Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Н.А. Морозов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА ПРЯМОЛИНЕЙНЫХ КОЛЕБАНИЙ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания
к лабораторной работе по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7
М 80

Рецензент – кандидат технических наук, доцент Л.И. Кудина

Морозов, Н.А.
М 80 Определение закона прямолинейных колебаний материальной точки: методические указания к лабораторной работе по дисциплине «Теоретическая механика»/ Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2011. - 63 с.

Методические указания предназначены для специалистов и бакалавров технических направлений подготовки. В методических указаниях рассмотрены прямолинейные свободные и вынужденные колебания материальной точки с учетом и без учета сопротивления движению. Представлен пример выполнения лабораторной работы.

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7

Содержание

Введение

В инженерной деятельности специалиста возникает необходимость решать задачи, связанные с колебательными процессами. Изучение колебательных процессов предусмотрено основными образовательными программами практически по всем техническим направлениям подготовки.

В данных методических указаниях рассмотрены свободные и вынужденные прямолинейные колебания материальной точки с учетом и без учета сопротивления движению точки. Для каждого случая колебательного процесса представлен вид получаемого дифференциального уравнения движения точки и методика его решения.

Методические указания содержат многовариантное задание на лабораторную работу (999 вариантов), каждый вариант которого представляет собой задачу, состоящую из четырех пунктов. Каждый пункт описывает один из рассмотренных видов колебаний. Таким образом, каждый вариант задания содержит все рассмотренные виды прямолинейных колебаний материальной точки, что позволяет преподавателю дифференцированно выдавать те или иные пункты задания в зависимости от направления подготовки бакалавров.

Представлен пример выполнения лабораторной работы. Для каждого пункта предложенной задачи определен закон колебательного движения материальной точки и построен график данного закона.

1 Прямолинейные колебания материальной точки

Причиной возникновения и существования колебаний материальной точки являются восстанавливающие и возмущающие силы. Первые постоянно стремятся вернуть точку в положение равновесия, вторые постоянно стремятся вывести точку из положения равновесия. Если на точку действует возмущающая сила, колебания называются вынужденными. Колебания могут происходить и при отсутствии возмущающих сил, в этом случае они называются свободными. При рассмотрении колебаний могут учитываться действующие на точку силы сопротивления (силы сопротивления сред, различных полей). Кроме перечисленных выше сил на точку в процессе колебаний могут действовать постоянные силы. Если в процессе колебаний траекторией движения точки является прямая, колебания называются прямолинейными.

Для определения закона колебательного движения точки необходимо решить вторую основную задачу динамики материальной точки. Для этого записывается основное уравнение динамики материальной точки. Проецируя данное уравнение на ось, направленную вдоль траектории точки, получаем дифференциальное уравнение движения точки, решение которого и даст искомый закон движения.

В зависимости от действующих на точку сил, дифференциальные уравнения движения точки могут иметь различный вид, быть однородными или неоднородными. Интегрирование данных уравнений производится известными математическими методами, тем не менее, при выполнении лабораторной работы необходимо полностью приводить математические выкладки. В связи с этим рассмотрим ход решения дифференциальных уравнений движения точки при различных случаях прямолинейных колебаний точки.

1.1 Прямолинейные свободные колебания материальной точки без учета сил сопротивления

Рассмотрим материальную точку, совершающую свободные колебания. Сопротивлением движению точки пренебрегаем. На точку действует восстанавливающая сила F, стремящаяся вернуть точку в положение равновесия (рисунок 1).

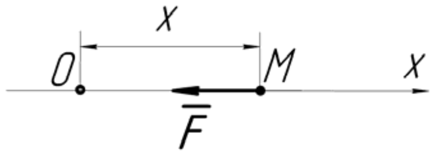


Рисунок 1 – Точка, совершающая свободные колебания без учета сопротивления ее движению

Решим вторую основную задачу динамики точки. Основное уравнение динамики материальной точки в данном случае будет иметь вид:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F} , \qquad (1)$$

где m – масса материальной точки, кг;

a - ускорение материальной точки, м/с^2;

F - восстанавливающая сила, Н.

Проецируя уравнение (1) на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = F_x , \qquad (2)$$

где $\ddot{x}$ - проекция ускорения точки на ось x, м/с^2.

Наиболее распространенными являются линейные восстанавливающие силы, пропорциональные отклонению точки от положения равновесия. Для таких сил $F_x = -c \cdot x$ ($c = const$), поэтому:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x. \tag{3}$$

Получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0. \tag{4}$$

Разделим каждый член уравнения на *m*:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0 \tag{5}$$

Введем обозначение $\frac{c}{m} = k^2$, где k – круговая (циклическая) частота колебаний. Получим дифференциальное уравнение прямолинейных свободных колебаний материальной точки без учета сил сопротивления.

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0. \tag{6}$$

Для нахождения решения данного уравнения составим характеристическое уравнение:

$$z^2 + k^2 = 0 \tag{7}$$

Корни данного уравнения являются комплексными числами:

$$z_{1,2} = \pm i \cdot k. \tag{8}$$

Мнимым корням характеристического уравнения соответствует следующий вид общего решения дифференциального уравнения:

$$x = C_1 \cdot Cos(k \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k \cdot t), \qquad (9)$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования, определяемые из начальных условий движения.

Так как неизвестных постоянных интегрирования две, то очевидно, что для их определения необходимы два уравнения. Поэтому в качестве второго уравнения будем использовать закон изменения проекции скорости точки на ось x :

$$\dot{x} = -C_1 \cdot k \cdot Sin(k \cdot t) + C_2 \cdot k \cdot Cos(k \cdot t). \qquad (10)$$

Для нахождения постоянных интегрирования необходимо записать начальные условия (н.у.), т.е. определить значения начальной координаты x_0 и начальной скорости v_0 точки, соответствующие моменту начала движения точки ($t_0=0$), выбираемому в соответствии с условиями задачи:

$$\text{н.у. при } t_0=0 \;\; x = x_0, \;\; \dot{x} = \dot{x}_0 = v_0 \qquad (11)$$

Подставляя н.у. в уравнения (9) и (10), выразим C_1, C_2:

$$x_0 = C_1 \cdot Cos0 + C_2 \cdot Sin0 = C_1, \qquad (12)$$

$$v_0 = -C_1 \cdot k \cdot Sin0 + C_2 \cdot k \cdot Cos0 = C_2 \cdot k \Rightarrow C_2 = \frac{v_0}{k}. \qquad (13)$$

Таким образом, определение постоянных интегрирования производится путем подстановки начальных условий в закон движения и в закон изменения проекции скорости, поэтому для других случаев колебаний данная операция приводиться не будет.

В результате искомый закон движения будет иметь вид:

$$x = x_0 \cdot Cos(k \cdot t) + \frac{v_0}{k} \cdot Sin(k \cdot t). \tag{14}$$

1.2 Прямолинейные свободные колебания материальной точки с учетом сил сопротивления

Рассмотрим материальную точку, совершающую свободные колебания при наличии сил сопротивления (рисунок 2). Причиной затухания колебаний является сила сопротивления R, пропорциональная скорости движения точки v:

$$\overline{R} = -\mu \cdot \overline{v}, \tag{15}$$

где μ - коэффициент пропорциональности, кг/с.

Линейная зависимость между силой сопротивления и скоростью точки обусловлена относительно малыми скоростями точек в процессе их колебаний.

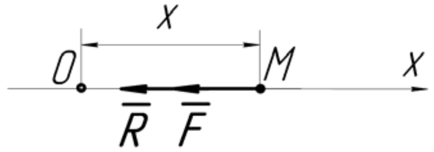


Рисунок 2 – Точка, совершающая свободные колебания с учетом сопротивления ее движению

На точку действуют восстанавливающая сила F и сила сопротивления R, направленная противоположно скорости точки, поэтому основное уравнение динамики материальной точки для данного случая имеет вид:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} + \overline{R} . \qquad (16)$$

Дифференциальное уравнение движения:

$$m \cdot \ddot{x} = F_x + R_x , \qquad (17)$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - \mu \cdot \dot{x} . \qquad (18)$$

Получим однородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0 . \qquad (19)$$

Разделим каждый член уравнения на *m*:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0 . \qquad (20)$$

Введем обозначения $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{\mu}{m} = 2n$, где n – коэффициент затухания. Получим дифференциальное уравнение прямолинейных свободных колебаний материальной точки с учетом сил сопротивления.

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = 0 . \qquad (21)$$

Составим характеристическое уравнение:

$$z^2 + 2n \cdot z + k^2 = 0\,. \tag{22}$$

Корни данного уравнения являются комплексными числами:

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,. \tag{23}$$

В зависимости от того, какая из величин *n* и *k* является большей, решение дифференциального уравнения будет иметь тот или иной вид. Рассмотрим возможные случаи.

В случае малого сопротивления ($n < k$):

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}\,. \tag{24}$$

Введем величину:

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}\,, \tag{25}$$

тогда:

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot k_1\,. \tag{26}$$

Таким корням характеристического уравнения соответствует следующий вид общего решения дифференциального уравнения:

$$x = e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)), \tag{27}$$

где C_1, C_2 - постоянные интегрирования.

Для нахождения постоянных интегрирования в качестве второго уравнения будем использовать закон изменения проекции скорости на ось x :

$$\begin{aligned} \dot{x} = -n \cdot e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)) + \\ + e^{-n \cdot t}(-C_1 \cdot k_1 \cdot Sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot k_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t). \end{aligned} \tag{28}$$

В случае критического сопротивления ($n = k$) характеристическое уравнение будет иметь два действительных корня:

$$z_{1,2} = -n. \tag{29}$$

Общее решение дифференциального уравнения имеет вид:

$$x = e^{-n \cdot t}(C_1 + C_2 \cdot t). \tag{30}$$

Закон изменения проекции скорости на ось x :

$$\dot{x} = -n \cdot e^{-n \cdot t}(C_1 + C_2 \cdot t) + e^{-n \cdot t} \cdot C_2. \tag{31}$$

В случае большого сопротивления ($n > k$) характеристическое уравнение будет иметь два действительных корня:

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}. \tag{32}$$

Общее решение дифференциального уравнения в данном случае имеет вид:

$$x = C_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{z_2 \cdot t}. \qquad (33)$$

Тогда закон изменения проекции скорости на ось x :

$$\dot{x} = C_1 \cdot z_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + C_2 \cdot z_2 \cdot e^{z_2 \cdot t} \qquad (34)$$

1.3 Прямолинейные вынужденные колебания материальной точки без учета сил сопротивления

Рассмотрим материальную точку, совершающую вынужденные колебания (рисунок 3). Сопротивлением пренебрегаем. Вынуждающая сила, как правило, зависит от времени и может выражаться различными функциями. Ограничимся рассмотрением случая, когда проекция вынуждающей силы Q на ось x изменяется по гармоническому закону:

$$Q_x = Q_0 \cdot Sin(p \cdot t), \qquad (35)$$

где Q_0 - амплитуда изменения силы, Н;

p - циклическая частота изменения силы, 1/с;

t - время, с.

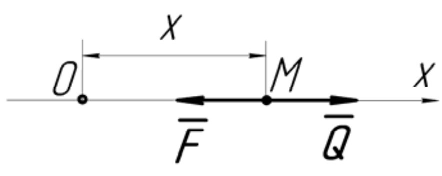


Рисунок 3 – Точка, совершающая вынужденные колебания без учета сопротивления ее движению

На точку действуют восстанавливающая и вынуждающая силы. Основное уравнение динамики материальной точки в данном случае имеет вид:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} + \overline{Q} \,. \tag{36}$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = F_x + Q_x \,, \tag{37}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + Q_0 \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{38}$$

Получим неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = Q_0 \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{39}$$

Разделим каждый член уравнения на *m*:

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{Q_0}{m} \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{40}$$

Введем обозначения $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{Q_0}{m} = P_0$. Получим дифференциальное уравнение прямолинейных вынужденных колебаний материальной точки без учета сил сопротивления.

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = P_0 \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{41}$$

Как известно, решением неоднородного дифференциального уравнения является сумма общего решения однородного уравнения, (x_1) и частного решения исходного неоднородного уравнения (x_2):

$$x = x_1 + x_2. \tag{42}$$

Однородное уравнение, соответствующее неоднородному, будет иметь вид:

$$\ddot{x}_1 + k^2 \cdot x_1 = 0. \tag{43}$$

Данное уравнение совпадает с уравнением (6), поэтому его решение будет иметь вид:

$$x_1 = C_1 \cdot Cos(k \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k \cdot t). \tag{44}$$

Вид частного решения уравнения (41) будет зависеть от вида правой части данного уравнения. В данном случае принимаем x_2 в виде:

$$x_2 = B \cdot Sin(p \cdot t), \tag{45}$$

где B - постоянная величина, м.

Определим значение величины B, подставив частное решение (45) в уравнение (41):

$$-B \cdot p^2 \cdot Sin(p \cdot t) + k^2 \cdot B \cdot Sin(p \cdot t) = P_0 \cdot Sin(p \cdot t), \tag{46}$$

$$-B \cdot p^2 + k^2 \cdot B = P_0, \tag{47}$$

$$B = \frac{P_0}{k^2 - p^2}. \tag{48}$$

Тогда уравнение (45) примет вид:

$$x_2 = \frac{P_0}{k^2 - p^2} Sin(p \cdot t). \tag{49}$$

Закон вынужденных колебаний согласно формулам (42), (44) и (49):

$$x = C_1 \cdot Cos(k \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k \cdot t) + \frac{P_0}{k^2 - p^2} Sin(p \cdot t). \tag{50}$$

Закон изменения проекции скорости:

$$\dot{x} = -C_1 \cdot k \cdot Sin(k \cdot t) + C_2 \cdot k \cdot Cos(k \cdot t) + \frac{P_0 \cdot p}{k^2 - p^2} Cos(p \cdot t). \tag{51}$$

1.4 Прямолинейные вынужденные колебания материальной точки с учетом сил сопротивления

Рассмотрим материальную точку, совершающую вынужденные колебания при наличии сопротивления (рисунок 4).

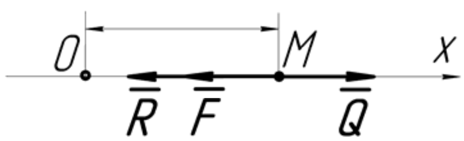


Рисунок 4 – Точка, совершающая вынужденные колебания при наличии сопротивления ее движению

На точку действуют восстанавливающая сила, вынуждающая сила и сила сопротивления R, определяемая по формуле (15). Основное уравнение динамики материальной точки в данном случае будет иметь вид:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F} + \overline{R} + \overline{Q} \,. \tag{52}$$

Дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = F_x + R_x + Q_x \,, \tag{53}$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - \mu \cdot \dot{x} + Q_0 \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{54}$$

Неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка:

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = Q_0 \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{55}$$

Разделим каждый член уравнения на *m*:

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{Q_0}{m} \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{56}$$

Введем обозначения $\frac{c}{m} = k^2$, $\frac{\mu}{m} = 2n$, $\frac{Q_0}{m} = P_0$. Получим дифференциальное уравнение прямолинейных вынужденных колебаний материальной точки с учетом сил сопротивления.

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = P_0 \cdot Sin(p \cdot t) \,. \tag{57}$$

Данное уравнение является неоднородным дифференциальным уравнением второго порядка. Однородное уравнение, соответствующее неоднородному, совпадает с уравнением (21):

$$\ddot{x}_1 + 2n \cdot \dot{x}_1 + k^2 \cdot x_1 = 0 . \tag{58}$$

Как было рассмотрено выше, вид его общего решения зависит от величины сопротивления, поэтому будет определяться согласно формулам (27), (30) и (33):

$$\text{при } n < k \qquad x_1 = e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)) , \tag{59}$$

$$\text{при } n = k \qquad x_1 = e^{-n \cdot t}(C_1 + C_2 \cdot t) , \tag{60}$$

$$\text{при } n > k \qquad x_1 = C_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{z_2 \cdot t} . \tag{61}$$

В данном случае ищем частное решение x_2 в виде:

$$x_2 = B \cdot Sin(p \cdot t - \beta) , \tag{62}$$

где β - постоянная величина, рад.

Определим значения величин B и β, подставив частное решение (62) в уравнение (57):

$$\begin{gathered} -B \cdot p^2 \cdot Sin(p \cdot t - \beta) + 2n \cdot B \cdot p \cdot Cos(p \cdot t - \beta) + \\ +k^2 \cdot B \cdot Sin(p \cdot t - \beta) = P_0 \cdot Sin(p \cdot t) \end{gathered} \tag{63}$$

Введем обозначение $p \cdot t - \beta = \psi$. Так как $p \cdot t = \beta + \psi$, то $Sin(p \cdot t) = Cos\beta \cdot Sin\psi + Cos\psi \cdot Sin\beta$. Следовательно:

$$\begin{aligned} & B(k^2 - p^2) \cdot Sin\psi + 2n \cdot B \cdot p \cdot Cos\psi = \\ & = P_0(Cos\beta \cdot Sin\psi + Cos\psi \cdot Sin\beta) \end{aligned} . \tag{64}$$

Данное равенство выполняется при одновременном равенстве коэффициентов перед функциями $Sin\psi$ и $Cos\psi$ в левой и правой частях:

$$B(k^2 - p^2) = P_0 \cdot Cos\beta , \tag{65}$$

$$2n \cdot B \cdot p = P_0 \cdot Sin\beta . \tag{66}$$

Из данных уравнений определим значения B и β:

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}} , \tag{67}$$

$$tg\beta = \frac{2n \cdot p}{k^2 - p^2} . \tag{68}$$

Таким образом, закон движения точки будет иметь вид:

при $n < k$ $$\begin{aligned} & x = e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)) + \\ & + B \cdot Sin(p \cdot t - \beta) \end{aligned} , \tag{69}$$

при $n = k$ $$x = e^{-n \cdot t}(C_1 + C_2 \cdot t) + B \cdot Sin(p \cdot t - \beta) , \tag{70}$$

при $n > k \qquad x = C_1 \cdot e^{z_1 \cdot t} + C_2 \cdot e^{z_2 \cdot t} + B \cdot Sin(p \cdot t - \beta)$. (71)

1.5 Эквивалентные пружины

Восстанавливающие силы являются следствием взаимодействия с телом, принимаемым за материальную точку, упругих элементов, в частности пружин. Коэффициент пропорциональности *c* в данном случае называется жесткостью пружины, а восстанавливающая сила – силой упругости пружины.

В тех случаях, когда точка закреплена на двух и более пружинах, на точку будут действовать несколько восстанавливающих сил – силы упругости всех пружин. Это приводит к увеличению количества членов в основном уравнении динамики и к усложнению расчетов. В таких случаях наиболее рациональным будет использование эквивалентных пружин.

Эквивалентная пружина обладает такими же упругими свойствами как совокупность пружин, которым она эквивалентна. Жесткость эквивалентной пружины зависит от вида соединения пружин. Для параллельного соединения (рисунок 5(а)) жесткость эквивалентной пружины определяется по формуле (72), для последовательного соединения (рисунок 5(б)) – по формуле (73):

$$c_{экв} = c_1 + c_2 \ , \tag{72}$$

$$c_{экв} = \frac{c_1 \cdot c_2}{c_1 + c_2} . \tag{73}$$

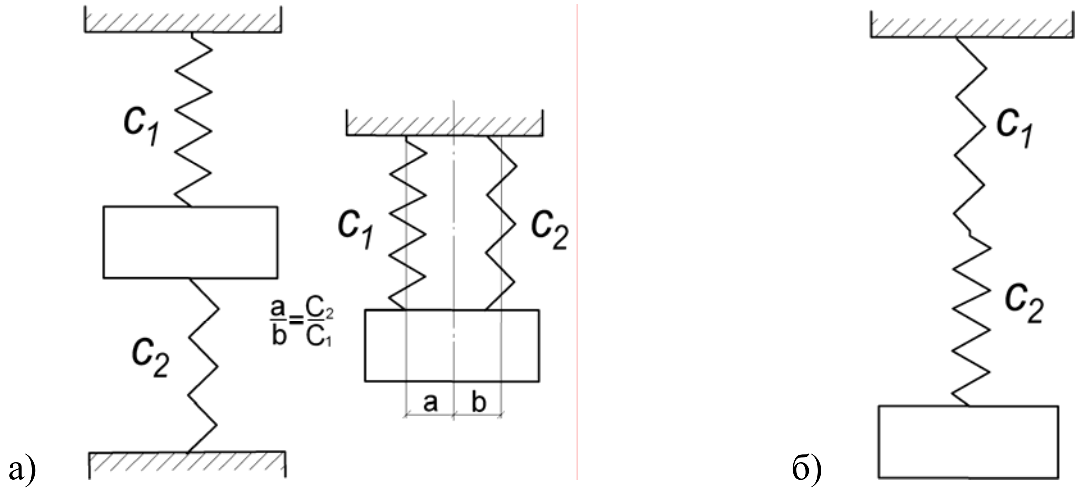


Рисунок 5 – Виды соединения пружин:

а) параллельное, б) последовательное

2 Задание для лабораторной работы

Задание для лабораторной работы выбирается в соответствии с номером варианта, выданного преподавателем. Номер варианта выдается в виде трехзначного числа. Последняя цифра числа соответствует номеру задачи (схемы к задачам представлены на рисунках 6 – 15). Необходимые для решения задачи исходные данные выбираются в соответствии с цифрами, составляющими номер варианта, по таблицам 1, 2 и 3.

Для каждого пункта представленных ниже задач необходимо определить закон движения материальной точки и построить график соответствующих колебаний точки. Для пунктов в) и г) необходимо так же построить графики общего решения однородного дифференциального уравнения $x_1(t)$ и частного решения неоднородного дифференциального уравнения $x_2(t)$.

Задача 1:

а) груз D массой m_D и груз E массой m_E закреплены между пружинами, имеющими коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находятся в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 2:

а) груз D массой m_D прикреплен к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E и сообщают грузам скорость v_0, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 3:

а) груз D массой m_D и груз E массой m_E закреплены между пружинами, имеющими коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находятся в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вправо;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 4:

а) груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикреплен к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вверх вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 5:

а) в некоторый момент времени груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикрепляют к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и сообщают грузам скорость v_0, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 6:

а) груз D массой m_D прикреплен к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E и сообщают грузам скорость v_0, направленную вертикально вниз;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 7:

а) в некоторый момент времени груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикрепляют к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и сообщают грузам скорость v_0, направленную вертикально вниз;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 8:

а) груз D массой m_D с установленным на него грузом E массой m_E прикреплен к концам параллельных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вертикально вверх;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 9:

а) груз D массой m_D с закрепленным на нем грузом E массой m_E прикреплен к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени груз E убирают и сообщают оставшемуся грузу D скорость v_0, направленную вертикально вверх;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

Задача 0:

а) груз D массой m_D прикреплен к концу последовательно соединенных пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1 и c_2, и находится в состоянии покоя. В некоторый момент времени на груз D прикрепляют груз E массой m_E и сообщают грузам скорость v_0, направленную вертикально вниз;

б) дополнительно к условию пункта а). Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза;

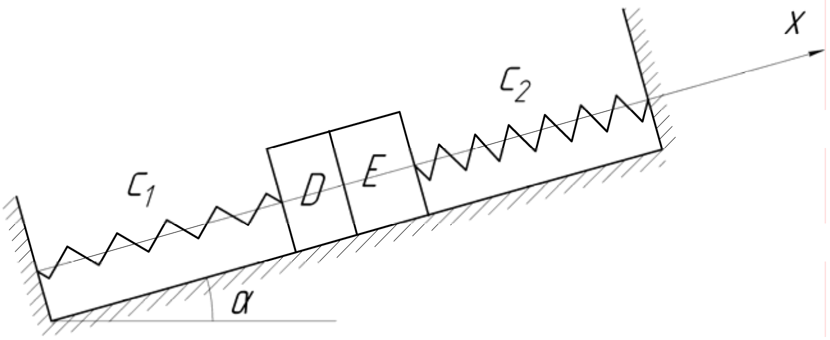
в) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$;

г) дополнительно к условию пункта а). В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = S(t)$. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению R, пропорциональную скорости груза.

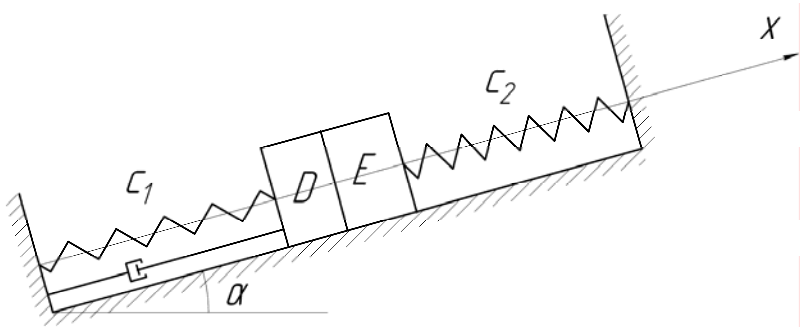
Таблица 1 – Исходные данные, соответствующие первой цифре варианта

Первая цифра варианта	m_D, кг	$S = S(t)$, м
0	9	$0,05 \cdot Sin(15t)$
1	3	$0,03 \cdot Sin(5t)$
2	10	$0,005 \cdot Sin(20t)$
3	8	$0,05 \cdot Sin(15t)$
4	4	$0,045 \cdot Sin(11t)$
5	6	$0,035 \cdot Sin(7t)$
6	1	$0,01 \cdot Sin(10t)$
7	7	$0,025 \cdot Sin(18t)$
8	5	$0,04 \cdot Sin(12t)$
9	2	$0,015 \cdot Sin(9t)$

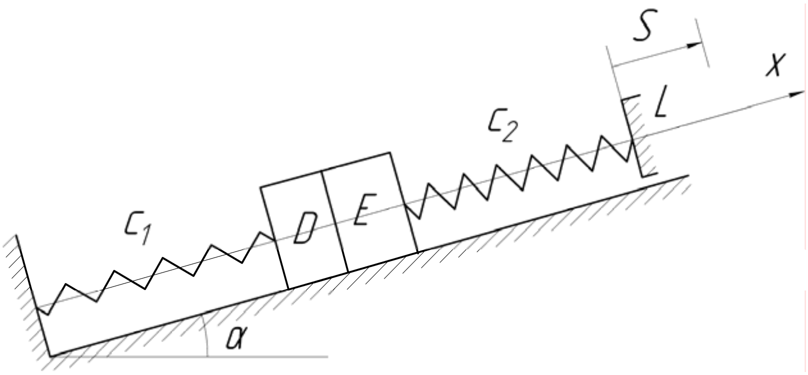
а)



б)



в)



г)

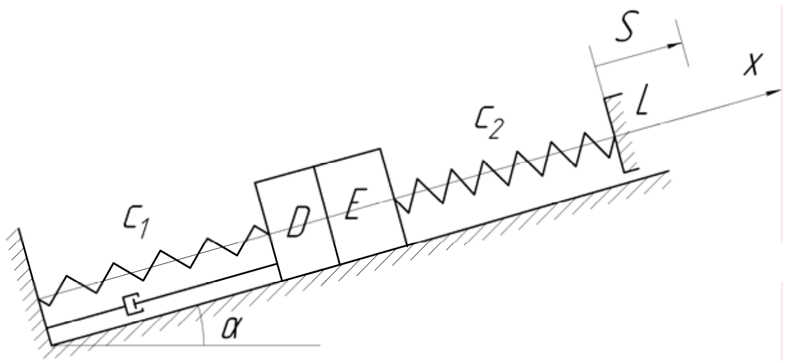
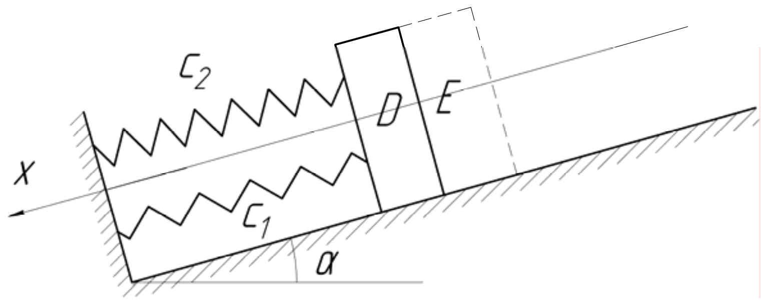
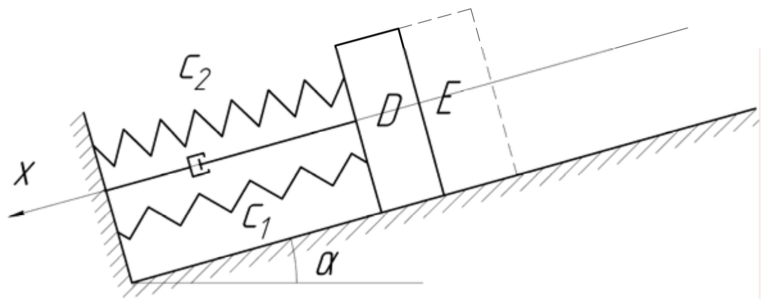


Рисунок 6 – Схемы к задаче 1

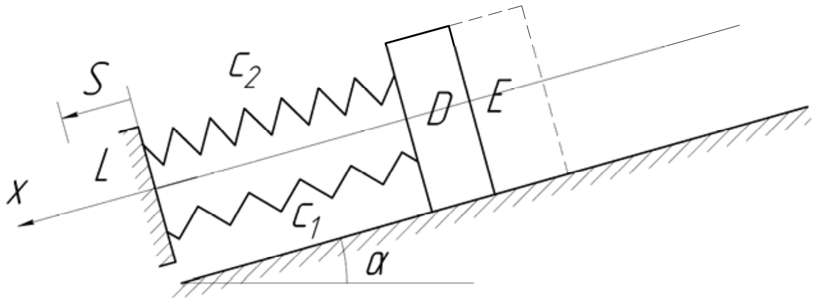
а)



б)



в)



г)

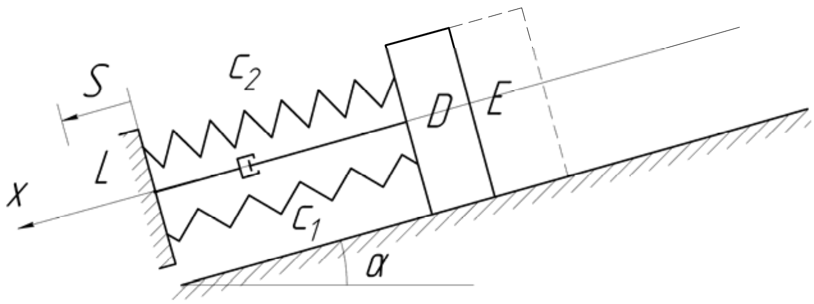
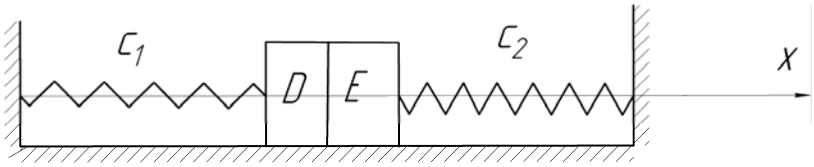
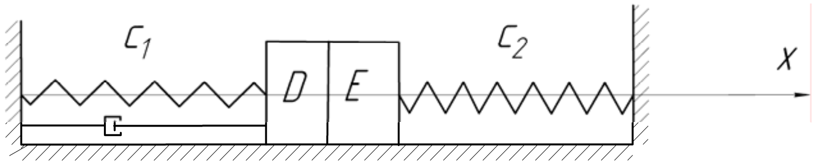


Рисунок 7 – Схемы к задаче 2

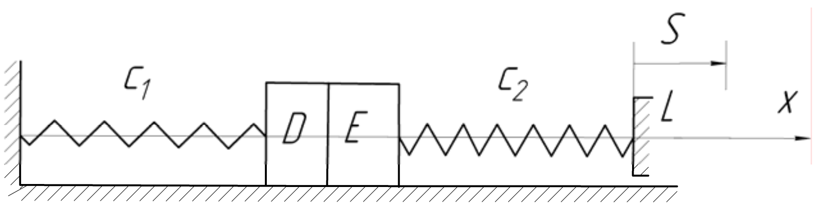
а)



б)



в)



г)

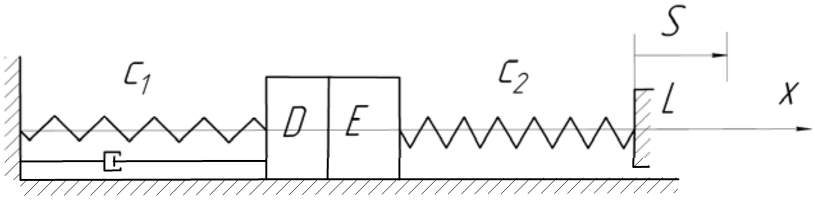
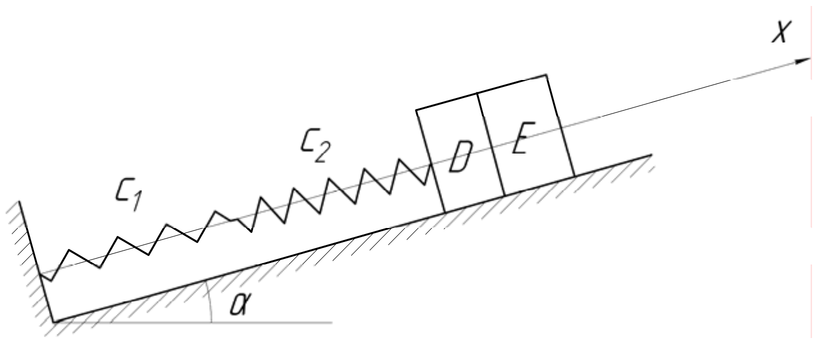
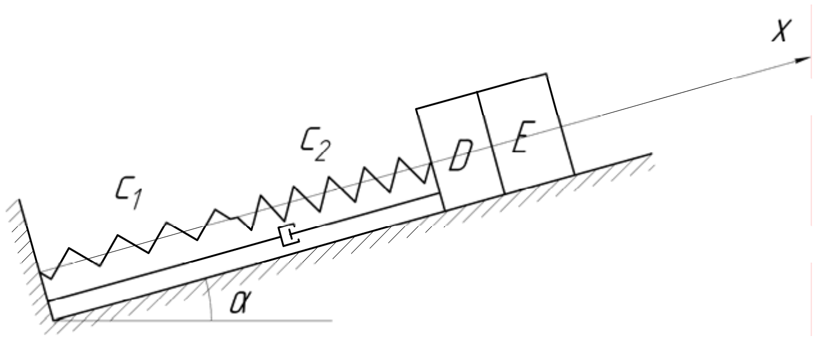


Рисунок 8 – Схемы к задаче 3

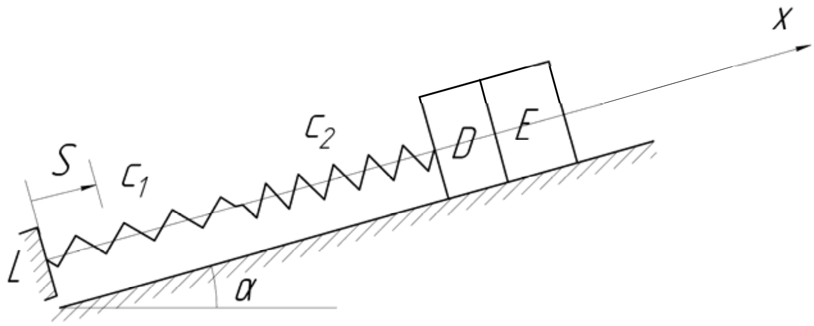
а)



б)



в)



г)

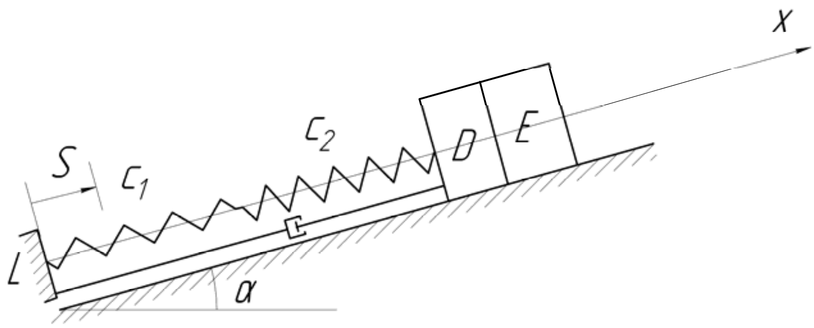
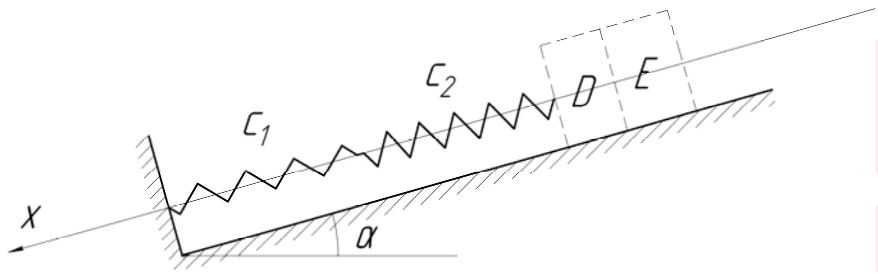
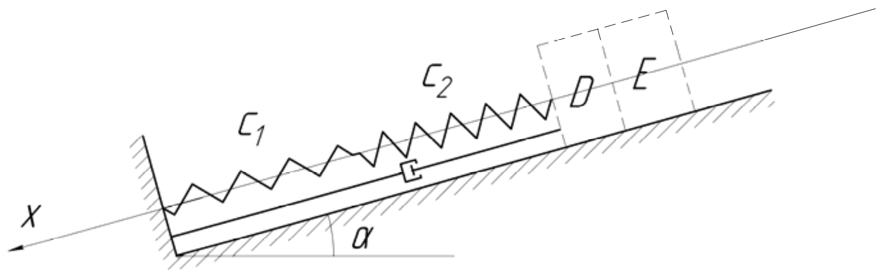


Рисунок 9 – Схемы к задаче 4

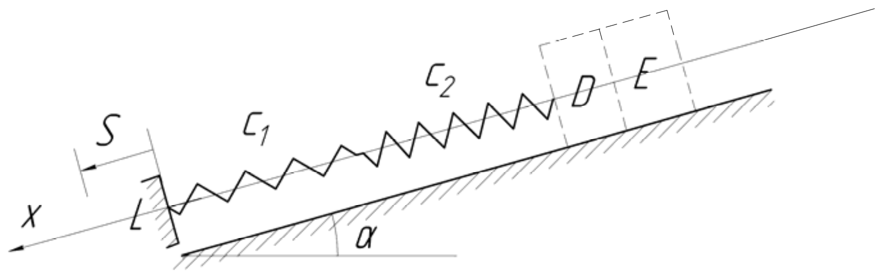
а)



б)



в)



г)

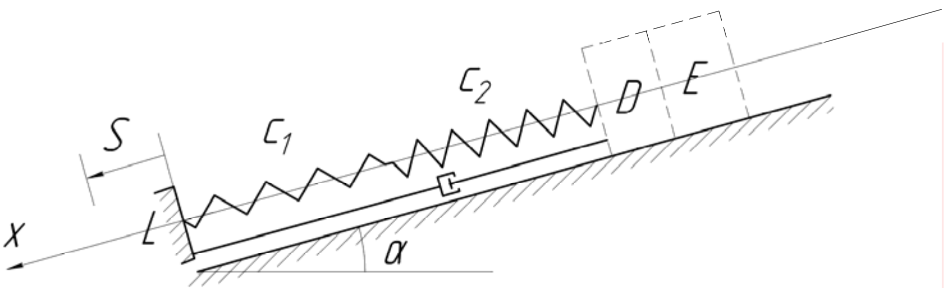


Рисунок 10 – Схемы к задаче 5

а) б) в) г)

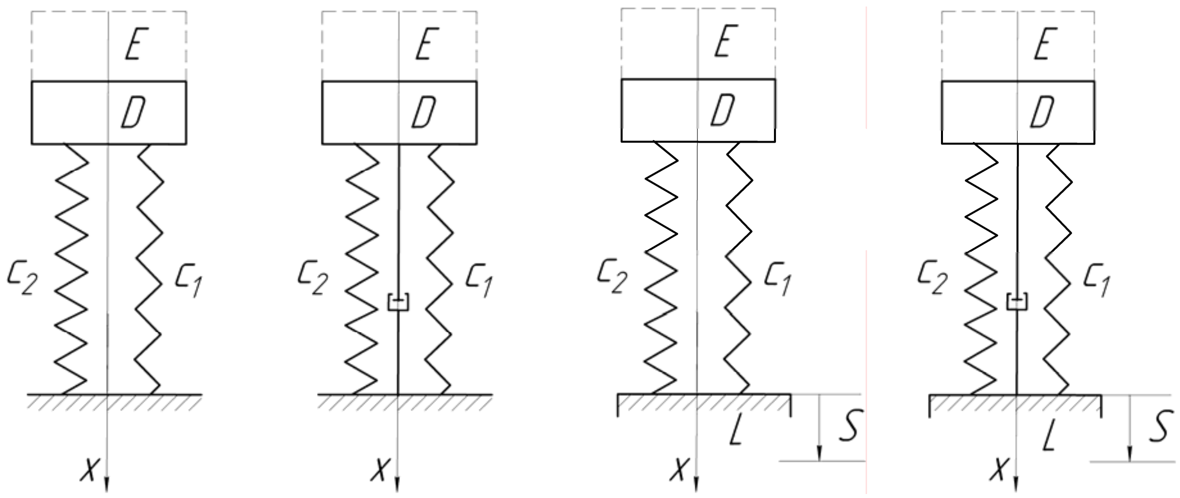


Рисунок 11 – Схемы к задаче 6

а) б) в) г)

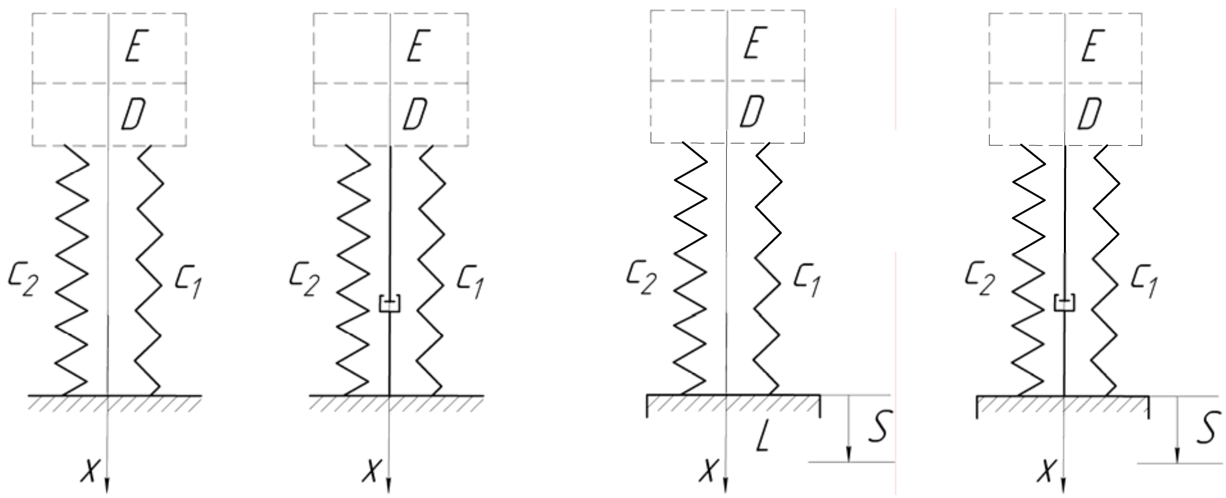


Рисунок 12 – Схемы к задаче 7

а) б) в) г)

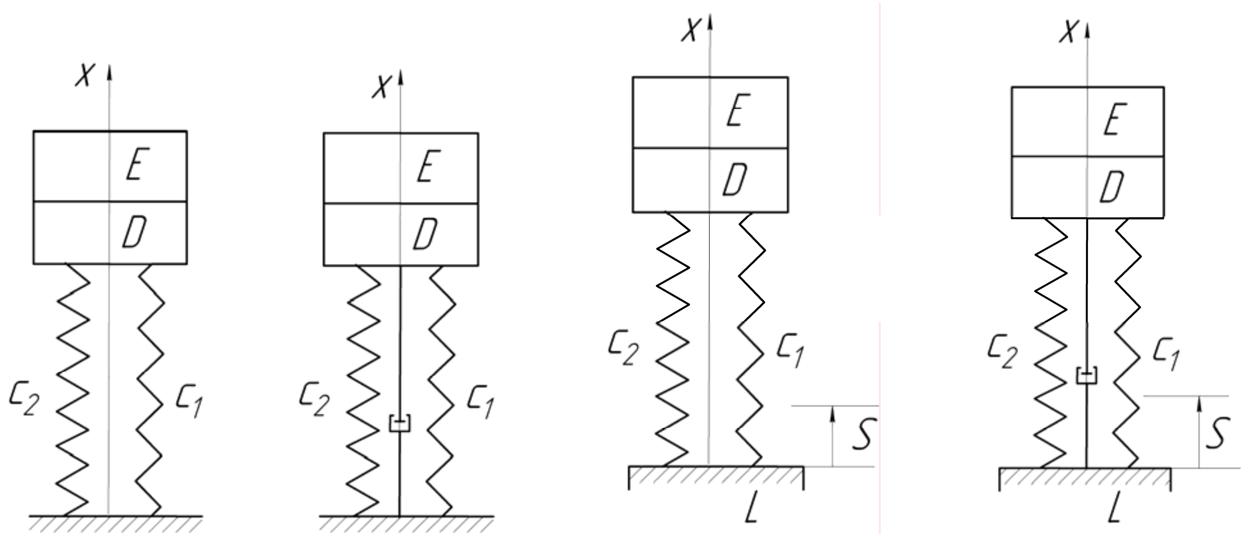


Рисунок 13 – Схемы к задаче 8

а) б) в) г)

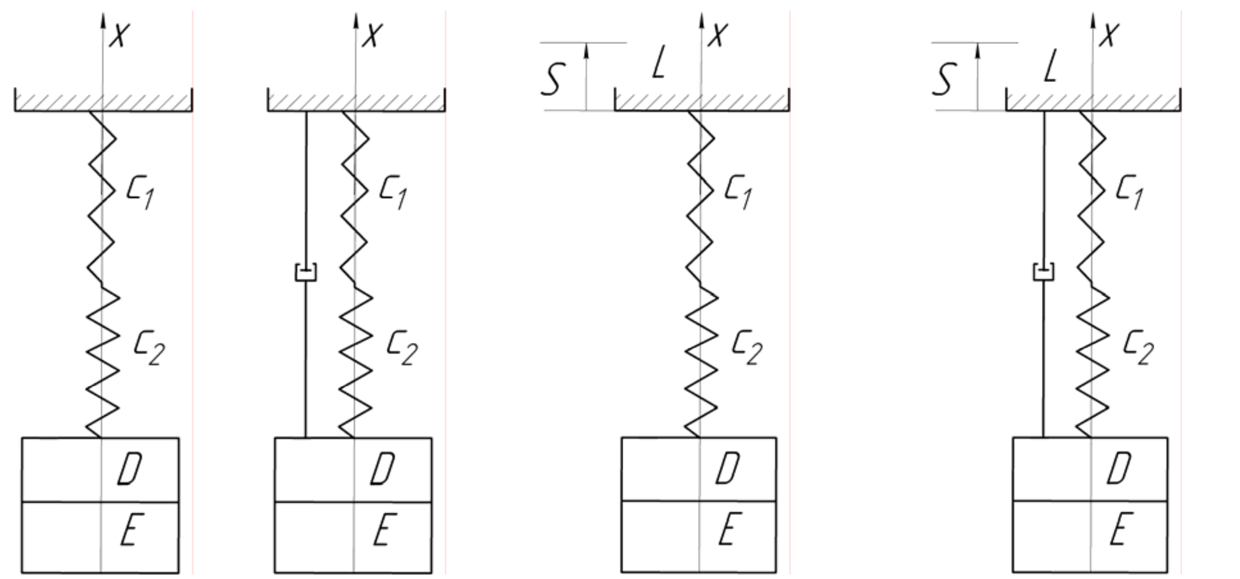


Рисунок 14 – Схемы к задаче 9

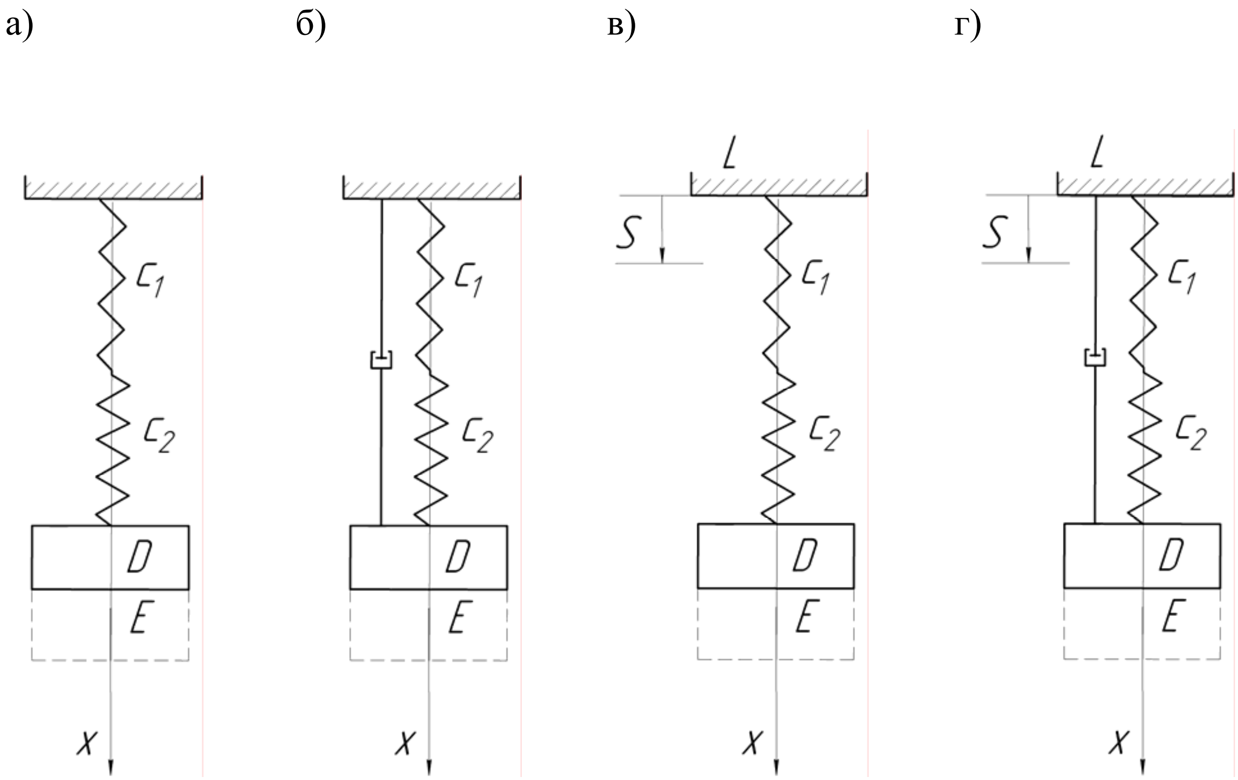


Рисунок 15 – Схемы к задаче 0

Таблица 2 – Исходные данные, соответствующие второй цифре варианта

Вторая цифра варианта	c_1, Н/м	v_0, м/с	α, град (для задач 1, 2, 4, 5)
0	4000	0,1	30
1	10000	0,3	60
2	1000	0,4	45
3	7000	0,2	60
4	3000	0,45	45
5	5000	0,35	30
6	8000	0,15	60
7	2000	0,5	45
8	6000	0,25	60
9	9000	0,55	30

Таблица 3 – Исходные данные, соответствующие третьей цифре варианта

Третья цифра варианта	c_2, Н/м	m_E, кг	$R = R(v)$,Н
0	8000	6	$5000 \cdot v$
1	2000	1	$20 \cdot v$
2	6000	7	$4000 \cdot v$
3	9000	4	$15 \cdot v$
4	1000	9	$4500 \cdot v$
5	1000	2	$10 \cdot v$
6	4000	3	$5500 \cdot v$
7	5000	8	$12 \cdot v$
8	3000	10	$6000 \cdot v$
9	7000	5	$18 \cdot v$

3 Пример выполнения лабораторной работы

Задача (рисунок 16):

а) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3=3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°;

б) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3=3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению, пропорциональную скорости груза, $R = 19 \cdot v$ Н;

в) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3=3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°. В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = 0,06 \cdot Sin(16t)$ м;

г) груз D массой m_D=4 кг удерживается в состоянии покоя с помощью трех пружин, имеющих коэффициенты жесткости c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м и c_3=3000 Н/м. В некоторый момент времени на груз D устанавливают груз E массой

m_E=7 кг и сообщают грузам скорость v_0=0,5 м/с, направленную вниз вдоль наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол α=45°. В этот же момент времени ползун L начинает движение вдоль наклонной плоскости по закону $S = 0,06 \cdot Sin(16t)$ м. Груз D связан с демпфером, обеспечивающим силу сопротивления движению, пропорциональную скорости груза $R = 19 \cdot v$ Н.

Для каждого пункта представленной задачи необходимо определить закон движения материальной точки и построить график соответствующих колебаний точки. Для пунктов в) и г) необходимо так же построить графики $x_1(t)$ и $x_2(t)$.

Решение случая а) задачи.

Дано: m_D=4 кг, m_E=7 кг, c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м, c_3=3000 Н/м, v_0=0,5 м/с, α=45°.

Найти: $x(t)$.

Решение:

1) заменим три пружины, используемые в задаче, одной эквивалентной. Для этого заменим последовательно соединенные пружины с жесткостями c_1 и c_3, эквивалентной пружиной, жесткость которой определим по формуле (73):

$$c_{экв1} = \frac{c_1 \cdot c_3}{c_1 + c_3} = \frac{1000 \cdot 3000}{1000 + 3000} = 750 \text{ Н/м.}$$

Получим две параллельные пружины с жесткостями c_2 и $c_{экв1}$, которые также заменим одной эквивалентной пружиной, жесткость которой определим по формуле (72):

$$c = c_{экв1} + c_2 = 2750 \text{ Н/м.}$$

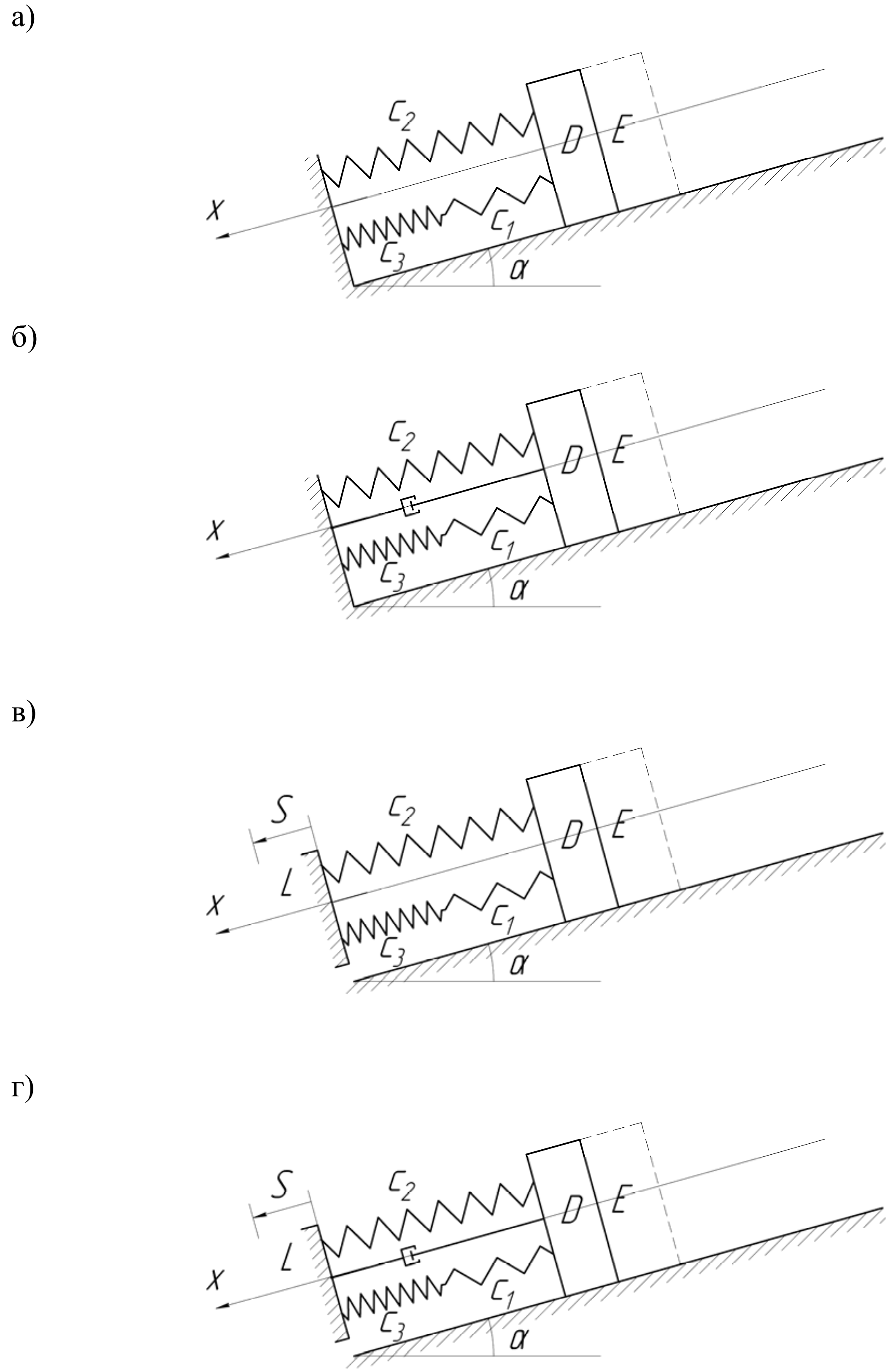


Рисунок 16 – Схемы к задаче примера

Для лучшего понимания процесса деформации данной эквивалентной пружины покажем пружину в недеформированном состоянии (рисунок 17(а));

2) покажем груз D в состоянии покоя (рисунок 17(б)). В состоянии покоя груза D пружина находится в деформированном состоянии, обусловленным наличием веса груза. Деформация пружины составляет λ_{cmD}. Данное положение соответствует моменту, когда на груз D установили груз E, но груз E еще не отпустили. Принимаем совокупность грузов за материальную точку, так как их размерами в условиях данной задачи можно пренебречь. Масса материальной точки будет равна сумме масс грузов:

$$m = m_D + m_E = 4 + 7 = 11 \text{ кг.}$$

На рисунке грузы показаны условно, рассматриваемая нами материальная точка будет совпадать с концом пружины. В данный момент времени точка находится в начальном положении;

3) изобразим материальную точку, т.е. грузы D и E, в состоянии покоя (рисунок 17(в)). В данном положении статического равновесия точки сила упругости пружины уравновешивается силой тяжести точки. Деформация пружины составит λ_{cmDE}. Данная деформация является суммой λ_{cmD} и деформации λ_{cmE}, обусловленной наличием веса груза E. Приложим действующие на точку силы: силу упругости пружины F_{ynp}, силу тяжести точки mg и нормальную реакцию опоры N. Так как колебания точки будут происходить относительно положения статического равновесия, совместим начало отсчета координаты x с данным положением точки.

Запишем уравнение равновесия точки:

$$\overline{F}_{ynp} + m\overline{g} + \overline{N} = 0.$$

Сумма проекций сил на ось x:

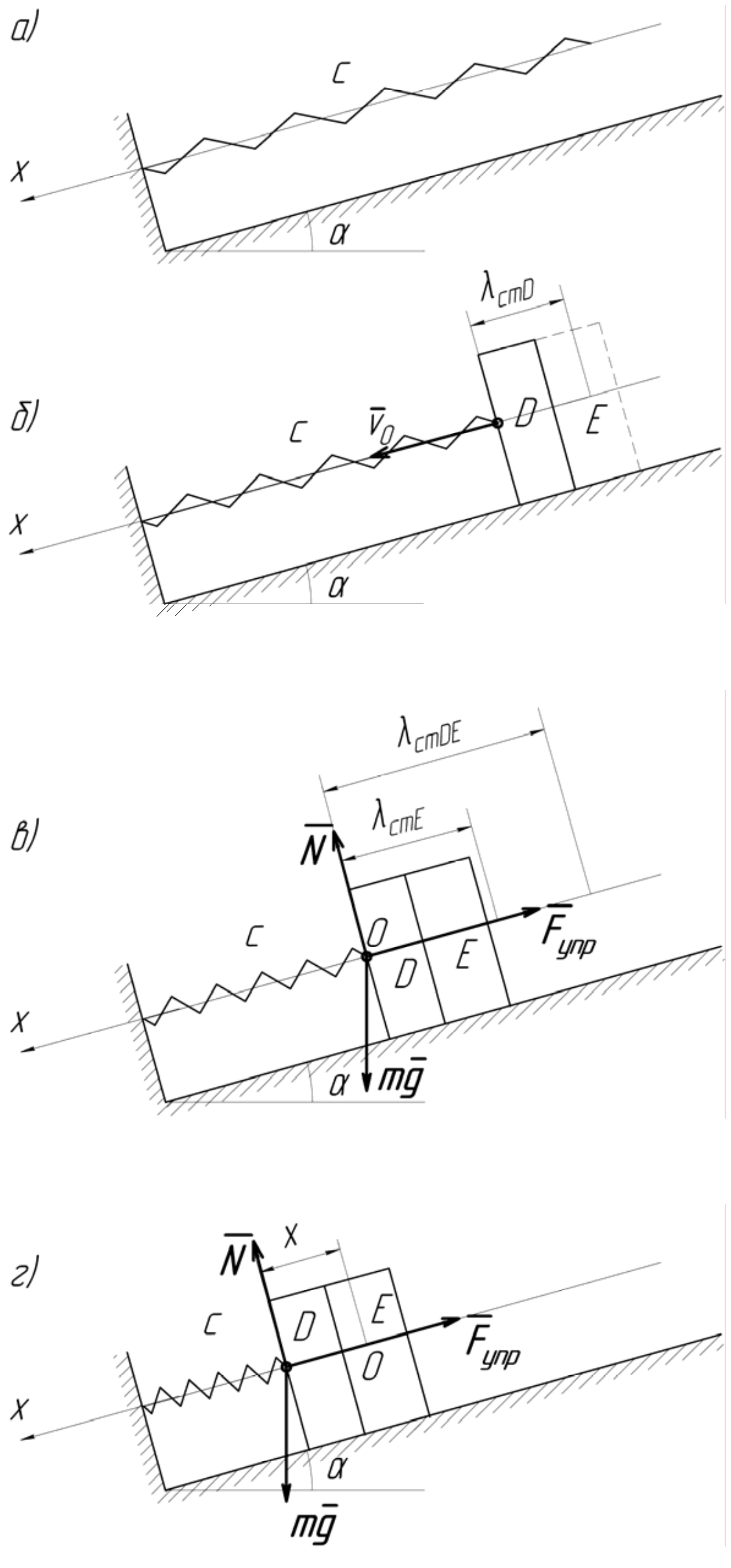


Рисунок 17 – Свободные колебания без учета сопротивления:

а) недеформированная пружина; б) материальная точка в начальном положении;

в) материальная точка в положении статического равновесия;

г) материальная точка в произвольный момент движения

$$-F_{упр} + mg \cdot Sin\alpha = 0.$$

Сила упругости пружины в данном случае равна $F_{упр} = c \cdot \lambda_{стDE}$, следовательно:

$$-c \cdot \lambda_{стDE} + mg \cdot Sin\alpha = 0;$$

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg и N (рисунок 17(г)).

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}_{упр} + m\overline{g} + \overline{N}.$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot Sin\alpha.$$

Сила упругости пружины в данном случае равна $F_{упр} = c \cdot (\lambda_{стDE} + x)$, следовательно:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{стDE} + x) + mg \cdot Sin\alpha,$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{стDE} - c \cdot x + mg \cdot Sin\alpha.$$

Так в положении равновесия $-c \cdot \lambda_{стDE} + mg \cdot Sin\alpha = 0$, следовательно:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x .$$

Данное уравнение полностью совпадает с уравнением (3), поэтому дальнейшее решение проводим в соответствии с пунктом 1.1.

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = 0 ,$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0 ,$$

$$\frac{c}{m} = k^2 ,$$

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = 0 .$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 + k^2 = 0 .$$

$$z_{1,2} = \pm i \cdot k .$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$x = C_1 \cdot Cos(k \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k \cdot t) .$$

Закон изменения проекции скорости точки на ось x :

$$\dot{x} = -C_1 \cdot k \cdot Sin(k \cdot t) + C_2 \cdot k \cdot Cos(k \cdot t) .$$

Начальные условия (рисунок 17):

н.у.: при $t=0$ $x_0 = -\lambda_{стE}$, $\dot{x}_0 = v_0$.

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\lambda_{стE}, \quad C_2 = \frac{v_0}{k}.$$

Закон движения точки в общем виде:

$$x = -\lambda_{стE} \cdot Cos(k \cdot t) + \frac{v_0}{k} \cdot Sin(k \cdot t).$$

Определим используемые в законе постоянные.

Деформацию $\lambda_{стE}$ можно определить, записав уравнение равновесия груза Е, закрепленного на эквивалентной пружине:

$$\overline{F}_{упр} + m_E \overline{g} + \overline{N} = 0,$$

$$-F_{упр} + m_E g \cdot Sin\alpha = 0.$$

$$-c \cdot \lambda_{стE} + m_E g \cdot Sin\alpha = 0,$$

$$\lambda_{стE} = \frac{m_E g \cdot Sin\alpha}{c} = \frac{7 \cdot 9{,}81 \cdot Sin45^0}{2750} = 0{,}018 \text{ м}.$$

Так как $\dfrac{c}{m} = k^2$, следовательно:

$$k=\sqrt{\frac{c}{m}}=\sqrt{\frac{2750}{11}}=15,811 \text{ с}^{-1},$$

$$\frac{v_0}{k}=\frac{0,5}{15,811}=0,032 \text{ м}.$$

Таким образом, искомый закон движения точки:

$$x=-0,018\cdot Cos(15,811\cdot t)+0,032\cdot Sin(15,811\cdot t).$$

Построим график колебаний в системе Mathcad [5].

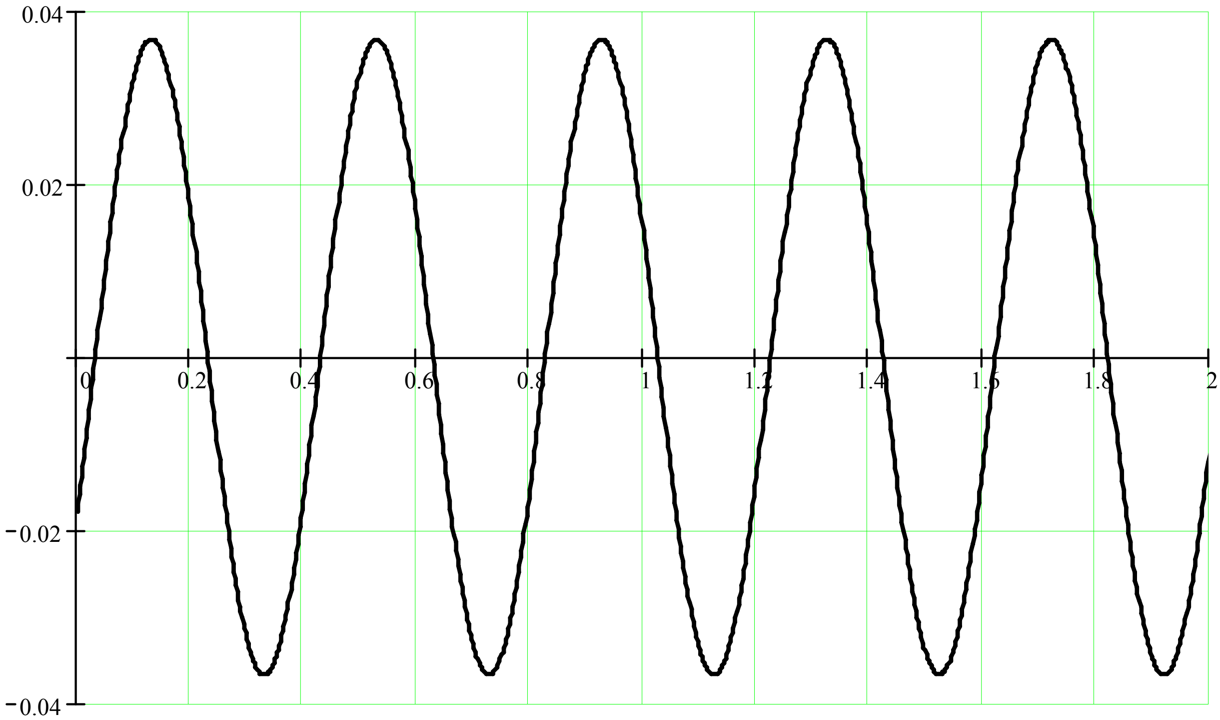


Рисунок 18 – График колебаний материальной точки

(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

Решение случая б) задачи.

Дано: m_D=4 кг, m_E=7 кг, c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м, c_3=3000 Н/м, v_0=0,5 м/с, α=45°, $R = 19 \cdot v$ Н.

Найти: $x(t)$.

Решение:

Пункты 1), 2) и 3) совпадают с одноименными пунктами для случая а) данной задачи;

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg, N и R (рисунок 19).

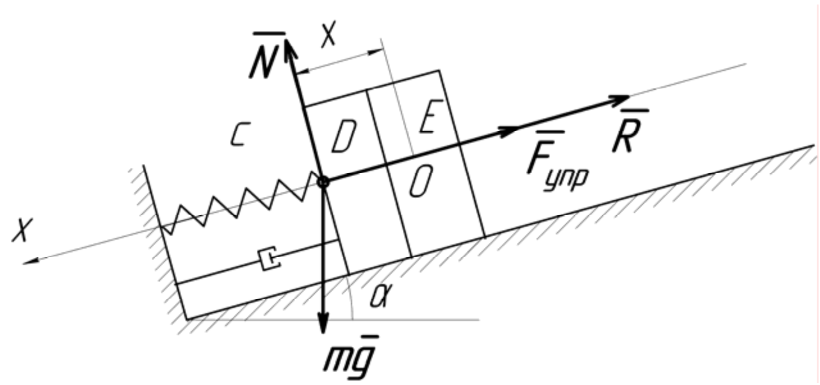


Рисунок 19 – Свободные колебания с учетом сопротивления

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}_{упр} + m\overline{g} + \overline{N} + \overline{R}.$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot Sin\alpha - R\,.$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{стDE} + x) + mg \cdot Sin\alpha - 19\dot{x}\,,$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{стDE} - c \cdot x + mg \cdot Sin\alpha - 19\dot{x}\,,$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - 19 \cdot \dot{x}\,.$$

Данное уравнение совпадает с уравнением (18), для этого случая $\mu = 19$ кг/с, поэтому дальнейшее решение проводим в соответствии с пунктом 1.2.

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = 0\,,$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = 0\,.$$

$$\frac{c}{m} = k^2\,,\ \frac{\mu}{m} = 2n\,.$$

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = 0\,.$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 + 2n \cdot z + k^2 = 0\,.$$

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}\,.$$

Определим и сравним величины *n* и *k*:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2750}{11}} = 15,811 \text{ с}^{-1},\ n = \frac{\mu}{2 \cdot m} = \frac{19}{2 \cdot 11} = 0,864 \text{ с}^{-1}.$$

Так как $n < k$ будем иметь случай малого сопротивления.

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}.$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$$

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot k_1.$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$x = e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)).$$

Закон изменения проекции скорости на ось x :

$$\dot{x} = -n \cdot e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)) +$$
$$+ e^{-n \cdot t}(-C_1 \cdot k_1 \cdot Sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot k_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t)).$$

Начальные условия:

н.у.: при $t=0$ $x_0 = -\lambda_{cmE}$, $\dot{x}_0 = v_0$.

Постоянные интегрирования:

$C_1 = -\lambda_{cmE}$,

$v_0 = -n \cdot C_1 + C_2 \cdot k_1$, $C_2 = \dfrac{v_0 - n \cdot \lambda_{cmE}}{k_1}$

Закон движения точки в общем виде:

$$x = e^{-n \cdot t}(-\lambda_{cmE} \cdot Cos(k_1 \cdot t) + \frac{v_0 - n \cdot \lambda_{cmE}}{k_1} \cdot Sin(k_1 \cdot t)).$$

Определим используемые в законе постоянные.

$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{15,811^2 - 0,864^2} = 15,788$ с$^{-1}$,

$\lambda_{cmE} = \dfrac{m_E g \cdot Sin\alpha}{c} = \dfrac{7 \cdot 9,81 \cdot Sin45^0}{2750} = 0,018$ м,

$\dfrac{v_0 - n \cdot \lambda_{cmE}}{k_1} = \dfrac{0,5 - 0,864 \cdot 0,018}{15,788} = 0,031$ м.

Таким образом, искомый закон движения точки (рисунок 20):

$$x = e^{-0,864 \cdot t}(-0,018 \cdot Cos(15,788 \cdot t) + 0,031 \cdot Sin(15,788 \cdot t)).$$

Решение случая в) задачи.

Дано: m_D=4 кг, m_E=7 кг, c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м, c_3=3000 Н/м, v_0=0,5 м/с, α=45°, $S = 0,06 \cdot Sin(16t)$ м.

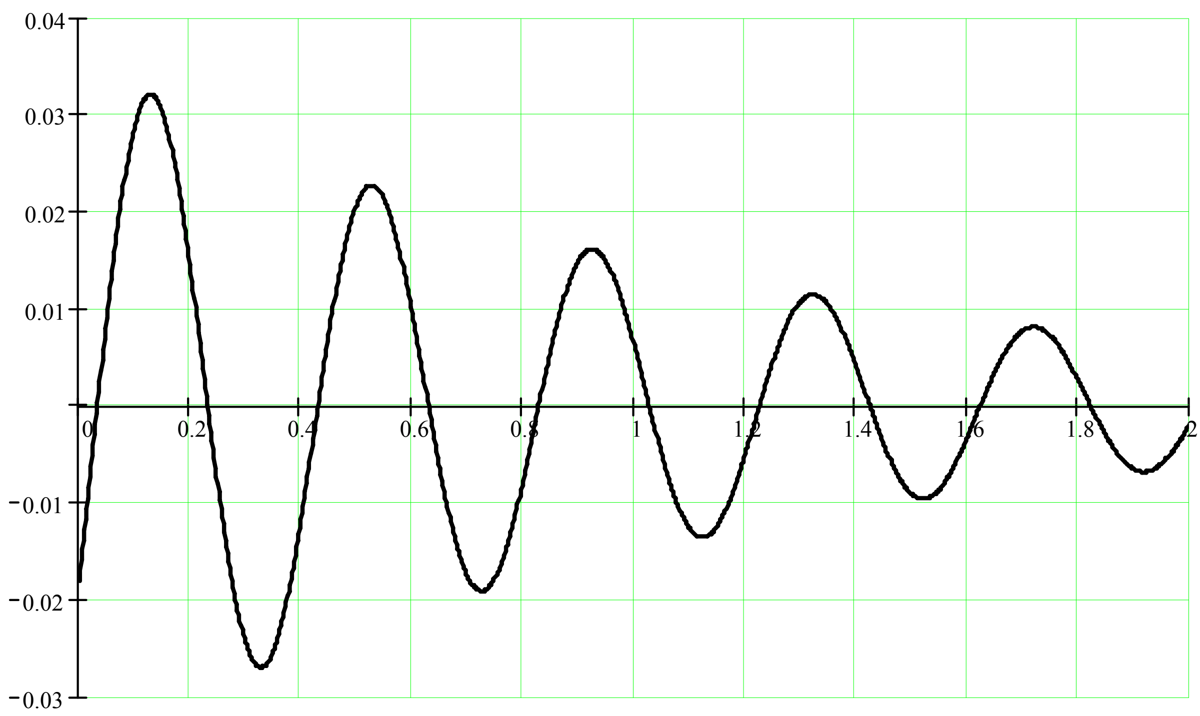


Рисунок 20 – График колебаний материальной точки
(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

Найти: $x(t)$.

Решение:

Пункты 1), 2) и 3) совпадают с одноименными пунктами для случая а) данной задачи;

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg и N (рисунок 21).

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}_{упр} + m\overline{g} + \overline{N}.$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

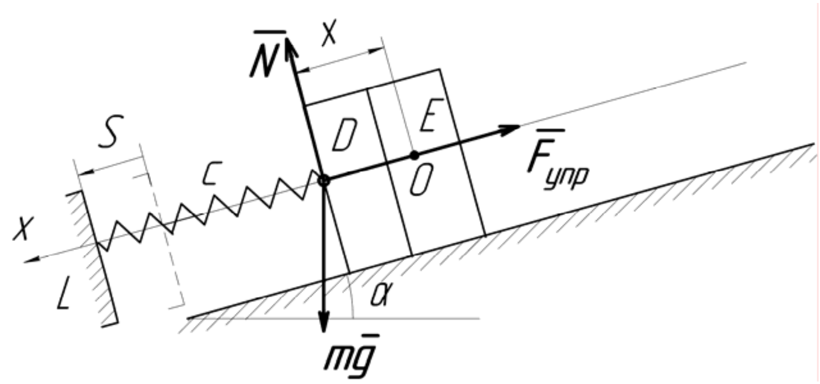


Рисунок 21 – Вынужденные колебания без учета сопротивления

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot Sin\alpha \,.$$

Сила упругости пружины в данном случае равна $F_{упр} = c \cdot (\lambda_{cmDE} + x - S)$, следовательно:

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{cmDE} + x - S) + mg \cdot Sin\alpha \,,$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{cmDE} - c \cdot x + c \cdot S + mg \cdot Sin\alpha \,,$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + c \cdot 0,06 \cdot Sin(16t) \,.$$

Данное уравнение совпадает с уравнением (38). Колебания ползуна L эквивалентны действию на точку возмущающей силы, проекция на ось x которой изменяется по закону $Q_0 \cdot Sin(p \cdot t)$, $p = 16$ с$^{-1}$, $Q_0 = 0,06 \cdot c = 0,06 \cdot 2750 = 165$ Н.

Дальнейшее решение проводим в соответствии с пунктом 1.3.

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + Q_0 \cdot Sin(p \cdot t),$$

$$m \cdot \ddot{x} + c \cdot x = Q_0 \cdot Sin(p \cdot t),$$

$$\ddot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{Q_0}{m} \cdot Sin(p \cdot t).$$

$$\frac{c}{m} = k^2, \ \frac{Q_0}{m} = P_0,$$

$$\ddot{x} + k^2 \cdot x = P_0 \cdot Sin(p \cdot t).$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x = x_1 + x_2.$$

Однородное уравнение:

$$\ddot{x}_1 + k^2 \cdot x_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 + k^2 = 0.$$

$$z_{1,2} = \pm i \cdot k.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_1 = C_1 \cdot Cos(k \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k \cdot t).$$

Принимаем x_2 в виде:

$$x_2 = B \cdot Sin(p \cdot t),$$

$$-B \cdot p^2 \cdot Sin(p \cdot t) + k^2 \cdot B \cdot Sin(p \cdot t) = P_0 \cdot Sin(p \cdot t),$$

$$-B \cdot p^2 + k^2 \cdot B = P_0,$$

$$B = \frac{P_0}{k^2 - p^2}.$$

$$P_0 = \frac{Q_0}{m} = \frac{165}{11} = 15 \text{ Н/кг}, \quad k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2750}{11}} = 15,811 \text{ с}^{-1},$$

$$B = \frac{P_0}{k^2 - p^2} = \frac{15}{15,811^2 - 16^2} = -2,5 \text{ м}$$

Частное решение неоднородного уравнения:

$$x_2 = -2,5 \cdot Sin(16 \cdot t).$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x = C_1 \cdot Cos(k \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k \cdot t) + B \cdot Sin(p \cdot t).$$

Закон изменения проекции скорости:

$$\dot{x} = -C_1 \cdot k \cdot Sin(k \cdot t) + C_2 \cdot k \cdot Cos(k \cdot t) + B \cdot p \cdot Cos(p \cdot t). \quad (51)$$

Начальные условия:

н.у.: при $t=0$ $x_0 = -\lambda_{cmE}$, $\dot{x}_0 = v_0$.

Постоянные интегрирования:

$$C_1 = -\lambda_{cmE}, \quad \lambda_{cmE} = \frac{m_E g \cdot Sin\alpha}{c} = \frac{7 \cdot 9,81 \cdot Sin45^0}{2750} = 0,018 \text{ м},$$

$$v_0 = C_2 \cdot k + B \cdot p, \quad C_2 = \frac{v_0 - B \cdot p}{k} = \frac{0,5 + 2,5 \cdot 16}{15,811} = 2,562 \text{ м}$$

Таким образом, искомый закон движения точки (рисунок 24):

$$x = -0,018 \cdot Cos(15,811 \cdot t) + 2,562 \cdot Sin(15,811 \cdot t) - 2,5 \cdot Sin(16 \cdot t).$$

Решение случая г) задачи.

Дано: m_D=4 кг, m_E=7 кг, c_1=1000 Н/м, c_2=2000 Н/м, c_3=3000 Н/м, v_0=0,5 м/с, α=45°, $R = 19 \cdot v$ Н, $S = 0,06 \cdot Sin(16t)$ м.

Найти: $x(t)$.

Решение:

Пункты 1), 2) и 3) совпадают с одноименными пунктами для случая а) данной задачи;

4) изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $F_{упр}$, mg, N и R (рисунок 25).

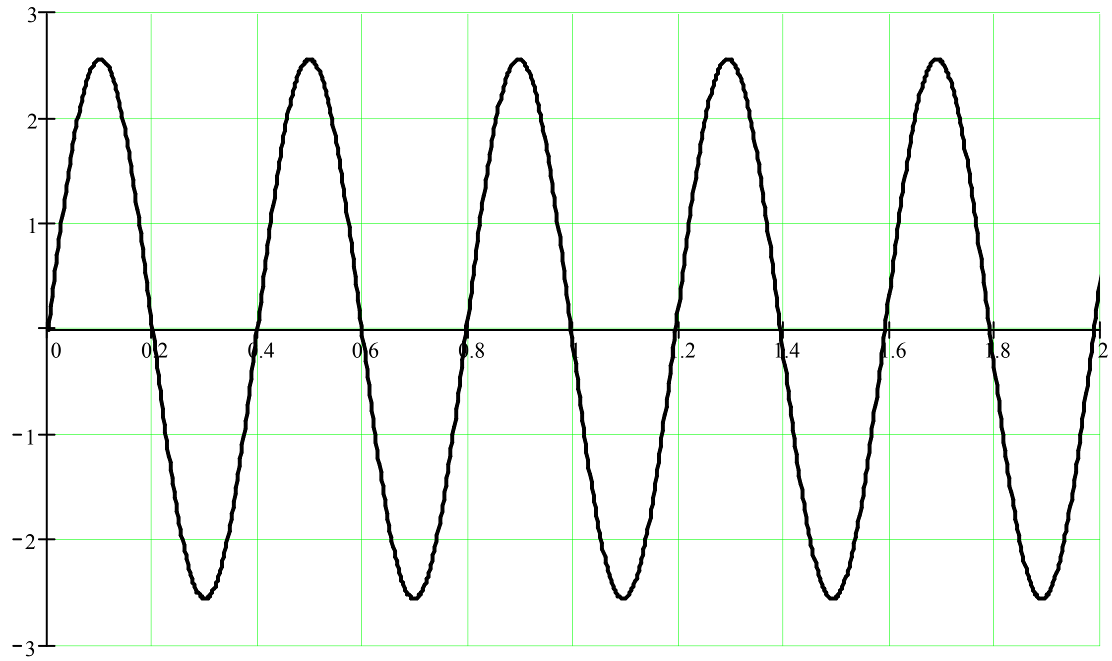


Рисунок 22 – График функции $x_1(t)$

(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

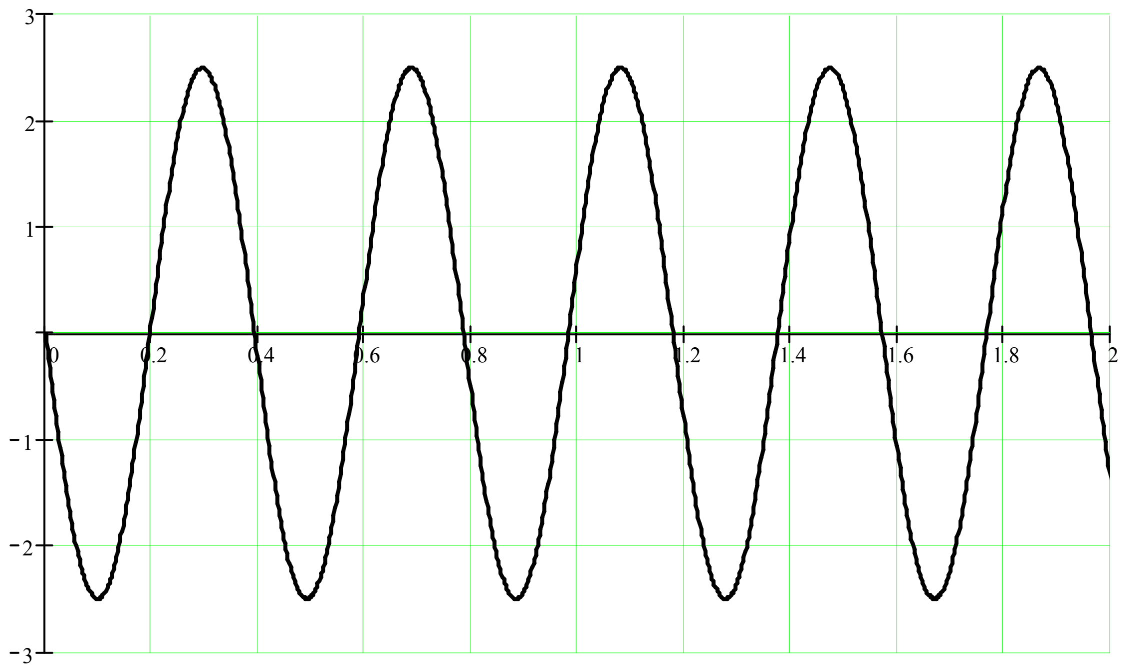


Рисунок 23 – График функции $x_2(t)$

(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

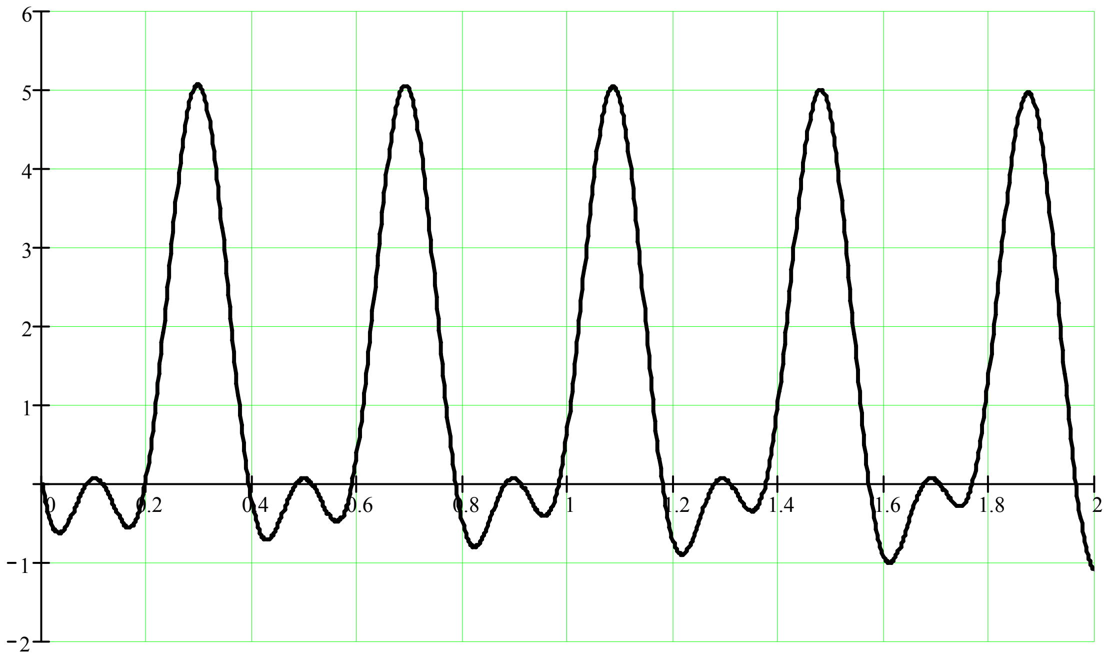


Рисунок 24 – График колебаний материальной точки
(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

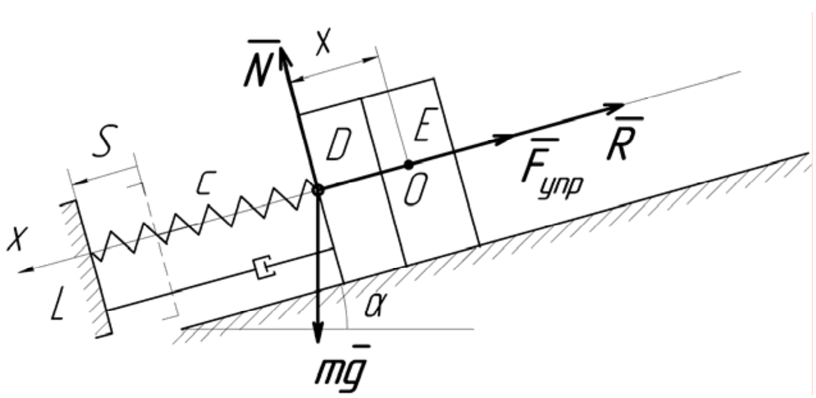


Рисунок 25 – Вынужденные колебания с учетом сопротивления

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}_{упр} + m\overline{g} + \overline{N} + \overline{R}\,.$$

Проецируя уравнение на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = -F_{упр} + mg \cdot Sin\alpha - R.$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot (\lambda_{cmDE} + x - S) + mg \cdot Sin\alpha - 19\dot{x},$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot \lambda_{cmDE} - c \cdot x + c \cdot S + mg \cdot Sin\alpha - 19\dot{x},$$

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x + c \cdot 0,06 \cdot Sin(16t) - 19 \cdot \dot{x}.$$

$p = 16$ с$^{-1}$, $Q_0 = 0,06 \cdot c = 0,06 \cdot 2750 = 165$ Н, $\mu = 19$ кг/с,

$$m \cdot \ddot{x} = -c \cdot x - \mu \cdot \dot{x} + Q_0 \cdot Sin(p \cdot t).$$

Данное уравнение совпадает с уравнением (54), поэтому дальнейшее решение проводим в соответствии с пунктом 1.4.

$$m \cdot \ddot{x} + \mu \cdot \dot{x} + c \cdot x = Q_0 \cdot Sin(p \cdot t),$$

$$\ddot{x} + \frac{\mu}{m} \cdot \dot{x} + \frac{c}{m} \cdot x = \frac{Q_0}{m} \cdot Sin(p \cdot t).$$

$$\frac{c}{m} = k^2, \; \frac{\mu}{m} = 2n, \; \frac{Q_0}{m} = P_0,$$

$$\ddot{x} + 2n \cdot \dot{x} + k^2 \cdot x = P_0 \cdot Sin(p \cdot t).$$

Однородное уравнение:

$$\ddot{x}_1 + 2n \cdot \dot{x}_1 + k^2 \cdot x_1 = 0.$$

Характеристическое уравнение:

$$z^2 + 2n \cdot z + k^2 = 0.$$

$$z_{1,2} = -n \pm \sqrt{n^2 - k^2}.$$

Определим и сравним величины *n* и *k*:

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{2750}{11}} = 15{,}811 \text{ с}^{-1}, \quad n = \frac{\mu}{2 \cdot m} = \frac{19}{2 \cdot 11} = 0{,}864 \text{ с}^{-1}.$$

Так как $n < k$ будем иметь случай малого сопротивления.

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot \sqrt{k^2 - n^2}.$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2},$$

$$z_{1,2} = -n \pm i \cdot k_1.$$

Общее решение однородного уравнения:

$$x_1 = e^{-n\cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)).$$

Частное решение x_2:

$$x_2 = B \cdot Sin(p \cdot t - \beta),$$

$$\begin{aligned}&-B \cdot p^2 \cdot Sin(p \cdot t - \beta) + 2n \cdot B \cdot p \cdot Cos(p \cdot t - \beta) + \\ &+k^2 \cdot B \cdot Sin(p \cdot t - \beta) = P_0 \cdot Sin(p \cdot t)\end{aligned},$$

$$p \cdot t - \beta = \psi,$$

$$\begin{aligned}&B(k^2 - p^2) \cdot Sin\psi + 2n \cdot B \cdot p \cdot Cos\psi = \\ &= P_0(Cos\beta \cdot Sin\psi + Cos\psi \cdot Sin\beta)\end{aligned}.$$

$$B(k^2 - p^2) = P_0 \cdot Cos\beta, \quad 2n \cdot B \cdot p = P_0 \cdot Sin\beta.$$

Определим значения B и β:

$$B = \frac{P_0}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad tg\beta = \frac{2n \cdot p}{k^2 - p^2},$$

$$P_0 = \frac{Q_0}{m} = \frac{165}{11} = 15 \text{ Н/кг},$$

$$B = \frac{15}{\sqrt{(15,811^2 - 16^2)^2 + 4 \cdot 0,864^2 \cdot 16^2}} = 0,53 \text{ м},$$

$$\beta = arctg\,\frac{2n \cdot p}{k^2 - p^2} = arctg\,\frac{2 \cdot 0,864 \cdot 16}{15,811^2 - 16^2} = 1,357 \text{ рад.}$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения:

$$x = e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)) + B \cdot Sin(p \cdot t - \beta).$$

Закон изменения проекции скорости:

$$\dot{x} = -n \cdot e^{-n \cdot t}(C_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot Sin(k_1 \cdot t)) +$$
$$+ e^{-n \cdot t}(-C_1 \cdot k_1 \cdot Sin(k_1 \cdot t) + C_2 \cdot k_1 \cdot Cos(k_1 \cdot t)) + B \cdot p \cdot Cos(p \cdot t - \beta).$$

Начальные условия:

н.у.: при *t=0* $x_0 = -\lambda_{cmE}$, $\dot{x}_0 = v_0$.

Постоянные интегрирования:

$$-\lambda_{cmE} = C_1 + B \cdot Sin(-\beta), \quad C_1 = -\lambda_{cmE} - B \cdot Sin(-\beta),$$

$$\lambda_{cmE} = \frac{m_E g \cdot Sin\alpha}{c} = \frac{7 \cdot 9,81 \cdot Sin45^0}{2750} = 0,018 \text{ м},$$

$$C_1 = -0,018 - 0,53 \cdot Sin(-1,357) = 0,5 \text{ м},$$

$$v_0 = -n \cdot C_1 + C_2 \cdot k_1 + B \cdot p \cdot Cos(-\beta),$$

$$C_2 = \frac{v_0 + n \cdot C_1 - B \cdot p \cdot Cos(-\beta)}{k_1},$$

$$k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} = \sqrt{15,811^2 - 0,864^2} = 15,788 \text{ с}^{-1},$$

$$C_2 = \frac{0,5 + 0,864 \cdot 0,5 - 0,53 \cdot 16 \cdot Cos(-1,357)}{15,788} = -0,055 \text{ м}$$

Таким образом, закон движения точки будет иметь вид (рисунок 28):

$$x = e^{-0,864 \cdot t}(0,5 \cdot Cos(15,788 \cdot t) - 0,055 \cdot Sin(15,788 \cdot t)) +$$
$$+0,53 \cdot Sin(16 \cdot t - 1,357)$$

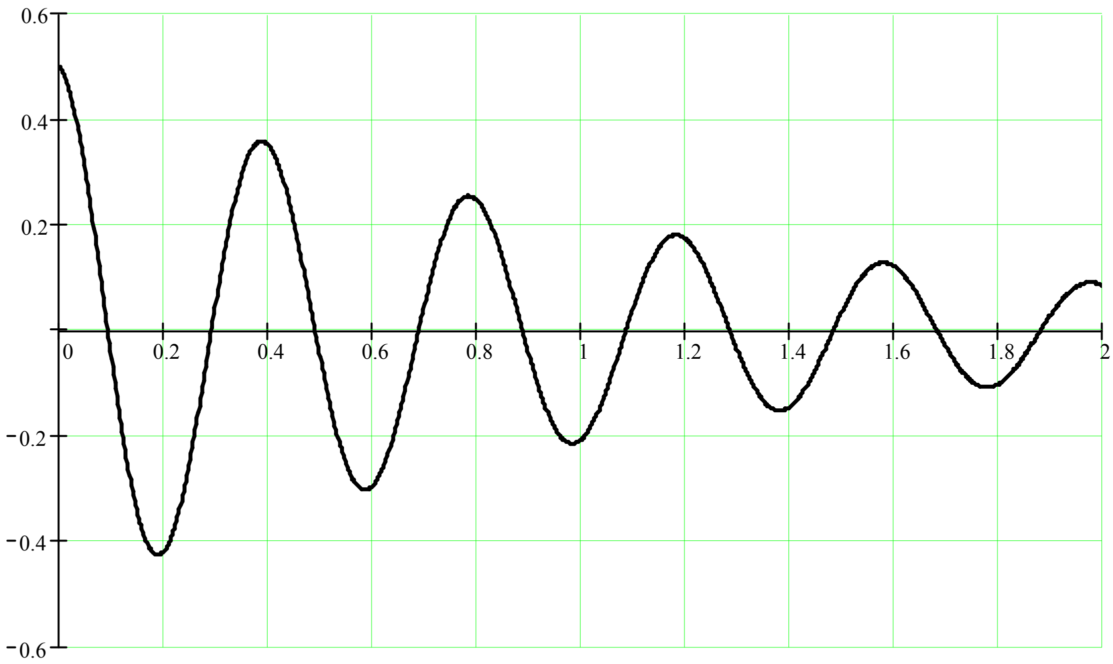


Рисунок 26 – График функции $x_1(t)$

(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

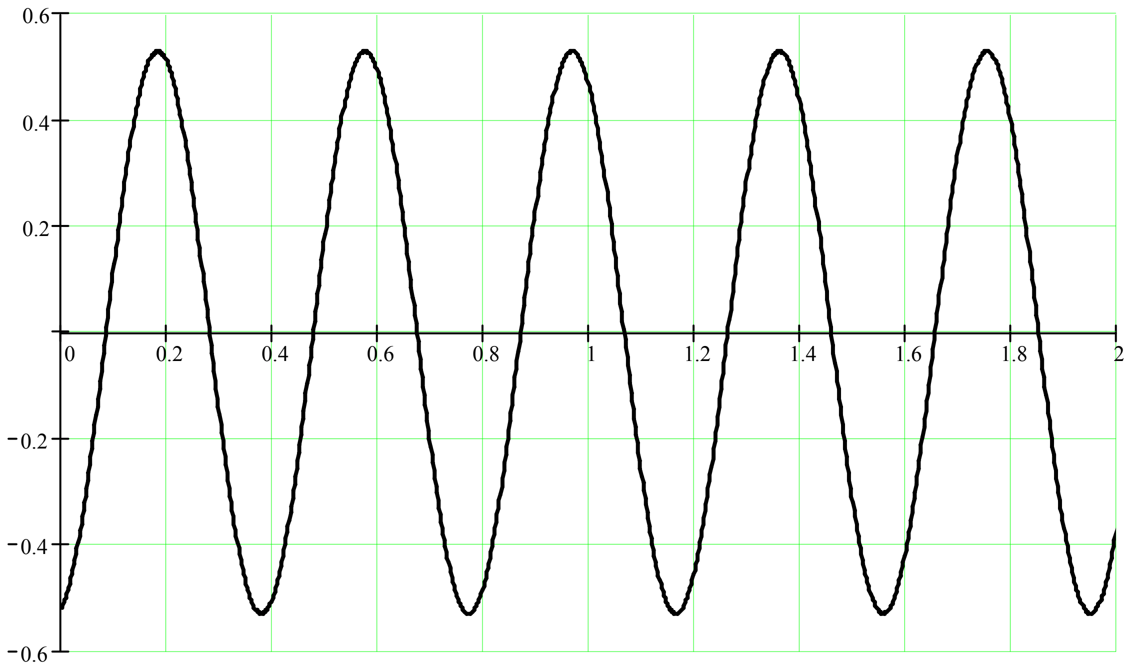


Рисунок 27 – График функции $x_2(t)$

(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

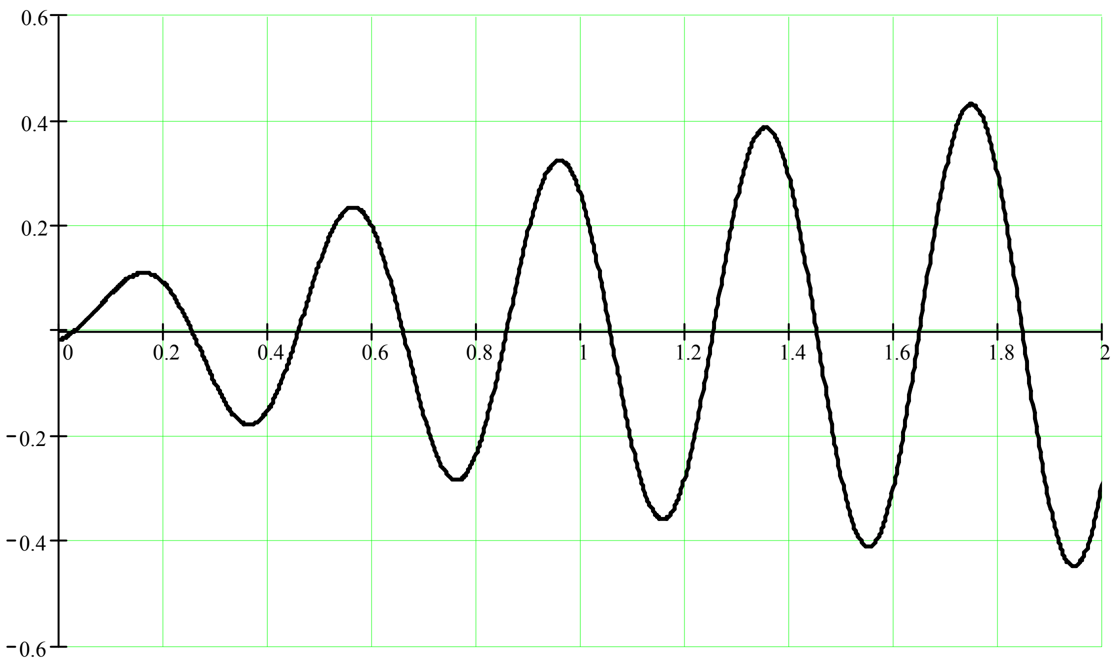


Рисунок 28 – График колебаний материальной точки

(по оси абсцисс – время (с), по оси ординат – координата x (м))

Список использованных источников

1 Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник для вузов. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова – 11-е изд., стер. – СПб: Лань, 2004. – 768 с.

2 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов. / А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 10-е изд., стер. - М.: Интеграл-пресс, 2003. - 384 с.

3 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. / С.М. Тарг - 14-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003 - 416с.

4 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для втузов в 3-х томах. Т.2. Динамика. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991. - 640с.

5 Дьяконов, В. Mathcad 2000: учебный курс. / В. Дьяконов – СПб: Питер, 2000. – 592 с.: ил.