0,524	0,86	1,080	0,991	2,366
0,55	0,126	0,71	0,553	0,87	1,126	0,992	2,409
0,56	0,151	0,72	0,583	0,88	1,175	0,993	2,457
0,57	0,176	0,73	0,613	0,89	1,227	0,994	2,512
0,58	0,202	0,74	0,643	0,90	1,282	0,995	2,576
0,59	0,228	0,75	0,674	0,91	1,341	0,996	2,652
0,60	0,253	0,76	0,706	0,92	1,405	0,997	2,748
0,61	0,279	0,77	0,739	0,925	1,440	0,9975	2,807
0,62	0,305	0,78	0,772	0,93	1,476	0,9980	2,878
0,63	0,332	0,79	0,806	0,94	1,555	0,9990	3,090
0,64	0,358	0,80	0,842	0,95	1,645	0,9995	3,291
0,65	0,385	0,81	0,878	0,96	1,751	0,9999	3,719

Таблица А.4 - Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α			
	0,20	0,10	0,05	0,025
1	1,642	2,706	3,841	5,024
2	3,219	4,605	5,991	7,378
3	4,642	6,251	7,815	9,348
4	5,989	7,779	9,488	11,143
5	7,289	9,236	11,07	12,832
6	8,558	10,645	12,59	14,449
7	9,803	12,017	14,06	16,013
8	11,030	13,362	15,50	17,535
9	12,242	14,684	16,91	19,023
10	13,442	15,987	18,30	20,483
11	14,631	17,275	19,67	21,920
12	15,812	18,549	21,02	23,336
13	16,985	19,812	22,36	24,736
14	18,151	21,064	23,68	26,129
15	19,311	22,307	24,99	27,488
16	20,465	23,542	26,29	28,845
17	21,615	24,769	27,58	30,191
18	22,766	25,989	28,86	31,536
19	23,900	27,204	30,14	32,852
20	25,038	28,412	31,41	34,170
21	26,171	29,615	32,67	35,479
22	27,31	30,813	33,92	36,781
23	28,429	32,007	35,17	38,076
24	29,553	33,196	36,41	39,364
25	30,675	34,382	37,65	40,646
26	31,795	35,563	38,88	41,923
27	32,912	36,741	40,11	43,194
28	34,027	37,916	41,33	44,461
29	35,139	39,087	42,55	45,722
30	36,250	40,256	43,77	46,979
31	37,350	41,422	44,98	48,232
32	38,466	42,585	46,19	49,480
33	39,572	43,745	47,40	50,725
34	40,676	44,903	48,60	51,966
35	41,778	46,059	49,80	53,203
36	42,879	47,212	50,99	54,437

Таблица А.5 - Критерий Бартлетта. Процентные точки М-статистики, $\alpha=0,05$

k	$C_1=0,0$	$C_1=0,5$	$C_1=1,0$	$C_1=1,5$	$C_1=2,0$	$C_1=2,5$	$C_1=3,0$	$C_1=3,5$	$C_1=4,0$
3(a)	5,99	6,47	6,89	7,80	7,38	7,39	7,22	-	-
(b)	5,99	6,22	6,43	6,64	6,84	7,03	7,22	-	-
4(a)	7,81	8,24	8,63	8,96	9,21	9,38	9,43	9,37	9,18
(b)	7,81	8,00	8,17	8,35	8,52	8,69	8,85	9,02	9,18
5(a)	9,49	9,88	10,24	10,57	10,86	11,08	11,24	11,32	11,31
(b)	9,49	9,65	9,80	9,96	10,11	10,27	10,42	10,57	10,72
6(a)	11,07	11,43	11,78	12,11	12,40	12,65	12,86	13,01	13,111
(b)	11,07	11,22	11,36	11,51	11,65	11,79	11,94	12,08	12,22
7(a)	12,59	12,94	13,27	13,59	13,88	14,15	14,38	14,58	14,73
(b)	12,59	12,73	12,87	13,00	13,14	13,27	13,41	13,55	13,68
8(a)	14,07	14,40	14,72	15,03	15,32	15,60	15,84	16,06	16,25
(b)	14,07	14,20	14,33	14,46	14,59	14,72	14,85	14,98	15,11
9(a)	15,51	15,83	16,14	16,44	16,73	17,01	17,26	17,49	17,70
(b)	15,51	15,63	15,76	15,89	16,02	16,14	16,27	16,40	16,52
10(a)	16,92	17,23	17,54	17,83	18,12	18,39	18,65	18,89	19,111
(b)	16,92	17,04	17,17	17,29	17,41	17,54	17,66	17,79	17,911
11(a)	18,31	18,61	18,91	19,20	19,48	19,76	20,02	20,26	20,49
(b)	18,31	18,43	18,55	18,67	18,79	18,91	19,04	19,16	19,28
12(a)	19,68	19,97	20,26	20,55	20,83	21,10	21,36	21,61	21,84
(b)	19,68	19,79	19,91	20,03	20,15	20,27	20,39	20,51	20,63
13(a)	21,03	21,32	21,60	21,89	22,16	22,43	22,69	22,94	23,18
(b)	21,03	21,14	21,26	21,38	21,50	21,62	21,74	21,85	21,97
14(a)	22,36	22,65	22,93	^3,21	23,48	23,75	24,01	24,26	24,50
(b)	22,36	22,48	22,60	22,71	22,83	22,95	23,06	23,18	23,30
15(a)	23,68	23,97	24,24	24,52	24,79	25,05	25,31	25,56	25,80
(b)	23,68	23,80	23,92	24,03	24,15	24,26	24,38	24,50	24,61

Продолжение таблицы А.5.

k	C ₁ =0,0	C ₁ =0,5	C ₁ =1,0	C ₁ =1,5	C ₁ =2,0	C ₁ =2,5	C ₁ =3,0	C ₁ =3,5	C ₁ =4,0
3(a)	-	-	-	-	-	-	-	-	-
(b)	-	-	-	-	-	-	-	-	-
4(a)	-	-	-	-	-	-	-	-	-
(b)	-	-	-	-	-	-	-	-	-
5(a)	11,21	11,02	-	-	-	-	-	-	-
(b)	10,87	11,02	-	-	-	-	-	-	-
6(a)	13,14	13,10	12,78	-	-	-	-	-	-
(b)	12,36	12,50	12,78	-	-	-	-	-	-
7(a)	14,83	14,88	14,81	14,49	-	-	-	-	-
(b)	13,82	13,95	14,32	14,49	-	-	-	-	-
8(a)	16,40	16,51	16,60	16,49	16,16	-	-	-	-
(b)	15,25	15,38	15,64	15,90	16,16	-	-	-	-
9(a)	17,88	18,03	18,22	18,26	18,12	17,79	-	-	-
(b)	16,65	16,78	17,03	17,29	17,54	17,79	-	-	-
10(a)	19,31	19,48	19,75	19,89	19,89	19,73	19,40	-	-
(b)	18,04	18,16	18,41	18,66	18,91	19,16	19,40	-	-
11(a)	20,70	20,89	21,21	21,42	21,52	21,491	21,32	-	-
(b)	19,40	19,52	19,77	20,01	20,26	20,50	20,75	-	-
12(a)	22,06	22,27	22,62	22,88	23,06	23,12	23,07	22,56	-
(b)	20,751	20,87	21,12	21,36	21,60	21,64	22,08	22,56	-
13(a)	23,40 I	23,62	23,99	24,30	24,53	24,66	24,70	24,44	-
(b)	22,09	22,21	23,45	22,69	22,92	23,16	23,40	23,88	-
14(a)	24,73	24,95	25,34	25,68	23,93	26,14	26,25	26,17	25,66
(b)	23,42	23,53	23,77	24,00	24,24	24,48	24,74	25,19	25,65
15(a)	26,04	26,26	26,67	27,03	27,33	27,56	27,73	27,80	27,50
(b)	24,73	24,85	25,08	25,31	25,55	23,78	26,01	26,48	26,95

Таблица А.6 - Критерий Кокрена. Верхние пятипроцентные ($\alpha=0,05$) критические значения для статистики $G = \frac{S_{\max}^2}{y_1^2 + y_2^2 + \dots + s_k^2}$, построенной по k независимым оценкам дисперсий, каждая из которых обладает f степенями свободы

k	f=1	f=2	f=3	f=4	f=5	f=6	f=7
2	0,9985	0,9750	0,9792	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	0,9669	0,8709	0,7977	0,7457	0,7071	0,6771	0,6530
4	0,9065	0,7679	0,6841	0,6287	0,5895	0,5598	0,5365
5	0,8412	0,6838	0,5981	0,5440	0,5063	0,4783	0,4564
6	0,7808	0,6161	0,5321	0,4809	0,4447	0,4184	0,3980
7	0,7271	0,5612	0,4800	0,4307	0,3974	0,3726	0,3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	0,6385	0,4775	0,4027	0,3584	0,3286	0,3067	0,2910
10	0,6020	0,4450	0,3733	0,3311	0,3029	0,2823	0,2666
12	0,5410	0,3924	0,3264	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	0,4709	0,3346	0,2758	0,2419	0,2195	0,2034	0,1911
20	0,3894	0,2705	0,2205	0,1921	0,1735	0,1602	0,1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286
30	0,2929	0,1980	0,1593	0,1377	0,1237	0,1137	0,1051
40	0,2370	0,1576	0,1259	0,1082	0,0968	0,0887	0,0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0,0998	0,0632	0,0495	0,0419	0,0371	0,0337	0,0312
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
k	f=8	f=9	f=10	f=16	f=36	f=144	f= ∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	0,6333	0,6167	0,6025	0,5466	0,4748	0,4031	0,3333
4	0,5175	0,5017	0,4884	0,4366	0,3720	0,3093	0,2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2513	0,2000
6	0,3817	0,3682	0,3568	0,3135	0,2612	0,2119	0,1667
7	0,3384	0,3259	0,3154	0,2756	0,2278	0,1833	0,1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	0,2768	0,2659	0,2568	0,2226	0,1820	0,1446	0,1111
10	0,2541	0,2439	0,2353	0,2032	0,1635	0,1308	0,1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	0,1815	0,1736	0,1671	0,1429	0,1144	0,0889	0,0667
20	0,1422	0,1357	0,1303	0,1108	0,0879	0,0675	0,0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	0,1002	0,0958	0,0921	0,0771	0,0604	0,0457	0,0333
40	0,0780	0,0745	0,0713	0,0595	0,0462	0,0347	0,0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0,0292	0,0279	0,0266	0,0218	0,0165	0,0120	0,0083
∞	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000

Таблица А.7 - Критические точки распределения Фишера. Уровень значимости $\alpha=0,05$ (k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

k_2	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$k_1=4$	$k_1=5$	$k_1=6$	$k_1=7$	$k_1=8$	$k_1=9$
1	161,45	199,50	215,71	224,58	230,16	233,99	236,77	238,88	240,54
2	18,513	19,000	19,164	19,247	19,296	19,330	19,353	19,371	18,385
3	10,128	9,5521	9,2766	9,1172	9,0135	8,9406	8,8868	8,8452	8,8123
4	7,7086	6,9443	6,3914	6,3883	6,2560	6,1631	6,0942	6,0410	5,9988
5	6,6079	5,7861	5,4096	5,1922	5,0503	4,9503	4,8759	4,8183	4,7725
6	5,9874	5,1433	4,7571	4,5337	4,3874	4,2839	4,2066	4,1468	4,0990
7	5,5914	4,7374	4,3468	4,1203	3,9715	3,8660	3,7870	3,7257	3,6767
8	5,3177	4,4590	4,0662	3,8378	3,6875	3,5806	3,5005	3,4381	3,3881
9	5,1174	4,2565	3,8626	3,6331	3,4817	3,3738	3,2927	3,2296	3,1789
10	4,9646	4,1028	3,7083	3,4780	3,3258	3,2172	3,1355	3,0717	3,0204
11	4,8443	3,9823	3,5874	3,3567	3,2039	3,0946	3,0123	2,9480	2,8962
12	4,7472	3,8853	3,4903	3,2592	3,1059	2,9961	2,9134	2,8486	2,7964
13	4,6672	3,8056	3,4105	3,1791	3,0254	2,9153	2,8321	2,7669	2,7144
14	4,6001	3,7289	3,3439	3,1122	2,9582	2,8477	2,7642	2,6987	2,6458
15	4,5431	3,6823	3,2874	3,0556	2,9013	2,7905	2,7066	2,6408	2,5876
16	4,4940	3,6337	3,2389	3,0069	2,8524	2,7413	2,6572	2,5911	2,5377
17	4,4513	3,5913	3,1968	2,9647	2,8100	2,6987	2,6143	2,5480	2,4943
18	4,4139	3,5546	3,1599	2,9277	2,7729	2,6613	2,5767	2,5102	2,4563
19	4,3808	3,5219	3,1274	2,8951	2,7401	2,6283	2,5435	2,4768	2,4227
20	4,3513	3,4928	3,0984	2,8661	2,7109	2,5990	2,5140	2,4471	2,3928
21	4,3248	3,4668	3,0725	2,8401	2,6848	2,5727	2,4876	2,4205	2,3661
22	4,3009	3,4434	3,0491	2,8167	2,6613	2,5491	2,4638	2,3965	2,3419
23	4,2793	3,4221	3,0280	2,7955	2,6400	2,5277	2,4422	2,3748	2,3201
24	4,2597	3,4028	3,0088	2,7763	2,6207	2,5082	2,4226	2,3551	2,3002
25	4,2417	3,3852	2,9912	2,7587	2,6030	2,4904	2,4047	2,3371	2,2821
26	4,2252	3,3690	2,9751	2,7426	2,5868	2,4741	2,3883	2,3205	2,2655
27	4,2100	3,3541	2,9604	2,7278	2,5719	2,4591	2,3732	2,3053	2,2501
28	4,1960	3,3404	2,9467	2,7141	2,5581	2,4453	2,3593	2,2913	2,2360
29	4,1830	3,3277	2,9340	2,7014	2,5454	2,4324	2,3463	2,2782	2,2239
30	4,1709	3,3158	2,9223	2,6896	2,5336	2,4205	2,3343	2,2662	2,2107
40	4,0848	3,2317	2,8387	2,6060	2,4459	2,3359	2,2490	2,1802	2,1240
60	4,0012	3,1904	2,7581	2,5252	2,3683	2,2540	2,1665	2,0970	2,0401
120	3,9201	3,0718	2,6802	2,4472	2,2900	2,1750	2,0868	2,0164	1,9588
∞	3,8415	2,9957	2,6049	2,3719	2,2141	2,0986	2,0096	1,9384	1,8799

Продолжение таблицы А.7.

k_2	$k_1=10$	$k_1=12$	$k_1=15$	$k_1=20$	$k_1=30$	$k_1=40$	$k_1=60$	$k_1=120$	$k_1=\infty$
1	241,88	243,91	245,95	248,01	250,09	251,14	252,20	253,25	254,32
2	19,396	19,413	19,429	19,446	19,462	19,471	19,479	19,487	19,496
3	8,7855	8,7446	8,7029	8,6602	8,6166	8,5944	8,5720	8,5484	8,5265
4	5,9644	5,9117	5,8578	5,8025	5,7459	5,7170	5,6878	5,6581	5,6281
5	4,7351	4,6777	4,6188	4,5581	4,4957	4,4638	4,4314	4,3984	4,3650
6	4,0600	3,9999	3,9381	3,8742	3,8082	3,7743	3,7398	3,7047	3,6688
7	3,6365	3,5747	3,5108	3,4445	3,3758	3,3404	3,3043	3,2674	3,2298
8	3,3472	3,2540	3,2184	3,1503	3,0794	3,0428	3,0053	2,9669	2,9276
9	3,1373	3,0729	3,0061	2,9365	2,8637	2,8259	2,7872	2,7445	2,7067
10	2,9783	2,9130	2,8450	2,7740	2,6996	2,6609	2,6211	2,5801	2,5379
11	2,8536	2,7876	2,7186	2,6464	2,5705	2,5309	2,4901	2,4480	2,4045
12	2,7534	2,6866	2,6169	2,5436	2,4663	2,4259	2,3812	2,3410	2,2962
13	2,6710	2,6037	2,5331	2,4589	2,3803	2,3392	2,2966	2,2524	2,2064
14	2,6021	2,5342	2,4630	2,3879	2,3082	2,2664	2,2230	2,1778	2,1307
15	2,5437	2,4753	2,4035	2,3275	2,2468	2,2043	2,1601	2,1141	2,0658
16	2,4935	2,4247	2,3522	2,2756	2,1938	2,1507	2,1058	2,0589	2,0096
17	2,4499	2,3807	2,3077	2,2304	2,1477	2,1040	2,0584	2,0107	1,9604
18	2,4117	2,3421	2,2686	2,1906	2,1071	2,0629	2,0166	1,9681	1,9168
19	2,3779	2,3080	2,2341	2,1555	2,0712	2,0264	1,9796	1,9302	1,8780
20	2,3479	2,2776	2,2033	2,1342	2,0391	1,9938	1,9464	1,8963	1,8432
21	2,3210	2,2504	2,1757	2,0960	2,0102	1,9645	1,9163	1,8657	1,8117
22	2,2967	2,2258	2,1508	2,0707	1,9842	1,9380	1,8895	1,8380	1,7831
23	2,2747	2,2036	2,1282	2,0476	1,9605	1,9139	1,8649	1,8128	1,7570
24	2,2547	2,1834	2,1077	2,0267	1,9390	1,8920	1,8424	1,7897	1,7331
25	2,2365	2,1649	2,0889	2,0075	1,9193	1,8718	1,8217	1,7684	1,7110
26	2,2197	2,1479	2,0716	1,9898	1,9010	1,8533	1,8027	1,7488	1,6906
27	2,2043	2,1323	2,0558	1,9736	1,8842	1,8361	1,7851	1,7307	1,6717
28	2,1900	2,1179	2,0411	1,9586	1,8687	1,8263	1,7689	1,7118	1,6541
29	2,1768	2,1045	2,0275	1,9446	1,8543	1,8055	1,7537	1,6981	1,6377
30	2,1646	2,0921	2,0148	1,9317	1,8409	1,7918	1,7396	1,6815	1,6223
40	2,0772	2,0035	1,9245	1,8389	1,7444	1,6928	1,6373	1,5766	1,5089
60	1,9926	1,9174	1,8364	1,7486	1,6491	1,5943	1,5343	1,4673	1,3893
120	1,9105	1,8337	1,7505	1,6587	1,5543	1,4952	1,4290	1,3519	1,2539
∞	1,8307	1,7522	1,6664	1,5705	1,4591	1,3940	1,3180	1,2214	1,0000

Таблица А.8 - Критические точки распределения Фишера. Уровень значимости $\alpha=0,10$ (k_1 – число степеней свободы большей дисперсии, k_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии)

k_2	$k_1=1$	$k_1=2$	$k_1=3$	$k_1=4$	$k_1=5$	$k_1=6$	$k_1=7$	$k_1=8$	$k_1=9$
1	39,864	49,500	53,593	55,833	57,241	58,204	58,906	59,439	59,858
2	8,5263	9,0000	9,1618	9,2434	9,2926	9,3255	9,3491	9,3668	9,3805
3	5,5383	5,4624	5,3908	5,3427	5,3092	5,2847	5,2662	5,2517	5,2400
4	4,5448	4,3246	4,1908	4,1073	4,0506	4,0098	3,9790	3,9549	3,9357
5	4,0604	3,7797	3,6195	3,5202	3,4530	3,4045	3,3679	3,3393	3,3163
6	3,7760	3,4633	3,2888	3,1808	3,1075	3,0546	3,0145	2,9830	2,9577
7	3,5894	3,2574	3,0741	2,9605	2,8833	2,8274	$\sqrt{2/7849}$	2,7516	2,7247
8	3,4579	3,1131	2,9238	2,8064	2,7265	2,6683	2,6241	2,5893	2,5612
9	3,3603	3,0065	2,8129	2,6927	2,6106	2,5509	2,5053	2,4694	2,4403
10	3,2850	2,9245	2,7277	2,6053	2,5216	2,4606	2,4140	2,3772	2,3473
11	3,2252	2,8595	2,6602	2,5362	2,4512	2,3891	2,3416	2,3040	2,2735
12	3,1765	2,8068	2,6055	2,4801	2,3940	2,3310	2,2828	2,2446	2,21351
13	3,1362	2,7632	2,5603	2,4337	2,3467	2,2830	2,2341	2,1953	2,1638
14	3,1022	2,7265	2,5222	2,3947	2,3069	2,2426	2,1931	2,1539	2,1220
15	3,0732	2,6952	2,4898	2,3614	2,2730	2,2081	2,1582	2,1185	2,0862
16	3,0481	2,6682	2,4618	2,3327	2,2438	2,1783	2,1280	2,0880	2,0553
17	3,0262	2,6446	2,4374	2,3077	2,2181	2,1524	2,1017	2,0613	2,0284
18	3,0070	2,6239	2,4160	2,2858	2,1958	2,1296	2,0785	2,0379	2,0047
19	2,9899	2,6056	2,3970	2,2663	2,1760	2,1094	2,0580	2,0171	1,9836
20	2,9747	2,5893	2,3801	2,2489	2,1582	2,0913	2,0397	1,9985	1,96491
21	2,9609	2,5746	2,3649	2,2333	2,1423	2,0751	2,0232	1,9819	1,9480
22	2,9486	2,5613	2,3512	2,2193	2,1279	2,0605	2,0084	1,9668	1,9327
23	2,9374	2,5493	2,3387	2,2065	2,1149	2,0472	1,9949	1,9531	1,9189
24	2,9271	2,5383	2,3274	2,1949	2,1030	2,0351	1,9826	1,9407	1,9063
25	2,9177	2,5283	2,3170	2,1843	2,0922	2,0241	1,9714	1,9292	1,8947
26	2,9091	2,5191	2,3075	2,1745	2,0822	2,0139	1,9610	1,9188	1,8841
27	2,9012	2,5106	2,2987	2,1655	2,0730	2,0045	1,9515	1,9091	1,8743
28	2,8939	2,5028	2,2906	2,1571	2,0645	1,9959	1,9427	1,9001	1,86521
29	2,8871	2,4955	2,2831	2,1494	2,0566	1,9878	1,9345	1,8918	1,8568
30	2,8807	2,4887	2,2761	2,1423	2,0492	1,9803	1,9269	1,8841	1,8490
40	2,8354	2,4404	2,2261	2,0909	1,9968	1,9269	1,8725	1,8289	1,7929
60	2,7914	2,3933	2,1774	2,0410	1,9457	1,8747	1,8194	1,7748	1,7380
120	2,7478	2,3473	2,1300	1,9923	1,8959	1,8238	1,7675	1,7220	1,6843
∞	2,7055	2,3026	2,0838	1,9449	1,8473	1,7741	1,7167	1,6702	1,6315

Продолжение таблицы А.8.

k_2	$k_1=10$	$k_1=12$	$k_1=15$	$k_1=20$	$k_1=30$	$k_1=40$	$k_1=60$	$k_1=120$	$k_1=\infty$
1	60,195	60,705	61,220	61,740	62,265	63,529	62,794	63,061	63,328
2	9,3916	9,4081	9,4247	9,4413	9,4579	9,4663	9,4746	9,4829	9,4913
3	5,2304	5,2156	5,2003	5,1845	5,1681	5,1597	5,1512	5,1425	5,1337
4	3,9199	3,8955	3,8703	3,8413	3,8174	3,8036	3,7896	3,7753	3,7007
5	3,2974	3,2682	3,2380	3,2067	3,1741	3,1573	3,1402	3,1228	3,1050
6	2,9369	2,9047	2,8712	2,8363	2,8000	2,7812	2,7620	2,7423	2,7222
7	2,7025	2,6681	2,6322	2,5947	2,5555	2,5351	2,5142	2,4928	2,4708
8	2,5380	2,5020	2,4642	2,4246	2,3830	2,3614	2,3391	2,3162	2,2926
9	2,4163	2,3789	2,3396	2,2983	2,2547	2,2320	2,2085	2,1843	2,1592
10	2,3226	2,2841	2,2435	2,2007	2,1554	2,1317	2,1072	2,0819	2,0554
11	2,2482	2,2087	2,1671	2,1230	2,0762	2,0516	2,0261	1,9997	1,9721
12	2,1878	2,1474	2,1049	2,0597	2,0115	1,9861	1,9597	1,9323	1,9036
13	2,1376	2,0966	2,0532	2,0070	1,9576	1,9315	1,9043	1,8759	1,8462
14	2,0954	2,0537	2,0095	1,9525	1,9119	1,8852	1,8572	1,8280	1,7973
15	2,0593	2,0171	1,9722	1,9243	1,8728	1,8454	1,8168	1,7867	1,7551
16	2,0281	1,9854	1,9399	1,8913	1,8388	1,8108	1,7816	1,7507	1,7182
17	2,0009	1,9577	1,9117	1,8624	1,8090	1,7805	1,7506	1,7141	1,6856
18	1,9770	1,9333	1,8888	1,8368	1,7827	1,7537	1,7232	1,6910	1,6567
19	1,9557	1,9117	1,8647	1,8142	1,7592	1,7298	1,6988	1,6659	1,6308
20	1,9367	1,8924	1,8449	1,7938	1,7382	1,7083	1,6768	1,6433	1,6074
21	1,9197	1,8750	1,8272	1,7756	1,7193	1,6890	1,6569	1,6228	1,5862
22	1,9043	1,8593	1,8111	1,7590	1,7021	1,6714	1,6389	1,6042	1,5668
23	1,8903	1,8450	1,7964	1,7439	1,6864	1,6554	1,6224	1,5871	1,5490
24	1,8775	1,8319	1,7831	1,7302	1,6721	1,6407	1,6073	1,5715	1,5327
25	1,8658	1,8300	1,7708	1,7175	1,6589	1,6272	1,5934	1,5570	1,5176
26	1,8550	1,8090	1,7598	1,7059	1,6468	1,6147	1,5805	1,5437	1,5036
27	1,8432	1,7989	1,7492	1,6951	1,6356	1,6032	1,5686	1,5313	1,4906
28	1,8359	1,7895	1,7395	1,6832	1,6252	1,5925	1,5575	1,5198	1,4784
29	1,8274	1,7808	1,7306	1,0759	1,6155	1,5825	1,5472	1,5090	1,4670
30	1,8195	1,7727	1,7223	1,6673	1,6065	1,5732	1,5376	1,4989	1,4564
40	1,7627	1,7146	1,6624	1,6052	1,5411	1,5056	1,4672	1,4248	1,3769
60	1,7070	1,6574	1,6034	1,5435	1,4755	1,4373	1,3952	1,3476	1,2915
120	1,6524	1,6012	1,5450	1,4821	1,4094	1,3676	1,3203	1,2646	1,1926
∞	1,5987	1,5458	1,4871	1,4206	1,3419	1,2951	1,2400	1,1686	1,0000

Таблица А.9 - Критические значения статистики W-критерия Вилкоксона

m	n	Уровни значимости		m	n	Уровни значимости	
		0,10	0,05			0,10	0,05
1	2	3	4	5	6	7	8
1	9	1	-	3	14	16	13
	18	1	-		15	16	13
	19	2	1		16	17	14
	25	2	1		17	18	15
2	3	3	-		18	19	15
	4	3	-		19	20	16
	5	4	3		20	21	17
	6	4	3		21	21	17 !
	7	4	3		22	22	18 !
	8	5	4		23	23	19 1
	9	5	4		24	24	19
	10	6	4		25	25	20
	11	6	4	4	4	13	11
	12	7	5		5	14	12
	13	7	5		6	15	13
	14	8	6		7	16	14
	15	8	6		8	17	15
	16	8	6		9	19	16
	17	9	6		10	20	17
	18	9	7		11	21	18
	19	10	7		12	22	19
	20	10	7		13	23	20
	21	11	8		14	25	21
	22	11	8		15	26	22
	23	12	8		16	27	24
	24	12	9		17	28	25
	25	12	9		18	30	26
3	3	7	6		19	31	27
	4	7	6		20	32	28
	5	8	7		21	33	29
	6	9	8		22	35	30
	7	10	8		23	36	31
	8	11	9		24	38	32
	9	11	10		25	38	33
	10	12	10	5	5	20	19
	11	13	11		6	22	20
	12	14	11		7	23	21
	13	15	12		8	25	23

Продолжение таблицы А9.

m	n	Уровни значимости		m	n	Уровни значимости		m	n	Уровни значимости	
		0,10	0,05			0,10	0,05			0,10	0,05
5	9	27	24	7	9	46	43	9	13	83	78
	10	28	26		10	49	45		14	86	81
	11	30	27		11	51	47		15	90	84
	12	32	28		12	54	49		16	93	87
	13	33	30		13	56	52		17	97	90
	14	35	31		14	59	54		18	100	93
	15	37	33		15	61	56		19	103	96
	16	38	34		16	64	58		20	107	99
	17	40	35		17	66	61		21	110	102
	18	42	37		18	69	63		22	113	105
	19	43	38		19	71	65		23	117	108
	20	45	40		20	74	67		24	120	111
	21	47	41		21	76	69		25	123	114
	22	48	43		22	79	72	10	10	87	82
	23	50	44		23	81	74		11	91	86
	24	51	45		24	84	76		12	94	89
	25	53	47		25	86	78		13	98	92
6	6	30	28	8	8	55	51		14	102	96
	7	32	29		9	58	54		15	106	99
	8	34	31		10	60	56		16	109	103
	9	36	33		11	63	59		17	113	106
	10	38	35		12	66	62		18	117	110
	11	40	37		13	69	64		19	121	113
	12	42	38		14	72	67		20	125	117
	13	44	40		14	75	69		21	128	120
	14	46	42		16	78	72		22	132	123
	15	48	44		17	81	75		23	136	127
	16	50	46		18	84	77		24	140	130
	17	52	47		19	87	80		25	144	134
	18	55	49		20	90	83	11	11	106	100
	19	57	51		21	92	85		12	110	104
	20	59	53		22	95	88		13	114	108
	21	61	55		23	98	90		14	118	112
	22	63	57		24	101	93		15	123	116
	23	65	58		25	104	96		16	127	120
	24	67	60	9	9	70	66		17	131	123
	25	69	62		10	73	69		18	135	127
7	7	41	39		11	76	72		19	139	131
	8	44	41		12	80	75		20	144	135

Продолжение таблицы А.9.

m	n	Уровни значимости		m	n	Уровни значимости		m	n	Уровни значимости	
		0,10	0,05			0,10	0,05			0,10	0,05
		11	20			144	135			14	18
	21	148	139		19	202	192	18	18	291	280
	22	152	143		20	207	197		19	299	287
	23	156	147		21	213	202		20	306	294
	24	161	151		22	218	207		21	313	301
	25	165	155		23	224	212		22	321	307
12	12	127	120		24	229	218		23	328	314
	13	131	125		25	235	223		24	335	321
	14	136	129	15	15	200	192		25	343	328
	15	141	133		16	206	197	19	19	325	313
	16	145	138		17	212	203		20	333	320
	17	150	142		18	218	208		21	341	328
	18	155	146		19	224	214		22	349	335
	19	159	150		20	230	220		23	357	342
	20	164	155		21	236	225		24	364	350
	21	169	159		22	242	231		25	372	357
	22	173	163		23	248	236	20	20	361	348
	23	178	168		24	254	242		21	370	356
	24	183	172		25	260	248		22	378	364
	25	187	176	16	16	229	219		23	386	371
13	13	149	142		17	235	225		24	394	379
	14	154	147		18	242	231		25	403	387
	15	159	152		19	248	237	21	21	399	385
	16	165	156		20	255	243		22	408	393
	17	170	161		21	261	249		23	417	401
	18	175	166		22	267	255		24	425	410
	19	180	171		23	274	261		25	434	418
	20	185	175		24	280	267	22	22	439	424
	21	190	180		25	287	273		23	448	432
	22	195	185	17	17	259	249		24	457	441
	23	200	189		18	266	255		25	467	450
	24	205	194		19	273	262	23	23	481	465
	25	211	199		20	280	268		24	491	474
14	14	174	166		21	287	274		25	500	483
	15	179	171		22	294	281	24	24	525	507
	16	185	176		23	300	287		25	535	517
	17	190	182		24	307	294	25	25	570	552

Таблица А.10 - Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы	Уровень значимости α (двусторонняя критическая область)		
	0,5	0,10	0,05
1	1,0000	6,3138	12,7062
2	0,8165	2,9200	4,3037
3	0,7649	2,3534	3,1824
4	0,7497	2,1318	2,7764
5	0,7267	2,0150	2,5706
6	0,7176	1,9432	2,4469
7	0,7111	1,8946	2,3646
8	0,7064	1,8595	2,3060
9	0,7027	1,8331	2,2622
10	0,6998	1,8125	2,2281
11	0,6974	1,7959	2,2010
12	0,6955	1,7823	2,1788
13	0,6938	1,7709	2,1604
14	0,6924	1,7613	2,1448
15	0,6912	1,7530	2,1314
16	0,6901	1,7459	2,1190
17	0,6892	1,7396	2,1098
18	0,6884	1,7341	2,1009
19	0,6876	1,7291	2,0930
20	0,6870	1,7247	2,0860
21	0,6864	1,7207	2,0796
22	0,6858	1,7171	2,0739
23	0,6853	1,7139	2,0687
24	0,6848	1,7109	2,0639
25	0,6844	1,7081	2,0595
26	0,6840	1,7056	2,0555
27	0,6837	1,7033	2,0518
28	0,6834	1,7011	2,0484
29	0,6830	1,6991	2,0452
30	0,6828	1,6973	2,0423
40	0,6807	1,6839	2,0211
60	0,6786	1,6706	2,0003
120	0,6765	1,6577	1,9840
∞	0,6750	1,6479	1,9647
-	0,25	0,05	0,025
Уровень значимости α (односторонняя критическая область)			

Таблица А.11 - Критерий исключения резко выделяющихся наблюдений

Число членов вариационного ряда п	Уровни значимости		Число членов вариационного ряда п	Уровни значимости	
	0,10	0,05		0,10	0,05
3	1,412	1,414	28	2,764	2,929
4	1,689	1,710	29	2,778	2,944
5	1,869	1,917	30	2,792	2,958
6	1,996	2,067	31	2,805	2,972
7	2,093	2,182	32	2,818	2,985
8	2,172	2,273	33	2,830	2,998
9	2,238	2,349	34	2,842	3,010
10	2,294	2,414	35	2,853	3,022
11	2,343	2,470	36	2,864	3,033
12	2,387	2,519	37	2,874	3,044
13	2,426	2,563	38	2,885	3,055
14	2,461	2,602	39	2,894	3,065
15	2,494	2,638	40	2,904	3,075
16	2,523	2,670	41	2,913	3,084
17	2,551	2,701	42	2,922	3,094
18	2,577	2,728	43	2,931	3,103
19	2,601	2,754	44	2,940	3,112
20	2,623	2,779	45	2,948	3,120
21	2,644	2,801	46	2,956	3,129
22	2,664	2,823	47	2,964	3,137
23	2,683	2,843	48	2,972	3,145
24	2,701	2,862	49	2,980	3,152
25	2,718	2,880	50	2,987	3,160
26	2,734	2,897	51	2,994	3,167
27	2,749	2,913	52	3,001	3,175

Таблица А.12 - Числа Чебышева от 3 до 18

3		4			5				6				
Ψ_1	$3\Psi_2$	$2\Psi_1$	Ψ_2	$\frac{10}{3}\Psi_2$	Ψ_1	Ψ_2	$\frac{5}{6}\Psi_3$	$\frac{35}{12}\Psi_4$	$2\Psi_1$	$\frac{3}{2}\Psi_2$	$\frac{5}{3}\Psi_3$	$\frac{7}{12}\Psi_4$	$\frac{21}{10}\Psi_5$
-1	+1	-3	+1	-1	-2	+2	-1	+1	-5	+5	-5	+1	-1
0	-2	-1	-1	+3	-1	-1	+2	-4	-3	-1	+7	-3	+5
+1	+1	+1	-1	-3	0	-2	0	+6	-1	-4	+4	+2	-10
		+3	+1	+1	+1	-1	-2	-4	+1	-4	-4	+2	+10
					+2	+2	+1	+1	+3	-1	-7	-3	-5
					+5	+5	+5	+1	+1	+1	+1	+1	+1
2	3	20	4	20	10	14	10	70	70	84	180	28	252

7					8					9				
Ψ_1	Ψ_2	$\frac{1}{6}\Psi_3$	$\frac{7}{12}\Psi_4$	$\frac{7}{20}\Psi_5$	$2\Psi_1$	Ψ_2	$\frac{2}{3}\Psi_3$	$\frac{7}{12}\Psi_4$	$\frac{7}{10}\Psi_5$	Ψ_1	$3\Psi_2$	$\frac{5}{6}\Psi_3$	$\frac{7}{12}\Psi_4$	$\frac{3}{20}\Psi_5$
-3	+5	-1	+3	-1	-7	+7	-7	+7	-7	-4	+28	-14	+14	-4
-2	0	+1	-7	+4	-5	+1	+5	-13	+23	-3	+7	+7	-21	+11
-1	-3	+1	+1	-5	-3	-3	+7	-3	-17	-2	-8	+13	-11	-4
0	-4	0	+6	0	-1	-5	+3	+9	-15	-1	-17	+9	+2	-9
+1	-3	-1	+1	+5	+1	-5	-3	+9	+15	0	-20	0	+18	0
+2	0	-1	-7	-4	+3	-3	-7	-3	+17	+1	-17	-9	+9	+9
+3	+5	+1	+3	+1	+5	+1	-5	-13	-23	+2	-8	-13	-11	+4
					+7	+7	+7	+7	+7	+3	+7	-7	-21	-11
					+4	+4	+4	+4	+4	+4	+28	+14	+14	+4
28	84	6	154	84	168	168	264	616	2184	60	2772	990	2002	468

10					11					12				
$2\Psi_1$	$\frac{1}{2}\Psi_2$	$\frac{5}{3}\Psi_3$	$\frac{5}{12}\Psi_4$	$\frac{1}{10}\Psi_5$	Ψ_1	Ψ_2	$\frac{5}{6}\Psi_3$	$\frac{1}{12}\Psi_4$	$\frac{1}{40}\Psi_5$	$2\Psi_1$	$3\Psi_2$	$\frac{2}{3}\Psi_3$	$\frac{7}{24}\Psi_4$	$\frac{3}{20}\Psi_5$
-9	+6	-42	+18	-6	-5	+15	-30	+6	-3	-11	+55	-33	+33	-33
-7	+2	+14	-22	+14	-4	+6	+6	-6	+6	-9	+25	+3	-27	+57
-5	-1	+35	-17	-1	-3	-1	+22	-6	+1	-7	+1	+21	-33	+21
-3	-3	+31	+3	-11	-2	-6	+23	-1	-4	-5	-17	+25	-13	-29
-1	-4	+12	+18	-6	-1	-9	+14	+4	-4	-3	-29	+19	+12	-44
+1	-4	-12	+18	+6	0	-10	0	+6	0	-1	-35	+7	+28	-20
+3	-3	-31	+3	+11	+1	-9	-14	+4	+4	+1	-35	-7	+28	+20
+5	-1	-35	-17	+1	+2	-6	-23	-1	+4	+3	-29	-19	+12	+44
+7	+2	-14	-22	-14	+3	-1	-22	-6	-1	+5	-17	-25	-13	+29
+9	+6	+42	+18	+6	+4	+6	-6	-6	-6	+7	+1	-21	-33	-21
					+5	+15	+30	+6	+3	+9	+25	-3	-27	-57
										+11	+55	+33	+33	+33
330	132	8580	2860	780	110	858	4290	286	156	572	12012	5148	8008	15912

Продолжение таблицы А.12.

13				
Ψ_1	Ψ_2	$\frac{1}{6}\Psi_3$	$\frac{7}{12}\Psi_4$	$\frac{7}{120}\Psi_5$
0	-14	0	+84	0
+1	-13	-4	+64	+20
+2	-10	-7	+11	+26
+3	-5	-8	-54	+11
+4	+2	-6	-96	-18
+5	+11	0	-66	-33
+6	+22	+11	+99	+22
182	2002	572	68068	6188

14				
$2\Psi_1$	$\frac{1}{2}\Psi_2$	$\frac{5}{3}\Psi_3$	$\frac{7}{12}\Psi_4$	$\frac{7}{30}\Psi_5$
+1	-8	-24	+108	+60
+3	-7	-67	+63	+145
+5	-5	-95	-13	+139
+7	-2	-98	-92	+28
+9	+2	-66	-132	-132
+11	+7	+11	-77	-187
+13	+13	+143	+143	+143
910	728	97240	136136	235144

15				
Ψ_1	$3\Psi_2$	$\frac{5}{6}\Psi_3$	$\frac{35}{12}\Psi_4$	$\frac{21}{20}\Psi_5$
0	-56	0	+756	0
+1	-53	-27	+621	+675
+2	-44	-49	+251	+1000
+3	-29	-61	-249	+751
+4	-8	-58	-704	-44
+5	+19	-35	-869	-979
+6	+52	+13	-429	-1144
+7	+91	+91	+1001	+1001
280	37128	39780	6466460	10581480

Продолжение таблицы А.12.

16				
$2\Psi_1$	Ψ_2	$\frac{10}{3}\Psi_3$	$\frac{7}{12}\Psi_4$	$\frac{1}{10}\Psi_5$
+1	-21	-63	+189	+45
+3	-19	-179	+129	+115
+5	-15	-265	+23	+131
+7	-9	-301	-101	+77
+9	-1	-267	-201	-33
+11	+9	-143	-221	-143
+13	+21	+91	-91	-143
+15	+35	+455	+273	+143
1360	5712	1007760	470288	201552

17				
Ψ_1	Ψ_2	$\frac{1}{6}\Psi_3$	$\frac{1}{12}\Psi_4$	$\frac{1}{20}\Psi_5$
0	-24	0	+36	0
+1	-23	-7	+31	+55
+2	-20	-13	+17	+88
+3	-15	-17	-3	+83
+4	-8	-18	-24	+36
+5	+1	-15	-39	-39
+6	+12	-7	-39	-104
+7	+25	+7	-13	-91
+8	+40	+28	+52	+104
408	7752	3876	16796	100776

18				
$2\Psi_1$	$\frac{3}{2}\Psi_2$	$\frac{1}{3}\Psi_3$	$\frac{1}{12}\Psi_4$	$\frac{3}{10}\Psi_5$
+1	-40	-8	+44	+220
+3	-37	-23	+33	+583
+5	-31	-35	+13	+733
+7	-22	-42	-12	+588
+9	-10	-42	-36	+156
+11	+5	-33	-51	-429
+13	+23	-13	-47	-871
+15	+44	+20	-12	-676
+17	+68	+68	+68	+884
1938	23256	23256	28424	6953544