Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа
Кафедра математической кибернетики

Е. Н. Рассоха, Л.М. Анциферова, И.В. Березина

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов инженерно-технических специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 519.2(07)
ББК 22.171я7
Р24

Рецензент - доктор физико-математических наук, профессор С.А. Пихтильков

Рассоха Е.Н.
Р24 Теория вероятностей: учебное пособие / Е.Н. Рассоха, Л.М. Анциферова, И.В. Березина. Оренбургский гос. ун-т.– Оренбург: ОГУ, 2011. - 243с.

В учебном пособии изложены основные теоретические и практические вопросы по курсу теории вероятностей. Составлены контрольные работы, типовые расчеты и продемонстрировано решение типовых задач и примеров по теории вероятностей.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности 190702 – «Организация и безопасность движения», 260601 – «Машины и аппараты пищевых производств»

УДК 519.2(07)
ББК 22.171я7
Р24

Содержание

Введение

Настоящее учебное пособие составлено в соответствии с программой изучения дисциплины «Математика» студентами специальности 190702 – «Организация и безопасность движения», 260601 – «Машины и аппараты пищевых производств»

Дисциплина «Математика» по всем указанным специальностям относится Государственным образовательным стандартом к федеральным дисциплинам. Одним из разделов дисциплины, определенным требованиями к обязательному минимуму содержания основной образовательной программы, является «Теория вероятностей».

Раздел «Теория вероятностей» имеет многочисленные практические приложения при изучении специальных и общепрофессиональных дисциплин студентами данных специальностей.

Следует отметить, что в данном учебном пособии изложен лекционный материал и приведены подробные решения большого количества типовых задач. Такое изложение материала позволяет использовать пособие для самостоятельной работы студентов над домашними заданиями и РГЗ как очного, так и заочного отделений, указанных специальностей.

Настоящая работа является лишь небольшой частью изложения вопросов, имеющих отношение к разделу «Теория вероятностей», в соответствии с рабочей программой дисциплины «Математика», указанных специальностей и отведенным аудиторным временем.

О замеченных недостатках в учебном пособии просьба сообщить на кафедры математической кибернетики и математического анализа ГОУ ОГУ. Авторы с благодарностью примут и рассмотрят любые предложения, касающиеся повышения научного, учебно-методического и содержательного уровня данного учебного пособия.

1 Случайные события

1.1 Предмет теории вероятностей

1) Введение.

2) Предмет теории вероятностей.

3) Случайные события, их классификация.

1) Теория вероятностей возникла из потребностей практики. Ее элементы были «знакомы» еще первобытным людям.

Возникновение «математики случайного» относят к середине XVII века и связывают с попыткой создания теории азартных игр.

Первую книгу по теории вероятностей «О расчетах в азартной игре» опубликовал голландский математик Х. Гюйгенс (1629-1695). Становление теории вероятностей как математической науки связано с именем Я. Бернулли (1654-1705), который ввел классическое определение события и доказал простейший случай закона больших чисел.

В XVII-XIX веках центральное место в развитии теории вероятностей занимали предельные теоремы. К этому периоду относятся работы А. Муавра (1667-1754), П. Лапласа (1749-1827), К. Гаусса (1777-1855), С. Пуассона (1781-1840).

В конце XIX – начале XX века благодаря усилиям П.Л. Чебышева (1821 – 1894), А.А. Маркова (1856-1922), А.М. Ляпунова (1857-1918) созданы методы доказательства предельных теорем для сумм независимых произвольно распределенных случайных величин.

Дальнейшее развитие теории вероятностей связано с именами русских математиков Е.Е. Слуцкого (1880-1948), А.Я. Хинчина (1894-1959), А.Н. Колмогорова ,(1903-1987), Б.В. Гнеденко (1912-1995), а также зарубежных Н. Винера (1894-1964), Э. Бореля (1871-1956), В. Феллера (1906-1970), Р. Фишера (1890-1962) и др. Теория вероятностей получила строгое формально-логическое обоснование на базе теории множеств. Следует особо отметить академика А.Н.

Колмогорова, установившего аксиоматику теории вероятностей. Огромное развитие получили такие отрасли науки, как математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания и д.р.

Современная теория вероятностей – строго обоснованная математическая наука. Она широко использует достижения других математических наук, и имеет, в свою очередь, многочисленные приложения в естественных и гуманитарных науках.

2) Любая точная наука изучает не сами явления, протекающие в природе, в обществе, а их математические модели, т.е. описание явления при помощи набора строго определенных символов и операций над ними.

При этом для построения математической модели реального явления во многих случаях достаточно учитывать только основные факторы, закономерности, которые позволяют предвидеть результат опыта по его заданным начальным условиям. Однако есть множество задач, для решения которых приходится учитывать и случайные факторы, придающие исходу опыта элемент определенности. Например, в вопросах стрельбы по цели невозможно без учета случайных факторов ответить на вопрос: сколько ракет нужно потратить для поражения цели? Невозможно предсказать, какая сторона выпадет при бросании монеты и т.д. Такие задачи, исход которых нельзя предсказать с полной уверенностью, требуют изучения не только основных, главных закономерностей, определяющих явление в общих чертах, но и случайных второстепенных факторов. Выявленные в таких задачах закономерности называются *статистическими* (или *вероятностными*). *Статистические* закономерности исследуются методами специальных математических дисциплин – теории вероятностей и математической статистики.

Под ***теорией вероятностей*** понимают математическую науку, изучающую закономерности, присущие массовым случайным явлениям.

Предметом теории вероятностей являются закономерности, наблюдаемые в случайных явлениях.

Под ***случайным явлением*** понимают явление, предсказать исход которого невозможно.

Пример 1.1.1. Примерами случайных явлений могут быть:

- выпадение орла при подбрасывании монеты;

- выигрыш по купленному лотерейному билету;

- результат измерения какой-либо величины и др.

Цель теории вероятностей – осуществление прогноза в области случайных явлений, влияние на ход этих явлений, их контроль, ограничение сферы действия случайности.

3) Определим понятие «случайное событие» исходя из интуитивного, наглядного понимания. Пусть проводится некоторый опыт, исход которого предсказать заранее нельзя.

Определение 1.1.1. Под ***опытом***, или ***испытанием, экспериментом*** понимают некоторую воспроизводимую совокупность условий, в которых наблюдается то или иное явление, фиксируется тот или другой результат.

При этом рассматриваются только такие эксперименты, которые можно повторять, хотя бы теоретически, при неизменном комплексе условий произвольное число раз.

Если результат опыта варьируется при его повторении, говорят об опыте ***со случайным исходом***.

Определение 1.1.2. ***Случайным событием*** (просто ***событием***) называется всякий факт, который в опыте со случайным исходом может произойти или не произойти.

События обозначаются заглавными буквами латинского алфавита: A, B, и т.д.

Пример 1.1.2.

1. Опыт: бросание игральной кости.

В этом опыте могут произойти следующие случайные события:

Событие A - «выпадение 5 очков»;

Событие B - «выпадение четного числа очков» и др.

2. Опыт: вынимание из ящика, где находятся n голубых и m красных шаров, одинаковых по размеру и весу, одного шара.

Событие A - извлечение из урны голубого шара. Это событие также является случайным в данном опыте.

3. Опыт: подбрасывание монеты. Случайные события этого опыта:

Событие A - «выпадение орла»;

Событие B - «выпадение решки».

Определение 1.1.3. Непосредственные исходы опыта называются ***элементарными событиями***.

Определение 1.1.4. Множество всех элементарных событий опыта, называют ***пространством элементарных событий*** или ***пространством исходов*** опыта, обозначаемое символом Ω.

Пример 1.1.3.

Опыт: бросание игральной кости.

В результате данного опыта появляются 6 элементарных событий:

A_1 - выпадение одного очка, A_2 - выпадение двух очков и т.д.

В этом случае пространство элементарных событий таково:

$\Omega = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ или $\boldsymbol{\Omega} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Из случайных событий особо выделяют невозможные и достоверные события.

Определение 1.1.5. Событие A называется ***достоверным,*** если оно обязательно наступит в данном опыте.

Пространство элементарных событий – это достоверное событие. Поэтому достоверное событие обозначается символом Ω.

Пример 1.1.4.

Опыт: в ящике находятся только голубые шары.

Событие A - из ящика извлечен голубой шар. Это достоверное событие.

Определение 1.1.6. Событие B, называется ***невозможным,*** если оно заведомо не произойдет в результате опыта и обозначается символом Ø.

Пример 1.1.5.

Опыт: в ящике находятся только красные шары.

Событие B - «из ящика извлечен голубой шар». Данное событие невозможное.

Определение 1.1.7. Два события A и B, называются ***совместными*** в данном опыте, если появление одного из них не исключает появление другого в этом опыте.

Пример 1.1.7.

Опыт: подбрасывание двух симметрических монет.

Событие A - орел на верхней стороне первой монеты.

Событие B - решка на верхней стороне второй монеты.

События A и B являются совместными.

Определение 1.1.8. Два события C и D называются ***несовместными***, если они не могут произойти вместе при одном и том же испытании.

Пример 1.1.8.

Опыт: выстрел из одного оружия.

Событие C – промах.

Событие D - попадание.

События C и D являются несовместными.

Определение 1.1.9. Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***несовместными***, если они попарно несовместны.

Определение 1.1.10. Несколько событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ образуют ***полную группу событий***, если в результате опыта неизбежно должно появиться хотя бы одно их них.

Пример 1.1.9. В 3-ем примере события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ - образуют полную группу.

Определение 1.1.11. Два события A и $\overline{A}$, называются ***противоположными***, если появление одного из них, равносильно не появлению другого.

Пример 1.1.10. В примере 8, события C и D являются противоположными.

Определение 1.1.12. Несколько событий в данном опыте называются ***равновозможными***, если в силу условий проведения опыта можно считать, что ни одно из них не является объективно более возможным, чем другое.

Пример 1.1.11. В примере 3 события $A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6$ являются равновозможными, т.к. предполагается, что кубик изготовлен из однородного материала и имеет симметрическую форму.

Определение 1.1.13. Исход опыта называется благоприятствующим данному событию, если он влечет за собой появление этого события.

Пример 1.1.12. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитываются суммы выпавших очков (суммы числа очков на верхних гранях обоих кубиков). Сумма выпавших очков на двух кубиках может меняться от 2 до 12. Записать полную группу событий в этом опыте.

Решение. Полную группу событий образуют равновозможные элементарные исходы (k,m), где $(k,m=1,2,3,4,5,6)$, представленные в таблице 1.1.1.

Таблица 1.1.1

(1;1)	(2;1)	(3;1)	(4;1)	(5;1)	(6;1)
(1;2)	(2;2)	(3;2)	(4;2)	(5;2)	(6;2)
(1;3)	(2;3)	(3;3)	(4;3)	(5;3)	(6;3)
(1;4)	(2;4)	(3;4)	(4;4)	(5;4)	(6;4)
(1;5)	(2;5)	(3;5)	(4;5)	(5;5)	(6;5)
(1;6)	(2;6)	(3;6)	(4;6)	(5;6)	(6;6)

Элементарный исход (k,m) означает, что на первом кубике выпало k очков, на втором m очков (k,m=1,2,3,4,5,6). Например, (3,4) – на первом кубике 3 очка, на втором – 4 очка. Таким образом, будет 36 событий, образующих полную группу в данном опыте.

Пример 1.1.13. Сколько элементарных исходов благоприятствует событию - «на обоих кубиках выпало одинаковое число очков», при подбрасывании двух игральных кубиков?

Решение. Этому событию благоприятствуют 6 элементарных исходов (см. табл. 1.1): (1;1), (2;2), (3;3), (4;4), (5;5), (6;6).

Пример 1.1.14. Подбрасываются два игральных кубика. Какому событию благоприятствуют больше элементарных исходов: «сумма выпавших очков равна 7», «сумма выпавших очков равна 8»?

Решение. Событию «сумма выпавших очков равна 7» благоприятствуют 6 исходов (см. табл. 1.1): (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1). Событию «сумма выпавших очков равна 8» благоприятствуют 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2). Следовательно, первому событию благоприятствуют больше элементарных исходов.

Для закрепления данной темы предлагаем решить следующие задачи.

Задачи:

1) Являются ли несовместными следующие события:

а) опыт – подбрасывание симметричной монеты; события:

A - «появление орла»;

B - «появление решки».

б) опыт – два выстрела по мишени; события:

A - «хотя бы одно попадание»;

B - «хотя бы один промах».

2) Являются ли равновозможными следующие события:

а) опыт - подбрасывание симметричной монеты; события:

A - «появление орла»;

B - «появление решки».

б) опыт – подбрасывание погнутой монеты; события:

A - «появление орла»;

B - «появление решки».

в) опыт – выстрел по мишени; события:

A - «попадание»;

B - «промах».

3) Образуют ли полную группу событий следующие события:

а) опыт - подбрасывание симметричной монеты; события:

A - «орел»;

B - «решка».

б) опыт – подбрасывание двух симметричных монет; события:

A - «два орла»;

B - «две решки».

4) Опыт – подбрасывание двух игральных кубиков. Сколько элементарных исходов благоприятствует следующим событиям:

A_1 - сумма выпавших очков равна 2;

A_2 - сумма выпавших очков равна 3;

A_3 - сумма выпавших очков равна 4;

…………………………………………

A_{11} - сумма выпавших очков равна 12?

5) Опыт – подбрасывание трех игральных кубиков. Сколько всего элементарных исходов? Сколько элементарных исходов благоприятствует событию - на трех кубиках выпало очков: 3,4,5,6,7,8,9,10,11,12? Каково наибольшее значение суммы выпавших очков?

Ответы: 1) а) да; б) нет; **2)** а) да; б) нет; в) в общем случае нет; **3)** а) да; б) нет; **4)** 1,2,3,4,5,6,4,3,2,1; **5)** $n = 6^3 = 216$; 1,3,6,10,15,21,25,27,27,25,18.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называют опытом, или испытанием?
2. Что называют событием?
3. Какое событие называют достоверным в данном опыте?
4. Какое событие называют невозможным в данном опыте?
5. Какое событие называют случайным в данном опыте?
6. Какие события называют совместными в данном опыте?
7. Какие события называют несовместными в данном опыте?
8. Какие события называют противоположными?
9. Какие события считают равновозможными?
10. Что называют полной группой событий?
11. Что называют элементарным исходом?

12. Какие элементарные исходы называют благоприятствующими данному событию?

13. Что представляет собой полная группа событий при подбрасывании одной монеты?

14. Что представляет собой полная группа событий при подбрасывании двух монет?

1.2 Определение вероятности события

1) Классическое определение вероятности события.

2) Частота события. Статистическое определение вероятности.

3) Геометрическое определение вероятности события.

1) Для количественной оценки возможности появления случайного события вводится понятие его вероятности.

В классическом определении вероятности исходят из того, что пространство элементарных исходов Ω содержит конечное число элементарных исходов (событий), причем все они равновозможны.

Пусть n - число всех равновозможных элементарных исходов в Ω, т.е. число всех равновозможных элементарных исходов опыта, образующих полную группу событий. А m - число элементарных исходов, образующих событие A, т.е. благоприятствующих событию A;

Определение 1.2.1. ***Вероятностью*** события A называется отношение числа элементарных исходов, благоприятствующих данному событию, к числу всех равновозможных исходов опыта, в котором может появиться это событие.

Вероятность события A обозначается $P(A)$ (буква P - первая буква французского слова probabilité – вероятность). В соответствии с определением можно записать формулу:

$$P(A) = \frac{m}{n}. \qquad (1.2.1)$$

Свойства вероятности события

1. Вероятность достоверного события равна единице.

Это свойство следует из того, что для достоверного события $m = n$, поэтому $P(\Omega) = 1$.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

Для невозможного события $m = 0$, поэтому $P(\varnothing) = 0$.

3. Вероятность любого события B удовлетворяет неравенствам:

$$0 \leq P(B) \leq 1. \qquad (1.2.2)$$

4. Если события A и B несовместны, то

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

2) Классическое определение вероятности предполагает, что все элементарные исходы равновозможны. О равновозможности исходов опыта делают вывод в силу симметрии проводимых опытов. Задачи, в которых можно исходить из соображений симметрии, на практике встречаются редко. Во многих случаях трудно указать основания, позволяющие считать, что все элементарные исходы равновозможны. В связи с этим появилась необходимость введения еще одного определения вероятности, называемого ***статистическим.*** Чтобы дать это определение, предварительно вводят понятие ***относительной частоты события.***

Определение 1.2.2. ***Относительной частотой события***, или ***частотой,*** называется отношение числа опытов, в которых появилось это событие, к числу всех произведенных опытов.

Обозначим частоту события A как $W(A)$**,** тогда по определению имеем:

$$W(A) = \frac{m_A}{n}, \qquad (1.2.3)$$

где m_A - число опытов, в которых появилось событие A;

n - число всех произведенных опытов.

Свойства относительной частоты события

1. Относительная частота случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей: $0 \leq W(A) \leq 1$.

2. Относительная частота достоверного события U равна единице: $W(U)=1$.

3. Относительная частота невозможного события V равна нулю: $W(V)=0$.

4. Относительная частота суммы двух несовместных событий A и B равна сумме частот этих событий: $W(A+B)=W(A)+W(B)$.

Наблюдения позволили установить, что относительная частота обладает свойствами статистической устойчивости, а именно, в различных сериях многочисленных испытаний она принимает значения, достаточно близкие к некоторой постоянной. Эту постоянную, являющуюся объективной числовой характеристикой явления, считают вероятностью данного события.

Определение 1.2.3. ***Вероятностью*** события называется число, около которого группируются значения относительной частоты данного события в различных сериях большого числа испытаний.

Свойства вероятности

1. Вероятность достоверного события равна единице.

2. Вероятность невозможного события равна нулю.

3. Вероятность случайного события заключена между нулем и единицей.

4. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий.

3) Классическое определение вероятности непосредственно применимо лишь к опытам, которые имеют конечное число равновозможных исходов.

Однако его можно распространить и на некоторые опыты, которые имеют бесконечное множество равновозможных исходов. Это можно применять в задачах, сводящихся к случайному бросанию точки на конечный участок прямой, плоскости, пространства или на объединение конечных участков прямой, плоскости, пространства.

Если возможность появления точки внутри некоторой области определяется не положением этой области и ее границами, а только ее мерой, т.е. длиной, площадью, объемом, то вероятность появления случайной точки внутри некоторой области находится как отношение меры этой области к мере всей области, в которой может появиться данная точка. Это определение вероятности называется ***геометрическим.***

Пусть на плоскости задана квадрируемая область, т.е. область имеющая площадь. Обозначим эту область буквой G, а ее площадь S_G (рисунок 1.2.1).

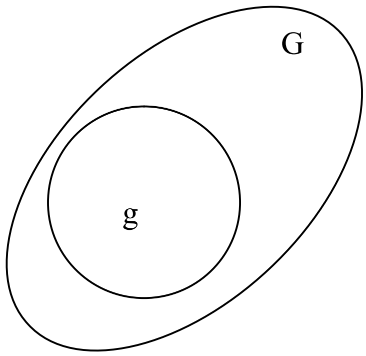


Рисунок 1.2.1

В область G наудачу брошена точка. Будем считать, что брошенная точка может попасть в некоторую часть g области G с вероятностью, пропорциональной площади этой части S_g и не зависящей от ее формы и расположения. Пусть событие A - «попадание брошенной точки в область g», тогда геометрическая вероятность этого события определяется формулой:

$$P(A) = \frac{S_g}{S_G}. \qquad (1.2.4)$$

Аналогично вводится понятие геометрической вероятности при бросании точки в пространственную область G объема V_G, содержащую область g объема V_g:

$$P(A) = \frac{V_g}{V_G}. \qquad (1.2.5)$$

В общем случае понятие геометрической вероятности вводится следующим образом. Обозначим меру области g (длину, площадь, обьем) через $mes\, g$, а меру области G – $mes\, G$ (mes - первые три буквы французского слова mesure, что означает мера); обозначим буквой A событие - «попадание брошенной точки в область g, которая содержится в области G». Тогда вероятность этого события определяется формулой:

$$P(A) = \frac{mes\, g}{mes\, G}. \qquad (1.2.6)$$

Замечание 1.1.1. Определение вероятности, определяемое формулой (1.2.6), подходит и для классического случая, так как мерой события является число элементарных событий, составляющих данное.

Приведем примеры решения задач с использованием приведенных формул.

Пример 1.2.1. В урне 10 одинаковых по размеру и весу шаров, из которых 4 красных и 6 голубых. Из урны извлекается один шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар окажется голубым?

Решение. Событие - «извлеченный шар оказался голубым», обозначим буквой A. Данное испытание имеет 10 равновозможных элементарных исходов, из которых 6 благоприятствуют событию A. В соответствии с формулой (1.2.1) получаем: $P(A) = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

Пример 1.2.2. Все натуральные числа от 1 до 30 записаны на одинаковых карточках и помещены в урну. После тщательного перемешивания карточек из урны извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что число на взятой карточке окажется кратным 5?

Решение. Обозначим через A событие - «число на взятой карточке кратно 5». В данном испытании имеется 30 равновозможных элементарных исходов, из которых событию A благоприятствуют 6 исходов (числа 5,10,15,20,25,30). Следовательно, $P(A) = \frac{6}{30} = 0{,}2$.

Пример 1.2.3. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Найти вероятность события B, состоящего в том, что на верхних гранях кубиков в сумме будет 9 очков.

Решение. В этом испытании всего $6^2 = 36$ равновозможных элементарных исходов (см. табл.1.1.1). Событию B благоприятствуют 4 исхода: (3;6), (4;5), (5;4), (6;3), поэтому $P(A) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9}$.

Пример 1.2.4. Из букв слова *дифференциал* наугад выбирается одна буква. Какова вероятность того, что эта буква будет: а) гласной, б) согласной, в) буквой *ч*?

Решение. В слове дифференциал 12 букв, из них 5 гласных и 7 согласных. Буквы *ч* в этом слове нет. Обозначим события: A - «гласная буква», B - «согласная буква», C - «буква *ч*». Число благоприятствующих элементарных исходов: $m_1 = 5$ - для события A, $m_2 = 7$ - для события B, $m_3 = 0$ - для события C. Поскольку $n = 12$, то,

$$P(A) = \frac{5}{12} \approx 0{,}417; \qquad P(B) = \frac{7}{12} \approx 0{,}583; \qquad P(C) = 0.$$

Пример 1.2.5. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее: получить в сумме 7 или 8?

Решение. Обозначим события: A - «выпало 7 очков», B - «выпало 8 очков». Событию A благоприятствует 6 элементарных исходов: (1;6), (2;5), (3;4), (4;3), (5;2), (6;1), а событию B - 5 исходов: (2;6), (3;5), (4;4), (5;3), (6;2). Всех равновозможных элементарных исходов для обоих событий будет одно и то же число, а именно, $n = 6^2 = 36$. Значит, $P(A) = \frac{6}{36} \approx 0{,}167$; $P(B) = \frac{5}{36} \approx 0{,}139$. Итак, $P(A) > P(B)$, следовательно, событие A более вероятное, чем событие B.

Пример 1.2.6. Из 500 взятых наудачу деталей оказалось 8 бракованных. Найти относительную частоту бракованных деталей.

Решение. Так как в данном случае $m = 8$, $n = 500$, то в соответствии с формулой (1.2.2) находим: $W = \frac{8}{500} = 0{,}016.$

Пример 1.2.7. Среди 1000 новорожденных оказалось 515 мальчиков. Чему равна относительная частота рождения мальчиков?

Решение. Поскольку в данном случае, $m = 515$, $n = 1000$, то $W = \frac{515}{1000} = 0{,}515$.

Пример 1.2.8. При стрельбе по мишени относительная частота попаданий $W = 0{,}75$. Найти число попаданий при 40 выстрелах.

Решение. Из формулы (1.2.2) следует, что $m = Wn$. Так как $W = 0{,}75$, $n = 40$, то $m = 0{,}75 \cdot 40 = 30$.

Таким образом, было получено 30 попаданий.

Пример 1.2.9. Среди 300 деталей, изготовленных на автоматическом станке, оказалось 15 деталей, не отвечающих стандарту. Найти относительную частоту появления нестандартных деталей.

Решение. В данном случае $n = 300$, $m = 15$, поэтому $W = \dfrac{15}{300} = 0{,}05$.

Пример 1.2.10. Контролер, проверяя качество 400 изделий, установил, что 20 из них относятся ко второму сорту, а остальные - к первому. Найти относительную частоту изделий первого сорта, относительную частоту изделий второго сорта.

Решение. Прежде всего, найдем число изделий первого сорта: 400-20=380. Таким образом, относительная частота изделий первого сорта $W_1 = \dfrac{380}{400} = 0{,}95$. Относительная частота изделий второго сорта $W_2 = \dfrac{20}{400} = 0{,}05$.

Пример 1.2.11. В круг вписан квадрат (рисунок 1.2.2). В круг наудачу бросается точка. Какова вероятность того, что точка попадет в квадрат?

Решение. Введем обозначения: R - радиус круга, a - сторона вписанного квадрата, событие A - «попадание точки в квадрат», S - площадь круга, S_1 - площадь вписанного квадрата. Как известно, площадь круга $S = \pi R^2$. Сторона вписанного квадрата через радиус описанной окружности выражается формулой $a = \sqrt{2}R$, поэтому площадь квадрата $S_1 = 2R^2$.

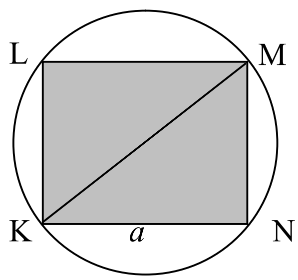


Рисунок 1.2.2

Полагая в формуле (1.2.4) $S_g = S_1, S_G = S$, находим искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637\,.$$

Пример 1.2.12. В шар вписан куб. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность того, что точка попадает в куб.

Решение. Введем обозначения: событие A - «попадание точки в куб»; R - радиус шара, a - ребро куба, V - объем шара, V_1 - объем вписанного куба.

Как известно, объем шара равен $V = \frac{4}{3}\pi R^3$; поскольку $V_1 = a^3$, а ребро куба выражается через радиус шара как $a = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, то $V_1 = \frac{8}{3\sqrt{3}} R^3$. В соответствии с формулой (1.2.5), приняв $V_g = V_1, V_G = V$, получим:

$$P(A) = \frac{V_1}{V} = \frac{(8/3\sqrt{3})R^3}{(4/3)\pi R^3} = \frac{2}{\pi\sqrt{3}} \approx 0{,}368.$$

Пример 1.2.13. (*Задача Бюффона*). Плоскость расчерчена параллельными прямыми, расстояние между которыми равно a. На эту плоскость бросается на удачу отрезок длины $l\ (l < a)$. Какова вероятность того, что отрезок пересекается хотя бы с одной из прямых данного семейства?

Решение. Расстояние от верхнего конца отрезка до ближайшей снизу прямой обозначим через y (см. рисунок 1.2.3).

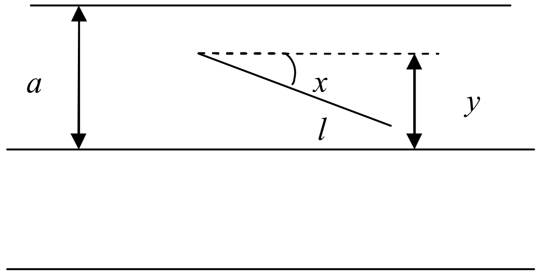


Рисунок 1.2.3

Угол между отрезком и лучом, который параллелен прямым семейства и начало которого совпадает с верхним концом отрезка, обозначим через x.Очевидно, $0 \le y \le a, 0 \le x \le \pi$. Для того, чтобы отрезок пересекал хотя бы одну из прямых семейства, необходимо и достаточно, чтобы $y < l \sin x$. Выражение «отрезок брошен наудачу» будем понимать так: точка (x, y) наудачу брошена в прямоугольник $0 \le y \le a, 0 \le x \le \pi$ (см. рисунке 1.2.4). Точки, координаты которой удовлетворяют неравенству $y < l \sin x$, образуют фигуру, закрашенную на рисунке 1.2.4. Площадь этой фигуры равна $S_1 = \int_0^\pi l \sin x dx = -l \cos x \Big|_0^\pi = 2l$.

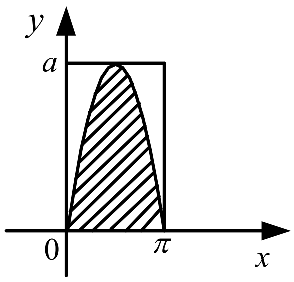


Рисунок 1.2.4

Площадь всего прямоугольника равна $S = a\pi$. По формуле (1.2.4), обозначая $S_g = S_1, S_G = S,$ найдем искомую вероятность:

$$P(A) = \frac{S_1}{S} = \frac{2l}{a\pi},$$

где событие A - «отрезок пересекается хотя бы с одной прямой».

Замечание 1.2.1. В случае $l = a$ вероятность такова: $P(A) = \frac{2}{\pi} \approx 0{,}637.$

Пример 1.2.14. На отрезок единичной длины бросают наудачу две точки. Они разбивают отрезок на три части. Какова вероятность того, что их этих отрезков можно построить треугольник?

Решение. Заданный отрезок рассматриваем как отрезок $[0;1]$ числовой прямой. Координаты брошенных точек обозначим через x и y; это числа из отрезка $[0;1]$. Числа x и y можно рассматривать как координаты точки на плоскости (рисунок 1.2.5).

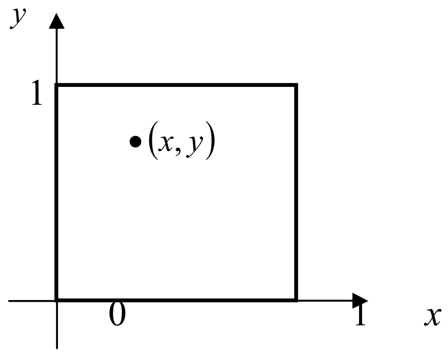


Рисунок 1.2.5

Так как $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$, то точки $(x; y)$ наудачу брошены в квадрат со стороной $a = 1$. Чтобы из трех отрезков можно было построить треугольник, необходимо и достаточно выполнение неравенства треугольника для длин его сторон: каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон.

При $x \le y$ (см. рисунок 1.2.6) получаем неравенства:

$x < (y - x) + (1 - y),\ \ y - x < x + (1 - y),\ 1 - y < x + (y - x).$

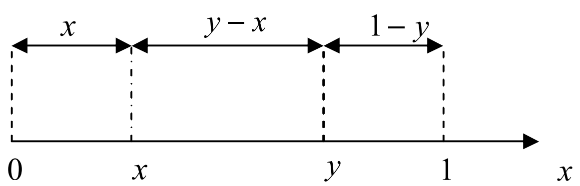


Рисунок 1.2.6

После преобразования последних неравенств, имеем следующую систему:

$$\begin{cases} x < 0{,}5 \\ y < x + 0{,}5 \\ y > 0{,}5 \\ x \le y \end{cases}$$

Эта система неравенств определяет на плоскости треугольник
(см. рисунке 1.2.7, верхний треугольник).

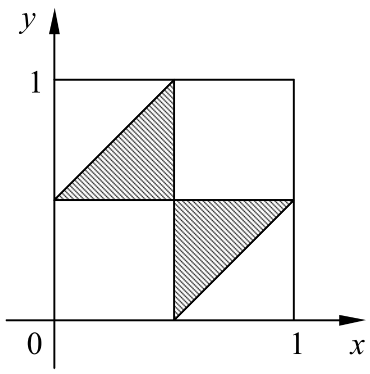


Рисунок 1.2.7

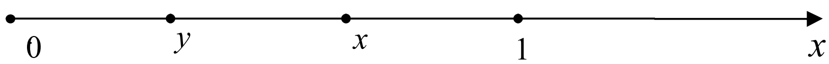


Рисунок 1.2.8

При $x > y$ (см. рисунок 1.2.8) получаем систему неравенств, которая определяет на плоскости второй нижний треугольник (рисунок 1.2.7).

$$\begin{cases} x > 0{,}5 \\ y < 0{,}5 \\ y > x - 0{,}5 \\ x > y \end{cases},$$

Поскольку $S_G = 1$ (площадь единичного квадрата), $S_g = 0{,}25$ (площадь двух треугольников, закрашенных на рисунке 1.2.7), то вероятность получить треугольник из указанных отрезков равна 0,25.

Пример 1.2.15. Два парохода должны подойти к одному и тому же причалу. Время прихода обоих пароходов независимо и равновозможно в течение данных суток. Определить вероятность того, что одному из пароходов придется ожидать освобождения причала, если время стоянки первого парохода равно одному часу, второго – двум часам.

Решение. Обозначим через x и y время прибытия пароходов. Возможные значения x и y $:0 \le x \le 24$, $0 \le y \le 24$. Благоприятствующие значения $y - x \le 1$, $x - y \le 2$. Эти неравенства определяют область, заштрихованную на рисунке 1.2.9. Площадь этой области равна $S_g = 24 \cdot 24 - 0{,}5 \cdot 23 \cdot 23 - 0{,}5 \cdot 22 \cdot 22 = 69{,}5$. Поскольку $S_G = 24 \cdot 24 = 576$, то $P = \dfrac{S_g}{S_G} = \dfrac{69{,}5}{576} = 0{,}121$.

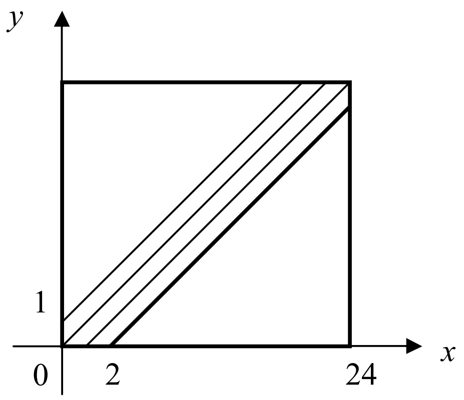


Рисунок 1.2.9

Для закрепления данной темы предлагаем решить следующие задачи.

Задачи:

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 30. Какова вероятность того, что это число кратно 3?

2. В урне a красных и b голубых шаров одинаковых по размерам и весу. Чему равна вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется голубым?

3. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 50. Какова вероятность того, что это число является простым?

4. Подбрасывается три игральных кубика, подчитывается сумма очков на верхних гранях. Что вероятнее – получить в сумме 9 или 10 очков?

5. Подбрасываются три игральных кубика, подсчитывается сумма выпавших очков. Что вероятнее – получить в сумме 11(событие A) или 12 очков (событие B)?

6. Отдел технического контроля обнаружил 10 нестандартных изделий в партии из 1000 изделий. Найдите частоту изготовления бракованных изделий.

7. Для выяснения качества семян было отобрано и высеяно в лабораторных условиях 100 штук, из них 95 семян дали нормальные всходы. Какова частота нормальных всходов семян?

8. Найдите относительную частоту появления простых чисел в следующих отрезках натурального ряда: а) от 21 до 40; б) от 41 до 50; в) от 51 до 70.

9. Найдите относительную частоту появления шестерки при 90 подбрасываниях игрального кубика (имеется в виду проведение опыта с подбрасыванием кубика и фиксированием появления шестерки.)

10. На плоскости начерчены две концентрические окружности, радиусы которых 6 см и 12 см соответственно. Какова вероятность того, что точка, брошенная в большой круг, попадет в кольцо, образованное указанными окружностями?

11. В круг радиуса R вписан правильный треугольник. Найти вероятность того, что точка, брошенная в этот круг, попадет в данный треугольник.

12. В шар вписана правильная треугольная пирамида. Точка наудачу зафиксирована в шаре. Найти вероятность попадания точки в пирамиду.

13. Стержень длиной l произвольным образом сломан на три части. Какова вероятность того, что из этих частей можно составить треугольник?

Ответы:

1) $\frac{1}{3}$; **2)** $\frac{b}{a+b}$; **3)** $0{,}3$; **4)** $p_1 = \frac{25}{216}$ - вероятность получить в сумме 9 очков; $p_2 = \frac{27}{216}$ - вероятность получить в сумме 10 очков; $p_2 > p_1$; **5)** $P(A) = \frac{27}{216}$, $P(B) = \frac{25}{216}$, $P(A) > P(B)$; **6)** 0,01; **7)** 0,95; 0,05; **8)** а) 0,2; б) 0,3; в) 0,2; **10)** $0{,}75$; **11)** $3\sqrt{3}/4\pi \approx 0{,}4137$. Указание. Сторона a треугольника через радиус R описанной окружности выражается формулой $a=\sqrt{3}R$; **12)** $2/3\sqrt{3}\pi \approx 0{,}123$. Указание. $a=4R/\sqrt{6}$; **13)** 0,25.

Вопросы для самопроверки

1. Что называют вероятностью события?
2. Чему равна вероятность достоверного события?
3. Чему равна вероятность невозможного события?
4. В каких пределах заключена вероятность любого события?
5. Какое определение вероятности называют классическим?

Лекция 1.3 Комбинаторика и вероятность

1) Комбинаторика как наука. Схема выбора без возвращения.

2) Схема выбора с возвращением.

1) Введем основные понятия и определения комбинаторики.

Определение 1.3.1. ***Комбинаторика*** – раздел математики, который изучает способы подсчета числа элементов в конечных множествах.

Наиболее часто в теории вероятностей применяются такие понятия комбинаторики, как размещения, перестановки и сочетания.

Определение 1.3.2. ***Размещениями*** называют множества, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком.

Число всевозможных размещений из n элементов по m обозначается A_n^m и определяется формулой:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!} \qquad (1.3.1)$$

Пример 1.3.1. Группа студентов изучает 7 учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий на понедельник, если в этот день недели студенты должны изучать 4 различных дисциплины?

Решение. Число таких способов равно числу размещений из 7 элементов по 4, т.е. $A_n^m = A_7^4 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7!}{3!} = 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 840.$

Определение 1.3.3. ***Перестановками***, называются множества элементов, состоящие из одних и тех же различных элементов и отличающихся друг от друга только их порядком.

Число перестановок из n элементов обозначается P_n и определяется по формуле:

$$P_n = n!, \qquad (1.3.2)$$

где $n = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$.

Замечание 1.3.1. Для пустого множества принимается соглашение: пустое множество упорядочить только одним способом, а именно, по определению полагают $0! = 1$.

Пример 1.3.2. Сколько пятизначных чисел можно составить из цифр 1,2,3,4,5?

Решение. Искомое количество таких чисел равно числу перестановок из пяти элементов

$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 5 = 120.$

Определение 1.3.4. ***Сочетаниями*** из n различных элементов по m элементов называются множества, содержащие m элементов из числа n заданных, и которые отличаются хотя бы одним элементом.

Число сочетаний из n элементов по m элементов обозначают C_n^m и определяют формулой:

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}. \qquad (1.3.3)$$

Замечание 1.3.2. Считают, что по определению $C_n^0 = 1$.

Для формулы числа сочетаний справедливы следующие свойства

1. $C_n^m = C_n^{n-m}$;

2. $C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$;

3. $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n.$

Число перестановок, размещений и сочетаний между собой связано равенством:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m}. \qquad (1.3.4)$$

Пример 1.3.3. Сколько матчей будет сыграно на футбольном чемпионате с участием 16 команд, если каждые две команды встречаются между собой один раз?

Решение. Количество матчей равно числу сочетаний из 16 элементов по 2

$$C_{16}^2 = \frac{16!}{2!(16-2)!} = \frac{16!}{2!14!} = \frac{15 \cdot 16}{1 \cdot 2} = 120.$$

2) Выше предполагалось, что все n элементов различны. Если же некоторые элементы повторяются, то в этом случае множества с повторениями вычисляются по другим формулам.

Определение 1.3.5. Если при выборке m элементов из n элементов возвращаются обратно и упорядочиваются, то говорят, что это ***размещение с повторениями.***

Число всех размещений из n элементов по m элементов с повторениями обозначается $\left(A_n^m\right)_{повт}$ и вычисляется по формуле:

$$\left(A_n^m\right)_{повт} = n^m. \qquad (1.3.5)$$

Пример 1.3.4. Из 3 элементов a, b, c составить все размещения по два элемента с повторениями.

Решение. По формуле число размещений по два с повторениями равно $\left(A_3^2\right)_{повт} = 3^2 = 9.$

Это: (a,a) (a,b) (a,c)

(b,b) (b,a) (b,c)

(c,c) (c,a) (c,b)

Определение 1.3.6. Если при выборке m элементов из n элементов возвращаются обратно без последующего упорядочивания, то говорят, что это ***сочетания с повторениями.***

Число всех сочетаний из n элементов по m элементов с повторениями обозначается символом $\left(C_n^m\right)_{повт}$ и вычисляется по формуле:

$$\left(C_n^m\right)_{повт} = C_{n+m-1}^n \tag{1.3.6}$$

Пример 1.3.5. Сколькими способами можно составить букет из 5 цветов, если в наличии есть цветы трех сортов?

Решение. Рассматриваемое множество состоит из трех различных элементов, а выборки имеют объем равный 5.

Поскольку порядок расположения цветов в букете не играет роли, то искомое число букетов равно числу сочетаний с повторениями из трех элементов по 5 в каждом. Следовательно, по формуле (1.3.6)имеем:

$$\left(\mathrm{C}_3^5\right)_{\text{повт}} = \mathrm{C}_7^5 = \frac{7!}{2!5!} = \frac{6 \cdot 7}{1 \cdot 2} = 21.$$

Определение 1.3.7. Пусть в множестве с n элементами есть k различных элементов, при этом первый элемент повторяется n_1 раз, второй элемент n_2 раза, ….., k-й элемент n_k раз, причем $n_1 + n_2 + \ldots + n_k = n$. Тогда число перестановок с повторениями из n элементов обозначается $P(n_1, n_2, \ldots, n_k)$ и вычисляется по формуле

$$P(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_k!}. \tag{1.3.7}$$

Пример 1.3.6. Сколько различных пятизначных чисел можно составить из цифр 3,3,5,5,8?

Решение. Так как $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$, $n_3 = 1$. Число различных пятизначных чисел, содержащих цифры 3,5 и 8 равно:

$$P_5(2,2,1) = \frac{5!}{2! \cdot 2! \cdot 1!} = 30.$$

Рассмотрим примеры непосредственного вычисления вероятностей с использованием формул комбинаторики:

Пример 1.3.7. Набирая номер телефона, абонент забыл две последние цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Какова вероятность того, что номер набран правильно?

Решение. Последние две цифры можно набрать A_{10}^2 способами, и только один из них будет правильным. Следовательно, искомая вероятность будет равна:

$$P(A) = \frac{1}{A_{10}^2} = \frac{1}{9 \cdot 10} = \frac{1}{90}.$$

Пример 1.3.8. Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд карточек, на которых нанесены буквы а, г, и, л, м, о, р, т, получится слово «алгоритм»?

Решение. Общее количество исходов равно числу перестановок из восьми элементов: $P_8 = 8! = 40320$. Благоприятным будет только один исход. Поэтому вероятность того, что слово будет сложено, равна $P = \frac{1}{P_8} = \frac{1}{40320} \approx 0{,}000025.$

Пример 1.3.9. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие A)?

Решение. Общее количество исходов равно числу сочетаний из 10 по 2, т.е.

$$C_{10}^2 = \frac{10!}{2!(10-2)!} = \frac{10!}{2!8!} = \frac{1 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45.$$

Число случаев, благоприятствующих событию A, определяется числом сочетаний из 6 по 2 т.е. $C_6^2 = \frac{6!}{2!(6-2)!} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} = 15.$

Итак, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{3}.$

Пример 1.3.10. Из урны, содержащей M белых и $N - M$ черных шаров, наудачу извлекаются сразу n шаров. Какова вероятность того, что среди выбранных n шаров окажется ровно m белых?

Решение. Ясно, что общее количество исходов равно C_N^M. Благоприятствующие наборы шаров должны содержать m белых шаров и $n-m$ черных: m белых шаров можно выбрать C_M^m способами, тогда как $n-m$ черных шаров можно выбрать C_{N-M}^{n-m} способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}$, а искомая вероятность равна

$$P(A) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}. \qquad (1.3.8)$$

Эту формулу называют ***гипергеометрическим распределением***.

Пример 1.3.11. Сколькими различными способами можно выбрать три лица на три различные должности из десяти кандидатов?

Решение. Воспользуемся формулой (1.3.1). При $n=10$, $m=3$ получаем $A_{10}^3 = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720.$

Пример 1.3.12. Сколькими различными способами могут разместиться на скамейке 5 человек?

Решение. Согласно формуле (1.3.2), при $n=5$ находим:

$$P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120.$$

Пример 1.3.13. Сколькими способами можно выбрать три лица на одинаковые должности из десяти кандидатов?

Решение. В соответствии с формулой (1.3.3) находим:

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{3!(10-3)!} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 120.$$

Пример 1.3.14. Сколько различных шестизначных чисел можно записать с помощью цифр 1; 1; 1; 2; 2; 2?

Решение. Здесь необходимо найти число перестановок с повторениями, которое определяется формулой (1.3.7). При $k=2$, $n_1=3, n_2=3$, $n=6$ получаем:

$$P_6(3,3) = \frac{6!}{3! \cdot 3!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20.$$

Пример 1.3.15. Сколько различных перестановок букв можно сделать в словах: *замок, ротор, топор, колокол?*

Решение. В слове *замок* все буквы различны, всего их пять. В соответствии с формулой (1.3.2) получаем $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

В слове *ротор*, состоящем из пяти различных букв, буквы *р* и *о* повторяются дважды. Для подсчета перестановок применяем формулу(1.3.7). При $n = 5$, $n_1 = 2$, $n_2 = 2$ по данной формуле находим:

$$P_5(2{,}2) = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = \frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 30.$$

В слове *топор* буква *о* повторяется дважды, поэтому $P_5(2) = \frac{5!}{2!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2} = 60.$

В слове *колокол*, состоящем из семи букв, буква *к* встречается дважды, буква *о* трижды, *л* – дважды. В соответствии с формулой (1.3.7), при $n = 7, n_1 = 2$, $n_2 = 3, n_3 = 2$ получаем:

$$P_7(2;3;2) = \frac{7!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot 1\cdot 2} = 210.$$

Пример 1.3.16. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: на двух карточках *л*, на трех *и*. Выкладывают наудачу эти карточки в ряд. Какова вероятность того, что при этом получится слово *лилии?*

Решение. Найдем число перестановок из этих пяти букв с повторениями. По формуле (1.3.7) при $n = 5, n_1 = 2, n_2 = 3$ получаем:

$$P_5(2{,}3) = \frac{5!}{2!3!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3} = 10.$$

Это общее число равновозможных исходов опыта. Данному событию A - «появление слова ***лилии***» благоприятствует один исход. В соответствии с формулой (1.2.1) получаем: $P(A) = \frac{1}{10} = 0{,}1.$

Пример 1.3.17. В партии из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди 6 взятых наудачу деталей 4 стандартных.

Решение. Общее число возможных элементов исходов испытания равно числу способов, которыми можно извлечь 6 деталей из 10 , т.е. числу сочетаний из 10 элементов по 6 элементов C_{10}^{6}.

Определяем число исходов, благоприятствующих событию A - «среди 6 взятых деталей 4 стандартных». Четыре стандартные детали из семи стандартных можно взять C_7^4 способами, при этом остальные $6-4=2$ детали должны быть нестандартными; взять же 2 нестандартные детали из $10-7=3$ нестандартных деталей можно C_3^2 способами. Следовательно, число благоприятных исходов равно $C_7^4 \cdot C_3^2$ (см. пример 10 данного параграфа).

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих событию, к числу всех элементарных исходов: $P(A)=\dfrac{n}{m}$. Следовательно,

$$P(A)=\frac{C_7^4 \cdot C_3^2}{C_{10}^6}=\frac{7!}{4!3!}\cdot\frac{3!}{2!1!}:\frac{10!}{6!4!}=\frac{7!6!4!3!}{10!4!3!2!}=\frac{5}{10}=0{,}5.$$

Замечание 1.3.3. Последняя формула является частным случаем формулы (1.3.8): $N=10; M=7; n=6; m=4$.

Пример 1.3.18. Среди 25 студентов группы, в которой 10 девушек, разыгрывается 5 билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажутся 2 девушки.

Решение. Число всех равновозможных случаев распределения пяти билетов среди 25 студентов равно числу сочетаний из 25 элементов по 5, т.е. $n=C_{25}^5$. Число групп по трое юношей из 15, которые могут получить билеты, равно C_{15}^3. Каждая такая тройка может сочетаться с любой парой из десяти девушек, а число таких пар равно C_{10}^2. Следовательно, число групп по 5 студентов, образованных из группы в 25 студентов, в каждую из которых будут входить трое юношей и две девушки, равно произведению $m=C_{15}^3 \cdot C_{10}^2$. Это произведение равно числу благоприятствующих случаев распределения пяти билетов среди студентов группы так, чтобы три билета получили юноши и два билета – девушки.

В соответствии с формулой(1.2.1) находим искомую вероятность:

$$P(A)=\frac{C_{15}^{3}\cdot C_{10}^{2}}{C_{25}^{5}}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}\cdot\frac{10!}{2!\cdot 8!}:\frac{25!}{5!\cdot 20!}=\frac{20!\cdot 15!\cdot 10!\cdot 5!}{25!\cdot 12!\cdot 8!\cdot 3!\cdot 2!}=$$

$$\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 9\cdot 10\cdot 4\cdot 5}{25\cdot 24\cdot 23\cdot 22\cdot 21\cdot 2}=\frac{13\cdot 5\cdot 3}{23\cdot 22}=\frac{195}{506}\approx 0{,}385\,.$$

Пример 1.3.19. В ящике находятся 15 красных, 9 голубых и 6 зеленых шаров. Наудачу вынимают 6 шаров. Какова вероятность того, что вынули 1 зеленый, 2 голубых и 3 красных шара (событие A)?

Решение. В ящике всего 30 шаров. При данном испытании число всех равновозможных элементарных исходов будет $n=C_{30}^{6}$. Подсчитаем число элементарных исходов, благоприятствующих событию A. Три красных шара из 15 можно выбрать C_{15}^{3} способами, два голубых шара из 9 можно выбрать C_{9}^{2} способами, один зеленый из 6 - C_{6}^{1} способами. Следовательно (в силу принципа произведения в комбинаторике), число исходов, благоприятствующих событию A, будет $m=C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}$. По формуле(1.2.1) находим искомую вероятность:

$$P(A)=\frac{C_{15}^{3}\cdot C_{9}^{2}\cdot C_{6}^{1}}{C_{30}^{6}}=\frac{24!\cdot 15!\cdot 9!\cdot 6!\cdot 6!}{30!\cdot 12!\cdot 7!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 2!}=\frac{24}{145}\approx 0{,}17.$$

Пример 1.3.20. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Наугад выбираем 6 шаров. Найти вероятность того, что среди вынутых шаров 2 голубых.

Решение. Общее число элементарных исходов данного опыта равно числу сочетаний из 15 по 6 т.е.

$$n=C_{15}^{6}=\frac{15!}{6!(15-6)!}=\frac{15!}{6!\,9!}=\frac{15\cdot 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=13\cdot 11\cdot 7\cdot 5=5005.$$

Число благоприятных исходов равно произведению

$$m=C_{5}^{2}\cdot C_{10}^{4}=\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}\cdot\frac{10!}{4!\cdot(10-4)!}=\frac{5!\cdot 10!}{2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 6!}=\frac{5\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 3}=2100.$$

Искомая вероятность определяется формулой (1.2.1):

$$P=\frac{C_{5}^{2}\cdot C_{10}^{4}}{C_{15}^{6}}=\frac{2100}{5005}\approx 0{,}4196.$$

Пример 1.3.21. Игральный кубик подбрасывают 10 раз. Какова вероятность того, что при этом грани 1, 2, 3, 4, 5, 6 выпадут соответственно 2, 3, 1, 1, 1, 2 раза (событие A)?

Решение: Число исходов, благоприятных событию A, подсчитаем по формуле (1.3.7):

$$m = \frac{(2+3+1+1+1+2)!}{2!\cdot 3!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} = \frac{10!}{4\cdot 6} = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10;$$

Число всех элементарных исходов в данном опыте $n = 6^{10}$, поэтому

$$P(A) = \frac{2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{6^{10}} = \frac{700}{6^7} \approx 0{,}002.$$

Для закрепления данной темы предлагаем решить следующие задачи.

Задачи:

1. На 5 одинаковых карточках написаны буквы Б, Е, Р, С, Т. Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово *БРЕСТ*?

2. В ящике 4 голубых и 5 красных шаров. Из ящика наугад вынимают 2 шара. Найдите вероятность того, что эти шары разного цвета.

3. В бригаде 4 женщины и 3 мужчины. Среди членов бригады разыгрывают 4 билета в театр. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов окажется 2 женщины и 2 мужчины?

4. В ящике 10 шаров, из которых 2 белых, 3 красных и 5 голубых. Наудачу извлекли 3 шара. Найдите вероятность того, что все 3 шара разного цвета.

5. На пяти одинаковых карточках написаны буквы: $л, м, о, о, т$. Какова вероятность того, что извлекая карточки по одной наугад, получим в порядке их выхода слово *молот*?

6. Из партии, содержащей 10 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 3 изделия. Найдите вероятность того, что в полученной выборке одно изделие бракованное.

7. Из десяти билетов выигрышными являются два. Чему равна вероятность того, что среди взятых наудачу пяти билетов один выигрышный?

Ответы:

1) 1/120; **2)** 5/9; **3)** 18/35; **4)** 0,25; **5)** 1/60; **6)** 21/40; **7)** 5/9.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называют перестановками?

2. По какой форме вычисляют число перестановок из n различных элементов?

3. Что называют размещениями?

4. По какой формуле вычисляют число размещений из n различных элементов по m элементов?

5. Что называют сочетаниями?

6. По какой формуле вычисляют число сочетаний из n элементов по m элементов?

7. Каким равенством связаны числа перестановок, размещений и сочетаний?

8. По какой формуле вычисляется число перестановок из n элементов, если некоторые элементы повторяются?

9. Какой формулой определяется число размещений по m элементов с повторениями из n элементов?

10. Какой формулой определяется число сочетаний с повторениями из n элементов по m элементов?

1.4 Операции над случайными событиями

1) Теоретико-множественный подход к основным понятиям теории вероятностей.

2) Сумма и произведение событий в теоретико-множественной трактовке.

1) Рассмотрев многочисленные примеры событий, мы не касались примеров со сложными событиями. Например, как составить событие, состоящее в одновременном выигрыше 2-х билетов лотереи или событие, состоящее в том, что в результате 3-х выстрелов будет ровно одно попадание в цель и т.д.

Задачи на нахождение вероятностей сложных событий привели к созданию теоретико-множественного подхода к основным понятиям теории вероятностей.

Пусть производится опыт со случайным исходом. Рассмотрим множество всех элементарных событий опыта, которые могут произойти в его результате, в п. 1.1. оно было названо пространством элементарных событий Ω. Тогда, любое событие A, которое может произойти в результате этого опыта, в теоретико-множественной трактовке есть некоторое подмножество множества Ω: $A \subseteq \Omega$. Следовательно, в этом случае событие A считают множеством.

Из теории множеств, известно, что среди подмножеств множества Ω можно рассмотреть само множество Ω, т. е. $\Omega \subseteq \Omega$, тогда Ω называют достоверным событием. А также, среди подмножеств любого множества, следовательно, и множества Ω, есть пустое множество Ø, которое называют невозможным событием.

2) Так как события представляют собой множества, то для них точно также определяются операции сложения (объединения) и умножения (пересечения), как и для и множеств вообще, и сами операции обладают теми же свойствами. Ввиду важности этих операций над событиями дадим их определения.

Определение 1.4.1. ***Суммой*** 2-х событий A и B называется событие C, состоящее в появлении события A или события B, или обоих вместе, и обозначается: $C = A + B$ или $A \cup B$.

Пример 1.4.1.

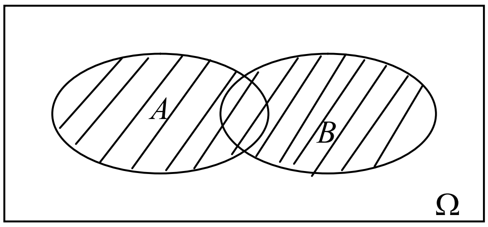
1. Событие A – «попадание в цель при 1-ом выстреле».

2. Событие B - «попадание в цель при 2-ом выстреле».

Тогда событие C - «хотя бы одно попадание при 2-х выстрелах», означает появление события A, или события B, или A и B вместе. Таким образом, можно записать $C = A + B$.

В теоретико-множественной трактовке события и действия над ними можно наглядно иллюстрировать с помощью ***диаграмм Эйлера-Венна***, точно также как и в курсе алгебры при изучении теории множеств.

В связи с этим, геометрически можно проиллюстрировать сумму событий A и B так:



$C = A + B$

Рисунок 1.4.1

Пример 1.4.2.

1. Событие A – «появление червонной карты из колоды».

2. Событие B – «появление карты бубновой масти».

Тогда $C = A + B$, есть событие – «появление из колоды карты красной масти».

Определение 1.4.2. ***Суммой или объединением*** n событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий, и обозначается:

$$A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \sum_{k=1}^{n} A_k \text{ или } A_1 + A_2 + \ldots + A_k = \bigcup_{k=1}^{n} A_k . \qquad (1.4.1)$$

Пример 1.4.3.

Опыт – 5 выстрелов по мишени. В результате этого опыта могут произойти события:

A_0 - «ни одного попадания»;

A_1 - «ровно одно попадание»;

A_2 - «ровно два попадания»;

A_3 - «ровно три попадания»;

A_4 - «ровно четыре попадания»;

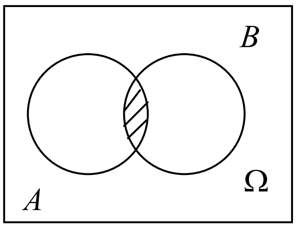
A_5 - «ровно пять попаданий».

Рассмотрим событие A - «не более двух попаданий». Это событие можно представить в виде суммы слагаемых из вышеперечисленных событий следующим образом: $A = A_0 + A_1 + A_2$.

Если рассмотреть событие B как сумму, например, $B = A_3 + A_4 + A_5$, то можно сказать, что событие B - «не менее трех попаданий».

Определение 1.4.3. ***Произведением или пересечением*** 2-х событий A и B называется событие C, состоящее в их совместном появлении, и обозначается: $C = A \cdot B$ или $A \cap B$.

Геометрически произведение событий A и B можно изобразить следующим образом (см. рис.1.4.2).



$C = A \cdot B$

Рисунок 1.4.2

Пример 1.4.4.

1. Опыт – вынимание карты из колоды.

Событие A – «появления туза»; событие B – «появление карты бубновой масти». Тогда событие C - «появление бубнового туза», есть произведение $C = A \cdot B$.

2. Опыт – два выстрела по мишени.

Событие A – «попадание при первом выстреле»; событие B - «попадание при втором выстреле». Следовательно, $C = A \cdot B$ – «попадание при обоих выстрелах».

Определение 1.4.4. ***Произведением*** n событий $A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n$ называется событие, состоящее в совместном появлении всех этих событий, и обозначается:

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n = \prod_{k=1}^{n} A_k \text{ или } A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k. \qquad (1.4.2)$$

Пример 1.4.5.

Опыт – три выстрела по мишени.

Событие B_1 - «промах при 1-ом выстреле»;

событие B_2 - «промах при 2-ом выстреле»;

событие B_3 - «промах при 3-ем выстреле».

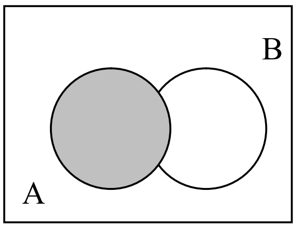
Событие $B = B_1 \cdot B_2 \cdot B_3$ - «нет попаданий при 3-х выстрелах».

Понятие суммы и произведения событий распространяются и на бесконечные последовательности событий. В этих случаях, например, применяют соответственно обозначения:

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\,; \qquad A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap \ldots = \bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\,. \quad (1.4.3)$$

Определение 1.4.5. ***Разностью событий*** A и B, называют событие C, происходящее тогда и только тогда, когда происходит событие A, но не происходит событие B, и обозначается $C = A - B$ или $C = A \setminus B$

Геометрически, с помощью диаграмм Эйлера-Венна, разность событий A и B можно изобразить, например, как на рисунке 1.4.3.

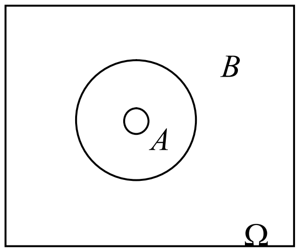


$C = A - B$

Рисунок 1.4.3

Определение 1.4.5. Если событие A обязательно произойдет при появлении некоторого другого события B, то говорят, что событие A представляет собой ***частный случай*** события B, и обозначают как $A \subset B$.

Геометрически $A \subset B$ можно изобразить как на рисунке 1.4.4.



$A \subset B$

Рисунок 1.4.4

Определение 1.4.6. Если $\mathrm{B} \subseteq \mathrm{A}$ или $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$, т.е. событие A и B в данном опыте могут появиться или не появится вместе, то их называют ***равносильными***, или ***эквивалентными***, и обозначают как $A = B$.

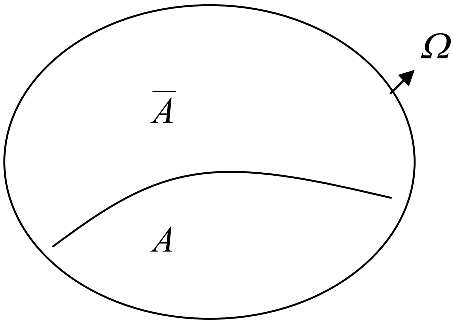


Рисунок 1.4.5

Определение 1.4.7. Противоположным по отношению к событию A называется событие $\overline{A}$, состоящее в невыполнении A и, значит, дополняющее его до Ω (рисунок 1.4.5).

Операции объединения и пересечения событий обладают некоторыми свойствами, которые аналогичны свойствам сложения и умножения чисел.

Свойства операций объединения и пересечения событий

1. Коммутативность операций объединения и пересечения событий:

а) $A \cup B = B \cup A$;

б) $A \cap B = B \cap A$.

2. Ассоциативность операций объединения и пересечения событий:

а) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) = (A \cup C) \cup B = A \cup B \cup C$

б) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) = (A \cap C) \cap B = A \cap B \cap C$.

3. Дистрибутивность пересечения событий, относительно объединения событий и дистрибутивность объединения событий, относительно пересечения событий:

а) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

б) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

4. Если U - достоверное событие, V невозможное событие, A - любое событие, $\overline{A}$ - событие противоположное A, то выполняются следующие неравенства:

а) $A \cap \overline{A} = V$ или $A \cdot \overline{A} = V$;

б) $A \cup \overline{A} = U$ или $A + \overline{A} = U$;

в) $A \cup V = A$ или $A + V = A$;

г) $A \cap V = V$ или $A \cdot V = V$;

д) $A \cup U = U$ или $A + U = U$;

е) $A \cap U = A$ или $A \cdot U = A$;

5. Формулы *де Моргана*:

$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}.$$

Из свойств операций пересечения и объединения следует, что для любых событий A и B имеем:

$$A = A \cdot U = A \cdot (B + \overline{B}) = A \cdot B + A \cdot \overline{B},$$

$$A = A \cdot B \cup A \cdot \overline{B}. \qquad (1.4.4)$$

Формула (1.4.4) дает разложение любого события A на сумму двух непересекающихся (несовместных) событий.

Если $B \subset A$, то $A \cdot B = B$ и формула (1.4.4) принимает вид $A = B \cup A \cdot \overline{B}$ или $A = B + A \cdot \overline{B}$.

Пример 1.4.6. Подбрасывается игральный кубик. Обозначим события: A - «выпадение шести очков», B - «выпадение трех очков», C - «выпадение четного числа очков», D - «выпадение числа очков, кратного трем». Каковы соотношения между этими событиями?

Решение. Если выпало шесть очков, то тем самым выпало и четное число очков, т.е. событие A влечет событие C: $A \subset C$. Рассуждая аналогично, получаем $A \subset D$, $B \subset D$, $B + A = D$, $C \cdot D = A$.

Пример 1.4.7. Опыт подбрасывание игрального кубика. События A_k $(k = 1,2,3,4,5,6)$ - «выпадение k очков», A - «выпадение четного числа очков», B - «выпадение нечетного числа очков», C - «выпадение числа очков, кратного трем», D - «выпадение числа очков, большего трех». Выразить A, B, C и D через события A_k.

Решение. Событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает A_2, или A_4, или A_6. Это означает, что $A = A_2 + A_4 + A_6$. Рассуждая аналогичным образом, получаем: $B = A_1 + A_3 + A_5$, $C = A_3 + A_6$, $D = A_4 + A_5 + A_6$.

Пример 1.4.8. Пусть A, B, C - произвольные события. Что означают следующие события: а) $\overline{A}BC$; б) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$; в) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$; г) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$; д) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$?

Решение. В соответствии с определением имеем:

а) $\overline{A}BC$ - произведение трех событий $\overline{A}$, B, C, которые происходят одновременно, причем $\overline{A}$ - событие, противоположное событию A. Следовательно, $\overline{A}BC$ означает, что событие A не произошло, а события B и C произошли. Рассуждая аналогично, заключаем, что

б) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ - ни одно из трех данных событий не произошло;

в) $\overline{A} + \overline{B} + \overline{C}$ - хотя бы одно из трех событий произошло;

г) $A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$ - произошло ровно одно из трех событий;

д) $\overline{A}\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}\overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\overline{B}C$ - произошло не более одного из трех событий.

Пример 1.4.9. Опыт состоит в том, что стрелок производит 3 выстрела по мишени. Событие A_k - «попадание в мишень при k-ом выстреле $(k = 1,2,3)$». Выразить через A_1, A_2, A_3 следующие события:

а) A - «хотя бы одно попадание»;

б) B - «три попадания»;

в) C - «три промаха»;

г) D - «хотя бы один промах»;

д) E - «не меньше двух попаданий»;

е) F - «не более одного попадания»;

к) G - «попадание после первого выстрела».

Решение.

а) Событие A наступает тогда и только тогда, когда наступает A_1, или A_2, или A_3. Это означает, что $A = A_1 + A_2 + A_3$.

б) Три попадания будут тогда и только тогда, когда попадание наступит при каждом выстреле, т.е. события A_1, A_2, A_3 произойдут все вместе. Таким образом, $B = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

в) Три промаха будут тогда и только тогда, когда промах явится результатом каждого выстрела, т.е. события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ произойдут все вместе и тогда $C = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$.

г) Записать событие D с помощью сумм произведений событий A_k и $\overline{A}_k$ можно, но эта сумма будет достаточно громоздкой, поэтому в данном случае лучше воспользоваться тем, что события D и B будут противоположными, следовательно, $D = 1 - A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$.

Рассуждая аналогично случаям а), б), в), г) заключаем, что

д) $E = A_1 \cdot A_2 + A_1 \cdot A_3 + A_2 A_3$;

е) $F = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_2 \overline{A}_3$;

к) $G = \overline{A}_1 (A_2 + A_3)$.

Для закрепления данной темы предлагаем решить следующие задачи.

Задачи:

1. Опыт состоит в подбрасывании трех монет. Монеты занумерованы и события A_1, A_2, A_3 означают выпадение герба соответственно на первой, второй и третьей монетах. Выразите через A_1, A_2, A_3 следующие события: A - «выпадение одного герба и двух цифр»; B - «выпадение не более одного герба»; C - «число выпавших гербов меньше числа выпавших цифр»; D - «выпадение хотя бы двух

гербов»; E - «на первой монете выпала цифра, и хотя бы на одной из остальных выпал герб».

2. Пусть A, B, C произвольные события. Найти выражения для следующих событий:

а) произошло только событие A из данных трех событий;

б) произошли события A и B, но событие C не произошло;

в) произошли все три события;

г) произошло, по крайней мере, одно из этих событий;

д) произошли, по крайней мере, два события из трех;

е) произошло одно и только одно событие;

ж) произошли два и только два события;

з) ни одно событие не произошло;

и) произошли не более двух событий.

3. Упростите выражение $(A+B)(B+C)(C+A)$.

4. Упростите выражение $(A+B)(A+\overline{B})+(\overline{A}+B)(\overline{A}+\overline{B})$.

5. Докажите, что $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$.

Ответы:

1) $A=A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot A_2\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot A_3$; $B=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2+\overline{A}_1\cdot\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$; $C=B$; $D=A_1\cdot A_2+A_1\cdot A_3+A_2A_3$; $E=A_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$; $F=\overline{A}_1(A_2+A_3)$; **2)** а) $A\overline{B}\overline{C}$; б) $AB\overline{C}$; в) ABC; г) $A+B+C$; д) $AB+AC+BC$; е) $A\overline{B}\overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\overline{B}C$; ж) $\overline{A}BC+A\overline{B}C+AB\overline{C}=(AB+AC+BC)-ABC$; з) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$, и) $\overline{ABC}$. **3)** $AB+AC+BC$.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называют суммой, или объединением, двух событий?

2. Как обозначают сумму двух событий?

3. Приведите примеры суммы двух событий.

4. Что называют суммой, или объединением, нескольких событий?

5. Что называют произведением, или пересечением двух событий?

6. Как обозначают произведение двух событий?

7. Что называют произведением нескольких событий?

8. Приведите примеры произведения трех событий.

9. Что называют разностью двух событий?

10. Приведите примеры разности двух событий.

1.5 Аксиомы теории вероятностей и их следствия. Правила сложения и умножения вероятностей

1) Аксиоматическое определение вероятности. Следствия аксиом теории вероятностей.

2) Теоремы умножения вероятностей.

3) Формула полной вероятности.

4) Формула Бейеса.

1) Пусть S - множество подмножеств (событий) из Ω. Причем множество S замкнуто относительно операций объединения и пересечения, а также $\Omega \in S; \varnothing \in S$.

Определение 1.5.1. Пусть каждому событию $A \in S$ поставлено в соответствие число $P(A)$. Числовую функцию P, заданную на множестве S, называют ***вероятностью (или вероятностной мерой)***, если она удовлетворяет следующим аксиомам:

Аксиома 1. *Вероятность любого события* $A \in S$ *заключена между нулем и единицей:*

$$0 \le P(A) \le 1.$$

Аксиома 2. $P(\Omega) = 1$.

Аксиома 3. *Если* $A \in S$ *,* $B \in S$ *и они несовместные события (* $A \cdot B = \varnothing$*), то*

$$P(A+B) = P(A) + P(B). \qquad (1.5.1)$$

Аксиома 3 легко обобщается на случай n несовместных событий.

Если $A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$, то вероятность суммы n несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$ равна сумме вероятностей этих событий:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n). \qquad (1.5.2)$$

Аксиому 3 сложения вероятностей называют «правило сложения вероятностей».

Замечание 1.5.1. Если имеется счетное множество несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n, ...$ ($A_i A_j = \varnothing$ при $i \neq j$), то

$$P(\sum_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i). \qquad (1.5.\tilde{2})$$

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий (подмножеств пространства Ω) через вероятности элементарных событий (если их конечное или счетное число). Вопрос о том, откуда берутся вероятности элементарных событий, при этом не рассматривается. На практике они определяются либо непосредственно из условий опыта (если он обладает симметрией возможных исходов), либо на основе экспериментальных статистических данных (если он такой симметрией не обладает, что бывает значительно чаще).

Аксиомы теории вероятностей имеют несколько важнейших следствий.

Следствие 1.5.1. *Вероятность суммы двух событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:*

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B). \qquad (1.5.3)$$

Следствие 1.5.2. *Сумма вероятностей несовместных событий $A_1, A_2, ..., A_n$, образующих полную группу, равна единице:*

$$P(A_1) + P(A_2) + \ldots + P(A_n) = 1. \qquad (1.5.4)$$

Действительно, так как события $A_1, A_2, ..., A_n$ несовместны, то к ним применимо правило сложения: $P(\sum_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) = P(\Omega) = 1$.

Следующее следствие является частным случаем следствия 2, а именно, когда несовместных событий, образующих полную группу только два - A и $\overline{A}$.

Следствие 1.5.3. *Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:*

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1. \tag{1.5.5}$$

Если обозначить

$$P(A) = p, P(\overline{A}) = q, \tag{1.5.6}$$

то формула (1.5.5) примет вид:

$$p + q = 1. \tag{1.5.7}$$

Пример 1.5.1. В урне 20 шаров: 8 красных, 6 синих, 6 белых. Найти вероятность появления цветного шара.

Решение. Появление цветного шара означает появление либо красного шара - событие A, либо синего шара - событие B. Вероятность появления красного шара - $P(A) = \dfrac{8}{20} = \dfrac{2}{5}$, синего шара, соответственно, она будет равняться $P(B) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10}$.

События A и B несовместны, следовательно, по правилу сложения (1.5.1) имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{2}{5} + \frac{3}{10} = 0{,}7.$$

Пример 1.5.2. В лотерее 1000 билетов. Из них на один билет выпадает выигрыш 500 рублей, на 10билетов – выигрыш 100 рублей, на 80 билетов – выигрыш 20 рублей, на 100 билетов – 8 рублей, остальные билеты невыигрышные. Найти вероятность выигрыша не менее 20 рублей при покупке 1 билета.

Решение. Событие A - «выиграть не менее 20 рублей». Событие A может осуществиться, если наступит одно из несовместных событий: A_1 - «выигрыш 20 рублей», A_2 - «выигрыш 100 рублей», A_3 - «выигрыш 500 рублей». События несовместны, следовательно, вероятность события $A = A_1 + A_2 + A_3$ равна сумме вероятностей этих событий.

Таким образом, по правилу (1.5.2) сложения вероятностей несовместных событий имеем:

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = \frac{80}{1000} + \frac{10}{1000} + \frac{1}{1000} = 0{,}091.$$

Пример 1.5.3. Круговая мишень состоит из трех зон: I, II, III. Вероятность попадания в первую зону при одном выстреле – 0,15, во вторую – 0,23, в третью - 0,17. Найти вероятность промаха.

Решение. Событие A - «промах при одном выстреле», противоположное событие $\overline{A}$ - «попадание при одном выстреле». Событие $\overline{A}$ может осуществиться, если наступит одно из несовместных событий: A_1 - «попадание в первую зону», A_2 - «попадание во вторую зону», A_3 - «попадание в третью зону». События несовместны, следовательно $\overline{A} = A_1 + A_2 + A_3$. По правилу (1.5.2) имеем:

$$P(\overline{A}) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) = 0{,}15 + 0{,}23 + 0{,}17 = 0{,}55$$

Так как события A и $\overline{A}$ - это противоположные события и одновременно образующие полную группу, то $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0{,}55 = 0{,}45$.

2) Прежде чем сформулировать правила о вероятности произведения событий, введем понятие условной вероятности.

Определение 1.5.2. ***Условной вероятностью*** события B при наличии A называется величина:

$$P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)}, \qquad (1.5.\tilde{8})$$

при условии что $P(A) \neq 0$.

Условная вероятность $P(B/A)$, или $P_A(B)$ трактуется как вероятность события B при условии, что событие A произошло.

На практике формулу $(1.5.\tilde{8})$ читают в «обратном порядке» и формулируют как теорему, которую чаще всего называют «правилом умножения вероятностей».

Теорема 1.5.1. (*Правило умножения вероятностей*).

Вероятность произведения двух событий равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого при условии, что первое событие произошло:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B) \qquad (1.5.9)$$

Определение 1.5.3. Событие B называют независимым от события A, если появление события A не изменяет вероятности события B, т.е. если условная вероятность события B равна его безусловной вероятности:

$$P(B/A) = P(B). \qquad (1.5.10)$$

В этом случае и событие A не зависит от события B, т.е. свойство независимости событий является взаимным.

Замечание 1.5.2. Отметим, что если A и B независимые события, то независимы будут $\overline{A}$ и B, A и $\overline{B}$, $\overline{A}$ и $\overline{B}$.

Теорема 1.5.2. (*Правило умножения вероятностей двух независимых событий*).

Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению их вероятностей:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1.5.11)$$

Теорема 1.5.3. (*Правило умножения вероятностей* n *событий*).

Вероятность произведения n *событий равна произведению одного из них на условные вероятности всех остальных, вычисленные в предположении, что все предыдущие события наступили:*

$$P(A_1 A_2 \ldots A_n) =$$
$$= P(A_1) \cdot P(A_2/A_1) \cdot P(A_3/A_1 \cdot A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n/A_1 \cdot A_2 \cdot \cdots \cdot A_{n-1}). \qquad (1.5.12)$$

В частности, для трех событий A, B, C формула (1.5.11) принимает вид:

$$P(ABC) = P(A)P(B/A)P(C/AB) \qquad (1.5.13)$$

Определение 1.5.4. События $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются ***независимыми в совокупности***, или ***независимыми***, если любое из них не зависит от любой комбинации (произведения) любого числа других.

Замечание 1.5.3. Если несколько событий попарно независимы, то отсюда еще не следует их независимость в совокупности.

Убедимся в этом на конкретном примере. Пусть в урне имеется четыре окрашенных шара: один – в красный цвет (A), один - в синий цвет (B), один – в черный цвет (C) и один - во все эти три цвета ($A\ B\ C$). Чему равна вероятность того, что извлеченный из урны шар имеет красный цвет?

Так как из четырех шаров два имеют красный цвет, то $P(A)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Рассуждая аналогично, найдем $P(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$, $P(C)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$. Допустим теперь, что взятый шар имеет синий цвет, т.е. событие B уже произошло. Изменится ли вероятность того, что извлеченный шар имеет красный цвет, т.е. изменится ли вероятность события A? Из двух шаров, имеющих синий цвет, один шар имеет и красный цвет, поэтому вероятность события A по-прежнему равна 1/2. Другими словами, условная вероятность события A, вычисленная в предположении, что наступило событие B, равна его безусловной вероятности. Следовательно, события A и B независимы. Аналогично придем к выводу, что события A и C, B и C независимы. Итак, события A, B, C попарно независимы.

Независимы ли эти события в совокупности? Оказывается, нет. Действительно, пусть извлеченный шар имеет два цвета, например, синий и черный. Чему равна вероятность того, что этот шар имеет и красный цвет? Лишь один шар окрашен во все три цвета, поэтому взятый шар имеет и красный цвет. Таким образом, допустив, что события B и C произошли, приходим к выводу, что $P(A)=1$, т.е. событие A является достоверным событием. Другими словами, условная вероятность $P(A/B,C)=1$ события A не равна его безусловной вероятности $P(A)=\frac{1}{2}$. Итак, попарно независимые события A, B, C не являются независимыми в совокупности.

Замечание 1.5.4. Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то противоположные им события $\overline{A}_1, \overline{A}_2, ..., \overline{A}_n$ также независимы.

Пример 1.5.4. В урне 2 белых и 3 черных шара. Из урны вынимают подряд два шара. Найти вероятность того, что оба шара белые.

Решение. Событие A_1 - «извлечение белого шара при первом испытании», событие A_2 - «извлечение белого шара при втором испытании». Эти события совместны, следовательно, извлечение двух белых шаров – это событие $A = A_1 \cdot A_2$. Всего в урне 5 шаров. Вероятность извлечения белого шара при первом испытании $P(A_1) = \frac{2}{5}$, вероятность извлечения белого шара при втором испытании, при условии, что при первом испытании был извлечен белый шар, равняется $P_{A_1}(A_2) = \frac{1}{4}$. По теореме (1.5.1) имеем $P(A) = P(A_1) \cdot P(A_2 / A_1) = \frac{2}{5 \cdot 4} = 0{,}1$.

Теорема 1.5.7. (*Теорема умножения вероятностей* n *независимых событий*).

Если события $A_1, A_2, ..., A_n$ *независимы, то вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий:*

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_3) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \qquad (1.5.14)$$

Замечание 1.5.5. Равенство (1.5.13) выражает необходимое и достаточное условие независимости событий $A_1, A_2, ..., A_n$.

Для трех независимых событий A, B, C формула (1.5.13) принимает вид:

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) \qquad (1.5.15)$$

Пример 1.5.5. Производится независимо три выстрела по одной и той же мишени. Вероятности попаданий при первом, втором и третьем выстрелах, соответственно, равны: $p_1 = 0{,}4$; $p_2 = 0{,}5$; $p_3 = 0{,}7$. Найти вероятность того, что в результате этих трех выстрелов произойдет ровно одно попадание.

Решение. Событие A - «ровно одно попадание в мишень». Обозначим события A_1, A_2, A_3 - попадание при первом, втором и третьем выстрелах соответственно. Событие A может наступить, если первый стрелок попал, а второй и третий не попали, т.е. имеем произведение событий $A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$; если второй стрелок попал, а первый и третий не попали – это $\overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3$; если третий стрелок попал, а первый и второй не попали – это $\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$. Таким образом событие A равняется $A = A_1\overline{A}_2\overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1\overline{A}_2 A_3$.

Обозначив вероятности противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$ как q_1, q_2, q_3, соответственно, будем иметь, что $q_1 = 0{,}6;\ q_2 = 0{,}5;\ q_3 = 0{,}3$.

Следовательно, искомая вероятность события A будет равна:

$$P(A) = P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1\overline{A}_2 A_3) = p_1q_2q_3 + q_1p_2q_3 + q_1q_2p_3 =$$
$$= 0{,}4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}3 + 0{,}6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}7 = 0{,}36.$$

Вычисление вероятности суммы событий можно свести к вычислению вероятности произведения противоположных событий по формуле:

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \ldots \cdot \overline{A}_n) \qquad (1.5.16)$$

В частности, если события $A_1, A_2, ..., A_n$ независимы, то

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)...P(\overline{A}_n) =$$
$$= 1 - (1 - P(A_1))(1 - P(A_2)) \cdot \ldots \cdot (1 - P(A_n)).$$

Таким образом,

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - q_1 \cdot q_2 \cdot \ldots \cdot q_n. \qquad (1.5.17)$$

Если независимые события $A_1, A_2, ..., A_n$ имеют одинаковую вероятность, равную p, то ***вероятность появления, хотя бы одного из этих событий, выражается формулой:***

$$P(A) = 1 - q^n, \qquad (1.5.18)$$

где $A = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$.

Пример 1.5.6. В типографии имеется 3 машины. Для каждой машины вероятность того, что она работает в данный момент, равна 0,8 и не зависит от работы других машин. Найти вероятность того, что в данный момент работает хотя бы одна машина.

Решение. Событие A - «работает хотя бы одна машина из трех», Данное событие состоит из суммы трех событий: A_1 - «работает первая машина»; A_2 - «работает вторая машина»; A_3 - «работает третья машина». Эти три события независимы, вероятности этих событий одинаковы, поэтому можно применить формулу (1.5.17):

$$P(A) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - q^3 = 1 - (0{,}2)^3 = 0{,}992$$

где $q = 1 - p = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$.

В обратной задаче, вероятность $P(A)$ известна, и нужно определить, при каком числе n независимых событий A_i, достигается заданное значение $P(A)$. Точнее говоря, задается некоторое число Q такое, что

$$P(A) = 1 - q^n \geq Q. \qquad (1.5.19)$$

Решая данное неравенство можно определить значение n.

3) Одним из следствий совместного применения правил сложения и умножения вероятностей является формула полной вероятности.

Рассмотрим n попарно несовместных событий $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу, для которых известны вероятности $P(H_i) \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. В результате опыта может произойти событие A, причем оно произойдет, обязательно, только с одним из событий H_i, т.е. событие $A \subset H_1 + H_2 + ... + H_n$. Более того, известны условные вероятности событий $P(A / H_i)$. Требуется найти вероятность события A.

Для этого представим A как сумму n несовместных событий:

$$A = H_1 A + H_2 A + ... + H_n A = \sum_{i=1}^{n} H_i A.$$

По правилу сложения вероятностей $P(A) = \sum\limits_{i=1}^{n} P(H_i A)$.

По правилу умножения вероятностей $P(H_i A) = P(H_i) P(A / H_i)$.

Откуда

$P(A) = P(H_1) P(A / H_1) + P(H_2) P(A / H_2) + ... + P(H_n) P(A / H_n)$ или

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) P(A / H_i). \qquad (1.5.20)$$

Эта формула называется ***формулой полной вероятности***. События $H_1, H_2, ..., H_n$ иногда называют ***гипотезами.***

Пример 1.5.7. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашается наугад один студент. Найти вероятность того, что он получит хорошую или отличную оценку (событие A).

Решение. Обозначим гипотезы: H_1 - «приглашен студент-отличник», H_2 - «приглашен хороший студент», H_3 - «приглашен слабый студент».

Из условия задачи следует, что $P(H_1)=\frac{5}{21}$, $P(H_2)=\frac{10}{21}$, $P(H_3)=\frac{6}{21}$.

Вероятности события A с каждой из гипотез будут равны $P(A/H_1)=1$, $P(A/H_2)=1$, $P(A/H_3)=\frac{1}{3}$.

По формуле (1.5.19) находим искомую вероятность события A:

$$P(A)=\sum_{i=1}^{3}P(H_i)P(A/H_i)=\frac{5}{21}\cdot 1+\frac{10}{21}\cdot 1+\frac{6}{21}\cdot\frac{1}{3}=\frac{17}{21}.$$

4) Пусть $H_1, H_2, ..., H_n$ - попарно-несовместные события, образующие полную группу, вероятности которых $P(H_i)\neq 0$ $(i=1, 2, \dots, n)$ известны. В результате опыта может произойти событие $A\subset H_1+H_2+\dots+H_n$, для которого известны условные вероятности $P(A/H_i)$. После того как произведен опыт, в результате которого появилось событие A, вероятности событий $H_1, H_2, ..., H_n$ относительно события A будут другими. Их можно определить по формуле:

$$P(H_i/A)=\frac{P(H_i)P(A/H_i)}{\sum_{i=1}^{n}P(H_i)P(A/H_i)} \qquad (1.5.21)$$

Формулу (1.5.20) называют ***формулой Бейеса.***

Замечание 1.5.6. Вероятности $P(H_i)$, где $(i=1, 2, \dots, n)$, событий $H_1, H_2, ..., H_n$ до опыта называются *априорными вероятностями* (от латинского *a priori*, что означает "*сперва*", т.е. в данном случае до того, как был произведен опыт). Вероятности $P(H_i / A)$ тех же событий называются *апостериорными* (от латинского слова *a posteriori*, что означает "после", т.е. в данном случае после опыта).

В настоящее время формулы Бейеса находят широкое применение при решении проблем управления, связанных с принятием административных решений, когда приходится сталкиваться с недостаточной информацией о закономерностях в экономике и промышленности.

Упражнение. Докажите формулу Бейеса.

Пример 1.5.8. В ящике находятся одинаковые изделия, изготовленные на двух автоматах: 40 % изделий изготовлено первым автоматом, остальные - вторым. Брак в продукции первого автомата составляет 3 %, второго – 2%. Найти вероятность того, что случайно выбранное изделие изготовлено первым автоматом, если оно оказалось бракованным.

Решение. Обозначим через A событие, состоящее в том, что случайно выбранное изделие является бракованным, а через H_1, H_2 - события, состоящие в том, что это изделие изготовлено соответственно первым и вторым автоматом.

Из условия следует, что $P(H_1) = 0{,}4, \quad P(H_2) = 1 - P(H_1) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$; $P(A / H_1) = 0{,}03, \quad P(A / H_2) = 0{,}02$

Искомую вероятность найдем по формуле (1.5.20), предварительно определив $P(A)$ согласно формуле (1.5.19), которая в данном случае принимает вид:

$$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) = 0{,}4 \cdot 0{,}03 + 0{,}6 \cdot 0{,}02 = 0{,}024.$$

Таким образом,

$$P(H_1 / A) = \frac{P(H_1)P(A / H_1)}{P(A)} = \frac{0{,}4 \cdot 0{,}03}{0{,}024} = 0{,}5$$

Пример 1.5.9. Подбрасывается игральный кубик. Чему равна вероятность того, что выпадет четное число очков?

Решение. Введем обозначения: A - «выпало четное число очков»; B_k - «выпало k очков (k=1, 2, 3, 4, 5, 6)». Событие A означает, что наступило хотя бы одно из событий: B_2, B_4, B_6, т.е. $A = B_2 + B_4 + B_6$. Поскольку события B_2, B_4, B_6

несовместны, то можно воспользоваться формулой (1.5.2), при $n = 3$, учитывая, что $P(B_k) = \frac{1}{6}, \quad k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$:

$$P(A) = P(B_2) + P(B_4) + P(B_6) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Замечание 1.5.7. Тот же результат получается и непосредственно по формуле $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Пример 1.5.10. Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на 3 сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,4, во второй - 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

Решение. Событие A - «попадание в первый сектор» и событие B - «попадание во второй сектор» несовместны (попадание в один сектор исключает попадание во второй), поэтому применимо правило сложения вероятностей несовместных событий. В соответствии с этим правилом находим искомую вероятность:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) = 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}7$$

Пример 1.5.11. Вероятность попадания в мишень для первого спортсмена равна 0,85, а для второго – 0,8. Спортсмены независимо друг от друга сделали по одному выстрелу. Найти вероятность того, что в мишень попадает хотя бы один спортсмен?

Решение. Введем обозначения: событие A - «попадание в мишень первым спортсменом», B - «попадание в мишень вторым спортсменом», C - «попадание в мишень хотя бы одним из спортсменов». Очевидно, $A + B = C$, причем события A и B совместны. В соответствии с формулой (1.5.3) получаем:

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Поскольку A и B совместные события, но независимые, то последнее равенство в связи с формулой (1.5.13) перепишется в виде:

$$P(C) = P(A) + P(B) - P(A)P(B).$$

Подставив численные значения в последнее равенство, найдем искомую вероятность:

$$P(C) = 0{,}85 + 0{,}8 - 0{,}85 \cdot 0{,}8 = 0{,}97\,.$$

Пример 1.5.12. Симметричная монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что «решка» выпадает ровно два раза?

Решение. Введем обозначения: событие A_k - «выпадение «решки» при k-ом подбрасывании монеты (k=1, 2, 3)», событие A - «выпадение двух «решек» при трех подбрасываниях», тогда

$$A = A_1 A_2 \overline{A}_3 + \overline{A}_1 A_2 A_3 + A_1 \overline{A}_2 A_3$$

Поскольку слагаемые в правой части этого равенства попарно несовместны, то по формуле (1.5.2) получаем:

$$P(A) = P(A_1 A_2 \overline{A}_3) + P(\overline{A}_1 A_2 A_3) + P(A_1 \overline{A}_2 A_3)$$

Принимая во внимание независимость событий A_1, A_2, A_3, находим:

$$P(A) = P(A_1)P(A_2)P(\overline{A}_3) + P(\overline{A}_1)P(A_2)P(A_3) + P(A_1)P(\overline{A}_2)P(A_3) =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{8}\,.$$

Пример 1.5.13. В урне находится 8 красных и 6 голубых шаров. Из урны последовательно без возвращения извлекается 3 шара. Найти вероятность того, что все 3 шара голубые.

Решение. Введем обозначения: событие A_1 - «первый шар голубой», событие A_2 - «второй шар голубой», событие A_3 - «третий шар голубой», событие A - «все три шара голубые», тогда $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$. Поскольку вероятность события A_2 можно найти при условии, что событие A_1 произошло, а вероятность события A_3 - при условии, что произошли события A_1 и A_2, то воспользуемся формулой (1.5.11), которая, при $n = 3$, принимает вид:

$$P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = P(A_1)P(A_2 / A_1)P(A_3 / A_1 A_2)\,.$$

Найдем соответствующие вероятности событий:

$$P(A_1) = \frac{6}{14}, \quad P(A_2 / A_1) = \frac{5}{13}, \quad P(A_3 / A_2 A_1) = \frac{4}{12}\,.$$

Следовательно, $P(A) = P(A_1 A_2 A_3) = \frac{6}{14} \cdot \frac{5}{13} \cdot \frac{4}{12} = \frac{5}{91} \approx 0{,}055$.

Замечание 1.5.8. Вероятность события A можно было найти и по формуле непосредственного подсчета вероятностей с помощью числа сочетаний.

Так общее количество случаев, возможных в данном опыте, найдем как $n = C_{14}^3$, из них, число случаев, благоприятных нашему событию, будет равно $m = C_6^3$. Следовательно, $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^3}{C_{14}^3} = \frac{5}{91}$.

Пример 1.5.14. Три стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания каждого, соответственно, равна для первого стрелка - 0,85, для второго - 0,8, для третьего - 0,7. Найти вероятность того, что при выстреле хотя бы один из них попадет в мишень.

Решение. Введем обозначения: событие A - «попадание в мишень первым стрелком», событие B - «попадание в мишень вторым стрелком», событие C - «попадание в мишень третьим стрелком», событие D - «попадание в мишень хотя бы одним стрелком», т.е. $D = A + B + C$.

Событие D является противоположным событию $\overline{D} = \overline{A}\overline{B}\overline{C}$ (ни одного попадания). Поскольку события A, B, C независимы, то можно воспользоваться формулой (1.5.16), которая в данном случае принимает вид:

$$P(D) = 1 - (1 - P(A))(1 - P(B))(1 - P(C)) = 1 - 0{,}15 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 = 0{,}991$$

Пример 1.5.15. Найти вероятность совместного появления цифр при одном подбрасывании двух монет.

Решение. Вероятность появления цифры на первой монете (событие A) равна 0,5; вероятность появления цифры на второй монете (событие B) также равна 0,5.

События A и B независимы и в нашем случае должны произойти одновременно, поэтому искомую вероятность найдем по формуле умножения вероятностей независимых событий:

$$P(AB) = P(A)P(B) = 0{,}5 \cdot 0{,}5 = 0{,}25$$

Пример 1.5.16. Имеются две урны с шарами трех цветов. В первой урне находятся 2 голубых, 3 красных и 5 зеленых шаров, а во второй – 4 голубых, 2 красных и 4 зеленых шаров. Из каждой урны извлекают по одному шару и сравнивают их цвета. Найти вероятность того, что цвета вынутых шаров одинаковы (событие A).

Решение. Введем следующие обозначения:

- событие B_1 - «извлечение из первой урны голубого шара»;

- событие C_1 - «извлечение из первой урны красного шара»;

- событие D_1 - «извлечение из первой урны зеленого шара».

Аналогичные события для второй урны обозначим соответственно через B_2, C_2, D_2. Событие A наступает в случае одного из произведений событий B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2, т.е. $A = B_1B_2 + C_1C_2 + D_1D_2$. Поскольку события B_1B_2, C_1C_2, D_1D_2 несовместны, то применима формула (1.5.2) при $n = 3$:

$$P(A) = P(B_1B_2) + P(C_1C_2) + P(D_1D_2).$$

Так как независимы события B_1 и B_2, C_1 и C_2, D_1 и D_2, то применима формула (1.5.10) для каждой пары событий. Таким образом, последнее равенство можно переписать:

$$P(A) = P(B_1)P(B_2) + P(C_1)P(C_2) + P(D_1)P(D_2) =$$

$$= 0{,}2 \cdot 0{,}4 + 0{,}3 \cdot 0{,}2 + 0{,}5 \cdot 0{,}4 = 0{,}34.$$

Пример 1.5.17. Рабочий обслуживает четыре однотипных станка. Вероятность того, что любой станок в течение часа потребует внимания рабочего, равна 0,6. Предполагая, что неполадки на станке независимы, найти вероятность того, что в течение часа потребуют внимания рабочего: а) все четыре станка; б) ни один станок; в) по крайней мере, один станок.

Решение. Обозначим через A_1, A_2, A_3, A_4 события, состоящие в том, что в течение часа потребуют внимания рабочего соответственно первый, второй, третий, четвертый станки.

а) По теореме умножения вероятностей независимых событий, вероятность того, что в течение часа все станки потребуют внимания рабочего, т.е. произойдут события и A_1, и A_2, и A_3, и A_4 одновременно, выразится формулой (1.5.10) при $n = 4$:

$$P(A_1A_2A_3A_4) = P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot 0{,}6 = 0{,}1296$$

б) Вероятность того, что в течение часа ни один станок не потребует внимания рабочего, найдем по правилу вычисления вероятности противоположного события. Так $P(\overline{A}_1) = P(\overline{A}_2) = P(\overline{A}_3) = P(\overline{A}_4) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$. Если событие B - это событие, состоящее в том, что ни один станок в течение часа не потребует внимания рабочего, то $B = \overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4$. Следовательно, вероятность события B также выражается формулой (1.5.10) при $n = 4$:

$$P(B) = P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3\overline{A}_4) = P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)P(\overline{A}_4) = (0{,}4)^4 = 0{,}0256.$$

в) Событие, состоящее в том, что в течение часа, по крайней мере, один из четырех станков потребует внимания рабочего, и событие B являются противоположными.

Поскольку, $P(B) = 0{,}0256$, то $P(\overline{B}) = 1 - P(B) = 1 - 0{,}0256 = 0{,}9744$.

Пример 1.5.18. На тридцати одинаковых жетонах написаны тридцать двузначных чисел от 1 до 30. Жетоны помещены в пакет и тщательно перемешаны. Какова вероятность вынуть жетон с номером, кратным 2 или 3?

Решение. Обозначим события:

- событие A - «извлечен жетон с четным номером»;

- событие B - «извлечен жетон с номером, кратным 3»;

- событие AB - «извлечен жетон с четным номером, кратным 3».

Найдем вероятность события $A + B$. Поскольку A и B - совместные события, то по формуле (1.5.3) имеем:

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{15}{30} + \frac{10}{30} - \frac{5}{30} = \frac{2}{3}.$$

(Событию A благоприятствуют 15 элементарных исходов, событию B - 10 исходов, событию AB - 5 исходов).

Пример 1.5.19. Ведется стрельба из трех орудий. Вероятности попадания в цель для каждого из орудий таковы: $p_1 = 0{,}75$, $p_2 = 0{,}80$, $p_3 = 0{,}85$. Какова вероятность хотя бы одного попадания (событие A) при одном залпе из всех этих орудий?

Решение. Если событие A - это «хотя бы одно попадание при одном залпе из трех орудий», то противоположным ему будет событие $\overline{A}$ - «ни одного попадания».

Вероятность события $P(\overline{A}) = q_1 q_2 q_3$, где $q_1 = 1 - p_1 = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$, $q_2 = 1 - p_2 = 1 - 0{,}80 = 0{,}20$, $q_3 = 1 - p_3 = 1 - 0{,}85 = 0{,}15$.

Искомую вероятность события A найдем по формуле (1.5.16), которая при $n = 3$ принимает вид:

$P(A) = 1 - q_1 q_2 q_3 = 1 - 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}15 = 0{,}9925$.

Пример 1.5.20. Сколько раз нужно подбросить два игральных кубика, чтобы вероятность выпадения хотя бы один раз двух шестерок была бы больше $\frac{1}{2}$? (Эту задачу впервые поставил французский математик и писатель де Мере (1610-1684), поэтому задача называется его именем).

Решение. Пусть событие A_i - «выпадение двух шестерок при $i - м$ подбрасывании». Так как с каждым из шести граней первого кубика может выпасть любая из шести граней второго кубика. Таким образом, всего равновозможных и попарно несовместных событий равно 36 (см. таблицу 1.1.1). Только одно из них – «выпадение шестерки и на первом и на втором кубике» – благоприятствует событию A_i. Следовательно, $P(A_i) = \frac{1}{36}$. Вероятность противоположного события $\overline{A}_i$ будет равняться $q = P(\overline{A}_i) = 1 - \frac{1}{36} = \frac{35}{36}$.

Подбрасывание игральных кубиков – независимые испытания, поэтому можно воспользоваться формулой (1.5.18), которая в данном случае принимает вид:

$$1 - \left(\frac{35}{36}\right)^n > \frac{1}{2} \text{ или } \left(\frac{35}{36}\right)^n < \frac{1}{2}$$

Из последнего неравенства найдем n. Для этого прологарифмируем обе части неравенства и воспользуемся свойством степени логарифмического выражения. В результате получим:

$$n \ln\left(\frac{35}{36}\right) < \ln\frac{1}{2}.$$

Выражая n, будем иметь:

$$n > \frac{\ln 2}{\ln 36 - \ln 35} = \frac{0,6931}{0,0284} = 24,4\,.$$

Итак, чтобы вероятность выпадения двух шестерок была больше 1/2, нужно подбросить кубик не менее 25 раз.

Пример 1.5.21. В ящике 15 шаров, из которых 5 голубых и 10 красных. Из ящика последовательно вынимают 2 шара; первый шар в ящик не возвращают. Найти вероятность того, что первый вынутый шар окажется голубым, а второй – красным.

Решение. Обозначим событие A - «первый шар оказался голубым», событие B - «второй шар оказался красным». Из условия следует, что

$$P(A) = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}, \quad P(B/A) = \frac{10}{14} = \frac{5}{7}.$$

В соответствии с формулой (1.5.8) получаем

$$P(AB) = P(A)P(B/A) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{7} = \frac{5}{21}.$$

Пример 1.5.22. На фабрике изготовляющей болты, первая машина производит 30 %, вторая – 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%.Найти вероятность того, что случайно выбранный болт оказался дефектным.

Решение. Обозначим:

- событие A - «случайно выбранный болт – дефектный»;

- событие (гипотеза) H_1 - «болт изготовлен первой машиной»;

- событие (гипотеза) H_2 - «болт изготовлен второй машиной»;

- событие (гипотеза) H_3 - «болт изготовлен третьей машиной».

Событие A может произойти только с одним из событий H_1, H_2, H_3. Из условия задачи следует, что $P(H_1) = 0,30$, $P(H_2) = 0,25$, $P(H_3) = 0,45$, $P(A/H_1) = 0,02$, $P(A/H_2) = 0,01$, $P(A/H_3) = 0,03$.

По формуле (1.5.19) при $n = 3$ получаем:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$= 0{,}3 \cdot 0{,}02 + 0{,}25 \cdot 0{,}01 + 0{,}45 \cdot 0{,}03 = 0{,}022$.

Пример 1.5.23. Партия электрических лампочек на 20% изготовлена первым заводом, на 30 % - вторым, на 50% - третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1 = 0{,}01$, $q_2 = 0{,}005$, $q_3 = 0{,}006$. Найти вероятность того, что наудачу взятая из партии лампочка окажется стандартной.

Решение. Введем обозначения:

- событие A - «из партии взята стандартная лампочка»;

- событие (гипотеза) H_1 - «взятая лампочка изготовлена первым заводом»;

- событие (гипотеза) H_2 - «взятая лампочка изготовлена вторым заводом»;

- событие (гипотеза) H_3 - «взятая лампочка изготовлена третьим заводом».

По условию задачи известны вероятности изготовления бракованных лампочек в партии каждым из заводов. Следовательно, вероятности изготовления стандартных лампочек в партии каждым из заводов, будут соответственно равны:

$p_1 = 1 - q_1 = 1 - 0{,}01 = 0{,}99 = P(A / H_1)$;

$p_2 = 1 - q_2 = 1 - 0{,}005 = 0{,}995 = P(A / H_2)$;

$p_3 = 1 - q_3 = 1 - 0{,}006 = 0{,}994 = P(A / H_3)$.

Из условия задачи также следует, что $P(H_1) = 0{,}2$, $P(H_2) = 0{,}3$, $P(H_3) = 0{,}5$. В соответствии с формулой полной вероятности (1.5.19) получаем:

$P(A) = P(H_1)P(A / H_1) + P(H_2)P(A / H_2) + P(H_3)P(A / H_3) =$

$= 0{,}2 \cdot 0{,}99 + 0{,}3 \cdot 0{,}995 + 0{,}5 \cdot 0{,}994 = 0{,}9935$.

Пример 1.5.24. Н сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,1% брака, второй - 0,2%, третий – 0,3%. Найти вероятность попадания на сбоку бракованной детали, если с первого автомата поступило 1000, со второго- 2000 и с третьего – 3000 деталей.

Решение. Введем обозначения:

- событие A - «поступила бракованная деталь»;

- гипотеза H_1 - «деталь изготовлена на первом автомате»;

- гипотеза H_2 - «деталь изготовлена на втором автомате»;

- гипотеза H_3 - «деталь изготовлена на третьем автомате».

Из условия задачи следует, что

$$P(H_1)=\frac{1000}{6000}=\frac{1}{6};\ P(H_2)=\frac{2000}{6000}=\frac{1}{3};\ P(H_3)=\frac{3000}{6000}=\frac{1}{2};$$

$$P(A/H_1)=0{,}001;\ P(A/H_2)=0{,}002;\ P(A/H_3)=0{,}003.$$

В соответствии с формулой (1.5.19) находим искомую вероятность.

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$

$$=\frac{1}{6}\cdot 0{,}001+\frac{1}{3}\cdot 0{,}002+\frac{1}{2}\cdot 0{,}003=0{,}023.$$

Пример 1.5.25. На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на двух заводах. Среди них 60% изготовлено первым заводом и 40% - вторым. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных первым заводом, 95 удовлетворяют стандарту, а из 100 лампочек, изготовленных вторым заводом, удовлетворяет стандарту 85. Определить вероятность того, что взятая наудачу лампочка будет удовлетворять стандарту.

Решение. Введем обозначения:

- событие A - «из партии взята стандартная лампочка»;

- гипотеза H_1 - «взятая лампочка изготовлена первым заводом»;

- гипотеза H_2 - «взятая лампочка изготовлена вторым заводом»;

Из условия задачи следует, что $P(H_1)=0{,}6$, $P(H_2)=0{,}4$; $P(A/H_1)=0{,}95$; $P(A/H_2)=0{,}85$.

В соответствии с формулой полной вероятности (1.5.19) получаем:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=0{,}6\cdot 0{,}95+0{,}4\cdot 0{,}85=0{,}91.$$

Пример 1.5.26. На складе находятся детали, изготовленные на двух заводах. Известно, что объем продукции первого завода в 4 раза превышает объем продукции второго завода. Вероятность брака на первом заводе $q_1=0{,}05$, на втором - $q_2=0{,}01$ Наудачу взятая деталь оказалась бракованной. Какова вероятность того, что эта деталь изготовлена первым заводом?

Решение. Введем обозначения:

- событие A - «взята бракованная деталь»;

- гипотеза H_1 - «деталь изготовлена на первом заводе»;

- гипотеза H_2 - «деталь изготовлена на втором заводе».

Из условия задачи следует, что $P(H_1)=\frac{4}{5}=0{,}8$, $P(H_2)=\frac{1}{5}=0{,}2$; $P(A/H_1)=0{,}05$; $P(A/H_2)=0{,}01$.

Поскольку событие A уже произошло и необходимо найти вероятность первой гипотезы после испытания, то в данном примере применяется формула Бейеса (1.5.20).

В соответствии с указанной формулой, в случае $n=2$ получаем:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}8\cdot 0{,}05}{0{,}8\cdot 0{,}05+0{,}2\cdot 0{,}01}=0{,}952.$$

Пример 1.5.27. На склад поступает продукция трех фабрик, причем продукция первой фабрики составляет 20%, второй - 46% и третьей – 34%. Известно, что средний процент нестандартных изделий для первой фабрики равен 3%, для второй – 2%, для третьей - 1%. Найти вероятность того, что наудачу взятое нестандартное изделие произведено на первой фабрике.

Решение. Введем обозначения:

- событие A - «поступило нестандартное изделие»;

- гипотеза H_1 - «изделие изготовлено на первой фабрике»;

- гипотеза H_2 - «изделие изготовлено на второй фабрике»;

- гипотеза H_3 - «изделие изготовлено на третьей фабрике».

Из условия задачи следует, что $P(H_1)=0{,}20$; $P(H_2)=0{,}46$; $P(H_3)=0{,}34$; $P(A/H_1)=0{,}03$; $P(A/H_2)=0{,}02$; $P(A/H_3)=0{,}01$.

Данная задача, как и предыдущая, решается с помощью формулы Бейеса. Поэтому вначале найдем полную вероятность события A.

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$

$$=0{,}20\cdot 0{,}03+0{,}46\cdot 0{,}02+0{,}34\cdot 0{,}01=0{,}0186.$$

Искомая, апостериорная вероятность первой гипотезы будет равна

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}2\cdot 0{,}03}{0{,}0186}\approx 0{,}322\,.$$

Замечание 1.5.9. Аналогично находятся вероятности:

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{0{,}46\cdot 0{,}02}{0{,}0186}\approx 0{,}495\,;$$

$$P(H_3/A)=\frac{P(H_3)P(A/H_3)}{P(A)}=\frac{0{,}34\cdot 0{,}01}{0{,}0186}\approx 0{,}183\,.$$

Пример 1.5.28. В пяти ящиках находятся одинаковые по весу и размерам шары. В двух ящиках - 6 голубых и 4 красных шара (это ящик состава H_1). В двух других ящиках (состава H_2) – по 8 голубых и 2 красных шара. В последнем ящике (состава H_3) – 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Извлеченный шар оказался голубым. Какова вероятность того, что голубой шар извлечен из ящика первого состава?

Решение. Введем обозначения:

- событие A - «из ящика извлечен голубой шар»;

- гипотеза H_1 - «ящик первого состава»;

- гипотеза H_2 - «ящик второго состава»;

- гипотеза H_3 - «ящик третьего состава».

Из условия задачи следует, что $P(H_1)=\frac{2}{5}=0{,}4$, $P(H_2)=\frac{2}{5}=0{,}4$, $P(H_3)=\frac{1}{5}=0{,}2$, $P(A/H_1)=\frac{6}{10}=0{,}6$, $P(A/H_2)=\frac{8}{10}=0{,}8$, $P(A/H_3)=\frac{2}{10}=0{,}2$.

В соответствии с формулой полной вероятности находим:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$
$$=0{,}4\cdot 0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}8+0{,}2\cdot 0{,}2=0{,}6\,.$$

По формуле Бейеса найдем искомую вероятность:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\frac{0{,}4\cdot 0{,}6}{0{,}6}=0{,}4\,.$$

Пример 1.5.29. В первой урне 2 голубых и 6 красных шаров, во второй - 4 голубых и 2 красных. Из первой урны наудачу переложили 2 шара во вторую, после чего из второй урны наудачу достали один шар. Какова вероятность того, что этот шар голубой?

Предположим, что шар, взятый из второй урны, оказался голубым. Какова вероятность того, что из первой урны во вторую были переложены 2 голубых шара?

Решение. Введем обозначения:

- событие A - «шар, извлеченный из второй урны, голубой»;

- гипотеза H_1 - «из первой урны во вторую переложены два голубых шара»;

- гипотеза H_2 - «из первой урны во вторую переложены два разноцветных шара»;

- гипотеза H_3 - «из первой урны во вторую переложены два красных шара».

Вычислим вероятности гипотез H_i и условные вероятности $P(A/H_i), \quad i=1,2,3$.

$$P(H_1)=\frac{C_2^2}{C_8^2}=\frac{1}{28};\ P(H_2)=\frac{C_2^1\cdot C_6^1}{C_8^2}=\frac{12}{28};P(H_3)=\frac{C_6^2}{C_8^2}=\frac{15}{28};$$

$$P(A/H_1)=\frac{3}{4};\ P(A/H_2)=\frac{5}{8};\ P(A/H_3)=\frac{1}{2}$$

$$P\left(A/H_1\right)=\frac{3}{4},\ P\left(A/H_2\right)=\frac{5}{8},\quad P\left(A/H_3\right)=\frac{1}{2}.$$

По формуле полной вероятности получим ответ на первый вопрос:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)=$$

$$=\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}+\frac{12}{28}\cdot\frac{5}{8}+\frac{15}{28}\cdot\frac{1}{2}=\frac{9}{16}.$$

Чтобы ответить на второй вопрос, воспользуемся формулой Бейеса:

$$P(H_1/A)=\frac{P(H_1)P(A/H_1)}{P(A)}=\left(\frac{1}{28}\cdot\frac{3}{4}\right):\frac{9}{16}=\frac{1}{21}.$$

Для закрепления данной темы решите следующие задачи.

Задачи:

1. Предприятие дает в среднем 25% продукции высшего сорта и 65% продукции первого сорта. Какова вероятность того, что случайно взятое изделие окажется первого или высшего сорта?

2. Каждое из четырех несовместных событий может произойти соответственно с вероятностями 0,014, 0,001, 0,009, 0,006. Найти вероятность того, что в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

3. Найти вероятность того, что при подбрасывании игрального кубика на верхней грани окажется четное или кратное трем число очков.

4. Производится 4 выстрела по мишени с вероятностью попадания 0,2 при отдельном выстреле. Попадание в мишень при различных выстрелах предполагается независимым событием. Какова вероятность попадания в цель ровно три раза?

5. Вероятности появления каждого из трех независимых событий A_1, A_2, A_3 соответственно равны $q_1 = 0{,}9$, $q_2 = 0{,}8$, $q_3 = 0{,}7$. Найти вероятность появления только одного из этих событий.

6. В ящике находятся 10 деталей, из которых 4 первого типа и 6 – второго. Для сборки агрегата нужно сначала взять деталь первого типа, а затем второго. Какова вероятность того, что при выборке наугад детали будут взяты в нужной последовательности.

7. Вероятность того, что событие появится хотя бы один раз в трех независимых испытаниях, равна 0,875. Найти вероятность появления события в одном испытании.

8. Студент знает ответы на 20 вопросов из 26. Предложим, что вопросы задаются последовательно один за другим. Найти вероятность того, что три подряд заданных вопроса – счастливые.

9. В ящике находятся 10 деталей, из которых 5 первого типа, 3 – второго, 2 – третьего. Какова вероятность того, что при выборе наугад первой будет взята деталь первого типа, второй – второго, третьей – третьего типа?

10. Найти вероятность того, что выбранное наудачу изделие является первосортным, если известно, что 4 % всей продукции является браком, а 75% забракованных изделий удовлетворяют требованиям первого сорта.

11. Партия из ста деталей подвергается выборочному контролю. Условием непригодности всей партии является наличие хотя бы одной бракованной детали

среди пяти проверяемых. Какова вероятность для данной партии быть непринятой, если она содержит 5 % неисправных деталей.

12. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадает в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

13. В пяти ящиках лежат одинаковые по размерам и весу шары. В двух ящиках (состава H_1) – по 6 голубых и 4 красных шара. В двух других ящиках (состава H_2) – по 8 голубых и 2 красных шара. В одном ящике (состава H_3) – 2 голубых и 8 красных шаров. Наудачу выбирается ящик и из него извлекается шар. Какова вероятность того, что извлеченный шар оказался голубым?

14. На фабрике, изготовляющей болты, первая машина производит 30%, вторая - 25%, третья – 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный болт оказался стандартным.

15. Партия электрических лампочек на 25 % изготовлена первым заводом, на 35% - вторым, на 40% - третьим. Вероятности выпуска бракованных лампочек соответственно равны: $q_1 = 0{,}03$, $q_2 = 0{,}02$, $q_3 = 0{,}01$. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампочка окажется бракованной?

16. В группе 21 студент, в том числе 5 отличников, 10 хорошо успевающих и 6 занимающихся слабо. На предстоящем экзамене отличники могут получить только отличные оценки. Хорошо успевающие студенты могут получить с равной вероятностью хорошие и отличные оценки. Слабо занимающиеся студенты могут получить с равной вероятностью хорошие, удовлетворительные и неудовлетворительные оценки. Для сдачи экзамена приглашаются наугад три студента. Найти вероятность того, что они получат оценки: отлично, хорошо, удовлетворительно (в любом порядке).

17. На сборку попадают детали с трех автоматов. Известно, что первый автомат дает 0,2% брака, второй – 0,3% и третий – 0,4%. Найти вероятность попадания на сборку бракованной детали, если с первого автомата поступило 500, со второго – 1000 и с третьего - 1500 деталей.

18. Рабочий обслуживает три станка, на которых обрабатываются однотипные детали. Вероятность брака для первого станка равна 0,01, для второго – 0,02, для третьего – 0,03. Обработанные детали складываются в один ящик. Производительность первого станка в два раза больше, чем второго, а третьего в три раза меньше, чем второго. Какова вероятность того, что взятая наугад деталь будет бракованной?

19. На предприятии, изготовляющем болты, первая машина производит 30%, вторая - 25%, третья - 45% всех изделий. Брак в их продукции составляет соответственно 2%, 1%, 3%.Найтите вероятности того, что случайно выбранный болт, произведенный первой, второй и третьей машинами, оказался дефектным.

20. Партия транзисторов, среди которых 10% дефектных, поступила на проверку. Схема проверки такова: с вероятностью 0,95 обнаруживают дефект (если он есть), и существует ненулевая вероятность 0,03 того, что исправный транзистор будет признан дефектным. Случайно выбранный из партии транзистор был признан дефектным. Какова вероятность того, что на самом деле транзистор исправен?

21. Расследуются причины неудачного запуска космической ракеты, о котором можно высказывать четыре предложения (гипотезы) H_1, H_2, H_3 и H_4. По данным статистики $P(H_1)=0{,}2$, $P(H_2)=0{,}4$, $P(H_3)=0{,}3$, $P(H_4)=0{,}1$. В ходе расследования обнаружено, что произошла утечка топлива (событие A). Согласно той же статистике, условные вероятности события A с каждой из гипотез равны: $P(A/H_1)=0{,}9$, $P(A/H_2)=0$, $P(A/H_3)=0{,}2$, $P(A/H_4)=0{,}3$. Какая из гипотез наиболее вероятна при данных условиях?

22. Однотипные приборы выпускаются тремя заводами в количественном отношении 1:2:3, причем вероятности брака для этих заводов соответственно равны 3%, 2%, 1%. Прибор, приобретенный научно-исследовательским институтом, оказался бракованным. Какова вероятность того, что этот прибор произведен первым заводом (марка завода на приборе отсутствовала).

23. Партия деталей изготовлена тремя рабочими, причем первый изготовил 35% всех деталей, второй – 40%, третий – всю остальную продукцию. Брак в их продукции составляет: у первого - 2%, у второго - 3%, у третьего - 4%. Случайно

выбранная для контроля деталь оказалась бракованной. Найти вероятность того, что она изготовлена третьим рабочим.

Ответы:

1) 0,9; **2)** 0,4; **3)** $\frac{2}{3}$; **4)** 0,0256. **Указание.** Событию «в цель попадают ровно 3 раза при 4 выстрелах» благоприятствуют 4 исхода: $AAA\overline{A}, AA\overline{A}A, A\overline{A}AA, \overline{A}AAA$, где A - попадание, $\overline{A}$ - промах (запись $AAA\overline{A}$ означает попадание при первом, втором, третьем выстрелах, промах – при четвертом выстреле). Вероятность каждого исхода одна и та же: $0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 = 0{,}064$, где $0{,}8 = 1 - 0{,}2$ - вероятность промаха. Искомая вероятность $p = 0{,}0256 = 4 \cdot 0{,}064$; **5)** $0{,}092$. **Указание.** Если обозначить $B_1 = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $B_2 = \overline{A_1}A_2\overline{A_3}$, $B_3 = \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, то искомая вероятность $p = P(B_1 + B_2 + B_3) = P(B_1) + P(B_2) + P(B_3)$; **6)** 4/15; **7)** 0,5. **Указание.** Примените формулу (1.5.17); **8)** 57/115; **9)** 1/24. **10)** 0,72; **11)** 0,23. **Указание.** Найдите сначала вероятность q противоположного события A, которое заключается в том, что партия деталей будет принята. Это событие является произведением пяти событий $A = A_1A_2A_3A_4A_5$, где $A_k\,(k = 1,2,3,4,5)$ означает, что k-я проверенная деталь является стандартной. Далее, $P(A_1) = 95/100$, $P(A_2 / A_1) = 94/99$ и т.п.; **12)** $n \geq 2$; **13)** 0,6; **14)** 0,978; **15)** 0,0185; **16)** $\approx 0{,}11$; **17)** $\approx 0{,}003$; **18)** 0,015; **19)** 0,272; 0,113; 0,614; **20)** 0,221; **21)** H_1; **22)** 0,3; **23)** 0,345.

Вопросы для самопроверки:

1. Чему равна вероятность суммы двух событий?

2. Чему равна вероятность суммы двух несовместных событий?

3. Сформулируйте правило о вероятности суммы n несовместных событий.

5. Чему равна сумма вероятностей событий, образующих полную группу?

6. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?

7. Сформулируйте теорему о вероятности произведения двух событий.

8. Как определяется независимость двух событий?

9. Чему равна вероятность произведения двух независимых событий?

10. Сформулируйте теорему о вероятности произведения n событий?

11. Как определяется независимость n событий?

12. Чему равна вероятность произведения n независимых событий?

13. Как найти вероятность появления хотя бы одного из n независимых событий, имеющих одинаковые вероятности?

14. Запишите формулу полной вероятности.

15. Выведите формулу полной вероятности.

16. При решении каких задач используется формула полной вероятности?

17. Запишите формулу Бейеса.

18. Что определяет формула Бейеса?

19. Докажите формулу Бейеса.

2 Случайные величины

2.1 Виды случайных величин. Задание дискретной случайной величины

1) Дискретные и недискретные случайные величины.

2) Закон распределения дискретной случайной величины.

1) В первой части лекций приводились события, состоящие в появлении того или иного числа. Например, при бросании игральной кости могли появиться числа 1, 2, 3, 4, 5, 6. Наперед определить число выпавших очков невозможно. Поэтому число очков есть величина случайная; числа 1, 2, 3, 4, 5, 6 есть *возможные значения* этой величины.

Определение 2.1.1. Скалярную функцию $X(\omega)$, заданную на пространстве элементарных исходов, называют ***случайной величиной***, если для любого $x \in R$ $\{\omega : X(\omega) < x\}$ - множество элементарных исходов, для которых $X(\omega) < x$ является событием.

Определение 2.1.2. Случайная величина, принимающая различные значения, которые можно записать в виде конечной или бесконечной последовательности, называется ***дискретной случайной величиной* (*ДСВ*).**

Случайные величины принято обозначать прописными буквами, $X, Y, \ldots$, а принимаемые ими значения буквами $x, y, \ldots$.

Примерами случайных величин могут служить:

- X - число очков, появляющиеся при бросании игральной кости;
- Y - число выстрелов до первого попадания в цель;
- Z - время безотказной работы прибора и т.п.

Случайные величины X и Y являются дискретными случайными величинами (ДСВ), а Z - недискретной случайной величиной.

2) Для задания дискретной случайной величины (как впрочем, и недискретной) недостаточно перечислить все возможные ее значения, необходимо указать еще их вероятности.

Определение 2.1.3. Законом распределения дискретной случайной величины называют соответствие между значениями $x_1, x_2, x_3, \ldots$этой величины и их вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots$; его можно задать таблично, аналитически (в виде формулы) и графически.

Замечание 2.1.1. Закон распределения дискретной случайной величины чаще всего задается таблицей, которую называют ***рядом распределения.***

Если дискретная случайная величина X принимает *конечное множество значений* $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ соответственно с вероятностями $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$, то ее закон распределения определяется формулой:

$$P(X = x_k) = p_k \text{, где } k = 1, 2, 3, ..., n. \qquad (2.1.1)$$

Причем, $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$ (2.1.2)

Ряд распределения можно задать таблицей следующим образом:

Таблица 2.1.1-Ряд распределения

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Для наглядности закон распределения дискретной случайной величины изображают графически, для чего в прямоугольной декартовой системе координат строят точки (x_k, p_k) и соединяют их последовательно отрезками прямых.

Определение 2.1.4. Ломанную, соединяющую последовательно точки (x_1, p_1), (x_2, p_2), … называют ***многоугольником (или полигоном)*** распределения случайной величины X.

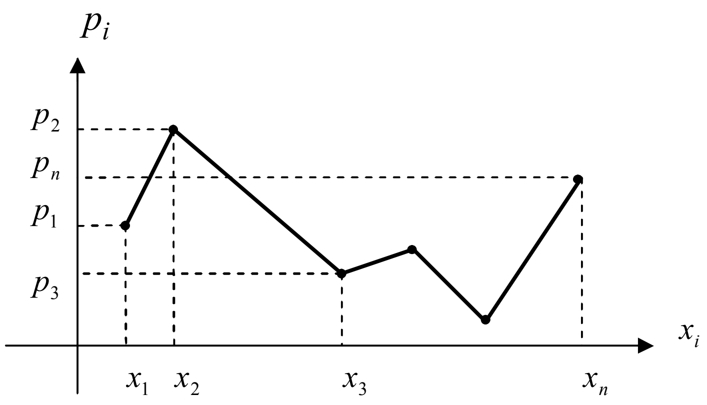


Рисунок 2.1.1

Если дискретная случайная величина X принимает *бесконечную последовательность значений* $x_1, x_2, x_3, \ldots$ соответственно с вероятностью $p_1, p_2, p_3, \ldots$, то ее закон распределения определяется формулой

$$P(X = x_k) = p_k, \text{ где } k = 1, 2, 3, ..., n, ... \qquad (2.1.3)$$

Причем, $\sum_{k=1}^{+\infty} p_k = 1.$ (2.1.4)

Ряд распределения можно задать таблицей следующим образом:

Таблица 2.1.2-Ряд распределения

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Пример 2.1.1. Задают ли следующие таблицы законы распределения дискретной случайной величины

а)

x_i	2	3	4	5
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

б)

x_i	6	7	8	9

p_i	0,1	0,2	0,3	0,5

Решение. Первая таблица задает закон распределения дискретной случайной величины, поскольку выполняется равенство 0,1+0,4+0,3+0,2=1 (см. формулы (2.1.1) и (2.1.2)) .

Вторая таблица не задает закон распределения дискретной случайной величины, так как условие (2.1.2) не выполнено, т.е. 0,1+0,2+0,3+0,5≠1.

Пример 2.1.2. Задают ли следующие таблицы законы распределения ДСВ?

а)

x_i	$1/3$	$1/3^2$	$1/3^3$	$\cdots$	$1/3^к$	$\cdots$
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\cdots$	$1/2^к$	$\cdots$

б)

x_i	$1/4$	$1/4^2$	$1/4^3$	$\cdots$	$1/4^к$	$\cdots$
p_i	1	$1/2$	$1/3$	$\cdots$	$1/к$	$\cdots$

Решение. Первая таблица дает закон распределения ДСВ X, принимающей бесконечную последовательность значений $x_k = \dfrac{1}{3^k}, (k = 1,2,3...)$. Ряд из чисел $p_k = \dfrac{1}{2^k}, (k = 1,2,3...)$ сходится и его сумма равна единице; это геометрический ряд вида $\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1}$ с первым членом $a = 1/2$ и знаменателем $q = 1/2$. Действительно,

$\sum\limits_{k=1}^{\infty} aq^{k-1} = \dfrac{a}{1-q}$, при условии $|q| < 1$, поэтому $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^k} = \dfrac{1/2}{1-1/2} = 1.$

Вторая таблица не задает закон распределения ДСВ X, так как ряд из чисел $p_k = 1/k$ $(k = 1,2,3...)$ не имеет конечной суммы, это гармонический ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}$, который, как известно, расходится.

Пример 2.1.3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1
p_i	0,1	0,2	0,4	p_4	0,1

1. Чему равна вероятность $p_4 = P(X = 0{,}8)$?

2. Построить многоугольник распределения.

Решение. Поскольку должно выполняться равенство (2.1.2), т.е. $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1$, то

$$p_4 = 1 - (p_1 + p_2 + p_3 + p_5) = 1 - (0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}1) = 1 - 0{,}8 = 0{,}2.$$

Таким образом $p_4 = 0{,}2$.

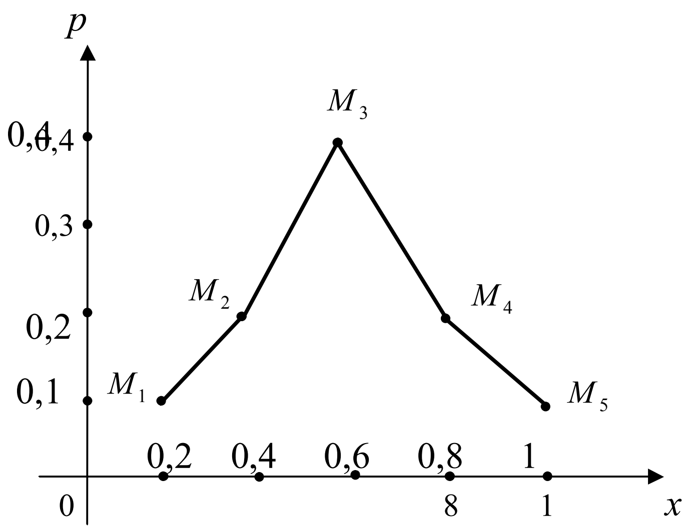


Рисунок 2.1.2

В прямоугольной системе координат строим точки $M_1(0{,}2;0{,}1)$, $M_2(0{,}4;0{,}2)$, $M_3(0{,}6;0{,}4)$, $M_4(0{,}8;0{,}2)$, $M_5(1;0{,}1)$ и соединяем их отрезками прямых

(рисунок 2.1.2). Ломаная $M_1M_2M_3M_4M_5$ является многоугольником распределения данной случайной величины.

Пример 2.1.4. Подбрасываются один раз, одновременно две симметричные монеты, подсчитывается число орлов на обеих сторонах монет. Рассматривается ДСВ X - число орлов на обеих монетах при одном подбрасывании. Записать закон распределения случайной величины X.

Решение. В данном опыте четыре равновозможных элементарных исхода (*О, Р*), (*Р, О*), (*О, О*), (*Р, Р*). Запись (*О, Р*) означает, что на первой монете выпал *орел,* на второй – *решка;* аналогичный смысл имеют остальные записи. *Орел* может выпасть 1 раз, 2 раза или не появиться ни разу. Следовательно, случайная величина X может принимать только три значения : $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2.$

Найдем вероятности этих значений случайной величины X , учитывая, что запись $p_1 = P(X = 0)$ означает: найти вероятность события, состоящего в том, что при одном подбрасывании двух монет, орел ни на одной из них не выпадет. Аналогичный смысл имеют записи $p_2 = P(X = 1)$, $p_3 = P(X = 2)$. В связи с этим получим:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{1}{4} = 0{,}25;$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{2}{4} = 0{,}50;$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{1}{4} = 0{,}25;$$

Для того чтобы проверить, правильно ли найдены вероятности событий $X = 1$, $X = 2$, $X = 3$ воспользуемся условием (2.1.2), т.е $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, очевидно, что это равенство выполняется.

Таким образом, закон распределения данной случайной величины можно задать следующим рядом распределения:

x_i	0	1	2
p_i	0,25	0,50	0,25

Пример 2.1.5. В коробке 7 карандашей, из которых 4 красных. Из этой коробки наудачу извлекают 3 карандаша. Найти закон распределения случайной величины X , равной числу красных карандашей в выборке.

Решение. Из условия задачи заметим, что в выборке из 3 карандашей может не оказаться ни одного красного карандаша, может появиться один, два или три карандаша. Следовательно, случайная величина X может принимать только четыре значения:

$$x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3.$$

Найдем вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_4^0 C_3^3}{C_7^3} = \frac{1}{35};$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{C_4^1 C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35};$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_4^2 C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35};$$

$$p_4 = P(X = 3) = \frac{C_4^3 C_3^0}{C_7^3} = \frac{4}{35}.$$

Следовательно, данная случайная величина X имеет ряд распределения:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/35	12/35	18/35	4/35

Отметим, что 1/35+12/35+18/35+4/35=1, т.е. выполнено равенство (2.1.2).

2.2 Функция распределения случайной величины. Непрерывная случайная величина, плотность ее распределения

1) Понятие функции распределения случайной величины. Непрерывная случайная величина.

2) Свойства функции распределения.

3) Плотность распределения.

1) Универсальным способом задания закона распределения вероятностей случайной величины, является ее функция распределения.

Определение 2.2.1. ***Функцией распределения*** случайной величины X, называется вероятность того, что случайная величина X примет значение меньше заданного x.

Функция распределения - это функция действительной переменной x, которая обозначается $F(x)$ и определяется равенством:

$$F(x) = P(X < x) \qquad (2.2.1)$$

Функцию распределения очень часто называют *интегральной функцией распределения*.

Геометрически функция распределения означает вероятность того, что случайная величина X примет значение левее заданной точки x (на рисунке 2.2.1 соответствующая часть оси абсцисс, т.е. множество точек, представляющее событие $X < x$).

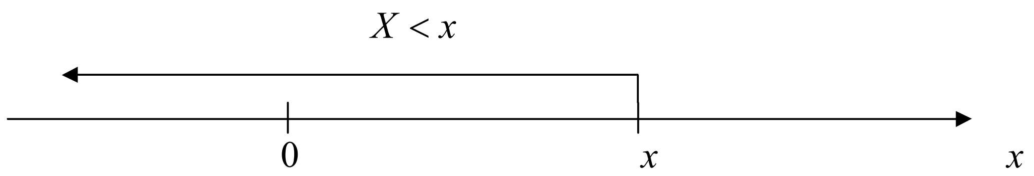


Рисунок 2.2.1

Определение 2.2.2. Случайная величина называется ***непрерывной,*** если ее функция распределения $F(x) = P(X < x)$, является непрерывной, кусочно-дифференцируемой функцией.

2) Из геометрической интерпретации можно наглядно, но не вполне строго, вывести **основные свойства функции распределения** $F(x)$ случайной величины X:

1. Все значения функции распределения $F(x)$ принадлежат отрезку $[0;1]$, т.е.

$$0 \le F(x) \le 1. \qquad (2.2.2)$$

Это действительно так, потому что по определению функция распределения – это есть вероятность события, следовательно, ее значения располагаются в промежутке $[0;1]$.

2. Функция распределения $F(x)$ является неубывающей функцией, т.е. для $\forall\ x_1, x_2$, удовлетворяющих условию, что $x_1 < x_2$, должно выполняться неравенство:

$$F(x_1) \le F(x_2). \qquad (2.2.3)$$

Действительно, рассмотрим на оси абсцисс две точки x_1, x_2, причем $x_1 < x_2$ (см. рисунок 2.2.2).

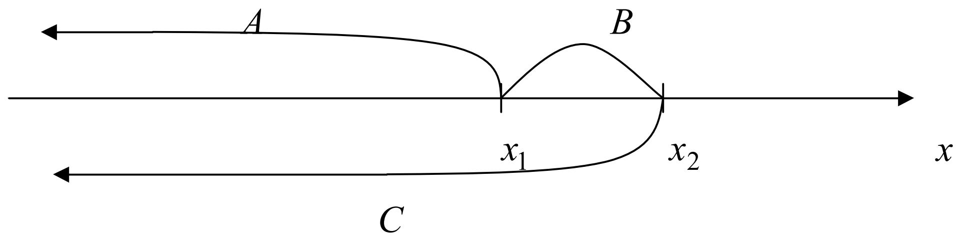


Рисунок 2.2.2

Представим событие $C = (X < x_2)$ как сумму двух несовместных событий: $C = A + B$, где $A = (X < x_1)$, $B = (x_1 \le X < x_2)$. По правилу сложения получим:

$$P(C) = P(A) + P(B), \text{ т.е.}$$

$$P(X < x_2) = P(X < x_1) + P(x_1 \le X < x_2) \text{ или}$$

$$F(x_2) = F(x_1) + P(x_1 \le X < x_2). \qquad (2.2.4)$$

Но, $P(x_1 \le X < x_2)$ как и всякая вероятность, не может быть отрицательной; следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

3. Функция $F(x)$ в точке x_0 непрерывна слева, т.е.

$$\lim_{x \to x_0 -} F(x) = F(x_0), \left(F(x_0 - 0) = F(x_0)\right). \qquad (2.2.5)$$

4. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(\alpha;\beta)$, а $F(x)$ ее функция распределения, то

$$F(x) = 0 \text{ при } x \le \alpha, \qquad (2.2.6)$$

$$F(x) = 1 \text{ при } x \ge \beta. \qquad (2.2.7)$$

5. Если все возможные значения случайной величины X принадлежат интервалу $(-\infty;+\infty)$, то

$$\lim_{x\to-\infty} F(x)=0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x)=1. \qquad (2.2.8)$$

6. Вероятность того, что случайная величина X примет значение из полуинтервала $[\alpha,\beta)$, равна разности значений ее функции распределения $F(x)$ на концах этого полуинтервала:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha). \qquad (2.2.9)$$

Эта формула легко выводится из равенства (2.2.3), если при этом принять обозначения $x_1=\alpha, x_2=\beta$.

Итак, функция распределения $F(x)$ любой случайной величины есть неубывающая функция своего аргумента, значения которой заключены между 0 и 1: $0 \le F(x) \le 1$, причем $F(-\infty)=0; F(+\infty)=1$. В отдельных точках эта функция может иметь скачки (разрывы 1-го рода), на некоторых участках она может быть постоянной, на других монотонно возрастать (см., например, рисунок 2.2.3). В связи с этим можно заметить, что если какая-то функция удовлетворяет свойствам 1-5, то можно утверждать, что это функция распределения некоторой случайной величины.

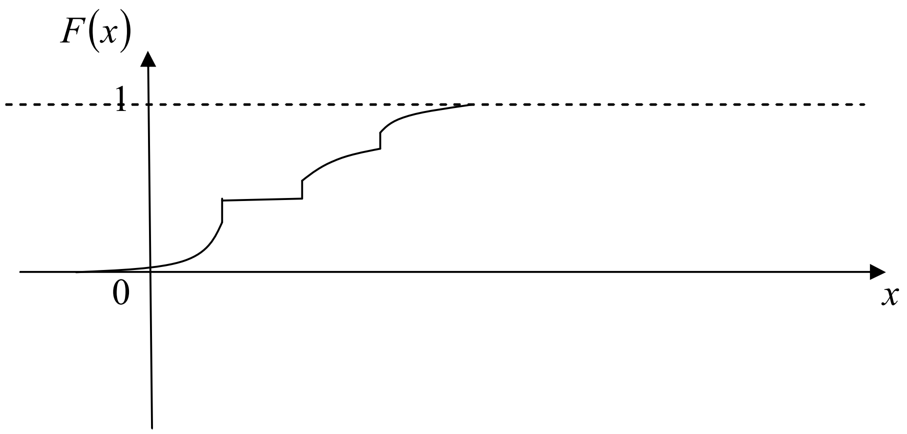


Рисунок 2.2.3

Замечание 2.2.1. Если X - непрерывная случайная величина, а ее функция распределения $F(x)$ всюду непрерывна, то вероятность, того, что случайная величина X примет одно, заданное определенное значение, равно нулю.

Для того чтобы это показать, возьмем любую точку $x=\alpha$, лежащую на оси абсцисс, и примыкающий к ней участок $[\alpha,\beta)$. В этом случае имеем:

$$P(\alpha \le X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha).$$

Будем неограниченно приближать точку $x = \beta$ к точке $x = \alpha$, тогда в пределе получим:

$$P(X = \alpha) = \lim_{\beta \to \alpha} [F(\beta) - F(\alpha)]. \qquad (2.2.10)$$

Замечаем, что значение этого предела зависит от того, непрерывна ли функция $F(x)$ в точке $x = \alpha$ или терпит разрыв. Если функция $F(x)$ непрерывна, то предел (2.2.9) равен нулю. Если функция $F(x)$ в точке $x = \alpha$ терпит разрыв первого рода, т.е. скачок, то предел (2.2.9) равен величине этого скачка.

В любом случае вероятность события $(X = \alpha)$ равна величине скачка функции распределения случайной величины X в точке $x = \alpha$ (равен этот скачок нулю или нет).

В частности, если функция распределения $F(x)$случайной величины X везде непрерывна, то вероятность каждого отдельного значения этой случайной величины равна нулю, т.е.

$$P(X = \alpha) = 0 \qquad (2.2.11)$$

Поэтому для непрерывной случайной величины X выполняются равенства:

$$P(\alpha \le X \le \beta) = P(\alpha < X < \beta) = P(\alpha \le X < \beta) = P(\alpha < X < \beta). \qquad (2.2.12)$$

Следовательно, $P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$. $\qquad$ (2.2.13)

Итак, зная функцию распределения $F(x)$ случайной величины X можно вычислять вероятности любых событий, с нею связанных.

Замечание 2.2.2. Для дискретной случайной величины функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} P(X = x_k), \qquad (2.2.14)$$

где $x_k < x$ означает, что суммируются вероятности тех значений, которые меньше x.

Последняя формула вытекает из основных свойств функции распределения и замечания 2 данного параграфа.

Поэтому, функция $F(x)$ для дискретной случайной величины X является разрывной. Ее график имеет ступенчатый вид.

Функцию распределения для дискретной случайной величины вычисляют следующим образом.

Зададим ряд распределения дискретной случайной величины.

x_i	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\cdots$	x_n
p_i	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	$\cdots$	p_n

Если $x \le x_1$, то $F(x) = 0$ (см. свойство 4 функции распределения).

Если $x_1 < x \le x_2$, то

$F(x) = \sum\limits_{x_k < x_2} P(X = x_k) = P(X = x_1) = p_1$, т.е. дискретная случайная величина X может принимать значение x_1 с вероятностью p_1.

Если $x_2 < x \le x_3$, то

$$F(x) = \sum_{x_k < x_3} P(X = x_k) = P(X = x_1) + P(X = x_2) = p_1 + p_2.$$

Если $x_3 < x \le x_4$, то

$$F(x) = \sum_{x_k < x_4} P(X = x_k) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) = p_1 + p_2 + p_3.$$

Если $x_4 < x \le x_5$, то

$$F(x) = \sum_{x_k < x_5} P(X = x_k) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 + p_4.$$

…………………………………………………………………………………

Если $x > x_n$, то

$$F(x) = P(X = x_1) + P(X = x_2) + P(X = x_3) + P(X = x_4) + P(X = x_5) =$$

$$= p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + \ldots + p_n = 1$$

Действительно, событие $X > x_n$ достоверно и вероятность его равна 1.

Пример 2.2.1. Закон распределения дискретной случайной величины задан следующей таблицей:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,2	0,4	0,3	0,1

Найти функцию распределения этой случайной величины и построить ее.

Решение. Для нахождения и построения функции распределения $F(x)$ дискретной случайной величины X пользуемся формулой (2.2.13).

1. При $x \le 0$, $F(x) = \sum\limits_{x_k < 0} P(X = x_k) = 0$.

2. При $0 < x \le 1$, $F(x) = \sum\limits_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = 0{,}2$.

3. При $1 < x \le 2$,

$$F(x) = \sum_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = 0{,}2 + 0{,}4 = 0{,}6.$$

4. При $2 < x \le 3$,

$$F(x) = \sum_{x_k < 3} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 = 0{,}9$$

5. При $x > 3$,

$$F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 0{,}2 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}1 = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad \text{при} \quad x \le 0 \\ 0{,}2 \quad \text{при} \quad 0 < x \le 1 \\ 0{,}6 \quad \text{при} \quad 1 < x \le 2 \\ 0{,}9 \quad \text{при} \quad 2 < x \le 3 \\ 1 \quad \text{при} \quad x > 3 \end{cases}$$

График, получившейся функции распределения будет выглядеть следующим образом (рисунок 2.2.4):

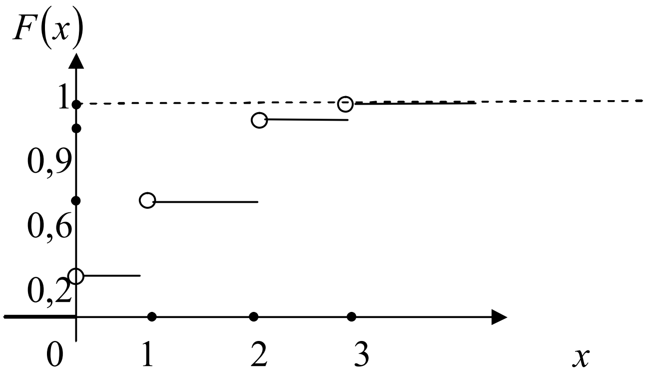


Рисунок 2.2.4

Пример 2.2.2. В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Из этой партии наудачу взяли 2 детали. Найти функцию распределения дискретной случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке.

Решение. Найдем сначала закон распределения данной случайной величины X. Эта величина может принимать три значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$. Вычислим вероятности этих значений:

$$p_1 = P(X = 0) = \frac{C_8^0 \cdot C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45},$$

$$p_2 = P(X = 1) = \frac{C_8^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{16}{45},$$

$$p_3 = P(X = 2) = \frac{C_8^2 \cdot C_2^0}{C_{10}^2} = \frac{28}{45}.$$

Следовательно, ряд распределения данной случайной величины можно задать таблицей:

x_i	0	1	2
p_i	$\frac{1}{45}$	$\frac{16}{45}$	$\frac{28}{45}$

В соответствии с формулой (2.2.13) строим функцию распределения.

1. При $x \le 0$, $F(x) = \sum\limits_{x_k < 0} P(X = x_k) = 0$

2. При $0 < x \le 1$, $F(x) = \sum_{x_k < 1} P(X = x_k) = P(X = 0) = \frac{1}{45}$.

3. При $1 < x \le 2$,

$$F(x) = \sum_{x_k < 2} P(X = x_k) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} = \frac{17}{45}.$$

4. При $x > 2$, $F(x) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{45} + \frac{16}{45} + \frac{28}{45} = 1$.

Пример 2.2.3. Дана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, \textit{если} \;\; x \le -\frac{\pi}{2} \\ \cos x, \textit{если} \;\; -\frac{\pi}{2} < x \le 0 \\ 1, \textit{если} \;\; x > 0 \end{cases}$$

Показать, что эта функция является функцией распределения некоторой случайной величины X. Найти вероятность того, что эта случайная величина примет значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{3}; 0\right)$.

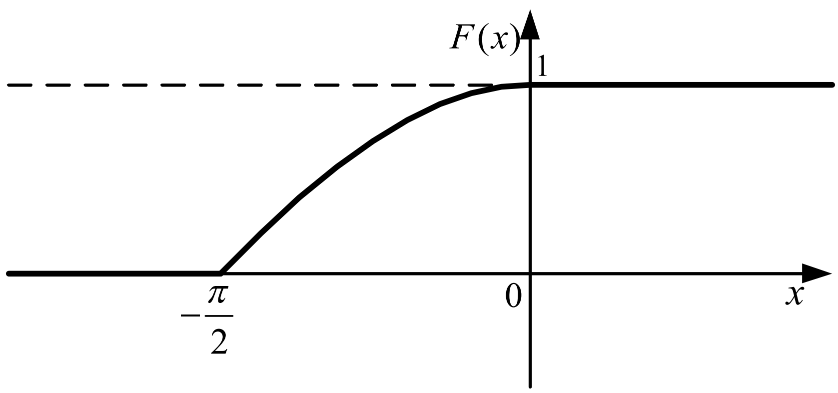


Рисунок 2.2.5

Решение. Проверим, выполняются ли все свойства, присущие функции распределения случайной величины.

1. Все значения этой величины принадлежат отрезку $[0,1]$, так как $|\cos x| \le 1$.

2. Функция $F(x)$ является неубывающей: в промежутке $\left(-\infty,-\frac{\pi}{2}\right]$ она постоянна и при этом равна нулю; в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2},0\right]$ - возрастает; в промежутке $(0,+\infty)$ также постоянна и равна единице (см. рис. 2.2.5).

3. Функция непрерывна в каждой точке x_0 области ее определения – промежутка $(-\infty,+\infty)$, поэтому непрерывна слева и справа, т.е. выполняется равенство(2.2.4).

4. Все значения случайной величины X принадлежат интервалу $\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$ и выполняются условия (2.2.5) и (2.2.6).

Следовательно, функция $F(x)$ удовлетворяет всем свойствам, характерным для функции распределения. Функция $F(x)$ является функцией распределения некоторой случайной величины X.

В соответствии с формулой (2.2.12) находим искомую вероятность, при условии что $\alpha = -\frac{\pi}{3}, \quad \beta = 0$, т.е.

$$P\left(-\frac{\pi}{3} < x < 0\right) = F(0) - F\left(-\frac{\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Пример 2.2.4. Дана функция

$$F(x) = \begin{cases} 0, \text{ } \textit{если } x \le 0; \\ x^2, \text{ } \textit{если } 0 < x < 2; \\ 1, \text{ } \textit{если } x > 2. \end{cases}$$

Является ли эта функция функцией распределения некоторой случайной величины?

Решение. Проверим, выполняются ли все свойства, присущие функции распределения случайной величины.

Эта функция на промежутке $(0,2]$, принимает значения, больше единицы (см. рисунок 2.2.6). Условие (2.2.2), в данном случае, не выполняется. Следовательно, указанная функция $F(x)$ не является функцией распределения случайной величины.

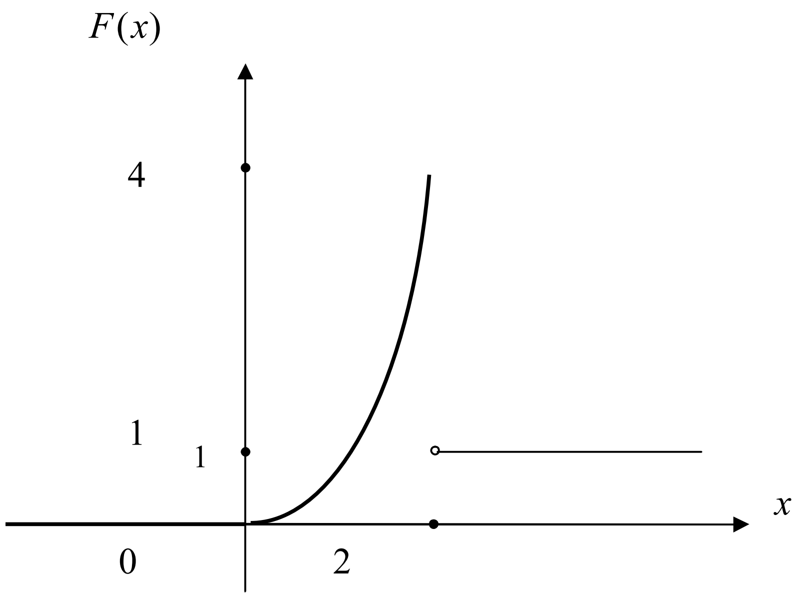


Рисунок 2.2.6

Замечание 2.2.3. С помощью функции распределения можно вычислить вероятность события $(X > x)$: $P(X \geq x) = 1 - F(x)$.

3) В качестве закона распределения, имеющего смысл только для непрерывных случайных величин, введем понятие плотности распределения или плотности вероятности.

К этому понятию можно подойти исходя из механической интерпретации распределения вероятностей. Для ДСВ X эта интерпретация сводится к тому, что в точках $x_1, x_2, ..., x_i, \ldots$ сосредоточены массы $p_1, p_2, ..., p_i, ...$, причем сумма всех масс равна 1.

Данную интерпретацию обобщают на случай НСВ (непрерывной случайной величины). Для этого представим себе, что масса, равная 1, не сосредоточена в отдельных точках, а непрерывно «размазана» по оси абсцисс с какой-то, в общем случае, неравномерной плотностью (см. рисунок 2.2.7). Вероятность попадания НСВ

X на любой участок Δx будет интерпретироваться как масса, приходящаяся на этот участок, а средняя плотность на этом участке – как отношение массы к длине. На участке $(x, x+\Delta x)$ средняя плотность будет равна:

$$\frac{P(x < X < x + \Delta x)}{\Delta x} = \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

В последней части равенства, переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, получим плотность в точке x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x} = F'(x).$$

Таким образом, замечаем, что плотность в точке x - это производная функции распределения.

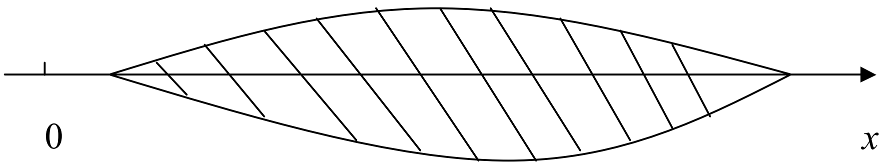


Рисунок 2.2.7

Определение 2.2.3. ***Плотностью распределения*** (или *плотностью вероятности*, иногда просто *плотностью*) непрерывной случайной величины X в точке x называется производная ее функции распределения в этой точке.

Плотность распределения обозначается как $f(x)$, поэтому, можно записать:

$$f(x) = F'(x) \qquad (2.2.15)$$

Определение 2.2.4 График функции плотности распределения называется *кривой распределения.*

Плотность распределения часто называют *дифференциальной функцией.*

Введем важное понятие: *элемент вероятности*. Для этого рассмотрим непрерывную случайную величину X с плотностью $f(x)$ и элементарный участок dx, примыкающий к точке x (рисунок 2.2.8). Вероятность попадания случайной величины X на этот участок dx, с точностью до бесконечно малых высших порядков, равна $f(x)\,dx$ ($P(x < X < x + \Delta x) = F(x+\Delta x) - F(x) \approx f(x)\Delta x$, где $\Delta x \approx dx$). Величина $f(x)\,dx$ называется *элементом вероятности* для точки x.

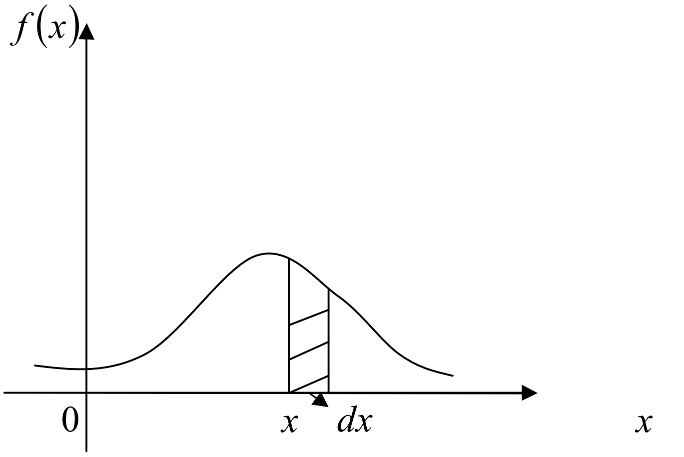


Рисунок 2.2.8

Геометрически элемент вероятности приближенно равен площади элементарного прямоугольника, опирающегося на отрезок dx, примыкающий к точке x (рисунок 2.2.8).

Выразим вероятность попадания НСВ X на участок от α до β (рисунок 2.2.9).

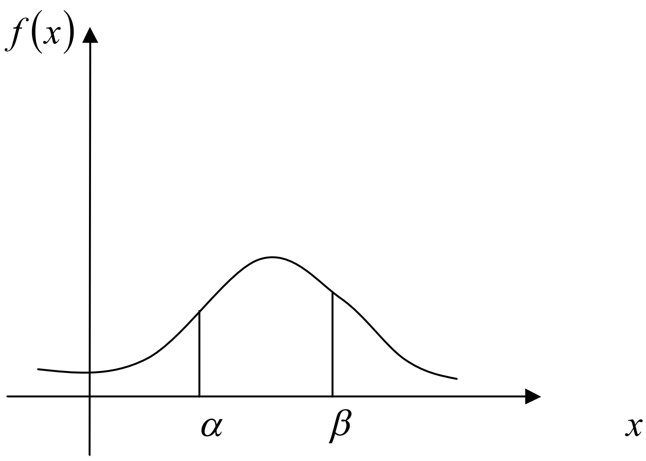


Рисунок 2.2.9

Из определения элемента вероятности, можно заметить, что вероятность попадания НСВ X на участок $(\alpha;\beta)$ равен сумме элементов вероятности на всем этом участке, т.е. интегралу:

$$P(\alpha < X < \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx. \tag{2.2.16}$$

В геометрической интерпретации эта вероятность равна площади криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой распределения, которая опирается на участок $(\alpha;\beta)$ (см. рисунок 2.2.9).

Формула 2.2.15 позволяет выразить функцию распределения $F(x)$ через плотность распределения $f(x)$, а именно:

$$F(x) = P(X < x) = P(-\infty < X < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \qquad (2.2.17)$$

Геометрически последняя формула означает, что функция распределения равна площади бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой распределения, которая опирается на промежуток $(-\infty; x)$ (см. рисунок 2.2.10).

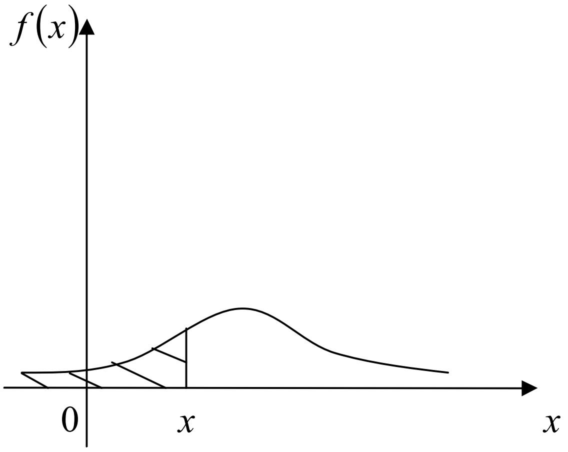


Рисунок 2.2.10

Свойства плотности распределения

1. Плотность распределения $f(x)$ - неотрицательная функция, т.е.

$$f(x) \geq 0. \qquad (2.2.18)$$

Это свойство вытекает из определения плотности вероятности, как производной от функции распределения, которая является неубывающей функцией. Производная от неубывающей функции отрицательной быть не может. Геометрически это свойство означает, что кривая распределения всегда лежит не ниже оси абсцисс.

2. Интеграл по бесконечному промежутку $(-\infty,+\infty)$ от плотности распределения $f(x)$ равен единице:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \qquad (2.2.19)$$

Это свойство вытекает из формулы (2.2.16), положив в ней $x = +\infty$ и учитывая, что $F(+\infty) = 1$. Геометрически это свойство означает полную площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной сверху кривой распределения, которая опирается на ось абсцисс.

3. Если все возможные значения случайные величины принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$, то

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = 1, \qquad (2.2.20)$$

так как $f(x) = 0$ вне этого отрезка.

Пример 2.2.5. Плотность распределения случайной величины X задана функцией $f(x) = \dfrac{c}{1+x^2}$.

Найти значение параметра c.

Решение. Плотность распределения должна удовлетворять условию (2.2.18), т.е. должно выполняться равенство:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{c}{1+x^2}dx = c\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = 1,$$

откуда $c = \dfrac{1}{\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}}$.

Вычислим несобственный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{1+x^2} + \int_{0}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = arctqx\Big|_{-\infty}^{0} + arctqx\Big|_{0}^{+\infty} = arctq0 - arctq(-\infty) +$$

$$+ arctq(+\infty) + arctq0 = 0 - (-\frac{\pi}{2}) + \frac{\pi}{2} - 0 = \pi .$$

Следовательно, $c = \dfrac{1}{\pi}$.

Пример 2.2.6. Функция распределения случайной величины X имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0, \\ \dfrac{x^2}{1+x^2} \quad при \quad x > 0 \end{cases}.$$

Найти ее плотность распределения.

Решение. Плотность распределения $f(x)$ и функция распределения $F(x)$ связаны соотношением (2.2.14).

Поэтому, применяя указанное равенство, находим:

$$f(x) = F'(x) = \left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{2x(1+x^2) - 2x \cdot x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2x}{(1+x^2)^2}, \text{ при } x > 0;$$

$f(x) = F'(x) = 0$, при $x \le 0$.

Итак, плотность распределения вероятностей данной случайной величины определяется функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 \quad при \quad x \le 0, \\ \dfrac{2x}{(1+x^2)^2} \quad при \quad x > 0. \end{cases}$$

Замечание 2.2.4. Эта функция удовлетворяет условию (2.2.18). Действительно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2}dx = 0 + \int_{0}^{+\infty} \frac{d\left(1+x^2\right)}{\left(1+x^2\right)^2} = -\frac{1}{1+x^2}\bigg|_0^{+\infty} = -(0-1) = 1.$$

Рассмотрим различные примеры и их решения по последним двум параграфам.

Пример 2.2.7. Подбрасываются два игральных кубика, подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины X - суммы выпавших очков на двух игральных кубиках.

Решение. В этом испытании 36 равновозможных элементарных исходов. Случайная величина X может принимать целые значения от 2 до 12, причем значения 2 и 12 принимаются по одному разу, 3 и 11 – по 2 раза, 4 и 10 – по 3 раза, 5 и 9 – по 4 раза, 6 и 8 – по 5 раз, значение 7 – 6 раз.

Вычислим вероятности значений данной случайной величины, с учетом последнего замечания.

$$p_1 = P(X=2) = \frac{1}{36};\ p_2 = P(X=3) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18};\ p_3 = P(X=4) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12};$$

$$p_4 = P(X=5) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9};\ p_5 = P(X=6) = \frac{5}{36};\ p_6 = P(X=7) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6};$$

$$p_7 = P(X=8) = \frac{5}{36};\ p_8 = P(X=9) = \frac{4}{36} = \frac{1}{9};\ p_9 = P(X=10) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12};$$

$$p_{10} = P(X=11) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18};\ p_{11} = P(X=12) = \frac{1}{36}.$$

Следовательно, закон распределения данной случайной величины X можно задать таблицей:

									0	1	2

Сделаем проверку условия (2.1.2):

$$\frac{1}{36} + \frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{5}{36} + \frac{1}{6} + \frac{5}{36} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} = 1,$$ т.е. равенство выполнено.

Пример 2.2.8. Вероятность изготовления нестандартного изделия при некотором технологическом процессе равна 0,06. Контролер берет из партии изделие и сразу проверяет его качество. Если оно оказывается нестандартным, дальнейшие испытания прекращаются, а партия задерживается. Если же изделие оказывается стандартным, контролер берет следующее и т.д., но всего проверяет не более пяти изделий. Найти закон распределения случайной величины X - числа проверяемых изделий.

Решение. Дискретная случайная величина X может принимать пять значений: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3,\ x_4 = 4,\ x_5 = 5$.

Событие $(X = 1)$ заключается в том, что будет проверено лишь одно изделие и партию задержат. Следовательно, вероятность такого события равна $P(X = 1) = 0{,}06$.

Событие $(X = 2)$ заключается в том, что первое изделие окажется стандартным, а второе – нестандартным. Вероятность такого события найдем по теореме умножения: $P(X = 2) = 0{,}94 \cdot 0{,}06 \approx 0{,}056$ (здесь вероятность того, что изделие окажется стандартным, находится как $1 - 0{,}06 = 0{,}94$).

Испытание ограничится проверкой качества трех изделий, если первые два окажутся стандартными, а третье – нестандартным. По теореме умножения вероятность такого исхода испытаний $P(X = 3) = 0{,}94^2 \cdot 0{,}06 \approx 0{,}053$.

Аналогично находим $P(X = 4) = 0{,}94^3 \cdot 0{,}06 \approx 0{,}50$.

Проверяются пять изделий, если первые четыре окажутся стандартными, так как при любом качестве пятого изделия по условию проверка партии заканчивается. Имеем $P(X = 5) = 0{,}94^4 \approx 0{,}781$.

Замечание 2.2.5. Тот же результат можно получить и другим способом. Пять изделий проверяются в двух случаях, которые являются несовместными событиями: 1) первые четыре изделия окажутся стандартными, а пятое также стандартным; 2) первые четыре изделия окажутся стандартными, а пятое - не стандартным. Вероятности этих случаев по теореме умножения для независимых событий равны $0{,}94^4 \cdot 0{,}94$ и $0{,}94^4 \cdot 0{,}06$, а поэтому в соответствии с теоремой сложения, вероятность того, что контролер будет проверять пять изделий, определится так:

$$P(X = 5) = 0{,}94^4 \cdot 0{,}94 + 0{,}94^4 \cdot 0{,}06 = 0{,}94^4 \cdot (0{,}94 + 0{,}06) = 0{,}94^4 \approx 0{,}781.$$

Следовательно, закон распределения рассматриваемой случайной величины X можно представить в следующем виде:

x_i	1	2	3	4	5

p_i	0,06	0,056	0,053	0,050	0,781

Сделаем проверку условия (2.1.2):

0,06 + 0,056 + 0,053 + 0,050 + 0,781 = 1, т.е. условие выполнено.

Пример 2.2.9. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x \le 0,\\ x/2 & при \quad 0 < x \le 2,\\ 1 & при \quad x > 2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания случайная величина X примет значение, заключенное в интервале $(1, 2)$.

Решение. В этом интервале функция распределения равна: $F(x) = x/2.$ Следовательно, в соответствии с формулой (2.2.12) получаем:

$$P(1 < x < 2) = F(2) - F(1) = (2/2) - (1/2) = 0{,}5.$$

Пример 2.2.10. Два стрелка делают по одному выстрелу в одну мишень. Вероятность попадания для первого стрелка при одном выстреле $p_1 = 0{,}5$, для второго - $p_2 = 0{,}4$. Дискретная случайная величина X - число попаданий в мишень. Найти функцию распределения этой случайной величины. Найти вероятность события $(X \ge 1)$.

Решение. Найдем сначала ряд распределения данной дискретной случайной величины X. Эта величина может принимать три значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2$.

Введем обозначения: событие A_1 - «попадание первого стрелка»; событие A_2 - «попадание второго стрелка». События $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ - промахи стрелков соответственно. Из условия задачи следует, что

$$q_1 = P\left(\overline{A_1}\right) = 1 - p_1 = 0{,}5,$$

$$q_2 = P\left(\overline{A_2}\right) = 1 - p_2 = 0{,}6.$$

Значению $x_1 = 0$ соответствует случай, когда у обоих стрелков промахи, т.е. произошло событие $A = \overline{A_1}\,\overline{A_2}$, где $\overline{A_1}$ и $\overline{A_2}$ - независимые события, поскольку события A_1 и A_2 независимы.

По теореме умножения получаем:

$P(X=0)=P(A)=P(\overline{A_1})\cdot P(\overline{A_2})=0{,}5\cdot 0{,}6=0{,}3$.

Значению $x_2=1$ соответствует случай, когда число попаданий равно единице: попадание у первого стрелка и промах у второго или попадание у второго и промах у первого. Это значит, что произошло событие $B=\overline{A_1}\ \overline{A_2}+A_2\ \overline{A_1}$, где $A_1\ \overline{A_2}$ и $A_2\ \overline{A_1}$ - несовместные события, A_1 и $\overline{A_2}$, A_2 и $\overline{A_1}$ - независимые события соответственно. На основании теорем сложения и умножения находим:

$P(X=1)=P(B)=P(A_1\overline{A_2})+P(A_2\overline{A_1})=P(A_1)P(\overline{A_2})+P(A_2)P(\overline{A_1})=$

$=0{,}5\cdot 0{,}6+0{,}4\cdot 0{,}5=0{,}3+0{,}2=0{,}5$.

Значению $x_3=2$ соответствует случай, когда оба стрелка попали, т.е. произошло событие $C=A_1A_2$.

Следовательно, $P(X=2)=P(C)=P(A_1A_2)=P(A_1)P(A_2)=0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}2$.

Таким образом, ряд распределения данной случайной величины можно задать таблицей:

x_i	0	1	2
p_i	0,3	0,5	0,2

В соответствии с формулой (2.2.13) строим функцию распределения.

1. При $x\le 0$, $F(x)=\sum\limits_{x_k<0}P(X=x_k)=0$.

2. При $0<x\le 1$, $F(x)=\sum\limits_{x_k<1}P(X=x_k)=P(X=0)=0{,}3$.

3. При $1<x\le 2$,

$$F(x)=\sum_{x_k<2}P(X=x_k)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}3+0{,}5=0{,}8.$$

4. При $x>2$, $F(x)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}3+0{,}5+0{,}2=1$.

Таким образом, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ 0{,}3 & при \quad 0<x\le 1,\\ 0{,}8 & при \quad 1<x\le 2,\\ 1 & при \quad x>2.\end{cases}$$

График функции распределения изображен на рис.2.2.11.

Найдем вероятность события $(X \ge 1)$. Это событие равно сумме двух событий $(X=1)$, $(X=2)$.

Следовательно, $P(X\ge 1)=P(X=1)+P(X=2)=0{,}5+0{,}2=0{,}7$.

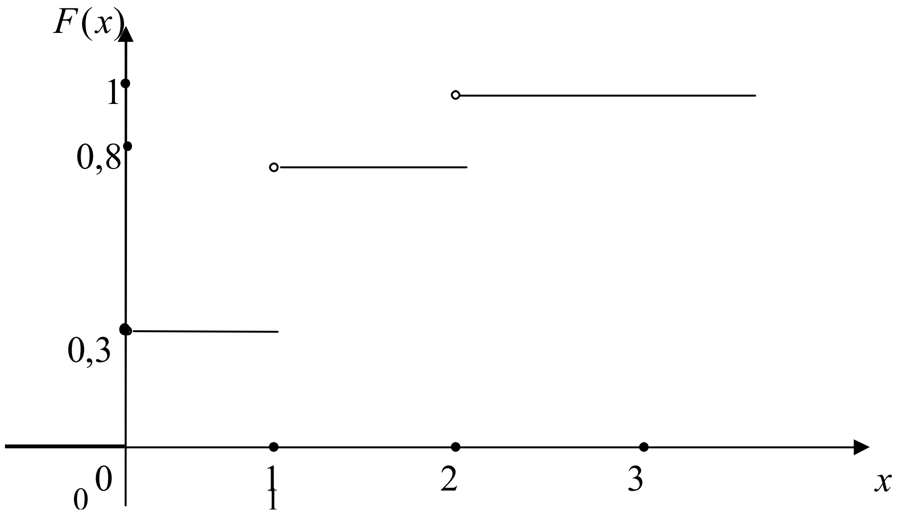


Рисунок 2.2.11

Пример 2.2.11. Трижды подбрасывается симметричная монета. Найти функцию распределения случайной величины X - числа выпавших орлов.

Решение. Данная дискретная случайная величина может принимать четыре значения: $x_1=0, x_2=1, x_3=2, x_4=3$.

Обозначим через A_1, A_2, A_3 событие «выпал орел» при первом, втором, третьем подбрасываниях соответственно. В данном испытании 8 элементарных исходов: $\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$; $A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3}$; $\overline{A_1}A_2\overline{A_3}$; $\overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$; $\overline{A_1}A_2A_3$; $A_1\overline{A_2}A_3$; $A_1A_2\overline{A_3}$; $A_1A_2A_3$.

Учитывая независимость событий A_1, A_2, A_3 и противоположных им событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3$, вероятность появления орла при одном подбрасывании равна 1/2. Находим соответствующие вероятности:

$$P(X=0)=P(\overline{A}_1\overline{A}_2\overline{A}_3)=P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)=\frac{1}{8};$$

$$P(X=1)=P(A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3)=3\cdot\frac{1}{8}=\frac{3}{8};$$

$$P(X=2)=P(\overline{A}_1A_2A_3+A_1\overline{A}_2A_3+A_1A_2\overline{A}_3)=\frac{3}{8};$$

$$P(X=3)=P(A_1A_2A_3)=P(A_1)P(A_2)P(A_3)=\frac{1}{8}.$$

Итак, закон распределения рассматриваемой дискретной случайной величины X может быть представлен следующей таблицей:

x_i	0	1	2	3
p_i	1/8	3/8	3/8	1/8

В соответствии с формулой (2.2.13) находим функцию распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ 1/8 & при \quad 0<x\le 1,\\ 1\backslash 2 & при \quad 1<x\le 2,\\ 7\backslash 8 & при \quad 2<x\le 3,\\ 1 & при \quad x>3.\end{cases}$$

Пример 2.2.12. Плотность вероятности случайной величины X задана функцией

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad x\le 0,\\ x/2 & при \quad 0<x\le 2,\\ 0 & при \quad x>2.\end{cases}$$

Найти вероятность того, что в результате испытания величина X примет значение из интервала $(1, 2)$.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (2.2.15):

$$P(1 < X < 2) = \int_1^2 \frac{x}{2}dx = \left.\frac{x^2}{4}\right|_1^2 = \frac{2^2}{4} - \frac{1^2}{4} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75.$$

Пример 2.2.13. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, плотность вероятности которой определена функцией

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0 \quad \textit{и} \quad x > 2, \\ x & \textit{при} \quad 0 < x \le 1, \\ 2 - x & \textit{при} \quad 1 < x \le 2. \end{cases}$$

Решение. Чтобы найти функцию распределения $F(x)$, воспользуемся формулой (2.2.16).

При $x \le 0$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx = 0$.

При $0 < x \le 1$ находим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x t\,dt = 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^x = \frac{x^2}{2}.$$

При $1 < x \le 2$ находим:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} f(t)dt + \int_0^1 f(t)dt + \int_1^x f(t)dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^1 t\,dt + \int_1^x (2-t)dt =$$

$$= 0 + \left.\frac{t^2}{2}\right|_0^1 + \left.\left(2t - \frac{t^2}{2}\right)\right|_1^x = \frac{1}{2} + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{x^2}{2} + 2x - 1.$$

При $x > 2$ получаем $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int\limits_{-\infty}^{2} f(t)dt + \int\limits_0^x f(t)dt = F(2) + \int\limits_2^x 0\,dt = 1.$

Таким образом, искомая функция распределения имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при} \quad x \le 0, \\ x^2/2 & \textit{при} \quad 0 < x \le 1, \\ -x^2/2 + 2x - 1 & \textit{при} \quad 1 < x \le 2, \\ 1 & \textit{при} \quad x > 2. \end{cases}$$

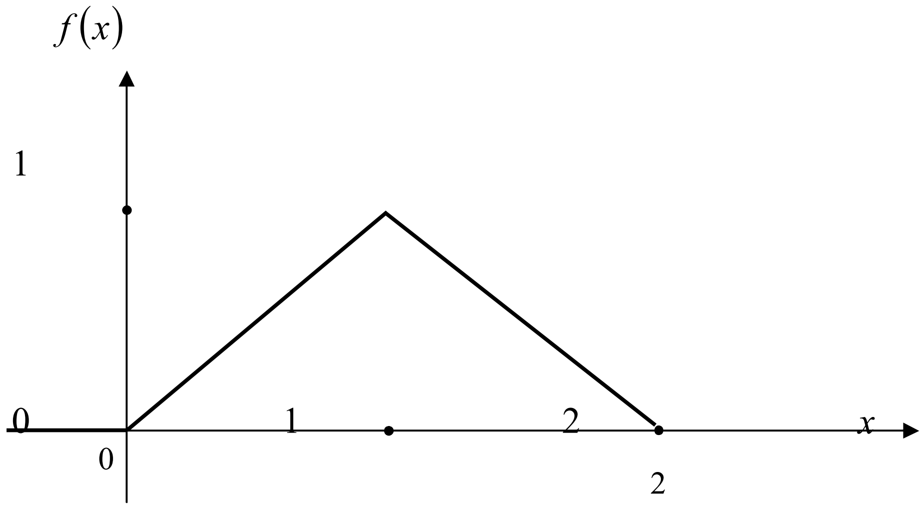


Рисунок 2.2.12

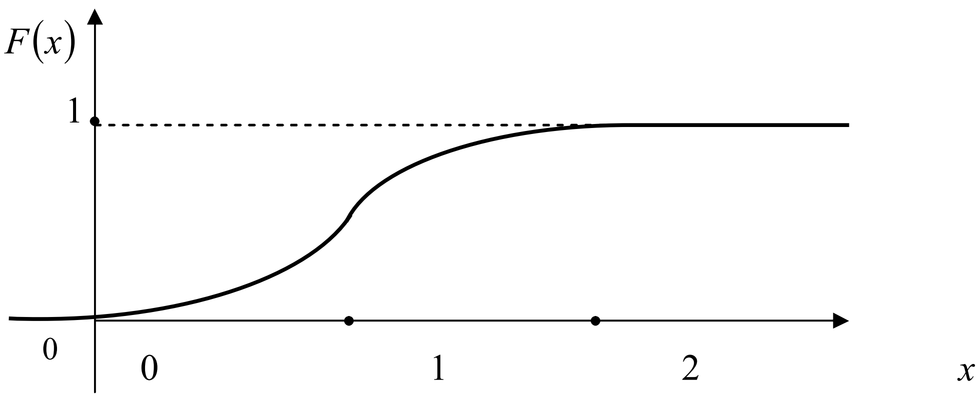


Рисунок 2.2.13

Графики функции плотности вероятности $f(x)$ и функции распределения $F(x)$ изображены на рисунках 2.2.12 и 2.2.13 соответственно.

Пример 2.2.14. График плотности распределения вероятностей случайной величины X изображен на рисунке 2.2.14.

Записать аналитическое выражение для плотности вероятностей, найти функцию распределения.

Решение. Пользуясь графиком, записываем аналитическое выражение плотности распределения вероятностей данной случайной величины:

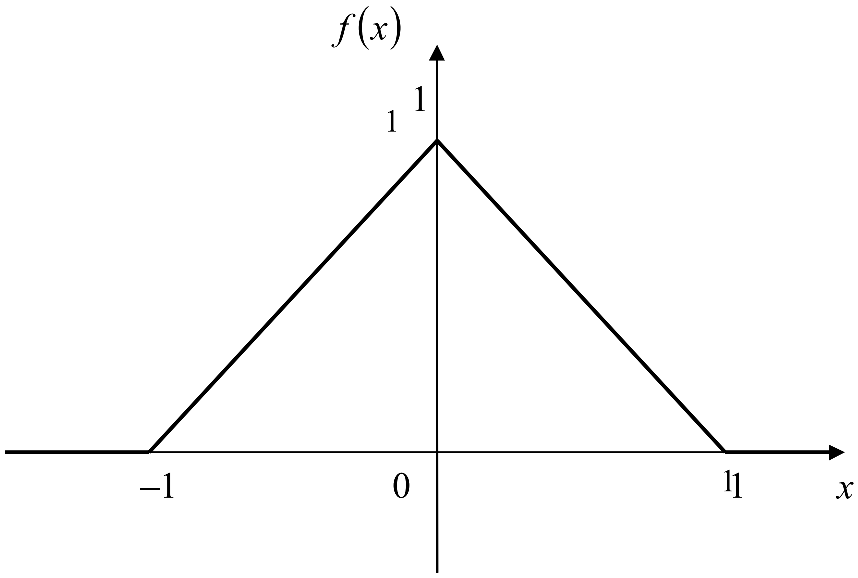


Рисунок 2.2.14

$$f(x)=\begin{cases}0 & при \quad |x|>1,\\ x+1 & при \quad -1<x\le 0,\\ -x+1 & при \quad 0<x\le 1.\end{cases}$$

Чтобы найти функцию распределения $F(x)$, воспользуемся формулой (2.2.16).

При $x\le -1$ $F(x)=\int\limits_{-1}^{x}0\,dx=0$.

При $-1<x\le 0$ $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int\limits_{-1}^{x}(t+1)dt=0+\left.\frac{(t+1)^2}{2}\right|_{-1}^{x}=\frac{(x+1)^2}{2}$.

При $0<x\le 1$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0\,dt+\int\limits_{-1}^{0}(x+1)dx+\int\limits_{0}^{x}(-t+1)dt=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0}-\left.\frac{(1-t)^2}{2}\right|_{0}^{x}=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{(1-x)^2}{2}=1-\frac{(1-x)^2}{2}.$$

При $x>1$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{-1}0dx+\int\limits_{-1}^{0}(x+1)dx+\int\limits_{0}^{1}(-x+1)dx+\int\limits_{1}^{x}0dx=$$

$$=\left.\frac{(x+1)^2}{2}\right|_{-1}^{0}-\left.\frac{(1-x)^2}{2}\right|_{0}^{1}=\frac{1}{2}-0-\left(0-\frac{1}{2}\right)=1.$$

Следовательно, функция распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le -1, \\ \dfrac{(x+1)^2}{2} & при\ -1 < x \le 0, \\ 1-\dfrac{(1-x)^2}{2} & при\ 0 < x \le 1, \\ 1 & при\ x > 1. \end{cases}$$

График функции распределения изображен на рис. 2.2.14.

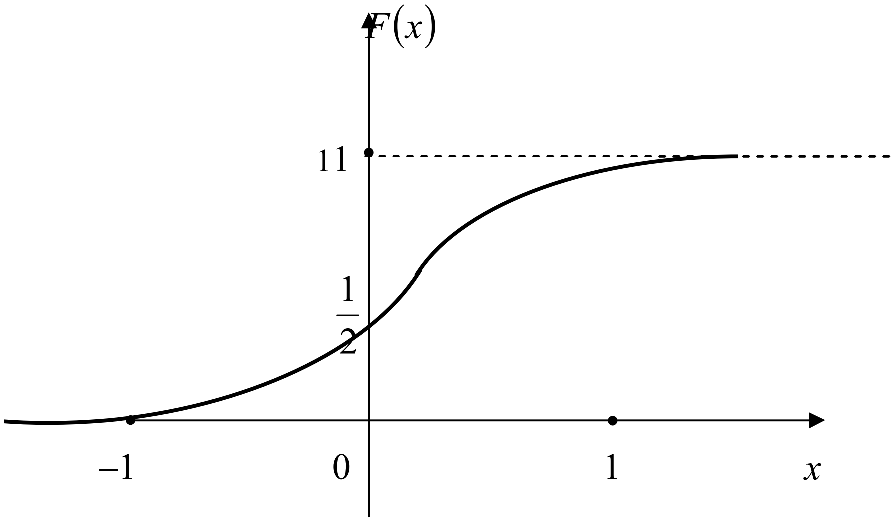


Рисунок 2.2.15

Для закрепления данной темы предлагаем решить следующие задачи.

Задачи:

1. Задает ли закон распределения дискретной случайной величины каждая из следующих таблиц:

а)

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,5	0,15	0,20	0,25	0,35

б)

x_i	5	6	7	8	9
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4	0,15

в)

x_i	S	S^2	S^3	$\cdots$	$1/2^k$	$\cdots$
p_i	$2/3$	$2/3^2$	$2/3^3$	$\cdots$	$2/3^k$	$\cdots$

г)

x_i	1	j	j^2	$\cdots$	$1/4^k$	$\cdots$
p_i	1	$1/3$	$1/5$	$\cdots$	$1/2k-1$	$\cdots$

д)

x_i	1	$1/3$	$1/3^2$	$\cdots$	$1/3^k$	$\cdots$
p_i	1	j	j^2	$\cdots$	$1/4^k$	$\cdots$

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8
p_i	0,15	0,2	0,3	p_4	0,15

Чему равна вероятность $p_4 = P(X = 0{,}6)$? Постройте многоугольник распределения.

3. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	p_1	0,15	0,30	0,25	p_5

Найдите вероятность $p_1 = P(X = 1)$ и $p_5 = P(X = 5)$, если известно, что p_5 в 2 раза больше p_1.

4. Подбрасываются две симметричные монеты, подсчитывается число цифр на обеих верхних сторонах монет. Запишите закон распределения случайной величины X - числа выпадения цифр на обеих монетах.

5. В урне 7 шаров, из которых 4 голубых, а остальные красные. Из этой урны извлекаются 3 шара. Найдите закон распределения дискретной случайной величины X - числа голубых шаров в выборке.

6. В партии из 10 деталей имеются 8 стандартных. Из этой партии наудачу взято 2 детали. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной числу стандартных деталей в выборке.

7. Подбрасываются три игральных кубика, подсчитывается число очков на верхних гранях кубиков. Найдите закон распределения дискретной случайной величины, равной сумме очков, выпавших на трех кубиках.

8. Случайная величина X задана функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при \quad x \le 0, \\ x/4 & при \quad 0 < x \le 4, \\ 1 & при \quad x > 4. \end{cases}$$

Найдите вероятность того, что в результате испытания случайная величина примет значение из интервала (2,4).

9. Закон распределения дискретной случайной величины X задан таблицей

x_i	6	8	12	15
p_i	0,1	3/20	0,5	0,25

Найдите функцию распределения этой случайной величины. Найдите вероятность того, что $6 < X \le 12$.

10. Подбрасываются две монеты. Случайная величина X - число выпадений герба на верхних сторонах монеты. Найдите функцию распределения случайной величины X. Постройте график этой функции.

11. Из 25 контрольных работ, 5 работ оценены на «отлично». Наугад извлекают 3 работы. Найдите функцию распределения дискретной случайной величины X, равной числу работ, оцененных на «отлично» среди извлеченных. Используя функцию распределения, найдите вероятность события $1 \le X \le 2$.

12. Является ли плотностью распределения некоторой случайной величины каждая из следующих функций:

а) $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0\ и\ x>1, \\ 1 & при\ 0<x\le 1; \end{cases}$

б) $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0\ и\ x>1, \\ x(1-x) & при\ 0<x\le 1; \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le -1\ и\ x>1, \\ 3x^2/2 & при\ -1<x\le 1; \end{cases}$

г) $f(x)=\dfrac{x}{1+x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty)$?

13. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ x^2 & при\ 0<x\le 1, \\ 1 & при\ x>1. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения случайной величины X. Чему равна вероятность того, что случайная величина X примет значение из интервала (0,5;1)?

14. Функция распределения случайной величины X имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le -1, \\ 1/2 & при\ -1<x\le 0, \\ (x+1)/2 & при\ 0<x\le 1, \\ 1 & при\ x>1. \end{cases}$$

Найдите плотность распределения $f(x)$ этой случайной величины.

Чему равна вероятность того, что значение случайной величины X принадлежит интервалу (0,5;1)?

Ответы:

1) а) да; б) нет; в) да; г) нет; д) нет. **2)** $p_4 = 0{,}2$. **3)** $p_1 = 0{,}10$, $p_3 = 0{,}20$. **7)** Указание. Всего равновозможных элементарных исходов $6^3 = 216$. Число исходов, благоприятствующих суммам: 3 и 18 – 1; 4 и 17 - 3; 5 и 16 – 6; 6 и 15-10; 7 и 14-15; 8 и 13-21; 9 и 12-25; 10 и 11-27. **8)** S. **12)** а) да; б) нет; в) да; г) нет. ($f(x) < 0 \quad при\ x < 0$). **13)** $f(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ 2x & при\ 0 < x \le 1, \\ 0 & при\ x > 1; \end{cases}$ $P(0{,}5 < X < 1) = 0{,}75.$ **14)** $p = 0{,}5$.

Вопросы для самопроверки:

1. Что называют случайной величиной?

2. Какую величину называют дискретной случайной величиной?

3. Какую величину называют недискретной случайной величиной?

4. Что называют законом распределения дискретной случайной величины?

5. Как задают закон распределения дискретной случайной величины, принимающей конечное множество значений?

6. Что называют многоугольником распределения?

7. Как задают закон распределения дискретной случайной величины, принимающей счетное множество значений?

8. Как определяется функция распределения случайной величины X?

9. Какие другие названия используют для функции распределения?

10. Как с помощью функции распределения $F(x)$ вычислить вероятность того, что случайная величина X примет значение из полуинтервала $[\alpha, \beta)$?

11. Какую случайную величину называют непрерывной?

12. Какими свойствами обладает функция распределения случайной величины X?

13. Какой вид имеет график функции распределения?

14. Чему равна вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно, заданное определенное значение?

15. Можно ли утверждать, что событие A является невозможным, если $P(A) = 0$?

16. Как найти функцию распределения для дискретной случайной величины, заданной рядом распределения?

17. Является ли непрерывной функция распределения для дискретной случайной величины?

18. Что называют плотностью распределения случайной величины?

19. Как по-другому называют плотность распределения?

20. Что называют кривой распределения?

21. Как с помощью плотности распределения найти вероятность попадания значений случайной величины X в интервал (α, β)?

22. Какие свойства имеет плотность распределения?

23. Как выражается функция распределения через плотность распределения?

24. Как выражается плотность распределения через функцию распределения?

2.3 Числовые характеристики случайных величин

1) $M(X)$ - математическое ожидание.

2) Моменты случайных величин.

3) $D(X)$ - дисперсия.

4) $\sigma(X)$ - среднее квадратическое отклонение и некоторые другие числовые характеристики.

Закон распределения полностью характеризует случайную величину. Однако при решении многих практических задач достаточно знать лишь некоторые числовые параметры, характеризующие отдельные существенные свойства закона распределения случайной величины.

Важнейшими среди них являются характеристики положения: математическое ожидание (центр распределения случайной величины), мода, медиана;

характеристики рассеяния: дисперсия (отклонение значений случайной величины от ее центра), среднее квадратическое отклонение.

1) *Математическое ожидание.*

Определение 2.3.1. ***Математическим ожиданием дискретной случайной величины*** X, принимающей

а) *конечное множество значений* с законом распределения

$P(X = x_k) = p_k$, $k = 1,2,...,n$, где $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$,

называется сумма произведений ее значений на их соответствующие вероятности и записывается:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k \qquad (2.3.1)$$

б) *бесконечную последовательность значений* с законом распределения

$P(X = x_k) = p_k$, $k = 1,2,3....$, где $\sum_{k=1}^{\infty} p_k = 1$,

также называется сумма произведений ее значений на их соответствующие вероятности и записывается:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k , \qquad (2.3.2)$$

но, при условии, что этот ряд сходится абсолютно.

Для обозначений математического ожидания используются и другие символы: $M(X) = M[X] = a = m_x$.

Замечание 2.3.1. Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно среднему арифметическому всех ее возможных значений. Поэтому, математическое ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины часто называют ее средним значением. Так как $P_1 + P_2 + P_3 + ... + P_n = 1$, то

$$M(X) = \frac{\sum_{k=1}^{n} x_k p_k}{\sum_{k=1}^{n} p_k} = \frac{x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n}{p_1 + p_2 + ... + p_n} = x_{среднее} \qquad (2.3.3)$$

Определение 2.3.2. ***Математическим ожиданием непрерывной случайной величины*** X, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty;+\infty)$ с плотностью вероятностей $f(x)$, называется число, вычисляемое по формуле:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx, \qquad (2.3.4)$$

При условии абсолютной сходимости данного несобственного интеграла.

Если все значения непрерывной случайной величины X принадлежат отрезку $[\alpha;\beta]$, а $f(x)$ - ее плотность вероятностей, то математическое ожидание этой величины определяется формулой:

$$M(X)=\int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx \qquad (2.3.5)$$

Замечание 2.3.2. Математическое ожидание есть величина постоянная.

Если случайная величина $X=C$, где $C=const$, то ее закон распределения имеет вид:

x_i	C
p_i	1

Свойства математического ожидания

1. Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(C)=C, \text{ где } C=const. \qquad (2.3.6)$$

2. Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$M(CX)=CM(X),\ C=const. \qquad (2.3.7)$$

3. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y). \qquad (2.3.8)$$

Замечание 2.3.3. Свойство 3 распространяется на случай n случайных величин.

$$M(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = M(X_1) + M(X_2) + \ldots + M(X_n). \qquad (2.3.9)$$

4. Математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности их математических ожиданий:

$$M(X - Y) = M(X) - M(Y). \qquad (2.3.10)$$

5. Математическое ожидание произведения двух независимых случайных величин равно произведению математических ожиданий этих величин:

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y). \qquad (2.3.11)$$

Замечание 2.3.4. Свойство 5 распространяется на случай n независимых случайных величин.

$$M(X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n) = M(X_1) \cdot M(X_2) \cdot \ldots \cdot M(X_n). \qquad (2.3.12)$$

Пример 2.3.1. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей:

x_i	3	4	5	6	7
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Решение. В соответствии с формулой (2.3.1) находим:

$$M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 4 \cdot 0{,}2 + 5 \cdot 0{,}4 + 6 \cdot 0{,}2 + 7 \cdot 0{,}1 = 0{,}3 + 0{,}8 + 2{,}0 + 1.2 + 0{,}7 = 5$$

Итак, математическое ожидание данной случайной величины равно 5. Неравенства выполняются: $3 < 5 < 7$.

Пример 2.3.2. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей

x_i	-4	-2	0	2	4
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

Записать законы распределения случайных величин $3X$, $X/2$. Найти математическое ожидание случайных величин X ,$3X$, $X/2$.

Решение. Запишем законы распределения случайных величин $3X$ и $X/2$ с помощью таблиц:

$3x_i$	-12	-6	0	6	12
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

$\frac{x_i}{2}$	-2	-1	0	1	2
p_i	0,1	0,2	0,15	0,25	0,3

По формуле вычисляем математическое ожидание этих величин:

$$M(X) = -4 \cdot 0{,}1 + (-2) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}15 + 2 \cdot 0{,}25 + 4 \cdot 0{,}3 = 0{,}9$$

$$M(3X) = -12 \cdot 0{,}1 + (-6) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}15 + 6 \cdot 0{,}25 + 12 \cdot 0{,}3 = 2{,}7$$

$$M(X/2) = -2 \cdot 0{,}1 + (-1) \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}15 + 1 \cdot 0{,}25 + 2 \cdot 0{,}3 = 0{,}45$$

Замечание 2.3.5. Математическое ожидание случайных величин $3X$ и $X/2$ можно вычислить, пользуясь равенством (2.3.7), при известном математическом ожидании величины X:

$$M(3X) = 3M(X) = 3 \cdot 0{,}9 = 2{,}7,$$

$$M\left(\frac{1}{2}X\right) = \frac{1}{2}M(X) = \frac{1}{2} \cdot 0{,}9 = 0{,}45.$$

Пример 2.3.3. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y: $M(X) = 3, M(Y) = 2$.

Найти математическое ожидание суммы и разности этих величин.

Решение. На основании формул (2.3.8), (2.3.10) заключаем, что

$$M(X+Y) = M(X) + M(Y) = 3 + 2 = 5,$$

$$M(X-Y) = M(X) - M(Y) = 3 - 2 = 1.$$

Пример 2.3.4. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y: $M(X) = 4$, $M(Y) = 5$.

Найти математическое ожидание их произведения.

Решение. Применяя формулу (2.3.11) находим:

$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) = 4 \cdot 5 = 20$.

Пример 2.3.5. Найти математическое ожидание случайной величины $Y = 2X + 7$, если известно, что $M(X) = 4$.

Решение. Пользуясь формулами(2.3.6), (2.3.7), (2.3.8) находим:

$M(Y) = M(2X + 7) = M(2X) + M(7) = 2M(X) + 7 = 2 \cdot 4 + 7 = 15$.

Пример 2.3.6. Подбрасываются два игральных кубика. Дискретная случайная величина X - сумма очков, выпавших на обоих кубиках. Найти математическое ожидание этой случайной величины.

Решение. Данная случайная величина принимает все целые значения от 2 до 12. Закон ее распределения можно задать следующей таблицей (см. пример 7 лекции 2.2):

									0	1	2

По формуле (2.24) находим

$$M(X) = 2 \cdot \frac{1}{36} + 3 \cdot \frac{2}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 5 \cdot \frac{4}{36} + 6 \cdot \frac{5}{36} + 7 \cdot \frac{6}{36} + 8 \cdot \frac{5}{36} + 9 \cdot \frac{4}{36} +$$

$$+ 10 \cdot \frac{3}{36} + 11 \cdot \frac{2}{36} + 12 \cdot \frac{1}{36} = \frac{2 + 6 + 12 + 20 + 30 + 42 + 40 + 36 + 30 + 22 + 12}{36} =$$

$$= \frac{252}{36} = 7.$$

Замечание 2.3.6. Этот результат можно получить проще. Случайную величину числа очков, выпадающих на одном кубике, обозначим через X, а на другом - через Y. Эти случайные величины имеют одинаковые законы распределения. По формуле (2.3.8) получаем:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=3{,}5+3{,}5=7\,.$$

Замечание 2.3.7. Поскольку величины X и Y независимы, то можно найти и математическое ожидание случайной величины $Z=XY$ - произведения числа очков, выпавших при одновременном подбрасывании двух кубиков. По формуле(2.3.11) имеем:

$$M(Z)=M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(Y)=3{,}5\cdot 3{,}5=12{,}25$$

Пример 2.3.7. Дискретная случайная величина X, которая может принимать бесконечную последовательность значений, задана следующим законом распределения:

x_i	1/3	$1/3^2$	$1/3^3$	$\dots$	$1/3^к$	$\dots$
p_i	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	$\dots$	$1/2^к$	$\dots$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1\,.$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение. По формуле(2.3.2) находим:

$$M(X)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^k}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{6^k}=\frac{1/6}{1-1/6}=\frac{1}{5}\,.$$

Пример 2.3.8. В лотерее имеется 1000 билетов, из них выигрышных 10 по 500 руб., 50 по 50 руб., 100 по 100 руб., 150 по 1 руб. Найти математическое ожидание суммы выигрыша на один билет.

Решение. Составим закон распределения случайной величины X - суммы выигрыша на один билет:

x_i	0	1	10	50	500
p_i	0,69	0,15	0,1	0,05	0,01

Вероятность событий $X = 0, X = 1, X = 50, X = 100, X = 500$ можно определить из классического определения вероятности $P(A) = \dfrac{m}{n}$.

Из 1000 билетов, выигрышных 10+50+100+150 = 310, тогда билетов, на которых нет выигрыша 1000-310 = 690. Следовательно,

$$P(X = 0) = \frac{690}{1000} = 0{,}69;\ P(X = 1) = \frac{150}{1000} = 0{,}15;$$

$$P(X = 100) = \frac{100}{1000} = 0{,}1;\ P(X = 50) = \frac{50}{1000} = 0{,}05;$$

$$P(X = 500) = \frac{10}{1000} = 0{,}01.$$

$$\sum_{k=1}^{5} p_k = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 100) + P(X = 50) + P(X = 500) =$$

$$= 0{,}69 + 0{,}15 + 0{,}1 + 0{,}05 + 0{,}01 = 1.$$

Тогда $M(X) = 0{,}69 \cdot 0 + 0{,}15 \cdot 1 + 0{,}1 \cdot 100 + 0{,}05 \cdot 50 + 0{,}01 \cdot 500 = 17{,}65$ руб.

Математическое ожидание – не единственная характеристика положения, применяемая в теории вероятностей. Иногда применяются и другие: *мода и медиана*.

Определение 2.3.3. ***Модой*** дискретной случайной величины называется ее значение, принимаемое, с наибольшей вероятностью по сравнению с двумя соседними значениями и обозначается через $M_0(X)$.

Определение 2.3.4. ***Модой*** $M_0(X)$ непрерывной случайной величины, называют то ее возможное значение, которому соответствует локальный максимум плотности распределения $f(x)$.

Определение 2.3.5. Распределение случайной величины X называется унимодальным, если мода единственна, в противном случае – полимодальным.

На рисунке 2.3.1 изображено полимодальное распределение непрерывной случайной величины, в данном случае имеем две моды.

Наличие более чем одной моды часто указывает на разнородность статистического материала, легшего в основу исследования.

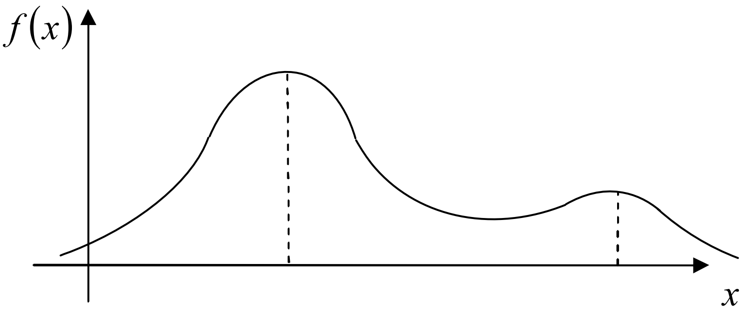


Рисунок 2.3.1

Пример 2.3.9. Пусть случайная величина X задана следующим рядом распределения:

x_i	0	1	2	3	4
p_i	0,2	0,4	0,25	0,1	0,05

Найти моду данной случайной величины.

Решение. В силу определения можно заметить, что мода $M_0(X)$=1.

Определение 2.3.6. ***Медианой*** $M_e(X)$ непрерывной случайной величины X, называется такое ее значение x_p, для которого выполняется равенство

$$P(X < x_p) = P(X > x_p) = \frac{1}{2}, \qquad (2.3.13)$$

т.е. одинаково вероятно, окажется ли случайная величина X меньше x_p или больше x_p.

Замечание 2.3.8.

1) С помощью функции распределения $F(x)$ равенство (2.3.13) можно записать:

$$F(M_e(X)) = 1 - F(M_e(X)), \qquad (2.3.14)$$

отсюда следует, что

$$F\left(M_e(X)\right)=\frac{1}{2}. \qquad (2.3.15)$$

2) Для дискретной случайной величины медиана обычно не определяется.

3) Геометрически медиана – это абсцисса той точки на оси Ox, для которой площади, лежащие слева и справа от нее, одинаковы и равны $\frac{1}{2}$.

Пример 2.3.10. Найдем математическое ожидание, моду и медиану случайной величины X с плотностью распределения

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{\textit{при} } x<0,\\ \frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2 & \text{\textit{при} } 0\le x\le 3,\\ 0 & \text{\textit{при} } x>3.\end{cases}$$

Решение.

$$M(X)=\int_0^3 x\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\left[\frac{2x^3}{9}-\frac{x^4}{18}\right]_0^3=6-\frac{9}{2}=\frac{3}{2}.$$

По определению мода находится в локальных максимумах функции $f(x)$. Вспомним, что максимумы и минимумы функции могут находиться в точках, где $f'(x)=0$. Тогда, производная $f(x)$ равна $f'(x)=\frac{2}{3}-\frac{4x}{9}$. Приравнивая ее к нулю, получаем: $\frac{2}{3}-\frac{4x}{9}=0$. Откуда $M_0(X)=\frac{3}{2}$.

Медиана находится из условия:

$$\int_0^{M_e}\left(\frac{2}{3}x-\frac{2}{9}x^2\right)dx=\left[\frac{x^2}{3}-\frac{2x^3}{27}\right]_0^{M_e}=\frac{(M_e)^2}{3}-\frac{2(M_e)^3}{27}=0{,}5,$$

откуда

$$M_{e_1}=\frac{3}{2},\ M_{e_2}=\frac{3}{2}\left(1+\sqrt{3}\right),\ M_{e_3}=\frac{3}{2}\left(1-\sqrt{3}\right).$$

Из трех полученных значений в интервал $[0,3]$ попадает только $M_{e_1}=\frac{3}{2}$.

Таким образом, для данной случайной величины X значения математического ожидания, моды и медианы совпадают и равны $\frac{3}{2}$.

Кроме числовых характеристик положения, в теории вероятностей употребляются также ряд других характеристик различного назначения. Среди них особенно выделяют моменты – начальные и центральные.

2) ***Моменты случайных величин.***

Определение 2.3.7. ***Начальным моментом*** k-го порядка случайной величины X, называется математическое ожидание k-ой степени этой величины:

$$\nu_k(X) = M\left(X^k\right). \qquad (2.3.16)$$

Для дискретной случайной величины X начальный момент k-го порядка выражается суммой:

$$\text{а) } \nu_k(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k \cdot p_i\,, \qquad (2.3.17)$$

если она принимает конечное множество значений;

$$\text{б) } \nu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k \cdot p_i\,, \qquad (2.3.18)$$

если дискретная случайная величина принимает счетное множество значений и при условии, что этот ряд сходится абсолютно.

Начальный момент порядка k-го порядка непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ определяется формулой:

$$\nu_k(X) = M(X^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \cdot f(x)dx\,, \qquad (2.3.19)$$

если интеграл сходится абсолютно.

Из определения начального момента k-го порядка случайной величины X можно заметить, что математическое ожидание случайной величины – это ее первый начальный момент:

$$\nu_1(X) = M(X). \qquad (2.3.20)$$

Определение 2.3.8. ***Центрированной*** случайной величиной называется отклонение случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$:

$$\overset{0}{X} = X - M(X). \qquad (2.3.21)$$

Замечание 2.3.9. Математическое ожидание центрированной случайной величины равно нулю:

$$M(\overset{0}{X}) = M(X - M(X)) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)p_i = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i - m_x \sum_{i=1}^{n} p_i = m_x - m_x = 0.$$

Аналогично можно показать и для непрерывной случайной величины.

Центрирование случайной величины равносильно переносу начала отсчета в точку $m_x = M(X)$.

Моменты центрированной случайной величины называют центральными моментами. Они аналогичны моментам относительно центра масс в механике.

Определение 2.3.9. ***Центральным моментом*** k-го порядка случайной величины X называется математическое ожидание k-ой степени центрированной случайной величины:

$$\mu_k(X) = M((\overset{0}{X})^k) = M\left((X - m_x)^k\right). \qquad (2.3.22)$$

Центральный момент дискретной случайной величины X выражается суммой:

$$\text{а) } \mu_k(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^k p_i, \qquad (2.3.23)$$

если она принимает конечное множество значений.

$$\text{б) } \mu_k(X) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - m_x)^k p_i, \qquad (2.3.24)$$

если дискретная случайная величина принимает счетное множество значений и при условии, что ряд сходится абсолютно.

Для непрерывной случайной величины X с плотностью распределения $f(x)$ центральный момент k- го порядка определяется по формуле:

$$\mu_k(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^k f(x) dx, \qquad (2.3.25)$$

если интеграл сходится абсолютно.

Принимая во внимание замечание 9, очевидно, что центральный момент первого порядка равен нулю.

Пример 2.3.11. Показать, что начальный момент нулевого порядка равен единице.

Решение. Формулы (2.3.17), (2.3.18), (2.3.19) при k =0 принимают соответственно вид:

$$\nu_0 = \sum_{i=1}^{n} x_i^0 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

$$\nu_0 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^0 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$\nu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^0 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1.$$

Эти равенства получены с учетом формул (2.1.2), (2.1.4), (2.2.18).

Итак, начальный момент нулевого порядка случайной величины X равен единице.

Пример 2.3.12. Доказать, что центральный момент нулевого порядка равен единице. Найти центральный момент второго порядка случайной величины X .

Решение. При k =0 формулы (2.3.23), (2.3.24),(2.3.25) принимают соответственно вид:

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{n} (x_i - m_x)^0 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{n} p_i = 1,$$

$$\mu_0 = \sum_{i=1}^{\infty} (x_i - m_x)^0 \cdot p_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1,$$

$$\mu_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^0 \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1,$$

что доказывает первое утверждение.

Формулы (2.3.22), (2.3.23), (2.3.24),(2.3.25) при k =2 принимают соответственно вид:

$$\mu_2(X) = M((\overset{0}{X})^2) = M\left((X-m_x)^2\right) = M(X^2 - 2Xm_x + m_x^2) =$$

$$= M(X^2) - 2m_x M(X) + m_x^2 = M(X^2) - m_x^2 = \nu_2 - m_x^2. \qquad *$$

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i \text{ или } \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x{}^2, \qquad **$$

$$\mu_2 = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - m_x)^2 p_i \text{ или } \mu_2 = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - m_x{}^2, \qquad ***$$

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx \text{ или } \mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_x{}^2. \qquad ****$$

Для практики особое значение имеет центральный момент второго порядка случайной величины X. Он называется дисперсией этой величины.

3) Дисперсия.

Определение 2.3.10. ***Дисперсией*** или ***рассеянием*** случайной величины X, называется математическое ожидание квадрата соответствующей центрированной случайной величины.

Для нее вводится специальное обозначение, и записывают:

$$D(X) = \mu_2(X) = M((\overset{0}{X})^2) = M\left((X-m_x)^2\right) \qquad (2.3.26)$$

В примере 12 данного параграфа, выведенные формулы (*), (**), (***), (****) служат формулами для вычисления дисперсии, т.е.:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n}(x_i - m_x)^2 p_i \text{ или } D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_x{}^2, \qquad (2.3.27)$$

$$D(X) = \sum_{i=1}^{\infty}(x_i - m_x)^2 p_i \text{ или } D(X) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 p_i - m_x{}^2, \qquad (2.3.28)$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_x)^2 f(x)dx \text{ или } D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_x{}^2. \qquad (2.3.29)$$

В частности, если все возможные значения X принадлежат интервалу $(a;b)$, то

$$D(X)=\int_a^b (x-m_x)^2 f(x)dx \text{ или } D(X)=\int_a^b x^2 f(x)dx - m_x{}^2. \qquad (2.3.30)$$

В этом же примере из формулы (*) можно заметить, что дисперсию можно вычислить через второй начальный момент, а именно:

$$D(X)=\nu_2 - m_x^2. \qquad (2.3.31)$$

Эта формула бывает удобной в случае более простого вычисления второго начального момента, чем самой дисперсии по определению.

Выведенная формула (*), позволяет дать определение дисперсии следующим образом: ***дисперсия*** *случайной величины равна разности математического ожидания квадрата этой величины и квадрата математического ожидания.*

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2 \qquad (2.3.32)$$

Свойства дисперсии

1. Дисперсия постоянной величины равна нулю.

$$D(C)=0, \quad C=const. \qquad (2.3.33)$$

Доказательство.

По определению дисперсии имеем:

$$D(C)=M\left((C-M(C))^2\right).$$

Далее, пользуясь первым свойством математического ожидания (математическое ожидание постоянной равно самой постоянной), получим:

$$D(C)=M\left((C-C)^2\right)=M(0)=0.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак дисперсии, возведя его в квадрат, т.е.

$$D(CX)=C^2D(X), \quad C=const. \qquad (2.3.34)$$

Доказательство.

По определению дисперсии имеем:

$$D(CX)=M\left((CX-M(CX))^2\right).$$

Пользуясь вторым свойством математического ожидания (постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания), получим:

$$D(CX) = M\left((CX - CM(X))^2\right) = M[C^2(X - M(X))^2] = C^2M[(X - M(X))^2] =$$

$$= C^2D(X).$$

3. Дисперсия алгебраической суммы двух независимых случайных величин равна сумме дисперсий:

$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y). \qquad (2.3.35)$$

Упражнение. Докажите свойство 3 дисперсии.

Замечание 2.3.10. Свойство 3 распространяется и на ***n*** независимых случайных величин:

$$D(X_1 + X_2 + \ldots + X_n) = D(X_1) + D(X_2) + \ldots + D(X_n). \qquad (2.3.36)$$

4. Из определения и свойств математического ожидания следует, что дисперсия любой случайной величины неотрицательна, т.е. $D(X) \geq 0$.

4) *Среднее квадратическое отклонение. Асимметрия и Эксцесс. Квантили.*

Дисперсия $D(X)$ имеет размерность квадрата случайной величины X, что не всегда удобно. Для наглядности в качестве характеристики рассеивания удобнее пользоваться числом, размерность которого совпадает с размерностью случайной величины. Для этого извлекают из дисперсии квадратный корень.

Определение 2.3.11. ***Средним квадратическим отклонением*** случайной величины X называется квадратный корень из ее дисперсии.

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} \qquad (2.3.37)$$

Корень из дисперсии берется арифметическим, т.е. положительным значением.

Для упрощения записей дисперсия и среднее квадратическое отклонение могут также обозначаться как D_x, σ_x соответственно.

Математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение – чаще всего применяемые числовые характеристики случайной величины. Они характеризуют самые важные черты распределения: его положение и степень разбросанности.

Для более подробного описания распределения служат некоторые другие числовые характеристики.

Определение 2.3.12. ***Коэффициентом вариации*** называют отношение среднего квадратического отклонения к математическому ожиданию.

$$v = \frac{\sigma_x}{m_x}. \qquad (2.3.38)$$

Коэффициент вариации применяется для неотрицательной случайной величины в качестве характеристики «степени ее случайности». Зная m_x, σ_x случайной величины X, можно составить себе приближенное представление о диапазоне ее возможных значений. А именно, значения случайной величины X лишь изредка выходят за пределы интервала $m \pm 3\sigma$. Это правило носит название «правило трех сигм» и более строго будет обосновываться в дальнейшем изложении.

Среди моментов высших порядков особое значение имеют центральные моменты 3-го и 4-го порядков, называемые соответственно коэффициентами асимметрии и эксцесса.

Определение 2.3.13. ***Коэффициентом асимметрии («скошенности»)*** A случайной величины X, называется величина:

$$A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{M[(X - M(X))^3]}{[D(X)]^{3/2}} \qquad (2.3.39)$$

Коэффициент асимметрии иногда еще обозначают $A = Sk = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$, где Sk означает skew, что в переводе с английского – «косой».

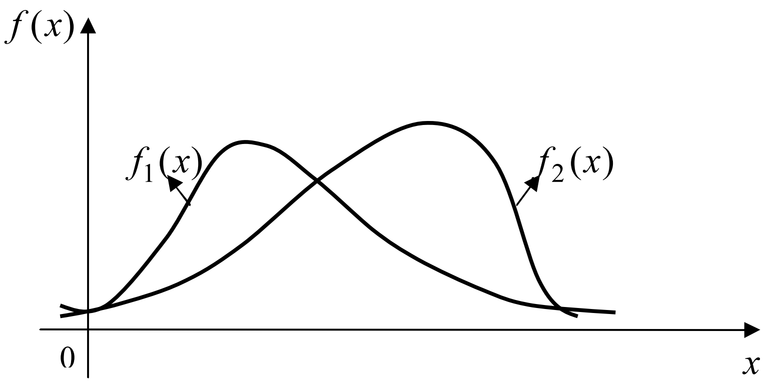


Рисунок 2.3.2

На рисунке 2.3.2 изображены две асимметричных кривых $f_1(x)$ и $f_2(x)$. Кривая $f_1(x)$ имеет положительную асимметрию, т.е. $Sk > 0$, кривая $f_2(x)$ - отрицательную, т.е. $Sk < 0$.

Определение 2.3.14. ***Коэффициентом эксцесса («островершинности» или «плосковершинности»)*** E случайной величины X, называется величина:

$$E = \varepsilon_x = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = \frac{M[(X - M(X))^4]}{[D(X)]^2} - 3. \qquad (2.3.40)$$

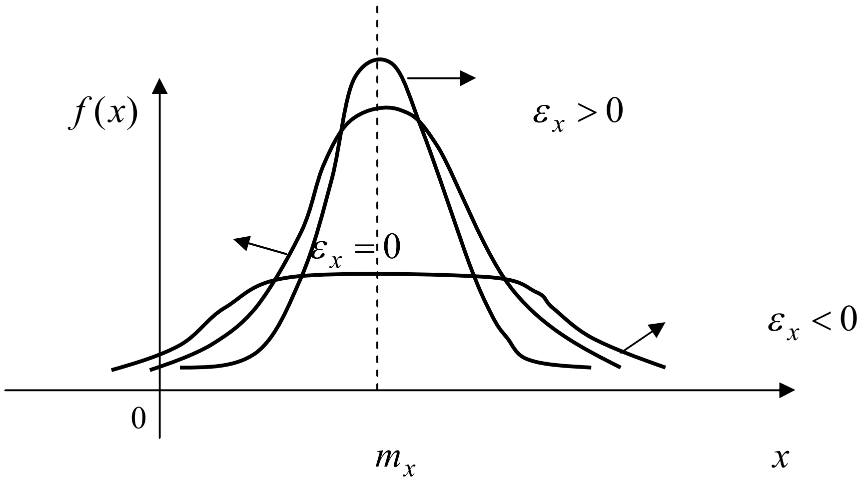


Рисунок 2.3.3

Замечание 2.3.11. Число 3 вычитается из отношения $\frac{\mu_4}{\sigma^4}$ потому, что для распространенного и часто встречающегося нормального распределения (о нем будет изложено в следующем разделе) это отношение равно трем. Для нормального распределения $\varepsilon_x = 0$. Кривые более островершинные, чем нормальная кривая, обладают положительным эксцессом, более плосковершинные – отрицательным. Характеристикой ε_x пользуются, как правило, для симметричных распределений.

Кроме всех рассмотренных числовых характеристик случайной величины, в приложениях используются так называемые квантили.

Определение 2.3.15. ***Квантилью уровня*** P случайной величины X, называется число, которое является решением уравнения:

$$F_X(X_P) = P. \qquad (2.3.41)$$

Из определения замечаем, что P некоторое число, удовлетворяющее условию $0 < p < 1$.

Замечание 2.3.12. Квантили $X_{0,25}$, $X_{0,5}$ и $X_{0,75}$ имеют свои названия: нижняя квантиль, медиана $\left(M_e(X) = X_{0,5}\right)$, верхняя квантиль соответственно. Они делят числовую прямую на 4 части, вероятности попадания в которые равны 0,25 (см. рисунок 2.3.4).

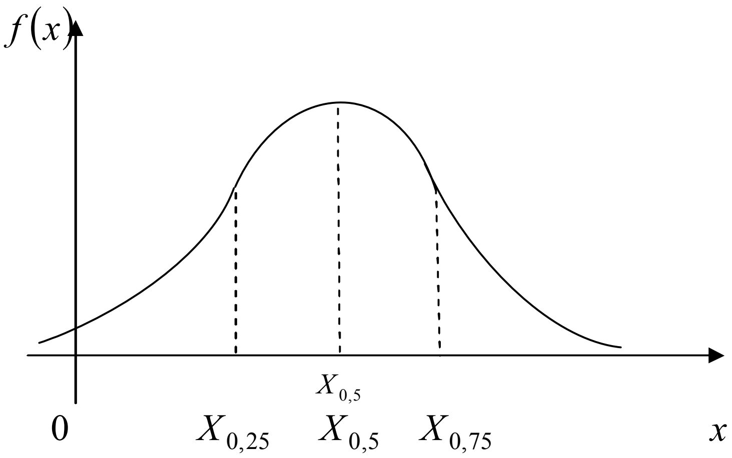


Рисунок 2.3.4

Рассмотрим решения различных задач по изложенной теме «Числовые характеристики случайных величин».

Пример 2.3.13. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 3x^2/8 & \text{при } 0 < x \le 2, \\ 0 & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

Найти математическое ожидание случайной величины X.

Решение. По формуле(2.3.5) находим:

$$M(X) = \frac{3}{8}\int_0^2 x \cdot x^2 dx = \frac{3}{8}\int_0^2 x^3 dx = \frac{3}{8} \cdot \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 = 1{,}5\,.$$

Пример 2.3.14. Найти математическое ожидание случайной величины X, если известна функция распределения этой величины:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x^2 & при\ 0<x\le 1,\\ 1 & при\ x>1.\end{cases}$$

Решение. Найдем сначала плотность распределения вероятностей этой величины. Пользуясь формулой (2.2.14) получаем:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ 2x & при\ 0<x\le 1,\\ 0 & при\ x>1.\end{cases}$$

Следовательно,

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 2x\,dx=\int_0^1 2x^2dx=2\int_0^1 x^2dx=2\cdot\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1=\frac{2}{3}.$$

Пример 2.3.15. Найти математическое ожидание случайной величины X, плотность распределения которой задана функцией:

$$f(x)=\frac{2}{\pi\left(1+x^2\right)},\ (-\infty<x<+\infty).$$

Решение. В соответствии с формулой (2.3.4) находим:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2x}{\pi\left(1+x^2\right)}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{0}\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{+\infty}\frac{d\left(1+x^2\right)}{1+x^2}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Bigg|_{-\infty}^{0}+\frac{1}{\pi}\ln\left(1+x^2\right)\Bigg|_{0}^{+\infty}=$$

$$=\frac{1}{\pi}\left(0-\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+x^2\right)\right)+\frac{1}{\pi}\left(\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2\right)-0\right)=0,$$

поскольку

$$\lim_{x\to-\infty}\ln\left(1+x^2\right)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(1+x^2\right).$$

Следовательно,

$$M(X)=0$$

для данной случайной величины.

Замечание 2.3.13. Если плотность распределения $f(x)$ - функция четная, то $xf(x)$ будет нечетной функцией и в этом случае интеграл от нечетной функции в симметричном промежутке будет равен нулю, т.е.

$$\int_{-a}^{a} xf(x)dx = 0, \ \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = 0, \ M(X) = 0.$$

Итак, если плотность распределения $f(x)$ - функция четная, то центром распределения случайной величины X служит начало координат.

Пример 2.3.16. Найти числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ непрерывной случайной величины X, заданной плотностью распределения:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 2, \\ 0{,}5 & при\ 2 < x \le 4, \\ 0 & при\ x > 4. \end{cases}$$

Решение. Сначала находим $M(X)$ по формуле (2.3.5.).

$$M(X) = \int_2^4 x \cdot 0{,}5dx = \frac{1}{2}\int_2^4 x\,dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_2^4 = \frac{1}{4}(16-4) = 3, \text{ т.е. } M(X) = 3.$$

В соответствии с формулой (2.3.30) найдем $D(X)$:

$$D(X) = \int_2^4 (x-3)^2 \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}\int_2^4 \left(x^2 - 6x + 9\right)dx = \frac{1}{2}\left(\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right)\bigg|_2^4 =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{64}{3} - 3 \cdot 16 + 36\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{8}{3} - 3 \cdot 4 + 18\right) = \frac{1}{3},$$

$$D(X) = \frac{1}{3}.$$

По формуле (2.3.37) находим

$$\sigma(X) = \sqrt{1/3} \approx 0{,}58.$$

Пример 2.3.17. Случайная величина X, задана функцией распределения:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ x^3 & при\ 0 < x \le 1, \\ 1 & при\ x > 1. \end{cases}$$

Найти числовые характеристики случайной величины X : $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Решение. Сначала найдем плотность распределения $f(x)$ с помощью формулы (2.2.14). Так как $f(x)=F'(x)$, то

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\le 0,\\ 3x^2 & \text{при } 0<x\le 1,\\ 0 & \text{при } x>1.\end{cases}$$

По формуле (2.3.5) вычисляем математическое ожидание:

$$M(X)=\int_0^1 x\cdot 3x^2\,dx=3\int_0^1 x^3dx=3\cdot\left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1=\frac{3}{4}.$$

В соответствии с формулами (2.3.30) ,(2.3.37) находим дисперсию и среднее квадратическое отклонение:

$$D(X)=\int_0^1\left(x-\frac{3}{4}\right)^2\cdot 3x^2dx=3\int_0^1\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{9}{16}\right)x^2dx=3\int_0^1\left(x^4-\frac{3}{2}x^3+\frac{9}{16}x^2\right)dx=$$

$$=3\left.\left(\frac{x^5}{5}-\frac{3}{2}\cdot\frac{x^4}{4}+\frac{9}{16}\cdot\frac{x^3}{3}\right)\right|_0^1=3\left(\frac{1}{5}-\frac{3}{8}+\frac{3}{16}\right)=\frac{3}{80};$$

$$D(X)=\frac{3}{80};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{3/80}\approx 0{,}19.$$

Пример 2.3.18. Независимые случайные величины $X_1,X_2,...,X_n$ имеют одинаковые распределения, для них

$$M(X_k)=a,\ D(X_k)=D,\ \sigma(X_k)=\sigma \qquad (1^*)$$

при $k=1,2,...,n$.

Найти числовые характеристики среднего арифметического этих случайных величин, т.е. случайной величины:

$$X=\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n} \qquad (2^*)$$

Решение. С учетом формулы (2.3.9) и условия (1^*) находим:

$$M(X)=M\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+...+M(X_n)}{n}=\frac{na}{n}=a .$$

Итак, $M(X)=a$, $\quad (3^*)$

Таким образом, математическое ожидание среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин равно математическому ожиданию каждой из этих величин.

Учитывая формулы (2.3.34), (2.3.36) и условия (1^*), получаем

$$D(X)=D\left(\frac{X_1+X_2+...+X_n}{n}\right)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+...+D(X_n)}{n^2}=\frac{nD}{n^2}=\frac{D}{n}.$$

Итак, $D(X)=\dfrac{D}{n}$, $\quad (4^*)$

Таким образом, дисперсия среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин в n раз меньше дисперсии каждой из этих величин.

Учитывая формулу (2.3.37) и условие (1^*), находим

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{D/n}=\sqrt{D/n}=\sigma/\sqrt{n} . \quad (5^*)$$

Таким образом, среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин в $\sqrt{n}$ раз меньше среднего квадратического отклонения каждой величины.

Пример 2.3.19. Найти моменты первого, второго и третьего порядков случайной величины X с плотностью вероятностей

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ e^{-x} & при\ x>0.\end{cases}$$

Решение. Найдем начальные моменты согласно формуле (2.3.19):

$$\nu_1=M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_{0}^{+\infty}xe^{-x}dx=\begin{bmatrix}u=x & dv=e^{-x}dx\\ du=dx & v=-e^{-x}\end{bmatrix}=$$

$$= -xe^{-x}\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = -xe^{-x} - e^{-x}\Big|_0^{+\infty} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}(-xe^{-x} - e^{-x}) - (0\cdot e^0 - e^0) = 1.$$

$$\nu_2 = M\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^2 d\left(-e^{-x}\right) =$$

$$= -x^2e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 0 + 2\cdot 1 = 2.$$

$$\nu_3 = M\left(X^3\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^3 f(x)dx = \int_0^{+\infty} x^3 e^{-x}dx = \int_0^{+\infty} x^3 d\left(-e^{-x}\right) =$$

$$= -x^3e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + 3\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx = 0 + 3\cdot 2 = 6.$$

Итак, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 2$, $\nu_3 = 6$; $\nu_1 = M(X) = a = 1$.

Вычислим центральные моменты по формуле (2.3.25):

$$\mu_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 f(x)dx = \int_0^{+\infty} (x-1)^2 e^{-x}dx = \int_0^{+\infty}\left(x^2 - 2x + 1\right)e^{-x}dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx - 2\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 2 - 2\cdot 1 + 1 = 1,\ \mu_2 = 1.$$

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^3 f(x)dx = \int_0^{+\infty} (x-1)^3 e^{-x}dx = \int_0^{+\infty}\left(x^3 - 3x^2 + 3x - 1\right)e^{-x}dx =$$

$$= \int_0^{+\infty} x^3e^{-x}dx - 3\int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx + 3\int_0^{+\infty} xe^{-x}dx - \int_0^{+\infty} e^{-x}dx =$$

$$= 6 - 3\cdot 2 + 3\cdot 1 - 1 = 2.$$

Выше уже было доказано, что $\mu_1 = 0$ ($\mu_1 = M(X-a) = 0$). Таким образом, найдены центральные моменты: $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 2$.

Замечание 2.3.14. Данная случайная величина X имеет моменты всех порядков. Интегрированием по частям находим случайный момент k - го порядка:

$$\nu_k = M\left(X^k\right) = \int_0^{+\infty} x^k e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^k d\left(-e^{-x}\right) = -x^k e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + k\int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-x} dx = k\nu_{k-1},$$

$$\nu_k = k\nu_{k-1}, \quad k = 1,2,3,...$$

При $k = 1$ получаем $\nu_1 = 1$. Следовательно,

$$\nu_k = k\nu_{k-1} = k(k-1)\nu_{k-2} = k(k-1)(k-2)\nu_{k-3} = ...k(k-1)(k-2)...1 = k!,$$

$$\nu_k = k!.$$

Для закрепления данной темы предлагаем решить следующие задачи.

Задачи:

1. Найдите математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,15	0,25	0,3	0,2	0,1

2. Закон распределения дискретной случайной величины задан таблицей:

x_i	3	6	9	12
p_i	0,1	0,2	0,3	0,4

Запишите закон распределения случайной величины $2X$, $X/3$. Найдите математическое ожидание случайных величин: X, $2X$, $X/3$.

3. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y: $M(X) = 7$, $M(Y) = 4$. Найти математическое ожидание суммы и разности этих величин.

4. Известны математические ожидания двух независимых случайных величин X и Y: $M(X) = 6$, $M(Y) = 8$. Найдите математическое ожидание их произведения.

5. Найдите математическое ожидание случайной величины $Y = 8X + 5$, если известно, что $M(X) = 1{,}5$.

6. Дискретная случайная величина X, которая может принимать бесконечную последовательность значений, задана следующим законом распределения:

x_i	$1/4$	$1/4^2$	$1/4^3$	$\dots$	$1/4^k$	$\dots$
p_i	$1/2$	$1/2^2$	$1/2^3$	$\dots$	$1/2^k$	$\dots$

$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1$.

Найдите математическое ожидание этой случайной величины.

7. Плотность распределения вероятностей случайной величины X задана функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ 3x^2 & при\ 0<x\le 1,\\ 0 & при\ x>1.\end{cases}$$

Найдите математическое ожидание случайной величины X.

8. Найдите математическое ожидание случайной величины X, если известна функция распределения этой величины:

$$F(x)=\begin{cases}0 & при\ x\le 0,\\ x/3 & при\ 0<x\le 3,\\ 1 & при\ x>3.\end{cases}$$

9. Закон распределения дискретной величины X задан таблицей:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,05	0,15	0,3	0,4	0,1

Найдите дисперсию случайной величины X.

10. Подбрасывается игральный кубик. Случайная величина X - «число выпавших очков». Найдите дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины X.

11. Симметричная монета подбрасывается трижды. Случайная величина X - «число выпавших цифр». Найдите числовые характеристики: $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

12. Найдите числовые характеристики $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$ случайной величины X, заданной законом распределения:

x_i	0,1	0	0,1	0,4
p_i	0,3	0,15	0,3	0,25

13. Непрерывная величина X задана плотностью распределения вероятностей:

$$f(x)=\begin{cases} e^x & \text{при } x \le 0, \\ 0 & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдите числовые характеристики $M(X),\ D(X),\ \sigma(X)$.

14. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	2	3
p_i	0,4	0,6

Найдите начальные и центральные моменты первого, второго, и третьего порядков случайной величины X.

15. Дискретная случайная величина X задана законом распределения:

x_i	1	2	3	4	5
p_i	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Найдите начальные и центральные моменты первого, второго, и третьего порядков величины X.

16. Случайная величина X задана плотностью распределения:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{при } x \le 0, \\ 3e^{-3x} & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

Найдите начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвертого порядков величины X.

17. Случайная величина X задана функцией распределения:

$$F(x)=\begin{cases} 0 & при\ x \le 0, \\ x^3 & при\ 0 < x \le 1, \\ 1 & при\ x > 1. \end{cases}$$

Найдите начальные и центральные моменты первых трех порядков случайной величины X .

Ответы:

1) 2,85; **2)** 9, 18, 3; **3)** 11, 3. **4)** 48; **5)** 17; **6)** 1/7; **7)** 0,75; **8)** 4,5; **9)** 1,0275; **10)** $D(X)=35/12 \approx 2{,}917$, $\sigma(X)\approx 1{,}708$; **11)** $M(X)=3/2=1{,}5$, $D(X)=0{,}75$, $\sigma(X)=0{,}866$; **12)** $M(X)=0{,}1$, $D(X)=0{,}036$, $\sigma(X)=0{,}190$; **13)** $M(X)=-1$, $D(X)=1$, $\sigma(X)=1$; **14)** $\nu_1=2{,}6$, $\nu_2=7$, $\nu_3=19{,}4$, $\mu_1=0$, $\mu_2=0{,}25$, $\mu_3=-17{,}624$; **15)** $\nu_1=3$, $\nu_2=10{,}2$, $\nu_3=36{,}8$, $\mu_1=0$, $\mu_2=1{,}2$, $\mu_3=-37$; **16)** $\nu_1=1/3$, $\nu_k=\dfrac{k!}{3^k}$, $\mu_2=\dfrac{1}{9}$, $\mu_3=\dfrac{2}{27}$, $\mu_4=\dfrac{1}{9}$; **17)** $\nu_1=\dfrac{3}{4}$, $\nu_2=\dfrac{3}{5}$, $\nu_3=\dfrac{1}{2}$, $\mu_2=\dfrac{3}{80}$.

Вопросы для самопроверки:

1. Как определяется математическое ожидание дискретной случайной величины X, принимающей конечное множество значений?

2. Какие другие названия используют для математического ожидания? Чем объясняются эти названия?

3. Что называют математическим ожиданием дискретной случайной величины X, принимающей счетное множество значений?

4. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha,\beta]$?

5. Как определяется математическое ожидание непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty,+\infty)$?

6. Каковы свойства математического ожидания случайной величины?

7. Что называют отклонением случайной величины от ее математического ожидания?

8. Чему равно математическое ожидание отклонения?

9. Как определяется дисперсия случайной величины?

10. Что характеризует дисперсия случайной величины?

11. По какой формуле можно вычислить дисперсию?

12. Каковы свойства дисперсии случайной величины?

13. Запишите формулу для дисперсии случайной величины, принимающей конечное множество значений.

14. Какой вид имеет формула для дисперсии случайной величины, принимающей счетное множество значений?

15. По каким формулам вычисляется дисперсия непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат отрезку $[\alpha, \beta]$?

16. Как определяется дисперсия непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$?

17. По какой формуле можно вычислить дисперсию непрерывной случайной величины, все значения которой принадлежат бесконечному промежутку $(-\infty, +\infty)$?

18. Что такое среднее квадратическое отклонение?

19. Чему равно математическое ожидание среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин?

20. Чему равна дисперсия среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин?

21. Чему равно среднее квадратическое отклонение среднего арифметического n независимых одинаково распределенных случайных величин?

22. Что называют начальным моментом k-го порядка случайной величины?

23. По какой формуле вычисляют начальный момент k-го порядка случайной величины, принимающей конечное множество значений?

24. Какой формулой определяется начальный момент k-го порядка случайной величины, принимающий счетное множество значений?

25. Какой формулой определяется начальный момент k-го порядка непрерывной случайной величины?

26. Что называют центральным моментом k-го порядка случайной величины?

27. По какой формуле вычисляют центральный момент k-го порядка случайной величины, принимающей конечное множество значений?

28. Какой формулой определяется центральный момент k-го порядка непрерывной случайной величины?

29. Чему равны начальные моменты: нулевого порядка, первого порядка?

30.Чему равны центральные моменты: нулевого, первого, второго порядка?

3 Некоторые законы распределения случайных величин

3.1 Примеры дискретных законов распределения

1) Формула Бернулли.

2) Биномиальное распределение.

3) Геометрическое распределение.

4) Распределение Пуассона.

1) Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых может появиться событие A или событие $\overline{A}$. Все испытания происходят в одинаковых условиях и вероятность появления события A в каждом испытании одна и та же. Обозначим эту вероятность через p, а вероятность появления событие $\overline{A}$ через q ($q = 1 - p$).

Вероятность того, что в серии из n независимых испытаний событие A появится ровно k раз (и не появится $n-k$ раз) обозначим через $P_n(k)$, тогда

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k}, \tag{3.1.1}$$

где

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \tag{3.1.2}$$

Формула (3.1.1) называется ***формулой Бернулли.***

Определение 3.1.1 Число k_0, которому при заданном n соответствует максимальная биноминальная вероятность $P_n(k_0)$, называется наивероятнейшим числом появления события A.

При заданных значениях n и p это число определяется неравенствами

$$np - q \le k_0 \le np + p \tag{3.1.3}$$

Следствие:

1) если число ($np + p$) – целое, то k_0 - имеет два значения:

$k_0{}' = np - q$ и $k_0'' = np + q$

2) если число ($np + p$) не является целым, то $k_0 = [np + p]$– целая часть числа ($np + p$)

Замечание 3.1.1.

1) Вероятность того, что в n опытах событие A появляется от k_1 до k_2 раз определяется формулой:

$$P_n(k_1 \le k \le k_2) = \sum_{k=k_1}^{k_2} P_n(k) = \sum_{k=k_1}^{k_2} C_n^k p^k q^{n-k} \quad . \qquad (3.1.4)$$

2) Вероятность того, что в n опытах событие A появится хотя бы один раз, определяется формулой:

$$P_n(1 \le k \le n) = 1 - q^n \qquad (3.1.5)$$

3) Вероятность того, что в n испытаниях событие A наступит:

а) менее k раз, находится по формуле:

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k-1). \qquad (3.1.6)$$

б) более k раз:

$$P(A) = P_n(k+1) + P_n(k+2) + ... + P_n(n). \qquad (3.1.7)$$

в) не менее k раз:

$$P(A) = P_n(k) + P_n(k+1) + ... + P_n(n). \qquad (3.1.8)$$

г) не более k раз:

$$P(A) = P_n(0) + P_n(1) + ... + P_n(k). \qquad (3.1.9)$$

2) Предположим, что в одинаковых условиях производится n независимых испытаний в результате каждого из которых может появиться событие A с вероятностью p или не появится $\overline{A}$ с вероятностью q ($q = 1 - p$). В каждой серии из n испытаний событие A может либо не появится, либо появится 1 раз, 2 раза, … n раз. Введем в рассмотрение дискретную случайную величину X - «число появлений события A при n испытаниях». Найдем закон распределения этой случайной величины. Величина X может принимать следующие значения: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, …,$x_n = n$.

Вероятность p_k того, что случайная величина X принимает значение x_k, вычисляется по формуле Бернулли:

$$P_k = P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} \qquad (k = 0,1,2,...,n).$$

Определение 3.1.2 Закон распределения дискретной случайной величины, определяемый формулой Бернулли, называется ***биноминальным.***

Постоянные n и p, входящие в формулу Бернулли, называются ***параметрами биноминального распределения.***

Биноминальный закон распределения дискретной случайной величины X можно представить в виде следующей таблицы.

x_i	0	1	…	k	…	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	…	$C_n^k p^k q^{n-k}$	…	p^n

Данная таблица строится следующим образом:

а) при $x = 0$, $P(X = 0) = C_n^0 p^0 q^{n-0} = q^n$ - это означает, что в n испытаниях событие A не появится ни разу,

б) при $x = 1$, $P(X = 1) = C_n^1 p^1 q^{n-1} = q^n = \dfrac{n!}{(n-1)!1!} \cdot p^1 q^{n-1} = n \cdot pq^{n-1}$ - вероятность того, что событие A появится один раз;

и т.д., последний член

в) при $x = n,\ P(X = n) = C_n^n p^n q^{n-n} = p^n$.

Пример 3.1.1. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле стрелка равна 0,7 и не зависит от номера выстрела. Найти вероятность того, что при 5 выстрелах произойдет ровно 2 попадания в мишень.

Решение. Поскольку $p = 0{,}7$, то $q = 1 - p = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$.

По условию $n = 5$, $k = 2$, тогда по формуле (3.1.1) находим:

$$P_2(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot (0{,}7)^2 \cdot (0{,}3)^3 = 10 \cdot 0{,}49 \cdot 0{,}027 = 0{,}1323$$

Пример 3.1.2. Подбрасывается 5 симметричных монет. Найти вероятность того, что: а) выпало ровно 2 герба; б) выпало более одного герба.

Решение. Обозначим через X - число гербов, выпавших при подбрасываниях монет. В данном случае $p = 1/2$ и $q = 1/2$. Следовательно,

а) $P(X = 2) = P_2(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = 10 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 10 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{5}{16} = 0{,}3125$.

б) Случайная величина X может принимать следующее значения

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$.

Поскольку,

$P(x > 1) = 1 - P(x \le 1) = 1 - P_5(0) - P_5(1)$, то

$$P(x > 1) = 1 - C_5^0 p^0 q^{5-0} - C_5^1 pq^{5-1} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^5 - 5\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{26}{32} = \frac{13}{16} = 0{,}8125.$$

Пример 3.1.3. Доля изделий высшего сорта на предприятии составляет 30%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 75 изделий.

Решение. По условию $n = 75$, $p = 0{,}3$, поэтому $q = 1 - p = 0{,}7$. Составляем двойное неравенство

$75 \cdot 0{,}3 - 0{,}7 \le k_0 \le 75 \cdot 0{,}3 + 0{,}3$, т.е. $21{,}8 \le k_0 \le 22{,}8$.

Из последнего неравенства следует, что $k_0 = 22$ ($k_0 = [22{,}8]$).

Пример 3.1.4. Монета подброшена 10 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: а) от 4 до 6 раз; б) хотя бы один раз.

Решение. По формуле (3.1.4) при $n = 10$, $k_1 = 4$, $k_2 = 6$, $q = p = 0{,}5$ находим:

а) $P_{10}(4 \le k \le 6) = P_{10}(4) + P_{10}(5) + P_{10}(6) = \frac{210}{1024} + \frac{252}{1024} + \frac{210}{1024} = \frac{21}{32}$.

б) Согласно формуле (3.1.5) получим

$$P_{10}(1 \le k \le 10) = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \frac{1023}{1024}.$$

Пример 3.1.5. Два равносильных игрока играют в шахматы. Что вероятнее:

а) выиграть одну партию из двух или две партии из четырех?

б) выиграть не менее двух партий из четырех или не менее трех партий из пяти? Ничьи во внимание не принимаются.

Решение. Поскольку играют равносильные шахматисты, то вероятность выигрыша $p = 1/2$; следовательно, вероятность проигрыша $q = 1 - p = 1 - 1/2 = 1/2$. Во всех партиях вероятность выигрыша постоянна и безразлично, в какой последовательности будут выиграны партии, поэтому применима формула Бернулли.

Пользуясь формулами (3.1.1) и (3.1.8), находим указанные вероятности:

а) $P_2(1) = C_2^1 pq = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$,

$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = 6 \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{3}{8}$,

Так как $P_2(1) = \frac{1}{2}$, $P_4(2) = \frac{3}{8}$ и $P_2(1) > P_4(2)$, то вероятнее выиграть одну партию из двух.

б) $P_4(3) = C_4^3 p^3 q = 4 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$

$P_4(4) = C_4^4 p^4 q^0 = 1 \cdot \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$,

$P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = \frac{3}{8} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{11}{16}$;

$P_5(3) = C_5^3 p^3 q^2 = 10 \cdot \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{5}{16}$

$P_5(4) = C_5^4 p^4 q = 5 \cdot \frac{1}{2^4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{32}$,

$P_5(5) = C_5^5 p^5 q^0 = 1 \cdot \frac{1}{2^5} \cdot 1 = \frac{1}{32}$,

$P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{5}{16} + \frac{5}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{8}{16}$.

Поскольку $P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = \frac{11}{16}$, $P_5(3) + P_5(4) + P_5(5) = \frac{8}{16}$ и $\frac{11}{16} > \frac{8}{16}$, то вероятнее выиграть не менее двух партий из четырех.

Замечание 3.1.2. Вероятность выиграть не менее двух партий из четырех можно и другим способом: $P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-[P_4(0)+P_4(1)]$.

Поскольку $P_4(0)=\dfrac{1}{16}$, $P_4(1)=\dfrac{1}{4}$,

то $P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=1-\left(\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{11}{16}$.

Пример 3.1.6. Монетку подбрасывают 5 раз. Случайная величина X - число выпадений цифры. Возможные значения величины X: $x_0=0$, $x_1=1$, $x_2=2$, $x_3=3$, $x_4=4$, $x_5=5$. Записать закон распределения случайной величины X.

Решение. Вероятности указанных значений $P(x=x_k)$ найдем с помощью формулы Бернулли, приняв во внимание то, что в данном случае $p=1/2$, $q=1/2$.

$$P_5(0)=C_n^0 p^0 q^{n-0}=C_5^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^0\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{2^5}=\frac{1}{32},$$

$$P_5(1)=C_5^1\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^4}=5\cdot\frac{1}{2^5}=\frac{5}{32},$$

$$P_5(2)=C_5^2\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{2^3}=\frac{10}{32},$$

$$P_5(3)=C_5^3\cdot\frac{1}{2^3}\cdot\frac{1}{2^2}=\frac{10}{32},$$

$$P_5(4)=C_5^4\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{32},$$

$$P_5(5)=C_5^5\cdot\frac{1}{2^5}\cdot\frac{1}{2^0}=\frac{1}{32}.$$

Следовательно, закон распределения случайной величины X можно записать в виде таблицы

x_i	0	1	2	3	4	5
p_i	1/32	5/32	10/32	10/32	5/32	1/32

Пример 3.1.7. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины X, имеющей биноминальное распределение.

Решение. В данном случае случайная величина X - «число появления события A в n независимых испытаниях». Если X_1 - число появлений события A в первом испытании, X_2 - во втором, …, X_n - в n-ом, то общее число появлений события A можно представить в виде суммы $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$. В соответствии с формулой (2.3.9) имеем:

$$M\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) = M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + ... + M\left(X_n\right).$$

Случайная величина X_k - число появления события A в одном k-ом испытании – может принимать только два значения: $x_1 = 1$ (событие A наступило) с вероятностью p и $x_2 = 0$ (событие A не наступило) с вероятностью $q\left(q = 1 - p\right)$.

Следовательно, $M\left(X_k\right) = x_1 p_1 + x_2 p_2 = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$, $(k = 1,2,\ldots,n)$, и

$$M\left(X\right) = M\left(X_1 + X_2 + ... + X_n\right) = M\left(X_1\right) + M\left(X_2\right) + ... + M\left(X_n\right) =$$
$$= p + p + ... + p = np.$$

$$M\left(X\right) = np \qquad (3.1.10)$$

Таким образом, математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону с параметрами n и p, равно произведению параметров.

Пример 3.1.8. Найти дисперсию дискретной случайной величины, распределенной по биноминальному закону.

Решение. Случайную величину X - «число появления события A при n испытаниях» можно представить как сумму $X = X_1 + X_2 + ... + X_n$, где X_k - « число появления события A при k-ом испытании $(k = 1,2,\ldots,n)$. В соответствии с формулой (2.3.36) имеем:

$$D\left(X\right) = D\left(X_1\right) + D\left(X_2\right) + ... + D\left(X_n\right).$$

С помощью формулы $D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2$ вычислим $D\left(X_k\right)$ для $k = 1,2,\ldots,n$.

Случайная величина X_k принимает лишь два значения:

$x_1 = 1$ с вероятностью p и $x_2 = 0$ с вероятностью $q = 1 - p$.

Принимая во внимание равенство $M(X_k) = p$, формулу (2.3.27) получаем:

$D(X_k) = M((X_k)^2) - [M(X_k)]^2 = 1^2 p + 0^2 q - p^2 = p - p^2 = p(1-p) = pq$,

Следовательно,

$D(X) = D(X_1) + D(X_2) + ... + D(X_n) = pq + pq + ... + pq$, для $k = 1, 2, \ldots, n$.

$$D(X) = npq. \qquad (3.1.11)$$

Таким образом, дисперсия случайной величины, распределенной по биноминальному закону с параметрами n и p, равна произведению npq.

Пример 3.1.9. Найти среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биноминальному закону.

Решение. Принимая во внимание определение среднего квадратического отклонения и формулу (3.1.11), получаем:

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}. \qquad (3.1.12)$$

Пример 3.1.10. Проверкой качества установлено, что из каждых 100 деталей не имеют дефектов 75 штук в среднем. Составить биноминальное распределение вероятностей числа пригодных деталей из взятых наудачу 6 деталей.

Решение. Из условия задачи следует, что $p = 0{,}75$, $q = 0{,}25$, $n = 6$. В соответствии с формулой Бернулли находим:

$P_6(0) = 1 \cdot (0{,}25)^6 \approx 0{,}0002$;

$P_6(1) = 6 \cdot (0{,}75) \cdot (0{,}25)^5 \approx 0{,}0044$;

$P_6(2) = 15 \cdot (0{,}75)^2 \cdot (0{,}25)^4 \approx 0{,}0330$;

$P_6(3) = 20 \cdot (0{,}75)^3 \cdot (0{,}25)^3 \approx 0{,}1318$;

$P_6(4) = 15 \cdot (0{,}75)^4 \cdot (0{,}25)^2 \approx 0{,}2966$;

$P_6(5) = 6 \cdot (0{,}75)^5 \cdot (0{,}25) \approx 0{,}3560$;

$P_6(6) = 1 \cdot (0{,}75)^6 \approx 0{,}1780$.

Закон распределения данной случайной величины X - «число стандартных деталей из 6 взятых наудачу» можно задать следующей таблицей:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,0002	0,0044	0,0330	0,1318	0,2966	0,3560	0,1780

Убедимся в том, что сумма всех вероятностей равна единице:

$$\sum_{i=0}^{6} p_i = 0{,}0002 + 0{,}0044 + 0{,}0330 + 0{,}1318 + 0{,}2966 + 0{,}3560 + 0{,}1780 = 1.$$

Графическое представление этого биноминального распределения дано на рисунке 3.1.1.

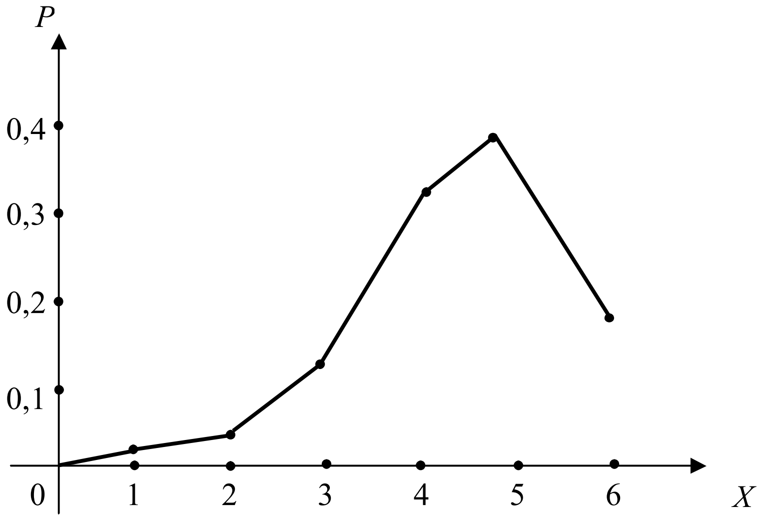


Рисунок 3.1.1

3) Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых вероятность появления события A равна p $(0 < p < 1)$, и, следовательно, вероятность его непоявления равна $q\left(q = 1 - p\right)$. Испытания заканчиваются, как только появится событие A. Таким образом, если событие A появилось в k-ом испытании, то в предшествующих $k-1$ испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые нужно провести до первого появления события A. Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ \ldots$.

Пусть в первых $k-1$ испытаниях событие A не наступило, а в k-ом испытании появилось. Вероятность этого «сложного события», по теореме умножения вероятностей независимых событий, найдем по формуле:

$$P = P(X=k) = q^{k-1} p\ .$$

Определение 3.1.3. ***Геометрическим распределением*** называется распределение дискретной случайной величины X, определяемое формулой:

$$P_m = P(X=m) = (1-p)^{m-1} p, \text{ где } 0<p<1;\ m=1,2,\ldots \qquad (3.1.13)$$

Примерами реальных случайных величин, распределенных по геометрическому закону, являются: число выстрелов до первого попадания, число испытаний прибора до первого отказа, число бросаний монеты до первого выпадения цифры и т.д.

Ряд распределения случайной величины X, имеющей геометрическое распределение, имеет вид:

x_i	1	2	3		m
p_i	p	qp	$q^2 p$		$q^{m-1} p$

Действительно,

$P(X=1) = p,$ - первая попытка успешна;

$P(X=2) = qp,$ - первая попытка безуспешна, вторая успешна;

$P(X=3) = q^2 p,$ - первые две попытки безуспешны, третья успешна;

…………………………………………………………………………..

$P(X=m) = q^{m-1} p,$ - первые $(m-1)$ попытки безуспешны, m-ая успешна.

Контроль: $\sum\limits_{m=1}^{\infty} pq^{m-1} = p\sum\limits_{m=1}^{\infty} q^{m-1} = p\cdot\dfrac{1}{1-q} = \dfrac{p}{p} = 1.$

Вероятности P_m образуют геометрическую прогрессию $p, qp, q^2 p,\ q^3 p, \ldots$.

По этой причине распределение (3.1.13) называют ***геометрическим.***

Пример 3.1.11. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей геометрическое распределение.

Решение. В соответствии с формулой (2.3.2) получаем:

$$M(X)=\sum_{m=1}^{\infty} mP(X=m)=\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}p=p\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}.$$

Поскольку члены ряда $\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}$ являются производными соответствующих членов ряда $\sum_{m=0}^{\infty} q^{m}$ и

$$\sum_{m=0}^{\infty} q^{m}=1+q+q^2+q^3+\ldots=\frac{1}{1-q},$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}=1+2q+3q^2+\ldots=\left(\frac{1}{1-q}\right)'=\frac{1}{(1-q)^2}.$$

Следовательно,

$$M(X)=p\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}=p\cdot\frac{1}{(1-q)^2}=p\cdot\frac{1}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины, имеющей геометрическое распределение, определяется по формуле:

$$M(X)=\frac{1}{p} \qquad (3.1.14)$$

Пример 3.1.12. Найти дисперсию случайной величины X, имеющей геометрическое распределение.

Решение. Для вычисления дисперсии воспользуемся формулой (2.3.32) и формулами для сумм рядов, а именно:

$$\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}=\frac{1}{(1-q)^2}, \quad \sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)q^{m-2}=\frac{2}{(1-q)^3}.$$

Найдем сначала математическое ожидание квадрата величины X:

$$M(X^2)=\sum_{m=1}^{\infty} m^2q^{m-1}p=p\left(\sum_{m=1}^{\infty} m(m-1)q^{m-1}+\sum_{m=1}^{\infty} mq^{m-1}\right)=$$

$$=p\left(q\frac{2}{(1-q)^3}+\frac{1}{(1-q)^2}\right)=p\frac{2q+1-q}{(1-q)^3}=p\frac{1+q}{p^3}=\frac{1+q}{p^2}.$$

Таким образом,

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{q}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}.$$

$$D(X) = \frac{1-p}{p^2}. \qquad (3.1.1\tilde{4})$$

4) Рассмотрим случай, когда число n независимых испытаний является достаточно большим, а вероятность появления события A в каждом из этих испытаний p - достаточно малым.

Положим $np = a$, где a сохраняет постоянное значение. Это означает, что среднее число появлений события в различных сериях испытаний, т.е. при различных значениях n, остается неизменным.

Определение 3.1.4. ***Распределением Пуассона*** называется распределение вероятностей дискретной случайной величины, определяемое формулой

$$P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!} \qquad (3.1.15)$$

Постоянную

$$a = n \cdot p, \qquad (3.1.16)$$

называют ***параметром распределения Пуассона.***

Закон Пуассона зависит от одного параметра a, который является одновременно математическим ожиданием и дисперсией случайной величины X, распределенной по закону Пуассона.

Закон распределения Пуассона можно записать в виде следующей таблицы:

x_i	0	1	2	…	k	…
p_i	$\mathring{a}^{-\grave{a}}$	$\grave{a}\mathring{a}^{-\grave{a}}$	$\frac{a^2 e^{-a}}{2!}$	…	$\frac{a^k e^{-a}}{k!}$	…

Пример 3.1.13. Доказать, что распределение Пуассона является предельным случаем биноминального распределения.

Решение. Из равенства (3.1.16) определим p и q:

$$p_n = \frac{a}{n},\ q_n = 1 - \frac{a}{n}$$

и подставим в формулу Бернулли (3.1.10):

$$P_n(k) = C_n^k p^k q^{n-k} = \frac{n(n-1)\ldots(n-(k-1))}{k!} \cdot \left(\frac{a}{n}\right)^k \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \frac{a^k}{k!}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{a^k}{k!} \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \ldots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^n \times$$

$$\times \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{a}{n}\right)^{-k} = \frac{a^k}{k!} \cdot 1 \cdot e^{-a} \cdot 1 = \frac{a^k e^{-a}}{k!},$$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(k) = \frac{a^k e^{-a}}{k!} \qquad (3.1.17)$$

Итак, формула (3.1.15),определяющая распределение Пуассона, является предельным случаем формулы Бернулли, которая определяет биноминальное распределение.

Пример 3.1.14. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, распределенной по закону Пуассона.

Решение. На основании таблицы, определяющей закон распределения, и формулы (2.3.2) находим

$$M(X) = 0 \cdot e^{-a} + 1 \cdot \frac{a}{1!} e^{-a} + 2 \cdot \frac{a^2}{2!} e^{-a} + \ldots + k\frac{a^k}{k!} e^{-a} + \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{(k-1)!} e^{-a} = ae^{-a} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^{k-1}}{(k-1)!} = ae^{-a} e^{a} = a.$$

$$M(X) = a. \qquad (3.1.18)$$

Итак, математическое ожидание случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равно числу a - параметру этого распределения.

Пример 3.1.15. Найти дисперсию дискретной случайной величины, имеющей распределение Пуассона.

Решение. Дисперсию вычислим по формуле (2.3.32), для чего вначале найдем математическое ожидание квадрата данной величины:

$$M(X^2) = 0^2 \cdot e^{-a} + 1^2 \cdot \frac{a}{1!} e^{-a} + 2^2 \frac{a^2}{2!} e^{-a} + \ldots + k^2 \frac{a^k}{k!} e^{-a} + \ldots =$$

$$= 1 \cdot \frac{a}{0!} e^{-a} + 2 \cdot \frac{a^2}{1!} e^{-a} + \ldots + k \frac{a^k}{(k-1)!} e^{-a} + \ldots$$

Положив $k - 1 = m$, получим

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{a^k}{(k-1)!} e^{-a} = \sum_{m=0}^{\infty} (m+1) \frac{a^{m+1}}{m!} e^{-a} =$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} m \frac{a^{m+1}}{m!} e^{-a} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{m+1}}{m!} e^{-a} =$$

$$= a^2 e^{-a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a^{m-1}}{(m-1)!} + a e^{-a} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{m!} = a^2 e^{-a} e^{a} + a e^{-a} e^{a} = a^2 + a.$$

По формуле (2.3.32) находим дисперсию:

$$D(X) = M(X^2) - (M(X))^2 = a^2 + a - a^2 = a.$$

Следовательно,

$$D(X) = a. \qquad (3.1.19)$$

Таким образом, дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна числу a - параметру этого распределения, а также, замечаем, что математическое ожидание и дисперсия этой величины равны.

Пример 3.1.16. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A может появиться с вероятностью, равной 0,001. Какова вероятность того, что в 2000 испытаниях событие A появится не менее двух и не более четырех раз.

Решение. Из условия задачи следует, что $n = 2000$, $p = 0{,}001$,

$a = np = 2000 \cdot 0{,}001 = 2$, $2 \le k \le 4$.

Следовательно

$$P_n(2 \le k \le 4) = P_n(2) + P_n(3) + P_n(4) = \frac{2^2}{2!}e^{-2} + \frac{2^3}{3!}e^{-2} + \frac{2^4}{4!}e^{-2} \approx 0{,}541.$$

Пример 3.1.17. Завод отправил на базу 5000 доброкачественных изделий. Вероятность того, что в пути изделие получит повреждение, равна 0,0002. Какова вероятность того, что на базу прибудут 3 бракованных изделия?

Решение. Из условия следует, что $n = 5000$, $p = 0{,}0002$, $a = np = 5000 \cdot 0{,}0002 = 1$.

Согласно формуле (3.1.15) имеем

$$P_{5000}(3) = \frac{1^3}{3!}e^{-1} = \frac{1}{6e} \approx 0{,}0613.$$

Пример 3.1.18. Радиоаппаратура состоит из 1000 электроэлементов. Вероятность отказа одного элемента в течение одного года работы равна 0,001 и не зависит от состояния других элементов. Какова вероятность отказа не менее двух элементов за год?

Решение. Здесь требуется найти вероятности:

1) $P_{1000}(2)$;

2) $P_{1000}(k \ge 2)$.

По условию $n = 1000$, $p = 0{,}001$, $a = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$.

Вероятность отказа ровно двух элементов:

$$P_{1000}(2) = \frac{a^2}{2!}e^{-a} = \frac{1}{2e} \approx 0{,}1831.$$

Вероятность отказа не менее двух элементов:

$$P_{1000}(k \ge 2) = \sum_{k=2}^{\infty} p_k = 1 - p_0 - p_1 = 1 - e^{-a}(1 + a) = 1 - \frac{2}{e} \approx 0{,}2642.$$

Для закрепления данной темы решите следующие задачи.

Задачи:

1. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб выпадает ровно *3* раза?

2. Найдите вероятность того что среди взятых наугад пяти деталей две стандартные, если вероятность детали быть стандартной равна $0{,}9$.

3. Чему равно наивероятнейшее число нестандартных деталей среди 500 деталей, если вероятность каждой из них быть нестандартной равна $0{,}035$?

4. Доля изделий высшего сорта на данном предприятии составляет 40%. Чему равно наивероятнейшее число изделий высшего сорта в случайно отобранной партии из 120 изделий?

5. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле $p = 0{,}7$. Найдите вероятность наивероятнейшего числа попаданий, если произведено 9 выстрелов.

6. Найдите математическое ожидание случайной величины X, распределенной по биноминальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}3$.

7. Найдите дисперсию случайной величины X, распределенной по биноминальному закону с параметрами $n = 50$, $p = 0{,}6$.

8. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X, распределенной по биноминальному закону с параметрами $n = 100$, $p = 0{,}8$.

9. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $0{,}9$. Какова вероятность того, что из 5 выстрелов ровно 3 будут удачными?

10. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна $0{,}9$. Какова вероятность того, что из 5 выстрелов не менее 3 будут удачными?

11. Монета подбрасывается 10 раз. Какова вероятность того, что герб при этом выпадет 4 раза?

12. Вероятность того, что лампа останется исправной после 1000 часов работы, равна $0{,}2$. Найдите вероятность того, что из пяти ламп не менее трех останутся исправными после 1000 часов работы.

13. В урне находятся 8 белых, 5 красных и 2 голубых шара. Производится 5 извлечений с возвращением по одному шару. Рассматриваются события: A - «появился следующий состав шаров: 3 белых и по одному остальных цветов»; B - «появилось ровно 3 белых шара»; C - «появилось 3 белых шара и по одному

остальных цветов, причем белые шары появились подряд». Найдите вероятности событий A, B, C.

14. Производятся независимые испытания, в каждом из которых событие A появляется с вероятностью, $p = 0{,}0015$. Какова вероятность того, что в 2000 испытаниях событие A появится 3 раза?

15. Известно, что в принятой для сборки партии из 1000 деталей имеются 4 дефектных. Найдите вероятность того, что среди 50 наугад взятых деталей нет дефектных.

16. Завод отправил на базу 5000 качественных изделий. Вероятность повреждения каждого изделия в пути равна $0{,}0002$. Найдите вероятность того, что среди 5000 изделий в пути будет повреждено: а) ровно 3 изделия; б) ровно 1 изделие; в) не более 3 изделий; г) более 3 изделий.

17. Магазин получил 1000 бутылок минеральной воды. Вероятность того, что при перевозке бутылка окажется разбитой, равна $0{,}003$. Найдите вероятность того, что магазин получит: а) хотя бы одну; б) менее 2; в) ровно 2; г) более 2 разбитых бутылок.

Ответы:

1) $\frac{15}{128}$; **2)** $P_5(2) = C_5^2 \cdot (0{,}9)^2 \cdot (0{,}1)^3 = 0{,}081$; **3)** $k_0 = 17$; **4)** $k_0 = 48$; **5)** $0{,}267$; **6)** 30; **7)** 12; **8)** 4; **9)** $0{,}073$; **10)** $0{,}99$; **11)** $\frac{105}{512}$; **12)** $0{,}06$; **13)** $P(A) = 0{,}1248$, $P(B) = 0{,}3304$, $P(C) = 0{,}0404$; **14)** $0{,}2242$; **15)** $0{,}8187$; **16)** $а)0{,}06313$; $б)0{,}367879$; $в)0{,}981011$; $г)0{,}018989$; **17)** $а)0{,}95$; $б)0{,}1992$; $в)0{,}224$; $г)0{,}577$.

Вопросы для самопроверки:

1. Какими должны быть испытания, чтобы можно было применять формулу Бернулли?

2. Какой вид имеет формула Бернулли?

3. Что называют наивероятнейшим числом появления события в n независимых испытаниях? Как находится это число?

4. Какой вид имеет формула, определяющая вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится от k_1 до k_2 раз $(0 \le k_1 \le k_2 \le n)$?

5. Как найти вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A появится хотя бы один раз?

6. Как вычислить вероятность того, что в n независимых испытаниях событие A наступит: а) менее k раз; б) более k раз; в) не менее k раз; г) не более k раз?

7. Какое распределение вероятностей называется биноминальным?

8. Чему равно математическое ожидание случайной величины, распределенной по биноминальному закону с параметрами n и p?

9. Чему равна дисперсия случайной величины, распределенной по биноминальному закону с параметрами n и p?

10. Чему равно среднее квадратическое отклонение случайной величины, распределенной по биноминальному закону с параметрами n и p?

11. Запишите биноминальный закон распределения вероятностей случайной величины в виде таблицы.

12. Как определяется полиноминальное распределение вероятностей случайной величины?

13. Какова связь между биноминальным распределением и полиноминальным распределением?

14. Почему закон распределения Пуассона называют законом редких событий?

15. При каких условиях можно применять закон распределения Пуассона?

16. Запишите формулу Пуассона и объясните смысл каждого символа.

17. Каковы общие условия, необходимые для применимости закона распределения Пуассона и закона биноминального распределения?

18. Как связаны между собой биноминальное распределение и распределение Пуассона?

19. Чему равны математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона?

20. Какая из величин в законе Пуассона больше: математическое ожидание или число независимых испытаний?

3.2 Некоторые законы распределения непрерывных случайных величин

1) Равномерное распределение в интервале.

2) Показательное распределение. Функция надежности.

3) Нормальное распределение. Функция Лапласа.

1) Определение 3.2.1. Распределение вероятностей случайной величины X, называется ***равномерным*** на отрезке $[\alpha, \beta]$, если плотность вероятностей этой величины постоянна на данном отрезке:

$$f(x)=\begin{cases} c, & при \alpha \le x \le \beta \\ 0, & при \quad x<\alpha \; или \; x>\beta. \end{cases} \qquad (3.2.1)$$

С равномерным распределением встречаются всякий раз, когда по условиям опыта величина X принимает значение в конечном промежутке $[\alpha, \beta]$. Все значения из промежутка возможны в одинаковой степени.

Кривая равномерного распределения имеет вид прямоугольника (см. рисунок 3.2.1), опирающегося на участок $(\alpha;\beta)$:

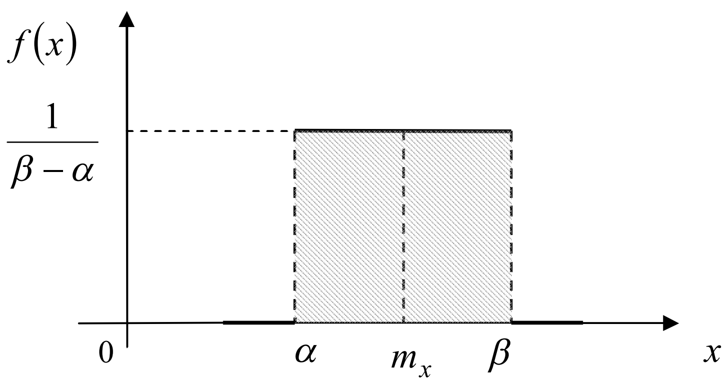


Рисунок 3.2.1

Пример 3.2.1. Найти значение c в формуле (3.2.1), определяющей равномерное распределение.

Решение. Поскольку для плотности распределения $f(x)$ должно выполняться условие (2.2.19), то

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} cdx = 1,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} cdx = cx\Big|_{\alpha}^{\beta} = c(\beta - \alpha) = 1,$$

$$c = \frac{1}{\beta - \alpha}.$$

Следовательно, формула (3.2.1) принимает вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta - \alpha} & при \alpha \le x \le \beta \\ 0 & при \quad x < \alpha или\ x > \beta. \end{cases} \qquad (3.2.2)$$

Пример 3.2.2. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины X, имеющей равномерное распределение.

Решение. Принимая во внимание формулу (2.2.16) и формулу (3.2.2) получаем:

а) при $x \le \alpha$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = 0;$$

б) при $\alpha < x < \beta$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{x} \frac{dt}{\beta - \alpha} = \frac{x - \alpha}{\beta - \alpha};$$

в) при $x \ge \beta$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx + \int_{\beta}^{x} f(t)dt = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dt}{\beta - \alpha} = 1.$$

Итак, функция распределения имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0 \quad при\, x \le \alpha \\ \dfrac{x-\alpha}{\beta-\alpha} \quad при\, \alpha < x < \beta \\ 1 \quad при \quad x \ge \beta.\end{cases} \qquad (3.2.3)$$

График функции $F(x)$ изображен на рисунке 3.2.2

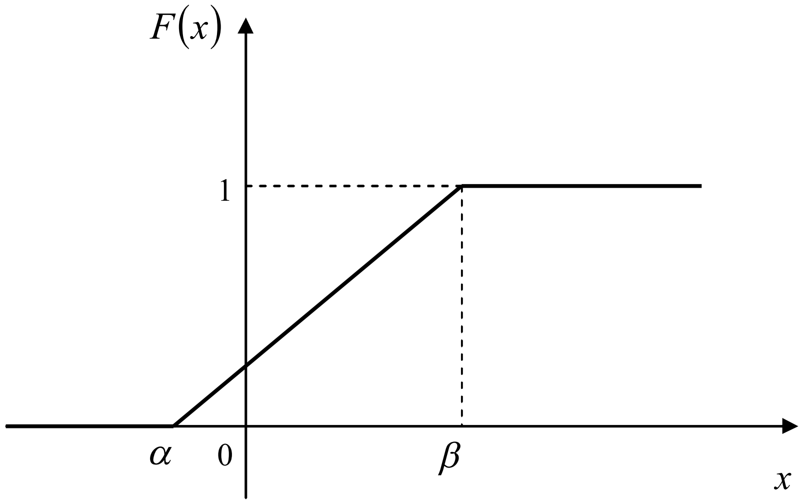


Рисунок 3.2.2

Пример 3.2.3. Автобусы некоторого маршрута идут с интервалом 5 минут. Найти вероятность того, что пришедшему на остановку пассажиру придется ожидать автобуса не более 2 минут.

Решение. Случайная величина X - время ожидания на стоянке автобуса, она равномерно распределена на интервале $[0;5]$. Тогда плотность распределения $f(x)=\dfrac{1}{5}$, а вероятность $P(0 \le X \le 2) = F(2) - F(0) = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$.

Пример 3.2.4. Найти математическое ожидание случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[\alpha, \beta]$.

Решение. Пользуясь формулой (2.3.4) и принимая во внимание формулу (3.2.2) находим:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) = \int_{-\infty}^{\alpha} xf(x)dx + \int_{\alpha}^{\beta} xf(x)dx + \int_{\beta}^{+\infty} xf(x)dx = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{xdx}{\beta-\alpha} =$$

$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{x^2}{2}\Bigg|_\alpha^\beta=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\beta+\alpha}{2}.$$

$$M(X)=\frac{\beta+\alpha}{2}. \qquad (3.2.4)$$

Следовательно, математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на отрезке, есть середина этого отрезка (см. рисунок 3.2.1).

Пример 3.2.5. Найти дисперсию случайной величины X, имеющей равномерное распределение на отрезке $[\alpha,\beta]$.

Решение. Пользуясь формулой (2.3.29) и принимая во внимание формулы (3.2.2) и (3.2.4), находим:

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\alpha}(x-a)^2 f(x)dx+\int_{\alpha}^{\beta}(x-a)^2 f(x)dx+\int_{\beta}^{+\infty}(x-a)^2 f(x)dx=$$

$$=\int_\alpha^\beta\frac{(x-a)^2}{\beta-\alpha}dx=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{(x-a)^3}{3}\Bigg|_\alpha^\beta=\frac{\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3}{3(\beta-\alpha)}\Bigg|_\alpha^\beta=$$

$$=\frac{\left(\beta-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3-\left(\alpha-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^3}{3(\beta-\alpha)}=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}.$$

Итак,

$$D(X)=\frac{(\beta-\alpha)^2}{12}. \qquad (3.2.5)$$

Пример 3.2.6. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[2,7]$. Записать плотность распределения $f(x)$ этой случайной величины.

Решение. Плотность распределения $f(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$, определяется формулой (3.2.2). В данном случае $\alpha=2$, $\beta=7$, $\beta-\alpha=5$; следовательно,

$$f(x)=\begin{cases}1/5, & \textit{при}\ 2\le x\le 7;\\ 0, & \textit{при}\quad x<2\,\textit{или}\ x>7.\end{cases}$$

Пример 3.2.7. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-3,2]$. Найти функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

Решение. Функция распределения $F(x)$ случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$, определяется формулой (3.2.3).

Из условия задачи следует, что $\alpha=-3$, $\beta=2$, $\beta-\alpha=2-(-3)=5$;

Значит,

$$F(x)=\begin{cases}0, & при\, x\le -3\\ \dfrac{x+3}{5}, & при -3<x<2\\ 1, & при \quad x\ge 2.\end{cases}$$

Пример 3.2.8. Найти дисперсию случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[4,6]$.

Решение. Дисперсия случайной величины X, равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$, вычисляется по формуле (3.2.5). Так как в данном случае $\alpha=4$, $\beta=6$, то

$$D(x)=\frac{(6-4)^2}{12}=\frac{2^2}{12}=\frac{1}{3},$$

2) Рассмотрим другой очень важный закон распределения непрерывной случайной величины X - показательный.

Определение 3.2.2. Непрерывная случайная величина X имеет ***показательный (или экспоненциальный) закон распределения***, если ее плотность вероятности имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda x}, & при\, x\ge 0,\\ 0, & при\, x<0,\end{cases} \qquad (3.2.6)$$

где $\lambda>0$ - параметр распределения.

График плотности $f(x)$ показательного распределения показан на рисунке 3.2.3.

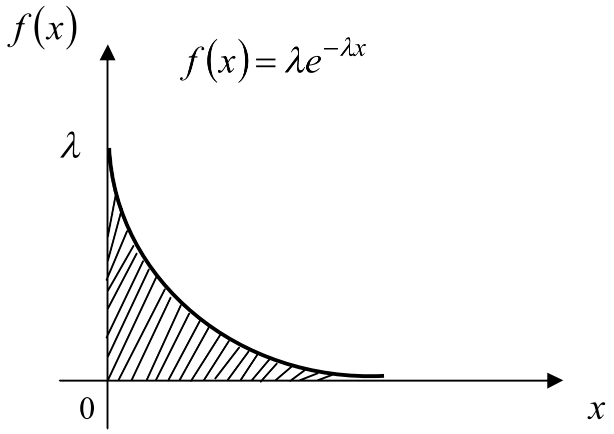


Рисунок 3.2.3

Функция распределения показательного закона распределения имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & при\, x\geq 0,\\ 0, & при\, x<0,\end{cases} \qquad (3.2.7)$$

где $F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt=\int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dt+\int\limits_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda x}dt=1-e^{-\lambda x}$.

График $F(x)$ представлен на рисунке 3.2.4.

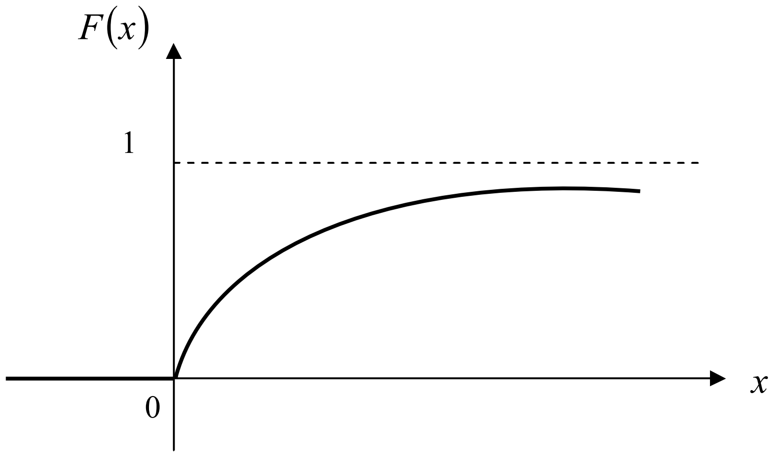


Рисунок 3.2.4

Найдем математическое ожидание и дисперсию показательного распределения:

$$M(X)=\int\limits_{0}^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lim_{b\to\infty}\int\limits_{0}^{b} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=[интегрируем\ по\ частям]=$$

$$=\lim_{b\to\infty}\left(-x\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b-\frac{1}{\lambda}\cdot e^{-\lambda x}\Big|_0^b\right)=0-\frac{1}{\lambda}(0-1)=\frac{1}{\lambda}.$$

Таким образом, математическое ожидание случайной величины, имеющей показательное распределение, обратно пропорционально его параметру λ.

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}x^2 f(x)dx-(M(X))^2=\lambda\int_0^{\infty}x^2e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\left[\textit{дважды интегрируем по частям}\right]=$$

$$=\lambda(\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda e}+\frac{2}{\lambda}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right)\right)\Bigg|_0^b)-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\lambda\left(0+\frac{2}{\lambda}\left(0+0-\frac{1}{\lambda^2}(0-1)\right)\right)-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}.$$

Таким образом,

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\qquad D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\qquad \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}. \qquad (3.2.7)$$

Найдем вероятность попадания случайной величины X, распределенной по показательному закону, в интервал (a,b). Используя формулу (2.2.12) и формулу (3.2.7), получаем:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a)=\left(1-e^{-\lambda b}\right)-\left(1-e^{-\lambda a}\right)=e^{-\lambda a}-e^{-\lambda b}.$$

Показательное распределение тесно связано с таким понятием как функция надежности.

Пусть *элемент* (то есть некоторое устройство) начинает работать в момент времени $t_0=0$ и должен проработать в течение периода времени t. Обозначим за T непрерывную случайную величину – время безотказной работы элемента, тогда функция $F(t)=P(T<t)$ определяет вероятность отказа за время t. Следовательно, вероятность безотказной работы за это же время равна:

$$R(t)=P(T>t)=1-F(t). \qquad (3.2.8)$$

Функция $R(t)$, определяемая равенством (3.2.8) называется ***функцией надежности***.

Как правило, длительность безотказной работы элемента имеет показательное распределение, то есть

$$F(t)=P(T<t)=1-e^{-\lambda t}. \qquad (3.2.9)$$

Следовательно, функция надежности в этом случае имеет вид:

$$R(t) = P(T > t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}.$$

Таким образом, ***показательным законом надежности*** называют функцию надежности, определяемую равенством

$$R(t) = e^{-\lambda t}, \tag{3.2.10}$$

где λ – интенсивность отказов.

Пример 3.2.9. Пусть время безотказной работы элемента, распределенного по показательному закону с плотностью распределения $f(t) = 0{,}1e^{-0{,}1t}$, при $t \ge 0$. Найти вероятность того, что элемент проработает безотказно в течение 10 часов.

Решение. Так как $\lambda = 0{,}1$, $R(10) = e^{-0{,}1\cdot 10} = e^{-1} \approx 0{,}368$.

Пример 3.2.10. Случайная величина T - время работы радиоламп имеет показательное распределение. Найти вероятность того, что лампа проработает не менее 800 часов, если среднее время работы радиолампы 400 часов.

Решение. Из формулы (3.2.7) замечаем, что $M(T) = 400$, значит $\lambda = \dfrac{1}{400}$.

Следовательно, искомая вероятность будет равна:

$$P(T \ge 800) = R(t) = R(800) = e^{-\frac{800}{400}} = e^{-2} \approx 0{,}135.$$

Показательное распределение используется в приложениях теории вероятностей, особенно в теории массового обслуживания (ТМО), в физике и теории надежности. Оно используется для описания распределения случайной величины вида: длительность работы прибора до первого отказа, длительность времени обслуживания в системе массового обслуживания и т.д.

Показательный закон – единственный из законов распределения, который обладает свойством «отсутствия последствия» (т.е. если промежуток времени T уже длится некоторое время τ, то показательный закон распределения остается таким же и для оставшейся части $T_1 = T - \tau$ промежутка).

3) Нормальный закон распределения или закон Гаусса играет исключительно важную роль в теории вероятностей и занимает среди других законов распределения особое положение.

Определение 3.2.3. ***Нормальным распределением*** или распределением Гаусса, называется распределение с плотностью вероятностей

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ \sigma>0. \qquad (3.2.11)$$

Определение 3.2.4. Постоянные a и σ ($\sigma>0$) называются ***параметрами нормального распределения.***

Определение 3.2.5. График функции $f(x)$ или функции Гаусса, называют ***нормальной кривой.***

Построим нормальную кривую при $a=3$ и $\sigma=1$.

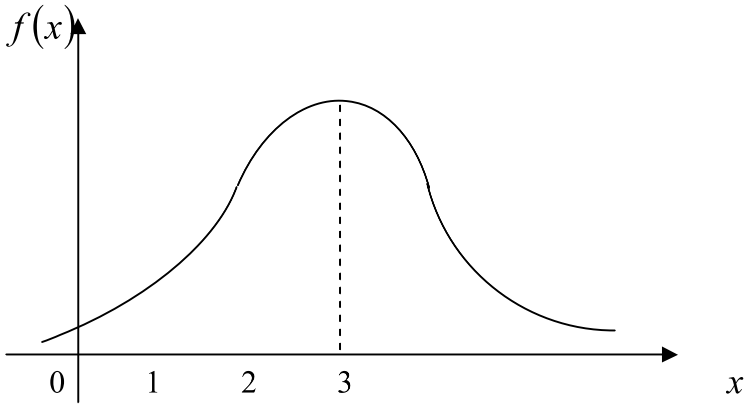


Рисунок 3.2.5

Вычислим основные характеристики случайной величины X, распределенной по нормальному закону. Покажем что, a - математическое ожидание, а σ - среднее квадратическое отклонение. При нахождении $M(X)$ и $D(X)$ применим подстановку $z=\frac{x-a}{\sigma}$ и используем интеграл Пуассона $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=\sqrt{2\pi}$.

Имеем:

а) математическое ожидание

$$M(X)=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/\left(2\sigma^2\right)}dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-a+a}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/\left(2\sigma^2\right)}dx=$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} ze^{-z^2/2}dz+\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz. \qquad (3.2.12)$$

Первый из интегралов в формуле (3.2.12) равен нулю; как интеграл в симметричных пределах от нечетной функции; второй представляет собой известный интеграл Эйлера – Пуассона:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt=2\int_{0}^{\infty} e^{-t^2}dt=\sqrt{\pi}\,. \qquad (3.2.13)$$

Следовательно, $M(X)=a.$ (3.2.14)

Замечание 3.2.1. Величина a - математическое ожидание нормально распределенной случайной величины X, называется ее «***центром рассеивания***»

б) дисперсия

$$D(X)=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2 f(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(x-a)^2/\left(2\sigma^2\right)}dx=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} z^2e^{-z^2/2}dz=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} zd\left(e^{-z^2/2}\right)=-\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left(ze^{-z^2/2}\Big|_{-\infty}^{\infty}-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz\right)=$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}dz=\sigma^2;$$

$$D(X)=\sigma^2. \qquad (3.2.15)$$

Итак, параметр σ есть не что иное, как среднее квадратическое отклонение случайной величины X:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\sigma^2}=\sigma \qquad (3.2.16)$$

Исследуем дифференциальную функцию (3.2.11) нормального закона:

1. $f(x)>0$ при любом $x\in(+\infty,-\infty)$; график функции расположен выше оси Ox.

2. Ось Ox является асимптотой графика функции $f(x)$, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=0$.

3. Функция $f(x)$ имеет максимум при $x=a$.

Найдем производную от дифференциальной функции:

$$f'(x)=\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\right)'=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\cdot 2(x-a)\right)=-\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}.$$

Так как в точке максимума, в силу необходимого условия экстремума, $f'(x)=0$, то $-\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}=0$.

Множитель $e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\neq 0$ ни при каком значении x, тогда $(x-a)=0$. Следовательно, $x=a$ и т.к. при $x<a$, $f'(x)>0$, а при $x>a$, $f'(x)<0$,то $x=a$ - максимум функции и $f_{\max}=f(a)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

4. График функции $f(x)$ симметричен относительно прямой $x=a$, т.к. аналитическое выражение $f(x)$ содержит разность $(x-a)$ в квадрате.

5. Найдем точки перегиба графика функции $f(x)$:

$$f''(x)=\left(-\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}-\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right)'=$$

$$=-\frac{1}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}+\frac{(x-a)}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}\cdot\frac{(x-a)}{\sigma^2}=-\frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\left(1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right).$$

Так как в точках перегиба $f''(x)=0$, следовательно,

$$-\frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma^3\sqrt{2\pi}}\cdot\left(1-\frac{(x-a)^2}{\sigma^2}\right)=0$$, первый множитель нулю не равен, поэтому

$1-\dfrac{(x-a)}{\sigma^2}=0 \Rightarrow (x-a)^2=\sigma^2 \Rightarrow x_1=a+\sigma$ или $x_2=a-\sigma$.

При $x_1=a+\sigma$,

$$f(x)=f(a+\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{(a+\sigma-a)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{\sigma^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

При $x_2=a-\sigma$,

$$f(x)=f(a-\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}}.$$

Следовательно, точки $M_1(a-\sigma;\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}})$ и $M_2(a+\sigma;\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{1}{2}})$ являются точками перегиба графика функции $f(x)$.

Используя результаты исследования, построим график плотности распределения вероятности нормального закона (см. рисунок 3.2.6).

Рассмотрим, как влияет изменение параметров a и σ на форму кривой Гаусса.

а) если $a=0$ и $\sigma=1$, то $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$ - такое распределение называется ***стандартным.***

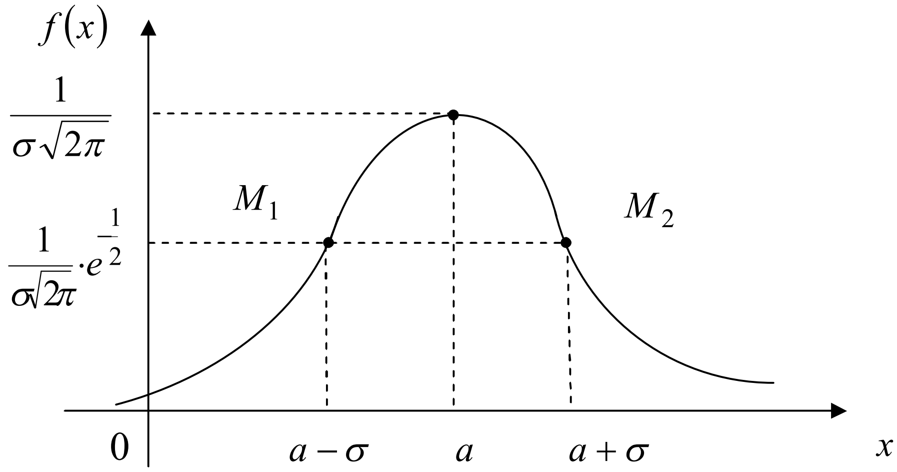


Рисунок 3.2.6

б) изменение параметра a не изменяет форму нормальной кривой, т.к. графики функции $f(x)$ и $f(x-a)$ имеет одинаковую форму; график $f(x-a)$ получается из графика функции $f(x)$ путем сдвига последнего на a единицу вправо, если $a>0$ и влево, если $a<0$ (см. рисунок 3.2.7).

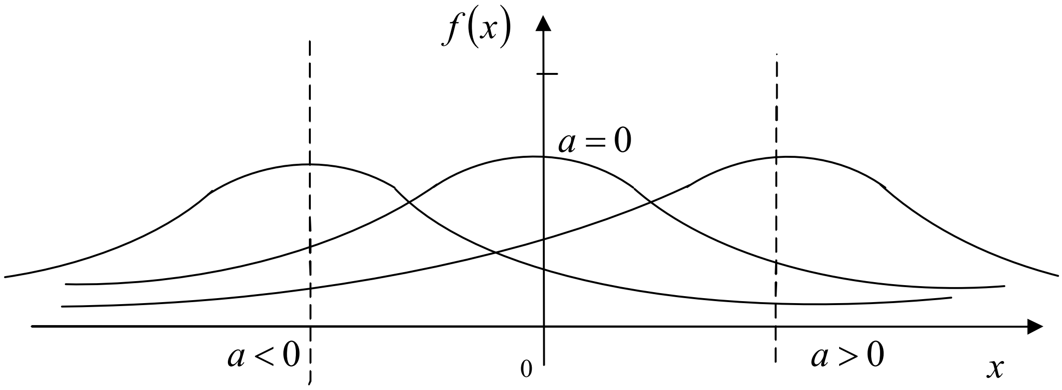


Рисунок 3.2.7

в) с изменением σ максимальная ордината точки кривой изменяется, а именно, с возрастанием σ кривая Гаусса становится более пологой, растягивается вдоль оси Ox (см. рисунок 3.2.8).

Рассмотрим функцию распределения непрерывной случайной величины X имеющей нормальное распределение:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)dt=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}dt. \qquad (3.2.17)$$

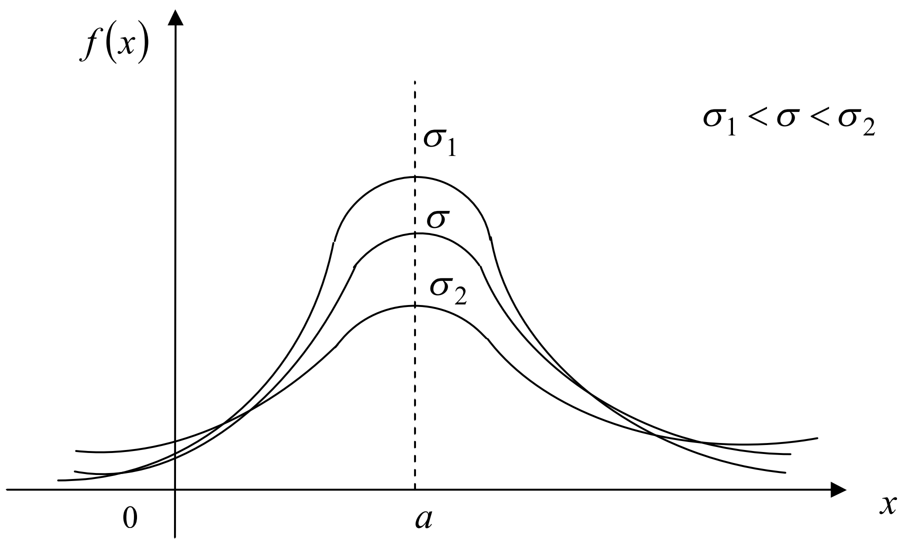


Рисунок 3.2.8

При $a=0$, $\sigma=1$, функция распределения имеет вид:

$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt$. В этом случае говорят, что нормальное распределение является нормированным. Тогда вероятность попадания нормированной нормальной величины X в интервале $(0,x)$ будет вычисляться по формуле:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\int\limits_{0}^{x}e^{-\frac{t^2}{2}}dt, \qquad (3.2.18)$$

где функция $\Phi(x)$ называется ***функцией Лапласа.*** Для нахождения значений этой функции составлены таблицы (приложение В).

Найдем вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в интервал (α,β):

т.к. $P(\alpha<x<\beta)=\int\limits_{\alpha}^{\beta}f(x)dx$, то для нормального распределения

$$P(\alpha<X<\beta)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\alpha}^{\beta}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx=\left|\frac{x-a}{\sigma}=z\right|=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\beta-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{\frac{\alpha-a}{\sigma}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz.$$

Используя функцию Лапласа, получаем:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right), \qquad (3.2.19)$$

Функция Лапласа $\Phi(x)$ обладает следующими свойствами:

1. $\Phi(0)=0$.

Действительно, первое свойство очевидно: $\Phi(0)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{0}^{0}e^{-\frac{z^2}{2}}dz=0$.

2. $\Phi(+\infty)=0{,}5$ (и, значит, $\Phi(-\infty)=-0{,}5$).

Доказательство второго свойства следует из того, что согласно выражению (3.2.13)

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\lim_{a\to+\infty}\int_0^{a} e^{-\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right)^2} d\left(\frac{z}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{1}{2}.$$

3. $\Phi(-X) = -\Phi(X)$ - функция Лапласа нечетная.

На практике часто приходится вычислять вероятность попадания нормально распределенной случайной величины X на участок длины $2l$, симметричный относительно центра рассеяния a. А именно,

$$P(a-l<X<a+l) = P(|X-a|<l) = \Phi\left(\frac{a+l-a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-l-a}{\sigma}\right). \qquad (3.2.20)$$

Или, принимая во внимание нечетность функции Лапласа,

$$P(|X-a|<l) = 2\Phi\left(\frac{l}{\sigma}\right) \qquad (3.2.21)$$

Полагая в равенстве (3.2.21) $l = 3\sigma$, получим

$$P(|X-a|<3\sigma) = 2\Phi(3),$$

по таблице значений для функции Лапласа найдем $\Phi(3) = 0{,}49865$.

Следовательно, $P(|X-a|<3\sigma) \approx 2\cdot 0{,}49865 \approx 0{,}9973$.

Замечание 3.2.2.

1. Значение $\Phi(3) = 0{,}49865$ найдено с помощью таблицы значений функции Лапласа.

2. Неравенство $P(|X-a|<3\sigma) = 0{,}9973$ означает, что событие, состоящее в осуществлении неравенства $|x-a|<3\sigma$, имеет вероятность, близкую к единице, т.е. является почти достоверным.

3. Данное неравенство выражает **«*правило трех сигм*»:** если случайная величина распределена по нормальному закону, то модуль ее отклонения от математического ожидания не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Через функцию Лапласа выражается и функция распределения $F(x)$ нормально распределенной случайной величины X. По формуле (3.2.19), полагая $\alpha=-\infty, \beta=x$ и учитывая, что $\Phi(-\infty)=-\frac{1}{2}$, получим:

$$F(x)=\frac{1}{2}+\Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right). \tag{3.2.22}$$

Главная особенность закона Гаусса состоит в том, что он является предельным законом, к которому приближаются, при определенных условиях, другие законы распределения.

Нормальный закон наиболее часто встречается на практике. Нормальному закону подчиняются ошибки изменений величины износа деталей в механизмах, рост человека, способности человека, ошибки стрельбы, вес клубней картофеля, величина шума в радиоприемном устройстве и т.д. и т.п.

Пример 3.2.11. Случайная величина X распределена по нормальному закону, причем $M(X)=10$, $D(X)=4$. Найти:

1. $P(12<X<14)$;
2. $P(8<X<12)$.

Решение. Из условия следует, что $a=10$, $\sigma(x)=\sqrt{D(X)}=2$. В соответствии с формулой (3.2.19) находим:

$$P(12<X<14)=\Phi\left(\frac{14-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)=$$

$$=\Phi(2)-\Phi(1)=0{,}477250-0{,}341345=0{,}135905.$$

$$P(8<X<12)=\Phi\left(\frac{12-10}{2}\right)-\Phi\left(\frac{8-10}{2}\right)=$$

$$=\Phi(1)-\Phi(-1)=2\Phi(1)=2\cdot 0{,}341345=0{,}682690.$$

Замечание 3.2.3. Здесь использованы соответствующие значения функции Лапласа и нечетность этой функции.

Пример 3.2.12. Вес пойманной рыбы подчиняется нормальному закону распределения с параметрами $a=375$ г, $\sigma=25$ г. Найти вероятность того, что вес одной рыбы будет: 1) от 300 до 425 г; 2) не более 450 г; 3) больше 300 г.

Решение. Пользуясь формулой (3.2.19), полагая в ней $a = 375, \sigma = 25$.

1) В первом случае $\alpha = 300$, $\beta = 425$, поэтому

$$P(300 < X < 425) = \Phi\left(\frac{425-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) = \Phi(2) - \Phi(-3) =$$

$$= \Phi(2) + \Phi(3) = 0{,}477250 + 0{,}498650 = 0{,}9759.$$

2) Во втором случае $(X < 450)$ находим:

$$P(X < 450) = P(0 < X < 425) = \Phi\left(\frac{450-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{0-375}{25}\right) = \Phi(3) - \Phi(-15) =$$

$$= \Phi(3) + \Phi(15) = 0{,}49865 + 0{,}5 = 0{,}9987.$$

3) В третьем случае $(X > 300)$ получаем

$$P(X > 300) = P(300 < X < +\infty) = \Phi\left(\frac{+\alpha-375}{25}\right) - \Phi\left(\frac{300-375}{25}\right) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(-3) = \Phi(+\infty) + \Phi(3) = 0{,}5 + 0{,}49865 = 0{,}9987.$$

Пример 3.2.13. При измерении детали получаются случайные ошибки, подчиненные нормальному закону с параметрами $\sigma = 10\ мм$. Найти вероятность того, что измерение произведено с ошибкой, не превосходящей $15\ мм$.

Решение. Будем пользоваться формулой (3.2.21) и таблицей значений функции Лапласа. В данном случае $\delta = 15$, $\sigma = 10$, поэтому

$$P(|X - a| < 15) = 2\Phi\left(\frac{15}{10}\right) = 2\Phi(1{,}5) = 2 \cdot 0{,}433193 = 0{,}866386.$$

Случайная величина, получающаяся при измерении чего-либо, всегда имеет математическое ожидание равное нулю.

Пример 3.2.14. Автомат изготавливает подшипники, которые считаются годными, если отклонение X от проектного размера по модулю не превышает $0{,}77\ мм$. Каково наиболее вероятное число годных подшипников из 100 штук, если случайная величина X распределена нормально с параметром $\sigma = 0{,}4\ мм$?

Решение. Найдем вначале вероятность отклонения по формуле (3.2.21) при $\delta = 0{,}77$ и $\sigma = 0{,}4$:

$$P(|X - a| < 0{,}77) = 2\Phi\left(\frac{0{,}77}{0{,}4}\right) \approx 2\Phi(1{,}93) = 2 \cdot 0{,}473197 = 0{,}946394.$$

Считая приближенно $p = 0{,}95$ и $q = 0{,}05$, в соответствии с формулой (3.1.3), при $n = 100$ находим:

$100 \cdot 0{,}95 - 0{,}05 \le k_0 \le 100 \cdot 0{,}95 + 0{,}95$,

откуда $k_0 = 95$.

Пример 3.2.15. Станок-автомат изготавливает валики, контролируя их диаметры X. Считая, что случайная величина X распределена нормально, с параметрами $a = 10\,мм$, $\sigma = 0{,}1\,мм$, найти интервал, в котором с вероятностью $0{,}9973$ будут заключены диаметры изготовленных валиков.

Решение. Воспользуемся формулой (3.2.21).

В данном случае известно $a = 10$, $\sigma = 0{,}1$, $2\Phi\left(\delta / \sigma\right) = 0{,}9973$; требуется определить δ и интервал $(a - \delta, a + \delta)$.

Из условия $2\Phi\left(\delta / \sigma\right) = 0{,}9973$ можно найти $\Phi\left(\delta / \sigma\right) = \dfrac{0{,}9973}{2} = 0{,}4987$.

По таблице значений функции Лапласа находим, что $\delta / \sigma = 3$. Следовательно, $\delta = 3\sigma = 3 \cdot 0{,}1 = 0{,}3$.

Из неравенства $|X - 10| < 0{,}3$ получаем

$-0{,}3 < X - 10 < 0{,}3$,

$10 - 0{,}3 < X < 10 + 0{,}3$,

$9{,}7 < X < 10{,}3$.

Значит, искомым является интервал $(9{,}7; 10{,}3)$.

Пример 3.2.16. Найти вероятность того, что нормальная случайная величина с математическим ожиданием, равным 3, и дисперсией, равной 4, примет значения: 1) в интервале (-1, 5); 2) не более 8; 3) не менее 5; 4) в интервале (-3, 9).

Решение. Воспользуемся формулой (3.2.19)

1) По условию $\alpha = -1$, $\beta = 5$, $a = 3$, $\sigma = \sqrt{4} = 2$, поэтому

$$P(-1 < X < 5) = \Phi\left(\frac{5-3}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-1-3}{2}\right) = \Phi(1) - \Phi(-2) = \Phi(1) + \Phi(2) =$$

$= 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185;$

2) $P(X \le 8) = P(-\infty < x \le 8) = \Phi\left(\dfrac{8-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{-\infty-3}{2}\right) =$

$= \Phi(2{,}5) - \Phi(-\infty) = 0{,}4938 + 0{,}5 = 0{,}9938;$

3) $P(X \ge 5) = P(5 \le X < +\infty) = \Phi\left(\dfrac{+\infty-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{5-3}{2}\right) =$

$= \Phi(+\infty) - \Phi(1) = 0{,}5 - 0{,}3643 = 0{,}1587;$

4) $P(-3 < X < 9) = \Phi\left(\dfrac{9-3}{2}\right) - \Phi\left(\dfrac{-3-3}{2}\right) =$

$= \Phi(3) - \Phi(-3) = 2\Phi(3) = 2 \cdot 0{,}4986 = 0{,}9972$.

Пример 3.2.17. При изготовлении некоторого изделия его вес X подвержен случайным колебаниям. Стандартный вес изделия равен 30 г, его среднее квадратическое отклонение равно 0,7, а случайная величина X распределена по нормальному закону. Найти вероятность того, что вес наугад выбранного изделия находится в пределах от 28 до 31 г.

Решение. Воспользуемся формулой (3.2.19).

В данном случае $a = 30$, $\sigma = 0{,}7$, $\alpha = 28$, $\beta = 31$. В соответствии с указанной формулой находим

$$P(28 < X < 31) = \Phi\left(\frac{31-30}{0{,}7}\right) - \Phi\left(\frac{28-30}{0{,}7}\right) = \Phi(1{,}43) - \Phi(-2{,}86) =$$
$$= \Phi(1{,}43) + \Phi(2{,}86) = 0{,}424 + 0{,}498 = 0{,}922.$$

Пример 3.2.18. Линия связи обслуживает 1000 абонентов. Каждый абонент разговаривает в среднем 6 минут в час. Сколько каналов должна иметь линия связи, чтобы с практической достоверностью можно было утверждать, что не произойдет ни одной потери вызова?

Решение. Вероятность вызова для каждого абонента

$$p = \frac{6}{60} = \frac{1}{10} = 0{,}1,\ q = 1 - p = 0{,}9,$$

поэтому

$$a = np = 1000 \cdot 0{,}1 = 100,$$

$$\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} \approx 9{,}5.$$

Согласно правилу трех сигм практически достоверно, что

$|X-a|<3\sigma$,

Откуда

$|X-100|<3\cdot 9{,}5$.

Таким образом, для практически безотказной работы линии связи (при указанных условиях) достаточно иметь 130 каналов.

Для закрепления данной темы предлагаем решить следующие задачи.

Задачи:

1. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[3{,}8]$. Запишите плотность распределения $f(x)$ этой случайной величины.

2. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[-4{,}1]$. Найдите функцию распределения $F(x)$ этой случайной величины.

3. Найдите математическое ожидание случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[-3{,}3]$.

4. Найти дисперсию случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[7{,}10]$.

5. Найдите среднее квадратическое отклонение случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[-2{,}7]$.

6. Определите закон распределения, найдите $M(X)$, $D(X)$ и функцию распределения для случайной величины X, если ее плотность вероятностей задана функцией

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{32\pi}}e^{-(x-3)^2/32}.$$

7. Запишите функцию распределения и плотность вероятностей для нормально распределенной случайной величины X, если $M(X)=5$, $D(X)=4$.

8. При взвешивании получается ошибка, подчиненная нормальному закону с параметром $\sigma=20\,г$. Найдите вероятность того, что взвешивание будет произведено с ошибкой, не превосходящей 30 г.

9. Независимые случайные величины X и Y имеют нормальное распределение, причем $M(X) = -2$, $D(X) = 3$, $M(X) = 7$, $D(X) = 6$. Запишите плотность распределения и функцию распределения их суммы.

10. Случайная величина X распределена по нормальному закону с параметрами $a = 2$, $\sigma = 3$. Найдите вероятность того, что эта величина принимает значения из интервала $(-1, 8)$.

11. В результате проверки точности работы прибора установлено, что $80\,\%$ ошибок не вышло за пределы ± 20 *мм*, а остальные ошибки вышли за эти пределы. Определите среднее квадратическое отклонение ошибок прибора, если известно, что систематических ошибок прибор не дает, а случайные ошибки распределены по нормальному закону.

12. На станке изготовляются втулки. Длина l втулки представляет собой случайную величину, распределенную по нормальному закону, имеет среднее значение $l_{cp} = 20$ *см* и дисперсию $\sigma = 0{,}04$ *см*^{2}. Найдите вероятность того, что длина втулки заключена между $19{,}7$ *см* и $20{,}3$ *см*, т.е. уклонение в ту или иную сторону не превзойдет $0{,}3$ *см*. Какую длину изделия можно гарантировать с вероятностью $p = 0{,}95$?

Ответы:

1) $f(x)\begin{cases} 0, & при\ x < 3; \\ 0{,}2 & при\ 3 \le x \le 2 \\ 0, & при\ \ x > 8. \end{cases}$; **2)** $F(x)\begin{cases} 0 & при\ x < -4 \\ 0{,}2(x+4) & при\ -4 \le x \le 1; \\ 1 & при\ \ x > 1 \end{cases}$

3) 0; **4)** $0{,}75$; **5)** $3\sqrt{3}/2$; **6)** Нормальный закон распределения с параметрами $a = 3$, $\sigma = 4$; **7)** $\dfrac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-(x-5)^2/8}$; **8)** $0{,}866$; **9)** Указание: $a = 5$, $\sigma = 3$; **10)** $0{,}8185$; **11)** $15{,}6$; **12)** $0{,}87$, 20 ± 4 *см.*

Вопросы для самопроверки:

1. Какое распределение вероятностей называют равномерным на отрезке $[\alpha,\beta]$?

2. Как записать плотность распределения $f(x)$ случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$?

3. Какой вид имеет функция распределения $F(x)$ случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$?

4. Чему равно математическое ожидание случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$?

5. Чему равна дисперсия случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$?

6. Чему равно среднее квадратическое отклонение случайной величины X равномерно распределенной на отрезке $[\alpha,\beta]$?

7. Случайная величина X равномерно распределена на отрезке $[\alpha,\beta]$. Как найти вероятность попадания ее значений в интервал (γ,δ), принадлежащий данному отрезку?

8. Какое распределение вероятностей случайной величины называют нормальным?

9. Каков вероятностный смысл параметров a и σ, входящих в функцию Лапласа?

10. Что называют нормальной кривой?

11. Чему равно математическое ожидание нормальной случайной величины?

12. Чему равна дисперсия нормальной случайной величины?

13. Чему равно среднее квадратическое отклонение нормальной случайной величины?

14. Как определяется функция Лапласа?

15. Как вычислить вероятность попадания значений нормальной случайной величины X в заданный интервал?

16. Как вычислить вероятность отклонения нормальной случайной величины от ее математического ожидания?

17. Сформулируйте правило трех сигм.

18. Что называют стандартным отклонением?

19. Какой вид имеет нормальная кривая?

20. Какое распределение случайной величины называют показательным?

21. Какой вид имеет график плотности распределения непрерывной случайной величины, распределенной показательно?

22. Запишите функцию распределения непрерывной случайной величины, имеющей показательный закон распределения.

23. Что такое функция надежности?

24. Какой закон называют показательным законом надежности?

3.3 Закон больших чисел

1) Принцип практической невозможности маловероятных событий. Формулировка закона больших чисел.

2) Лемма Маркова. Неравенство и теорема Чебышева. Теоремы Бернулли и Пуассона. Теорема Лапласа.

3) Центральная предельная теорема.

1) Ранее было отмечено, что нельзя предвидеть, какое из возможных значений примет случайная величина, так как мы не можем учесть все обстоятельства, от которых зависит это событие. Однако в некоторых случаях можно указать вероятность такого события. Опыт подсказывает, что события, вероятность наступления которых мала, редко происходят, а события, имеющие вероятность, близкую к единице, почти обязательно происходят.

Принцип, заключающийся в том, что маловероятные события на практике рассматриваются как невозможные, носит название “принципа практической невозможности маловероятных событий”. События, происходящие с вероятностями, весьма близкими к единице, считаются практически достоверными (принцип практической достоверности). Сколь мала или сколь велика, должна быть вероятность события, зависит от практического применения, от важности этого события.

Следовательно, одной из основных задач теории вероятностей является установление закономерностей, происходящих с вероятностями близкими к единице. Эти закономерности должны учитывать совместное влияние большого числа независимо (или слабо зависимо) действующих факторов. При этом каждый фактор в отдельности характеризуется незначительным воздействием. Всякое предложение, устанавливающее отмеченные выше закономерности, называется законом больших чисел. Законом больших чисел, по определению профессора А.Я. Хинчина, следует назвать общий принцип, в силу которого совокупное действие большого числа факторов приводит при некоторых весьма общих условиях к результату, почти не зависящему от случая.

Некоторые конкретные условия, при которых выполняется закон больших чисел, указаны в теоремах Чебышева, Бернулли, Пуассона и Ляпунова.

2) Лемма Маркова. Неравенство и теорема Чебышева. Теоремы Бернулли и Пуассона.

Лемма 3.3.1 (Лемма Маркова). Пусть X - случайная величина принимающая, лишь неотрицательные значения и существует ее математическое ожидание $M(X)=a$, то для любого числа $\delta>0$ справедливы следующие неравенства:

$$P(X\le\delta)\ge 1-\frac{a}{\delta}; \tag{3.3.1}$$

$$P(X>\delta)\le\frac{a}{\delta},\ (\forall\delta>0). \tag{3.3.2}$$

Неравенства (3.3.1) и (3.3.2) называют ***неравенствами Маркова.***

Рассмотрим теперь случайную величину X, имеющую математическое ожидание $M(X)=a$ и дисперсию $D(X)$. Оценим вероятность события, заключающегося в том, что отклонение $X-M(X)$ не превысит по абсолютной величине положительного числа ε. Оценка указанной вероятности получается с помощью неравенства Чебышева.

Теорема 3.3.1 (Неравенство Чебышева). Вероятность того, что отклонение случайной величины X от ее математического ожидания по абсолютной величине меньше положительного числа ε, не меньше, чем $1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$, т.е.

$$P(|X-a|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{3.3.3}$$

Неравенство (3.3.3) называют ***неравенством Чебышева***.

Замечание 3.3.1. Неравенство Чебышева можно записать в другой форме:

$$P(|X-a|\geq\varepsilon)\leq\frac{D(X)}{\varepsilon^2} \tag{3.3.4}$$

В форме (3.3.3) оно устанавливает нижнюю границу вероятности события, а в форме (3.3.4) - верхнюю.

Рассмотрим достаточно большое число n независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$. Если их дисперсии $D(X)$ ограничены числом C, то событие, заключающееся в том, что отклонение среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий будет по абсолютной величине сколь угодно малым, является почти достоверным. Это предположение, относящееся к закону больших чисел, доказал П.Л. Чебышев.

Теорема 3.3.2 (Теорема Чебышева). Если случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$ независимы и существует такое число C, что $D(X_i)\leq C, i=1,2,\ldots$, то для любого числа $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}-\frac{\sum_{i=1}^{n} M(X_i)}{n}\right|<\varepsilon\right)=1, \tag{3.3.5}$$

т.е. среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий:

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i \xrightarrow[n\to\infty]{P} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(X_i).$$

Из теоремы Чебышева следует утверждение, заключающееся в том, что среднее арифметическое достаточно большого числа независимых случайных величин, имеющих ограниченные дисперсии, утрачивает случайный характер и становится детерминированной величиной.

Пример 3.3.1. Дисперсия каждой из 6250 независимых случайных величин не превосходит 9. Оценить вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического этих случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий не превысит 0,6.

Решение. Согласно теореме Чебышева искомая вероятность P не меньше $1-\dfrac{C}{n\varepsilon^2}$. По условиям задачи $c=9$, $n=6250$, $\varepsilon=0{,}6$, следовательно, $P\geq 0{,}996$.

Отметим некоторые важные частные случаи теоремы Чебышева.

Теорема 3.3.3 (Теорема Бернулли). Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события постоянна и равна p. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)=1, \tag{3.3.6}$$

где $\dfrac{m_A}{n}$ - частота появления события A.

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{m_A}{n}-p\right|\leq\varepsilon\right)>1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}. \tag{3.3.7}$$

Пример 3.3.2. На предприятии, выпускающем кинескопы, 0,8 всей продукции выдерживает гарантийный срок службы. С вероятностью, превышающей 0,95, найти пределы, в которых находится доля кинескопов, выдерживающих гарантийный срок, из партии 8000 кинескопов.

Решение. Применяем теорему Бернулли при $n=8000$, $P\geq 0{,}95$, $p=0{,}8$ и $q=0{,}2$.

Подставим p, q и n в равенство $1-\frac{pq}{n\varepsilon^2}=0{,}95$;

найдем $\varepsilon=0{,}02$.

Из неравенства получим $0{,}78<\frac{m}{n}<0{,}82$.

Замечание 3.3.2. Теорема Бернулли относится к случаю, когда все опыты производятся в одинаковых условиях, и вероятность появления события A во всех них одна и та же и равна p.

К более общему случаю, когда вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ различны, относится теорема Пуассона.

Теорема 3.3.4 (Теорема Пуассона). Если в последовательности независимых испытаний вероятность появления события A в k-ом испытании равна p_k, то

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m_A}{n}-\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n}\right|<\varepsilon\right)=1. \qquad (3.3.8)$$

Пример 3.3.3. Произведено 900 независимых испытаний, причем в 450 из этих испытаний вероятность появления события A равна 2/3, в 200 - 0,5, в 160 - 0,3 и в 90 - 0,4. Найти оценку вероятности того, что частота появления события A отклоняется по абсолютной величине от средней вероятности не больше, чем на 0,1.

Решение. Применяем теорему Пуассона. Находим $\overline{p}$ и $\overline{pq}$:

$$\overline{p}=\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k}{n}=\frac{2/3\cdot 450+0{,}5\cdot 200+0{,}3\cdot 160+0{,}4\cdot 90}{900}=\frac{121}{225};$$

$$\overline{pq}=\frac{\sum_{k=1}^{n} p_k q_k}{n}=\frac{2/3\cdot 1/3\cdot 450+0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 200+0{,}3\cdot 0{,}7\cdot 160+0{,}4\cdot 0{,}6\cdot 90}{900}=0{,}228$$

Подставляя в правую часть неравенства

$$P\left(\left|\frac{m_A}{n}-p\right|<\varepsilon\right)\geq 1-\frac{\overline{pq}}{n\varepsilon^2}$$

значения $\overline{p}$, $\overline{pq}$, ε и n, получим $P \geq 0{,}95$.

Замечание 3.3.3. Теорема Бернулли является частным случаем теоремы Пуассона.

В самом деле, если вероятность появления события A в каждом испытании постоянна: $p_1 = p_2 = \ldots p_n = p$, то $\overline{p} = p$ и $\overline{pq} = pq$.

Замечание 3.3.4. В тех случаях, когда вероятность появления события в каждом испытании неизвестна, за верхнюю границу дисперсии принимают $C = 1/4$, т.е.

$$P\left(\left|\frac{m_A}{n} - \overline{p}\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{1}{4n\varepsilon^2} \qquad (3.3.9)$$

Теоремы Чебышева, Бернулли, Пуассона устанавливают нижнюю границу вероятности, что часто бывает недостаточно. В некоторых случаях важно знать достаточно точное значение вероятности. Этому требованию отвечают так называемые предельные теоремы закона больших чисел.

Теорема 3.3.5 (Локальная теорема Лапласа). Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной $p(0 < p < 1)$, то вероятность $p_n(k)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно k раз, приближенно выражается формулой

$$p_n(k) = \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{\frac{-(k-np)^2}{2npq}}, \qquad (3.3.10)$$

или

$$p_n(k) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad (3.3.11)$$

где

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}}, \qquad (3.3.12)$$

а

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \qquad (3.3.13)$$

Замечание 3.3.5. Таблица функции (3.3.12) для положительных значений приведена в приложении В, для отрицательных x учитывается четность функции $\varphi(x)$, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$.

Теорема 3.3.6 (**Интегральная теорема Лапласа).** Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной $p(0 < p < 1)$, то вероятность $p_n(k_1; k_2)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее k_1 раз и не более k_2 раз, приближенно определяется формулой

$$p_n(k_1; k_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-x^2/2} dx, \qquad (3.3.14)$$

где

$$x_1 = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}},$$

$$x_2 = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}. \qquad (3.3.15)$$

Формулу (3.3.13) можно представить в другом виде:

$$p_n(k_1; k_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \qquad (3.3.16)$$

где $\Phi(x)$ - функция Лапласа, т.е.

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{x_2} e^{-t^2/2} dt. \qquad (3.3.17)$$

а x_1 и x_2 определяются равенствами (3.3.15).

Замечание 3.3.6. Таблица функции Лапласа для положительных значений x $0 \le x \le 5$ приведена в примечании; для значений $x > 5$ полагают, что $\Phi(x) = 0{,}5$. Для отрицательных x учитывается нечетность функции $\Phi(x)$, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Замечание 3.3.7. Приближенными формулами Лапласа (3.3.11) и (3.3.16) на практике пользуются в случае, если $npq > 10$. Если же $npq < 10$, то эти формулы приводят к большим погрешностям.

Следовательно, достаточно точным выражением теоремы Бернулли является интегральная теорема Лапласа. Асимптотическую формулу для теоремы Чебышева доказал его ученик А.М. Ляпунов. Приведем теорему Ляпунова без доказательства.

3) Центральная предельная теорема.

Теорема 3.3.7 (Теорема Ляпунова). Рассмотрим n независимых случайных величин $X_1, X_2, ..., X_n$, удовлетворяющих условиям:

а) все величины имеют определенные математические ожидания $M(X)$ и конечные дисперсии $D(X)$;

б) ни одна из величин не выделяется резко от остальных по своим значениям.

Тогда при неограниченном возрастании n распределение случайной величины $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ приближается к нормальному закону.

Таким образом, имеем следующую асимптотическую формулу:

$$P\left[\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i)\right| < t\sqrt{\frac{\overline{D(X)}}{n}}\right] = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^t e^{\frac{u^2}{2}} du = \Phi(t), \quad (3.3.18)$$

где

$$\overline{D(X)} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D(X_i). \quad (3.3.19)$$

Пример 3.3.4. Дисперсия каждой из 400 независимых случайных величин равна 25. Найти вероятность того, что абсолютная величина отклонения среднего арифметического случайных величин от среднего арифметического их математических ожиданий, не превысит 0,5.

Решение. Применим теорему Ляпунова. По условию задачи $n = 400$, $D(X_i)$, следовательно, $\overline{D(X)} = 25$ и $\varepsilon = 0{,}5$. Подставляя эти данные в формулу $\varepsilon = t\sqrt{\frac{\overline{D(X)}}{n}}$, получим $t = 2$, откуда $P = \Phi(2) = 0{,}9545$.

Пример 3.3.5. Средний вес клубня картофеля равен 120 г. Какова вероятность того, что наугад взятый клубень картофеля весит не более 360 г.?

Решение. Искомую вероятность оценим по формуле (3.3.1). Случайную величину - вес клубня - обозначим через X. По условию $M(X)=120$, $\delta=360$. Использовав неравенство (3.3.1), получим

$$P(X\le 360)\ge 1-\frac{120}{360}=\frac{2}{3}.$$

Пример 3.3.6. Среднее число молодых специалистов, ежегодно направляемых в аспирантуру, составляет 200 человек. Оценить вероятность того, что в данном году будет направлено в аспирантуру не более 220 молодых специалистов.

Решение. В данном примере $a=200$, $\delta=220$. Применяя неравенство (3.3.1), находим

$$P(X\le 200)\ge 1-\frac{200}{220}=1-0{,}091,\ P(X\le 200)\ge 0{,}909.$$

Пример 3.3.7. Оценить вероятность того, что при 3600 независимых подбрасываниях игрального кубика число появлений 6 очков будет не меньше 900.

Решение. Пусть X - число появлений 6 очков при 3600 подбрасываниях, тогда $M(X)=3600\cdot\frac{1}{6}=600$. Воспользуемся неравенством (3.3.2), получаем

$$P(X\ge 900)\le 1-\frac{600}{900}=\frac{2}{3}.$$

Пример 3.3.8. Случайная величина X имеет дисперсию, $D(X)=0{,}001$. Какова вероятность того, что случайная величина X отличается от $M(X)=a$ более чем на 0,1?

Решение. По первому неравенству Чебышева

$$P(|X-a|\ge 0{,}1)\le\frac{D(X)}{(0{,}1)^2}=\frac{0{,}001}{0{,}01}=0{,}1.$$

Пример 3.3.9. Для случайной величины X известна дисперсия $D(X)=0{,}01$ и неравенство $P(|X-M(X)|<a)>0{,}96$. Найти значение a.

Решение. Согласно формуле (3.3.3) получаем $P(|X-M(X)|\le a)\ge 1-\frac{D(X)}{a^2}.$

По условию $P(|X-M(X)|<a)>0{,}96.$

Из этих двух неравенств следует, что

$$1-\frac{D(x)}{a^2}\geq 0{,}96;$$

$$1-\frac{0{,}01}{a^2}\geq 0{,}96;$$

$$\frac{a^2-0{,}01}{a^2}\geq 0{,}96;$$

$$a^2-0{,}01\geq 0{,}96a^2;$$

$$a^2-0{,}96a^2\geq 0{,}01;$$

$$0{,}4a^2\geq 0{,}1;$$

$$a^2\geq 1/4;$$

$$a\geq 0{,}5.$$

Пример 3.3.10. Среднее значение длины детали равно 50 см, а дисперсия равна 0,1. Оценить вероятность того, что изготовленная деталь окажется по своей длине не меньше 49,5 см и не больше 50,5 см.

Решение. Поскольку здесь $a=50$, то условие $49{,}5<X<50{,}5$, в котором случайная величина X обозначает возможную длину детали, приводится почленным вычитанием числа $a=50$ к виду $|X-a|\leq 0{,}5$.

Применяя неравенство (3.3.3) для случая $\varepsilon=0{,}5$ и $D(X)=0{,}1$, получаем:

$$P(|X-a|\leq 0{,}5)\geq 1-\frac{0{,}1}{(0{,}5)^2}=1-\frac{0{,}1}{0{,}25}=0{,}6.$$

Пример 3.3.11. Всхожесть семян некоторой культуры равна 0,75. Оценить вероятность того, что из посеянных 1000 семян число взошедших окажется от 700 до 800 включительно.

Решение. В данной задаче $M(X)=a=1000\cdot 0{,}75=750$, следовательно, граничные значения случайной величины X симметричны относительно $M(X)=750$.

Поэтому от неравенства $700\leq X\leq 800$ можно перейти к неравенствам

$-50\leq X-750\leq 50$ или $|X-a|\leq 50$, а это совпадает с левой частью неравенства (3.3.3) когда $\varepsilon = 50$. Значение $D(X)$ найдем по формуле

$$D(X) = npq\,,$$

$$D(X) = 1000 \cdot 0{,}75 \cdot 0{,}25 = 750/4\,.$$

Принимая во внимание, что $\varepsilon^2 = 50^2 = 2500$,

получаем правую часть неравенства (3.3.3):

$$1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2} = 1 - \frac{750}{4 \cdot 2500} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925\,.$$

Следовательно,

$$P(|X - 750| \le 50) \ge 0{,}925\,.$$

Пример 3.3.12. Вероятность производства нестандартной детали в некоторых технологических условиях равна 0,1. Оценить вероятность того, что число нестандартных деталей среди 10000 будет заключено в границах от 950 до 1030 включительно.

Решение. Число нестандартных деталей в данной задаче является случайной величиной X, распределенной по биноминальному закону. В соответствии с формулами

$$M(X) = np,\ D(X) = npq$$

при $n = 10000$, $p = 0{,}1$, $q = 0{,}9$ получаем

$$M(X) = 1000 \cdot 0{,}1 = 1000\,,$$

$$D(X) = 1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9 = 900\,,$$

Следовательно, границы допустимых значений случайной величины не симметричны относительно математического ожидания, т.к.

левая граница меньше $M(X)$ на 1000 – 950 = 50,

а правая граница больше $M(X)$ на 1030 - 1000 = 30.

Поэтому, применить неравенство Чебышева для оценки вероятности указанного события нельзя.

Чтобы применение неравенства Чебышева стало возможным, правая граница должна быть больше математического ожидания на 50, т.е. должна быть равна 1050. Учитывая, что двойное неравенство

$950 \le X \le 1050$ равносильно неравенству $|X - 1000| \le 0{,}5$,

применяем неравенство (3.3.3) при $\varepsilon = 50$ и $D(X) = 900$:

$$P(950 \le X \le 1050) = P(|X - 1000| \le 50) \ge \frac{900}{50^2} = 0{,}64.$$

Пример 3.3.13. Найти вероятность того, что частота появления шестерки в 10000 независимых подбрасываниях игрального кубика отклоняется от вероятности появления шестерки по модулю меньше чем на 0,01.

Решение. Воспользуемся неравенством

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

В данном случае $n = 10000$, $p = 1/6$, $q = 5/6$, поэтому

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0{,}01\right) = P\left(\left|\frac{m}{10000} - \frac{1}{6}\right| < 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6}}{10000 \cdot 0{,}01^2} \approx 0{,}86.$$

Пример 3.3.14. При штамповке пластинок из пластмассы брак составляет 3%. Найти вероятность того, что при проверке партии в 1000 пластинок выявится отклонение от установленного процента брака меньше чем на 1%.

Решение. Из условия задачи следует, что $n = 1000$, $\varepsilon = 0{,}01$, $p = 0{,}03$, $q = 1 - p = 0{,}97$.

В соответствии с формулой

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2} = 1 - \frac{0{,}03 \cdot 0{,}97}{10000 \cdot (0{,}01)^2} = 1 - \frac{0{,}0291}{0{,}1} = 0{,}709.$$

Таким образом, искомая вероятность $P \ge 0{,}709$.

Пример 3.3.15. Определить, сколько надо произвести замеров поперечного сечения деревьев на большом участке, чтобы средний диаметр деревьев отличался от истинного значения a не более чем на 2 см с вероятностью не меньшей 0,95. Среднее квадратическое отклонение поперечного сечения деревьев не превышает 10 см и измерения проводятся без погрешности.

Решение. Будем считать выбор деревьев для замеров таким, что можно считать результаты измерений независимыми случайными величинами. Обозначим через X_i результаты измерения поперечного сечения i-го дерева. По условию задачи

$\sigma(X_i) = \sqrt{D(X_i)} \le 10$, следовательно $D(X_i) \le 100$.

Полагая в неравенстве

$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| \le \varepsilon\right) > 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}$ $\varepsilon = 2$, $C = 100$, получаем

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - a\right| < 2\right) \ge 1 - \frac{100}{n \cdot 2^2} \ge 0{,}95.$$

Поскольку

$$1 - \frac{100}{n \cdot 2^2} \ge 0{,}95,$$

то

$$0{,}05 \ge \frac{100}{n \cdot 4},$$

$$n \ge \frac{100}{4 \cdot 0{,}05} = 500.$$

Следовательно, достаточно выполнить 500 замеров поперечного сечения деревьев.

Пример 3.3.16. Всхожесть семян некоторого растения составляет 70%. Найти вероятность того, что при посеве 10000 семян отклонение доли взошедших семян от вероятности того, что взойдет каждое из них, не превзойдет по модулю 0,01.

Решение. Воспользуемся формулой (3.3.7)

Из условия следует, что $n = 10000$, $\varepsilon = 0{,}01$, $p = 0{,}7$, а $q = 0{,}3$.

В соответствии с формулой получаем

$$P\left(\left|\frac{m}{10000} - 0{,}7\right| \le 0{,}01\right) \ge 1 - \frac{0{,}7 \cdot 0{,}3}{0{,}01^2 \cdot 10000} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$$

Пример 3.3.17. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A произойдет: а) 750 раз; б) 710 раз.

Решение. Из условия следует, что $n = 900$, $p = 0{,}8$ поэтому $q = 0{,}2$; в первом случае $k = 750$, во втором случае $k = 710$.

Поскольку $npq = 900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 = 144 > 10$, то можно воспользоваться формулой (3.3.10) или (3.3.11)-(3.3.13).

1случай:

По формуле (3.3.12) определяем x:

$$x = \frac{750 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{750 - 720}{\sqrt{144}} = \frac{30}{12} = 2{,}5.$$

По таблице значений функции (3.3.13) находим

$$\varphi(2{,}5) \approx 0{,}0175.$$

Согласно формуле (3.3.11) получаем искомую вероятность

$$P_{900}(750) \approx \frac{1}{12} \cdot \varphi(2{,}5) = \frac{1}{12} \cdot 0{,}0175 \approx 0{,}00146.$$

2 случай:

Аналогично находим вероятность во втором случае, принимая во внимание четность функции (3.3.13):

$$x = \frac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83,$$

$$\varphi(-0{,}83) = \varphi(0{,}83) \approx 0{,}2827;$$

$$P_{900}(710) \approx \frac{1}{12} \cdot 0{,}2827 \approx 0{,}0236.$$

Пример 3.3.18. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появление события A в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5?

Решение. Воспользуемся формулой (3.3.10), из условия следует, что $n = 100$, $P_n(k) = 0{,}0484$, $p = 0{,}5$, $q - 0{,}5 = 0{,}5$; требуется определить k.

По формуле (3.3.12) находим x:

$$x = \frac{k - 100 \cdot 0{,}5}{\sqrt{100 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}},$$

$$x = \frac{k - 50}{5}.$$

Формула (3.3.11) принимает вид

$$P_{100}(k) \approx \frac{1}{5} \cdot \varphi(x) = 0{,}0484.$$

Отсюда находим

$\varphi(x) = 0{,}0484 \cdot 5$,

$\varphi(x) = 0{,}222$.

По таблице значений функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$ определяем x:

$$\begin{aligned} &\varphi(1{,}09) \approx 0{,}222, \\ &x \approx 1{,}09 \end{aligned}.$$

Подставляя это значение в выражение для x, получаем

$\dfrac{k - 50}{5} = 1{,}09$,

$k - 50 = 5{,}45$,

$k = 50 + 5{,}45$.

Поскольку k - целое число, то $k = 55$.

Пример 3.3.19. Вероятность появления события A в каждом из 900 независимых испытаний равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A произойдет не менее 710 раз и не более 740 раз.

Решение. По условию $n = 900$, $k_1 = 710$, $k_2 = 740$, $p = 0{,}8$, поэтому $q = 0{,}2$.

Согласно формулам (3.3.15) находим

$$x_1 = \frac{710 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{710 - 720}{12} \approx -0{,}83;$$

$$x_2 = \frac{740 - 900 \cdot 0{,}8}{\sqrt{900 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{740 - 720}{12} \approx 1{,}67.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение), учитывая нечетность функции, определяем

$$\Phi(x_1) = \Phi(-0{,}83) = -\Phi(0{,}83) \approx -0{,}2967;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(1{,}67) \approx 0{,}4525.$$

В соответствии с формулой (3.3.16) получаем искомую вероятность

$$P_{900}(710{,}740) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(1{,}67) - \Phi(-0{,}83) =$$
$$= 0{,}4525 - (-0{,}2967) = 0{,}7492.$$

Пример 3.3.20. Вероятность того, что электролампочка, изготовленная данным заводом, является бракованной, равна 0,02. Для контроля отобрано наугад 1000 лампочек. Оценить вероятность того, что частота бракованных лампочек в выборке отличается от вероятности 0,02 менее чем на 0,01.

Решение. Обозначим через k - число бракованных лампочек в выборке. Нам нужно оценить вероятность неравенства

$$\left| \frac{k}{100} - 0{,}02 \right| < 0{,}01.$$

Отсюда найдем, в каких границах заключено число k:

$$-0{,}01 < \frac{k}{1000} - 0{,}02 < 0{,}01;$$

$$0{,}02 - 0{,}01 < \frac{k}{1000} < 0{,}01 + 0{,}02;$$

$$0{,}01 < \frac{k}{1000} < 0{,}03;$$

$$10 < k < 30;$$

$$11 \le k \le 29.$$

Следовательно,

$$P\left(\left|\frac{m}{1000}-0{,}02\right|<0{,}01\right)=p_{1000}(11\le k\le 29).$$

Поскольку

$npq=1000\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98=19{,}6>10$,

то для вычисления вероятности $P_{1000}(11{,}29)$ воспользуемся формулой (3.3.16).

В данном случае

$$x_1=\frac{11-1000\cdot 0{,}02}{\sqrt{1000\cdot 0{,}02\cdot 0{,}98}}\approx -2{,}03;$$

$$x_2=\frac{29-20}{4{,}43}\approx 2{,}03.$$

По таблицам значений функции Лапласа находим

$\Phi(-2{,}03)=-\Phi(2{,}03)\approx -0{,}4788$;

$\Phi(2{,}03)\approx 0{,}4788$.

В соответствии с формулой (3.3.16) получаем

$P_{1000}(11{,}29)=0{,}4788+0{,}4788=0{,}9576$.

Пример 3.3.21. Производство дает 1% брака. Какова вероятность того, что из взятых на исследование 1100 изделий выбракованных будет не более 17?

Решение. Из условия следует, что $n=1100$, $p=0{,}01$, $q=0{,}99$, $0\le k\le 17$.

По формулам (3.3.16)определяем

$$x_1=\frac{0-1100\cdot 0{,}01}{\sqrt{1000\cdot 0{,}01\cdot 0{,}99}}=\frac{-11}{\sqrt{10{,}89}}=-\frac{11}{3{,}3}\approx -3{,}33;$$

$$x_2=\frac{17-11}{3{,}3}=\frac{6}{3{,}3}\approx 1{,}82.$$

С помощью таблицы значений функции Лапласа находим

$\Phi(x_1)=\Phi(-3{,}33)=-\Phi(3{,}33)\approx -0{,}4995$;

$\Phi(x_2)=\Phi(1{,}82)\approx 0{,}4656$.

В соответствии с формулой (3.3.17) получаем

$P_{1100}(0;17)=0{,}4656-(-0{,}4995)=0{,}9651$.

Пример 3.3.22. Вероятность изготовления детали первого сорта на данном станке равна 0,8. Найти вероятность того, среди наугад взятых 100 деталей окажется 75 деталей первого сорта.

Решение. Искомую вероятность найдем по формуле (3.3.11). По условию $n = 100$, $k = 75$, $p = 0{,}8$; значит $q = 1 - p = 0{,}2$.

Согласно формуле (3.3.12) вычисляем

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{75 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{75 - 80}{\sqrt{16}} = \frac{-5}{4} = -1{,}25;$$

По таблице найдем $\varphi(-1{,}25) = \varphi(1{,}25) = 0{,}1826$.

Следовательно,

$$P_{100}(75) = \frac{1}{4}\varphi(-1{,}25) = \frac{0{,}1826}{4} = 0{,}04565.$$

Пример 3.3.23. Вероятность появления события в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 70 и не более 85 раз; б) не менее 70 раз; в) не более 69 раз.

Решение. Воспользуемся формулой (3.3.16) в случаях а) и б).

а) По условию $n = 100$, $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$, $k_1 = 70$, $k_2 = 85$.

По формулам (3.3.15) вычисляем x_1 и x_2:

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5;$$

$$x_2 = \frac{85 - 80}{4} = \frac{5}{4} = 1{,}25.$$

По таблице значений функции Лапласа (см. приложение В), учитывая нечетность этой функции находим

$$\Phi(x_1) = \Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938;$$

$$\Phi(x_2) = \Phi(1{,}25) = -0{,}3944.$$

Согласно формуле (3.3.16)получаем

$$p_{100}(70;85) = \Phi(1{,}25) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}3944 + 0{,}4938 = 0{,}8882.$$

б) Требование, что событие появилось не менее 70 раз, означает, что число появлений события может быть равно 70 либо 71, либо 72,…, либо 100. Значит, в рассматриваемом случае следует принять, что $k_1 = 70$, $k_2 = 100$, тогда

$$x_1 = \frac{70 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{70 - 80}{\sqrt{16}} = -\frac{10}{4} = -2{,}5;$$

$$x_2 = \frac{100 - 100 \cdot 0{,}8}{\sqrt{100 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}} = \frac{20}{4} = 5.$$

По таблице значений $\Phi(x)$ находим

$$\Phi(-2{,}5) = -\Phi(2{,}5) = -0{,}4938;$$

$$\Phi(5) = 0{,}5.$$

На основании формулы (3.3.16) получаем

$$p_{100}(70;100) = \Phi(5) - \Phi(-2{,}5) = 0{,}5 + 0{,}4938 = 0{,}9938.$$

в) События «A появилось не менее 70 раз» и «A появилось не более 69 раз» являются противоположными, поэтому

$$P_{100}(0;69) = 1 - m_{100}(70;100) = 1 - 0{,}9938 = 0{,}0062.$$

Пример 3.3.24. Вероятность появления положительного результата в каждом из n опытов равна 0,9. Сколько нужно произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98 можно было ожидать, что не менее 150 опытов дадут положительный результат.

Решение. Воспользуемся формулой (3.3.16). Согласно условию $p = 0{,}8$, $q = 1 - 0{,}8 = 0{,}2$, $k_1 = 150$, $k_2 = n$ (значение n нужно определить). Указанная формула

$$P_n(k_1;k_2) = \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) - \Phi\left(\frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right)$$

принимает вид:

$$0{,}98 = \Phi\left(\frac{n - 0{,}9n}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{\sqrt{n \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2}}\right),$$

или

$$0{,}98 = \Phi\left(\frac{\sqrt{n}}{4}\right) - \Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}}\right).$$

Очевидно, что $n > 150$, поэтому $\sqrt{n}/4 > \sqrt{150}/4 \approx 3{,}06$.

Поскольку функция Лапласа возрастающая и $\Phi(3) = 0{,}49865$, то можно положить $\Phi(\sqrt{n}/4) = 0{,}5$. Следовательно,

$$0{,}98 = 0{,}5 - \Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}}\right),$$

$$\Phi\left(\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}}\right) = -0{,}48.$$

По таблице значений функции Лапласа находим $\Phi(2{,}06) = 0{,}48$. Отсюда и из последнего равенства, учитывая нечетность функции Лапласа, получаем

$$\frac{150 - 0{,}9n}{0{,}4\sqrt{n}} = -2{,}06,$$

$$150 - 0{,}9n = -2{,}06 \cdot 0{,}4\sqrt{n}.$$

Решая это уравнение, находим

$$\sqrt{n} = 13{,}38,$$

$$n = 180.$$

Пример 3.3.25. Обследуются 500 изделий продукции, изготовленной на предприятии, где брак составляет 2%. Найти вероятности того, что: 1) среди них окажется ровно 10 бракованных; 2) число бракованных в пределах от 10 до 20.

Решение. Из условия следует, что $n = 500$, $p = 0{,}02$, поэтому $q = 1 - p = 0{,}98$, $np = 500 \cdot 0{,}02 = 10$, $npq = 500 \cdot 0{,}02 \cdot 0{,}98 = 9{,}8$.

Согласно формуле (3.3.11) находим

$$P_{100}(10) = \frac{1}{\sqrt{9{,}8}}\varphi\left(\frac{10 - 10}{\sqrt{9{,}8}}\right) = \frac{1}{\sqrt{9{,}8}}\varphi(0) \approx 0{,}319 \cdot 0{,}399 \approx 0{,}127.$$

В соответствии с формулой (3.3.16) получаем

$$\Phi(10 \le k \le 20) = \Phi\left(\frac{20 - 10}{\sqrt{9{,}8}}\right) - \Phi\left(\frac{10 - 10}{\sqrt{9{,}8}}\right) = \Phi(3{,}2) - \Phi(0) \approx 0{,}499.$$

Для закрепления данной темы решите следующие задачи.

Задачи:

1. Вероятность положительного исхода отдельного испытания $p = 0{,}8$. Оцените вероятность того, что при 1000 независимых повторных испытаний отклонение частоты положительных исходов от вероятности при отдельном испытании по модулю будет меньше 0,05.

2. Для определения средней продолжительности горения электролампы в партии из 200 одинаковых ящиков было взято на выборку по одной лампе из каждого ящика. Оценить вероятность того, что средняя продолжительность горения отобранных 200 электроламп отличается от средней продолжительности горения во всей партии по модулю меньше чем на 5 ч, если известно, что среднее квадратическое отклонение продолжительности горения ламп в каждом ящике меньше 7 ч.

3. Сколько должно быть произведено независимых измерений некоторой величины, чтобы с вероятностью, не меньшей чем 0,98, можно было утверждать, что среднее арифметическое результатов измерений отличается от истинного значения по модулю меньше чем на 0,01, если дисперсия отдельного результата измерения не превосходит 1?

4. Вероятность изготовления детали высшего сорта на данном станке равна 0,4. Найдите вероятность того, что среди наудачу взятых 26 деталей половина окажется высшего сорта.

5. Сколько раз с вероятностью 0,0484 можно ожидать появления события в 100 независимых испытаниях, если вероятность его появления в отдельном испытании равна 0,5?

6. Игральный кубик подбрасывают 800 раз. Какова вероятность того, что число очков, кратное трем, выпадает не меньше 260 и не больше 274 раз?

7. Вероятность появления события A в опыте равна 0,2. Опыт повторили независимым образом 400 раз. Какова вероятность того, что при этом, событие A произойдет: а) 70 раз; б) 80 раз; в) не менее 70, но не более 90 раз; г) не менее 76, но не более 82 раз; д) не менее 78 раз; е) не более 78 раз?

8. Вероятность появления события в каждом из независимых испытаний равна 0,8. Сколько нужно произвести испытаний, чтобы с вероятностью 0,9 можно было ожидать, что событие A появится не менее 75 раз?

9. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найдите вероятность того, что относительная частота появления события отклонится от его вероятности по модулю не более чем на 0,01.

10. Вероятность появления события в каждом из 10000 независимых испытаний равна 0,75. Найдите такое положительное ε, чтобы с вероятностью 0,98 модуль отклонения частоты появления события от его вероятности не превышал ε.

11. Отдел технического контроля проверяет на стандартность 900 деталей. Вероятность того, что деталь стандартная, равна 0,9. Найдите с вероятностью 0,95 границы, в которых будет заключено число m, стандартных деталей среди проверенных.

12. Вероятность приема каждого из 100 передаваемых сигналов равна 0,75. Найдите вероятность того, что будет принято от 71 до 80 сигналов.

Ответы:

1) $P > 0{,}936$; **2)** $P > 0{,}99$ Указание $D(X_i) < 49$; **3)** $n = 5 \cdot 10^5$; **4)** 0,093; **5)** 55; **6)** 0,4; **7)** а)0,023, б) 0,05, в)0,789, г) 0,92, д) 0,6, е) 0,4; **8)** $n = 100$; **9)** 0,979; **10)** $\varepsilon = 0{,}01$; **11)** $792 \le m \le 828$; **12)** 0,6961.

Вопросы для самопроверки:

1. Какую словесную формулировку имеет теорема Чебышева?

2. Как записывается формула, выражающая теорему Чебышева?

3. Какой вид имеет эта формула в предельном случае $(n \to \infty)$?

4. Какой вид имеет формула, выражающая теорему Чебышева, в случае, когда все величины одинаково расположены?

5. Как записывается формула, выражающая теорему Чебышева, в предельном случае $(n \to \infty)$?

6. Какую словесную формулировку имеет теорема Бернулли?

7. Как записывается формула, выражающая теорему Бернулли?

8. Какой вид имеет эта формула в в предельном случае $(n \to \infty)$?

9. Каким условиям должны удовлетворять случайные величины $X_1, X_2, ..., X_n$, чтобы к ним можно было применить теорему Чебышева?

10. Какова связь между теоремой Бернулли и теоремой Чебышева?

11. Как формулируется локальная теорема Лапласа?

12. Какой вид имеет формула, выражающая заключение локальной теоремы Лапласа?

13. Какой другой вид можно придать этой формуле?

14. Как формулируется интегральная теорема Лапласа?

15. Какой вид имеет формула, выражающая заключение интегральной теоремы Лапласа?

16. В каких случаях можно пользоваться приближенными формулами Лапласа?

17. Сформулируйте теорему Ляпунова. Как по-другому она еще называется?

Список использованных источников

1 Белько, И.В. Высшая математика для экономистов. III семестр: экспресс-курс / И.В. Белько, К.К. Кузмич. – 2-е изд., стер.- М.: Новое знание, 2006. – 144 с.

2 Вентцель, Е.С. Задачи и упражнения по теории вероятностей / Е.С. Вентцель, Л.А. Овчаров. – М.: Высшая школа, 2000. – 366 с.

3 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001. – 400 с.

4 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика / В.Е. Гмурман. – М.: Высшая школа, 2001. – 479 с.

5 Гусак, А.А. Теория вероятностей. справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак, Е.А. Бричкова. –4-е изд-е, стереотип. – Минск.: Тетрасистемс, 2003. – 288 с.

6 Данко, П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах: Учеб. пособие для вузов. В 2 ч. Ч.2. / П.Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова. – 6-е изд. – М.: ООО «Издательский дом «ОНИКС 21 век»: ООО «Издательство «Мир и образование», 2003. – 416 с.

7 Казакова, О.Н. Теория вероятностей и математическая статистика: учебное пособие / О.Н. Казакова, О.Н. Конюченко. – Оренбург: Издательский центр «Скорпион», 2007. – 76 с.

8 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей, математической статистике и случайным процессам / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2006. – 288 с.

9 Теория вероятностей: Учеб. для вузов. 2-е изд. / А.В. Печинкин, О.И. Тескин, Г.М. Цветкова и др.; Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. – 456 с.

10 Шапкин, А.С. Задачи по высшей математике, теории вероятностей, математическому программированию с решениями: учебное пособие / А.С. Шапкин. – М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К^0», 2005. – 432 с.

Приложение А

(справочное)

Таблица производных и правила дифференцирования

$C' = 0$

$(ax+b)' = a$

$\left(x^m\right)' = mx^{m-1}$

$(x)' = 1$

$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\left(e^x\right)' = e^x$

$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$

$\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$

$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$(u \pm v)' = u' \pm v'$

$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$

Приложения Б

(справочное)

Таблица интегралов, правила и методы интегрирования

$\int dx = x + C$

$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, $m \neq -1$

$\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = 2\sqrt{x} + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \sin x dx = -\cos x + C$

$\int \cos x dx = \sin x + C$

$\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$

$\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$

$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = tgx + C$

$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -ctgx + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = \arcsin\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{a^2 + x^2} dx = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$

$\int \frac{1}{\sqrt{a + x^2}} dx = \ln\left|x + \sqrt{a + x^2}\right| + C$

$\int \frac{1}{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$

$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

$\int udv = uv - \int vdu$ -метод интегрирования по частям

$\int f(x)dx = \int f(x(t))x'_t dt$ -метод замены переменной

$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$

$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + C$

Приложение В
(справочное)

Таблицы значений для функций Лапласа

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot e^{-\frac{x^2}{2}},\ \Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$$

x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)	x	φ(x)	Φ(x)
0,00	0,3989	0,0000	0,40	0,3683	0,1554	0,80	0,2897	0,2881
01	3989	0040'	41	3668	1591	81	2874	2910
02	3989	0080	42	3653	1628	82	2850	2939
03	3988	0120	43	3637	1664	83	2827	2967
04	3986	0160	44	3621	1700	84	2803	2995
05	3984	0199	45	3605	1736	85	2780	3023
06	3982	0239	46	3589	1772	86	2756	3051
07	3980	0279	47	3572	1808	87	2732	3078
08	3977	0319	48	3555	1844	88	2709	3106
09	3973	0359	49	3538	1879	89	2685	3133
0,10	0,3970	0,0398	0,50	0,3521	0,1915	0,90	0,2661	0,3159
11	3965	0438	51	3503	1950	91	2637	3116
12	3961	0478	52	3485	1985	92	2613	3212
13	3956	0517	53	3467	2019	93	2589	3238
14	3951	0557	54	3448	2054	94	2565	3264
15	3945	0596	55	3429	2088	95	2541	3289
16	3939	0636	56	3410	2123	96	2516	3315
17	3932	0675	57	3391	2157	97	2492	3340
18	3925	0714	58	3372	2190	91	2468	3365
19	3918	0753	59	3352	2224	99	2444	3389
0,20	0,3910	0,0793	0,60	0,3332	0,2257	1,00	0,2420	0,3413
21	3902	0832	61	3312	2291	01	2396	3438
22	3894	0871	62	3292	2324	02	2371	3461
23	3885	0910	63	3271	2357	03	2347	3485
24	3876	0948	64	3251	2389	04	2323	3508
25	3867	0987	65	3230	2422	05	2299	3531
26	3857	1026	66	3209	2454	06	2275	3554
27	3847	1064	67	3187	2486	07	2251	3577
28	3836	1103	68	3166	2517	08	2227	3599
29	3825	1141	69	3144	2549	09	2203	3621
0,30	0,3814	0,1179	0,70	0,3123	0,2580	1,10	0,2179	0,3643
x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$

31	3802	1217	71	3101	2611	11	2155	3665
32	3790	1255	72	3079	2642	12	2131	3686
33	3778	1293	73	3056	2673	13	2107	3708
34	3765	1331	74	3034	2703	14	2083	3729
35	3752	1368	75	ЗОИ	2734	15	2059	3749
36	3739	1406	76	2989	2764	16	2036	3770
37	3726	1443	77	2966	2794 .	17	2012	3790
38	3712	1480	78	2943	2823	18	1989	3810
39	3697	1517	79	2920	2852	19	1965	3830
1,20	0,1942	0,3849	1,70	0,0940	0,4554	2,40	0,0224	0,4918
21	1919	3869	71	0925	4564	42	0213	4922
22	1895	3888	72	0909	4573	44	0203	4927
23	1872	3907	73	0893	4582	46	0194	4931
24	1849	3925	74	0878	4591	48	0184	4934
25	1826	3944	75	0863	4599	50	0175	4938
26	1804	3962	76	0848	4608	52	0167	4941
27	1781	3980	77	0833	4616	54	0158	4945
28	1758	3997	78	0818	4625	56	0151	4948
29	1736	4015	79	0804	4633	58'	0143	4951
1,30	0,1714	0,4032	1,80	0,0790	0,4641	2,60	0,0136	0,4953
31	1691	4049	81	0775	4649	62	0129	4956
32	1669	4066	82	0761	4656	64	0122	4959
33	1647	4082	83	0748	4664	66	0116	4961
34	1626	4099	84	0734	4671	68	0110	4963
35	1604	4115	85	0721	4678	70	0104	4965
36	1582	4131	86	0707	4686	72	0099	4967
37	1561	4147	87	0694	4693	74	0093	4969
38	1539	4162	88	0681	4699	76	0088	4971
39	1518	4177	89	0669	4706	78	0084	4973
1,40	0,1497	0,4192	1,90	0,0656	0,4713	2,80	0,0079	0,4974
41	1476	4207	91	0644	4719	82	0075	4976
42	1456	4222	92	0632	4726	84	0071	4977
43	1435	4236	93	0620	4732	86	0067	4979
44	1415	4251	94	0608	4738	88	0063	4980
45	1394	4265	95	0596	4744	90	0060	4981
46	1374	4279	96	0584	4750	92	0056	4982
47	1354	4292	97	0573	4756	94	0053	4984
48	1334	4306	98	0562	4761	96	0050	4985
49	1315	4319	99	0551	4767	98	0047	4986
1,50	0,1295	0,4332	2,00	0,0540	0,4772	3,00	0,00443	0,49865
51	1276	4345	02	0519	4783			
52	1257	4357	04	0498	4793	3,10	00327	49903
x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$

53	1238	4370	06	0478	4803	3,20	00238	49931
54	1219	4382	08	0459	4812			
55	1200	4394	10	0440	4821	3,30	00172	49952
56	1182	4406	12	0422	4830	3,40	00123	49966
57	1163	4418	14	0404	4838			
58	1145	4429	16	0387	4846	3,50	00087	49977
59	1127	4441	18	0371	4854			
1,60	0,1109	0,4452	2,20	0,0355	0,4861	3,60	00061	49984
61	1092	4463	22	0339	4868	3,70	00042	49989
62	1074	4474	24	0325	4875	3,80	00029	49993
63	1057	4484	26	0310	4881			
64	1040	4495	28	0297	4887	3,90	00020	49995
65	1023	4505	30	0283	4893	4,00	0,0001338	499968
66	1006	4515	32	0270	4898			
67	0989	4525	34	0258	4904	4,50	0000160	499997
68	0973	4535	36	0246	4909	5,00	0000015	49999997
69	0957	4545	38	0235	4913			

Приложение Г
(справочное)

Значение функции Пуассона $P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

k	λ									
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066	0,3679
1	0,0905	0,1637	0,2223	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659	0,3679
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1216	0,1438	0,1547	0,1839
3	0,0002	0,0011	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494	0,0613
4	0,0000	0,0001	0,0003	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111	0,0153
5	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0007	0,0012	0,0020	0,0031
6	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0002	0,0003	0,0005
7	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001

k	λ								
	2,0	3,0	4,0	5.0	6.0	7.0	8.0	9,0	10,0
0	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0001
1	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0.0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,1805	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0902	0.1681	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0361	0.1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0034	0,0216	0,0595	0,1045	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8	0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9	0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0689	0,1014	0.1241	0,1318	0,1251
10	0,0000	0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11	0,0000	0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12	0,0000	0,0001	0,0006	0,0034	0,0113	0,0264	0,0481	0,0728	0,0948
13	0,0000	0,0000	0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14	0,0000	0,0000	0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0003	0,0015	0,0045	0,0109	0,0217
17	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000	0,0001	0,0004	0,0014	0,0037

Приложение Д

(обязательное)

Контрольная работа №1 по теме «Случайные события»

Задача 1

1. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число кратно 5?

2. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 20. Какова вероятность того, что это число окажется делителем 20?

3. Наудачу выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что это число окажется: а) простым; б) составным; в) кратным 5; г) взаимно простым с 100?

4. Наудачу выбрана кость домино из полного набора. Какова вероятность того, что сумма очков на выбранной кости равна 5?

5. На одинаковых карточках написаны в троичной системе счисления все целые числа от 1 до 15. Наудачу извлекается одна карточка. Какова вероятность того, что выбранное число в своей записи содержит: а) не менее 2 единиц; б) хотя бы одну двойку; в) один нуль?

6. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Какова вероятность того, что наудачу извлеченный шар из этой урны окажется белым?

7. В урне 7 белых и 8 черных шаров. Из этой урны вынимают один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался белым. После этого из урны берут еще один шар. Какова вероятность того, что этот шар также белый?

8. Какова вероятность того, что в наудачу выбранном двузначном числе цифры одинаковы?

9. Наудачу выбрано натуральное число, не превосходящее 100. Какова вероятность того, что выбранное число при делении на 8 дает в остатке 2?

10. Наудачу выбрано двузначное число. Какова вероятность того, что выбранное число имеет простой делитель, больший 10?

11. Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число

простое и сумма его цифр равна 5?

12. Из 20 экзаменационных билетов 3 содержат простые вопросы. Пять студентов по очереди берут билеты. Найти вероятность того, что хотя бы одному из них достанется билет с простыми вопросами.

13. Даны отрезки длиной 2, 5, 6, 10. Какова вероятность того, что из наудачу взятых 3 отрезков можно построить треугольник?

14. В читальном зале имеется 6 учебников по теории вероятностей, из которых 3 в мягком переплете. Библиотекарь взял два учебника. Найти вероятность того, что оба учебника окажутся в мягком переплете.

15. Студент знает ответы на 20 из 25 вопросов программы. Найти вероятность того, что он знает ответы на предложенные ему экзаменатором три вопроса.

16. Для некоторой местности в июле шесть пасмурных дней. Найти вероятность того, что первого и второго июля будет ясная погода.

17. Из 200 рабочих норму выработки не выполняют 15 человек. Найти вероятность того, что два случайно выбранных рабочих не выполняют норму.

18. Бросают две игральные кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях появятся следующие числа очков: а) только четные; б) одно четное, другое нечетное, в) сумма которых меньше шести; г) сумма которых больше восьми.

19. Наугад выбирают по одной букве из слов «дама» и «мама». Какова вероятность того, что эти буквы: а) одинаковы; б) различны?

20. Бросают три игральных кости. Найти вероятность того, что на верхних гранях, появятся следующие числа очков: а) только четные; б) одно четное, остальные нечетные; в) сумма которых четна;

21. Игральная кость бросается трижды. Пусть $x -$ сумма очков, полученных при всех бросаниях. Что более вероятно: $x = 12$ или $x = 11$?

22. В качестве знаменателя обыкновенной дроби $\frac{1}{a}$ наудачу выбирается натуральное число от 30 до 39 включительно. Найдите вероятность того, что $\frac{1}{a}$ обращается: а) в конечную десятичную дробь; б) в чистую периодическую; в) в

смешанную периодическую.

23. На две наудачу выбранные клетки шахматной доски поставлены два разноцветных слона. Какова вероятность того, что слоны не бьют друг друга?

24. На две наудачу выбранные клетки шахматной доски поставлены два разноцветных ферзя. Найдите вероятность того, что ферзи не бьют друг друга.

25. Бросают две монеты. Найти вероятность того, что: на обеих монетах появится: а) «герб»; б) хотя бы на одной монете появится «герб»; в) ни на одной монете не появится «герб»;

Задача 2

1. Имеется 5 видов конвертов без марок и 4 вида марок одинаковой стоимости. Сколькими способами можно выбрать конверт с маркой для посылки письма?

2. Сколько словарей надо издать, чтобы можно было непосредственно выполнить переводы с любого из 5 языков: русского, английского, французского, немецкого, итальянского – на любой другой из этих 5 языков?

3. У одного студента 5 книг, у другого – 9. Все книги различные. Сколькими способами студенты могут произвести обмен: а) одной книги на книгу? б) 2 книги на 2 книги?

4. На вершину горы ведут 5 тропинок. Сколькими способами турист может подняться в гору и потом спуститься с нее?

5. Сколькими способами на шахматной доске можно указать: а) 2 клетки? б) 2 клетки одного цвета? в) 2 клетки разного цвета?

6. Имеются 3 письма, каждое из которых можно послать по 6 различным адресам. Сколькими способами можно осуществить рассылку писем, если: а) никакие 2 письма не посылать по одному адресу; б) по одному можно адресу посылать более одного письма.

7. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человек при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?

8. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 составляются всевозможные числа, каждое из которых

состоит не более чем из 3 цифр. Сколько таких чисел можно составить, если: а) повторение цифр в числах не разрешается; б) разрешается повторение цифр?

9. Сколькими способами 3 различных подарка A, B и C можно сделать каким-то 3 из 15 лиц, если: а) никто не должен получать более одного подарка; б) подарок A должно получить определенное лицо?

10. В группе 9 человек. Сколько можно образовать разных подгрупп при условии, что в подгруппу входит не менее 2 человек?

11. Сколько существует различных автомобильных номеров, которые состоят из пяти цифр, если первая цифра не равна нулю.

12. Проверьте то, что число трехбуквенных слов, которые можно образовать из букв слова «гипотенуза», равно числу всех возможных перестановок букв слова «призма».

13. Три дороги соединяют города A и B, четыре дороги соединяют города B и C. Сколькими способами можно совершить поездку из A в C через B и вернуться в A также через B?

14. Сколькими способами можно расставить на полке семь различных книг, если: а) две определенные книги должны стоять рядом; б) эти две книги не должны стоять рядом?

15. На окружности выбрано 10 точек. а) Сколько можно провести хорд с концами в этих точках? б) Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

16. Группу из 20 студентов нужно разделить на 3 бригады, причем в первую бригаду должны входить 3 человека, во вторую – 5 и в третью – 12. Сколькими способами это можно сделать?

17. Для участия в команде тренер отбирает пять мальчиков из десяти. Сколькими способами он может сформировать команду, если два определенных мальчика должны войти в команду?

18. Найти число способов, которыми группу из 12 машинистов можно разбить на бригады по три человека в каждой.

19. Сколько шестизначных чисел можно образовать из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7,

8, 9, если каждое число должно состоять из трех четных и трех нечетных цифр, причем никакая цифра не входит в число более одного раза?

20. В течение четырех недель студенты сдают четыре экзамена, в том числе два экзамена по математике. Сколькими способами можно распределить экзамены по неделям так, чтобы экзамены по математике не следовали один за другим?

21. Восемь человек должны сесть в два автомобиля, причем в каждом должно быть, по крайней мере, три человека. Сколькими способами они могут это сделать?

22. Сколько различных слов можно получить из всех букв слова «перестановка»?

23. Камера хранения открывается при наборе заданной комбинации из четырех цифр – от 0 до 9. Сколько комбинаций кодов можно создать при условии, что все цифры разные?

24. Найдите число всевозможных слов из букв слова «зоология». Сколько таких слов, в которых три буквы «о» стоят рядом?

25. Имеется 20 наименований товаров. Сколькими способами их можно распределить по трем магазинам, если известно, что в первый магазин должно быть доставлено восемь наименований, во второй – семь наименований и в третий – пять наименований товаров?

Задача 3

1. Игральная кость брошена 3 раза. Какова вероятность того, что при этом все выпавшие грани различны?

2. На 6 одинаковых карточках написаны буквы «а», «в», «к», «М», «о», «с». Эти карточки наудачу разложены в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «Москва»?

3. В урне 4 белых и 2 черных шара. Из этой урны наудачу извлечены 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары разного цвета?

4. В урне 6 белых и 4 черных шара. Из этой урны наудачу извлекли 5 шаров. Какова вероятность того, что 2 из них белые, а 3 черные?

5. В урне 5 белых и 6 черных шаров. Из этой урны наудачу извлекают 2 шара. Какова вероятность того, что эти шары одного цвета?

6. Какова вероятность того, что в написанном наудачу трехзначном числе 2 цифры одинаковы, а третья отличается от них?

7. В некоторый день недели во всех классах школы должно быть по 6 уроков. В этот день случайным образом ставятся в расписание 3 урока одного учителя и 2 урока другого. Какова вероятность того, что эти учителя не будут одновременно заняты?

8. 10 человек случайным образом рассаживаются на десятиместную скамейку. Какова вероятность того, что 2 определенных лица окажутся рядом?

9. В урне 10 шаров, из которых 2 белых, 3 черных и 5 синих. Наудачу извлечены 3 шара. Какова вероятность того, что все 3 шара разного цвета?

10. В классе 40 учеников, из которых 10 отличников. Класс наудачу разделен на 2 равные части. Какова вероятность того, что в каждой части по 5 отличников?

11. На 10 карточках написаны буквы «а», «а», «а», «м», «м», «т», «т», «е», «и», «к». После тщательного перемешивания карточки раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «математика»?

12. Брошены 3 игральные кости. Какова вероятность того, что на всех костях выпадает четное число?

13. Цифры 1, 2, 3, 4 и 5 написаны на карточках и тщательно перемешены. Случайным образом эти карточки разложены в ряд. Какова вероятность того, что получим четное число?

14. В урне 5 белых и 5 черных шаров. Из этой урны последовательно извлечены все шары по одному и разложены в ряд. Какова вероятность того, что цвета шаров чередуются?

15. На пятиместную скамейку случайным образом садится 5 человек. Какова вероятность того, что 3 определенных лица окажутся рядом?

16. В урне 10 шаров. Вероятность того, что 2 извлеченных шара окажутся белыми, равна $\frac{2}{15}$. Сколько в урне белых шаров?

17. В урне 10 белых и 12 черных шаров. Наудачу извлечены 15 шаров. Какова вероятность того, что в урне остались одни белые шары?

18. Из урны, содержащей 6 шаров, 6 раз извлекают по одному шару, каждый раз возвращая извлеченный шар. Какова вероятность того, что все шары извлекались по одному разу?

19. Полная колода карт (52 листа) делится наугад на 2 равные части (по 26 карт). Найдите вероятности следующих событий: а) событие A – в каждой части окажется по 2 туза; б) событие B – в одной из частей не будет ни одного туза; с) событие C – в одной из частей будет ровно один туз.

20. В урне 5 белых, 6 черных и 7 красных шаров. Из этой урны один за другим вынимают без возвращения все шары и записывают их цвета. Найдите вероятность того, что в этом списке белый цвет встретится раньше черного.

21. Имеется 2 урны: в первой 5 белых и 6 черных шаров; во второй 4 белых и 8 черных. Из каждой урны вынимается по шару. Найдите вероятность того, что оба шара будут белыми (событие A) и вероятность того, что шары будут разного цвета (событие B).

22. Из колоды в 36 карт наудачу извлекаются 3 карты. Определите вероятность того, что сумма очков в этих картах равна 21, если валет составляет 2 очка, дама – 3, король – 4, туз – 11, а остальные карты – соответственно 6, 7, 8, 9, 10 очков.

23. Владелец одной карточки лотереи «Спортлото» (6 из 49) зачеркивает 6 номеров. Какова вероятность того, что им будет угадано: а) все 6 номеров в очередном тираже; б) 5 или 6 номеров; в) по крайней мере, 3 номера?

24. Автобусу, в котором 15 пассажиров, предстоит сделать 20 остановок. Предполагая, что всевозможные способы распределения пассажиров по остановкам равновозможны, найдите вероятность того, что никакие 2 пассажира не выйдут на одной остановке.

25. Из полной колоды карт (52 листа) извлекают сразу несколько карт. Сколько карт нужно извлечь для того, чтобы с вероятностью большей, чем 0,5, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?

Задача 4

1. 2 стрелка сделали по одному выстрелу по мишени. Известно, что вероятность попадания в мишень для одного из стрелков равна 0,6, а для другого – 0,7. Найдите вероятность того, что: а) только один из стрелков попадет в мишень; б) хотя бы один из стрелков попадет в мишень; в) оба стрелка попадут в мишень; г) ни один из стрелков не попадет в мишень; д) ни один из стрелков не попадет в мишень.

2. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна p, а для второго – 0,7. Известно, что вероятность ровно одного попадания при одном выстреле обоих стрелков равна 0,38. Найдите p.

3. В ящике 10 деталей, среди которых 7 окрашенных. Сборщик наудачу достает 4 детали. Найдите вероятность того, что все взятые детали окрашенные.

4. Вероятность выигрыша по одному билету лотереи равна $\frac{1}{7}$. Какова вероятность, того , что купив 5 билетов, выиграть: а) по всем пяти билетам; б) ни по одному билету; в) хотя бы по одному билету?

5. Детали проходят 3 операции обработки. Вероятность получения брака на первой операции равна 0,02; на второй – 0,03; на третьей – 0,02. Найдите вероятность получения детали без брака после 3 операций, предполагая, что получения брака на отдельных операциях являются независимыми событиями.

6. Из цифр 1, 2, 3, 4, 5 выбирается одна, а из оставшихся – вторая. Найдите вероятность того, что будет выбрана нечетная цифра: а) первый раз; б) второй раз; в) оба раза.

7. Вероятность хотя бы одного попадания в цель при 4 независимых выстрелах равна 0,9984. Найдите вероятность попадания при одном выстреле.

8. Среди облигаций займа половина выигрышных. Сколько облигаций надо взять, чтобы быть уверенным в выигрыше хотя бы на одну облигацию с вероятностью, большей 0,95?

9. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее

наудачу. Найдите вероятность того, что ему придется сделать не более чем 2 неудачные попытки.

10. Вероятность попадания в цель при одном выстреле равна 0,2. Произведено 10 выстрелов. Найдите вероятность поражения цели, если для этого достаточно, хотя бы одно попадание.

11. Игра проводится до выигрыша одним из двух игроков 2 партий подряд (ничья исключается). Вероятность выигрыша партии каждым из игроков равна 0,5 и не зависит от исходов предыдущих партий. Найдите вероятность того, что игра окончится до 6 партии.

12. Студент успел подготовить к экзаменам 20 вопросов из 25. Какова вероятность того, что из 3 наудачу выбранных вопросов студент знает не менее 2?

13. Среди изготовляемых рабочим деталей в среднем 4% брака. Какова вероятность того, что среди взятых на испытание 5 деталей не найдется ни одной бракованной?

14. Ящик содержит 90 годных и 10 дефективных деталей. Сборщик последовательно без возвращения достает из ящика 10 деталей. Найдите вероятность того, что среди взятых деталей: а) нет дефектных; б) хотя бы одна дефектная.

15. Брошены 2 игральные кости, помеченные номерами 1 и 2. Какова вероятность того, что на первой кости очков будет больше, чем на второй?

16. Какое событие более вероятно: событие A «при одновременном бросании 4 игральных костей появится хотя бы одна единица» или событие B –«при 24 бросаниях 2 костей появятся хотя бы один раз 2 единицы»?

17. Стрелок выстрелил три раза по удаляющейся цели. Вероятность попадания в нее в начале стрельбы равна 0,8, а после каждого выстрела уменьшается на 0,1. 18. Найдите вероятность того, что он: а) промахнется все 3 раза; б) попадет хотя бы один раз; в) попадет 2 раза.

19. Экзаменационный билет содержит 3 вопроса. Вероятность того, что студент ответит на первый и второй вопросы билета равны 0,9; на третий – 0,8. Найдите вероятность того, что студент сдаст экзамен, если для этого необходимо

ответить: а) на все вопросы; б) хотя бы на 2 вопроса.

20. Сколько раз нужно бросить пару игральных костей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,5, можно было надеяться, что хотя бы одни раз появится 12 очков?

21. В 2 урнах находятся шары, отличающиеся только цветом, причем в первой урне 5 белых шаров, 11 черных и 8 красных, а во второй соответственно 10, 8 и 6. Из обеих урн наудачу извлекается по одному шару. Какова вероятность того, что оба шара одного цвета?

22. В урне имеется 6 одинаковых шаров с номерами от 1 до 6. Шары извлекаются по одному без возвращения. Найдите вероятность того, что хотя бы при одном извлечении номер шара совпадает с номером опыта.

23. Два стрелка поочередно стреляют по мишени до первого попадания. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка (он начинает стрельбу) равна $p = 0{,}2$, а для второго – $q = 0{,}3$ ($0 < p < 1, 0 < q < 1$). Найдите вероятности следующих событий: а) первый стрелок сделает больше выстрелов, чем второй; б) стрельба закончится на третьем выстреле второго стрелка; в) первый стрелок закончит стрельбу не позже, чем при третьем его выстреле.

24. Двое поочередно бросают монету, причем выигрывает тот, у которого, раньше появится герб. Определите вероятности выигрыша для каждого игрока.

25. В урне 2 белых и 4 черных шара. 2 игрока достают из этой урны поочередно по одному шару, не возвращая каждый раз извлеченный шар. Игра продолжается до появления белого шара. Определите вероятность того, что первым достанет белый шар игрок, начинающий игру.

Задача 5

1. В студенческом стройотряде 2 бригады первокурсников и одна – второкурсников. В каждой бригаде первокурсников 5 юношей и 3 девушки, а в бригаде второкурсников 4 юношей и 4 девушки. По жеребьевке из отряда выбрали одну из бригад и из нее одного человека для поездки в город. а) Какова вероятность

того, что выбран юноша? б) Выбранный человек оказался юношей. Какова вероятность, что он первокурсник?

2. В первой урне содержится 10 шаров, из них 8 белых; во второй урне 20 шаров, из них 4 белых. Из каждой урны наудачу извлекли по одному шару, а затем из этих шаров наудачу взят один шар. Найдите вероятность того, что взят белый шар.

3. 60% учащихся в школе – девочки. 80% девочек и 75% мальчиков имеют билеты в театр. В учительскую принесли кем-то потерянный билет. Какова вероятность того, что этот билет принадлежал девочке? Мальчику?

4. Бросается монета, и если она падает так, что сверху оказывается герб, вынимаем один шар из урны I; в противном случае – из урны II. Урна I содержит 3 красных и 1 белый шар. Урна II содержит 1 красный и 3 белых шара. а) Какова вероятность того, что вынутый шар красный? б) Какова вероятность того, что шар вынимался из I урны, если он оказался красным?

5. На некоторой фабрике машина A производит 40% всей продукции, а машина B – 60%. В среднем 9 единиц из 1000 единиц продукции, произведенных машиной A, оказывается браком, а у машины B – брак 2 единицы из 500. Некоторая единица продукции, выбранная случайным образом из дневной продукции, оказалась браком. Какова вероятность того, что она произведена на машине B?

6. В группе из 20 стрелков имеются 4 отличных, 10 хороших и 6 посредственных стрелков. Вероятность попадания в цель при одном выстреле для отличного стрелка равна 0,9, для хорошего – 0,7, для посредственного – 0,5. Найдите вероятность того, что: а) наудачу выбранный стрелок попадет в цель; б) 2 наудачу выбранных стрелка попадут в цель.

7. В каждой из 3 урн по 6 черных и 4 белых шара. Из первой урны наудачу извлечен один шар и переложен во вторую, после чего из второй урны наудачу извлечен один шар и переложен в третью урну. Найдите вероятность того, что шар, извлеченный затем из третьей урны, окажется белым.

8. С первого станка-автомата на сборку поступают 40%, со второго – 30%, с

третьего – 20%, с четвертого – 10% деталей. Среди деталей, выпущенных первым станком, 2% бракованных, вторым – 1%, третьим – 0,5% и четвертым –0,2%. Найдите вероятность того, что поступившая на сборку деталь набракованная.

9. В 3 урнах содержатся белые и черные шары. В первой – 2 белых и 3 черных шара, во второй – 2 белых и 2 черных шара, в третьей – 3 белых и один черный шар. Из первой урны переложен шар во вторую. После этого шар из второй урны переложен в третью. Наконец, из третьей урны шар переложен в первую урну. а) Какой состав шаров в первой урне представляется наиболее вероятным? б) Определите вероятность того, что во всех урнах состав шаров останется без изменения.

10. Из 5 стрелков 2 попадают в цель с вероятностью 0,6 и 3 – с вероятностью 0,4. а) Что вероятнее: попадет в цель наудачу выбранный стрелок или нет? б) Наудачу выбранный стрелок попал в цель. Что вероятнее: принадлежит он к первым двум или к трем последним?

11. Известно, что 96% выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощенная схема контроля признает пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,98 и нестандартную с вероятностью 0,05. Определите вероятность того, что изделие, прошедшее упрощенный контроль, отвечает стандарту.

Брак в продукции завода вследствие дефекта A составляет 5%, причем среди забракованной по признаку A продукции 6% имеют дефект B, а в продукции, свободной от дефекта A, дефект B составляет 2%. Найдите вероятность наличия дефекта у наудачу взятой единицы продукции завода.

12. Имеются 2 урны. В первой 3 белых и 4 черных шара, во второй – 2 белых и 3 черных. Из первой урны наудачу перекладывают во вторую 2 шара, а затем из второй урны извлекают один шар. Какой состав переложенных шаров наиболее вероятен, если шар, извлеченный из второй урны, окажется белым?

13. 4 стрелка независимо друг от друга стреляют по одной мишени, делая каждый по одному выстрелу. Вероятности попадания для данных стрелков равны 0,4; 0,6; 0,7; 0,8. После стрельбы в мишени обнаружены 3 пробоины. Найдите вероятность того, что промахнулся четвертый стрелок.

14. Из 20 студентов, пришедших на экзамен, 8 подготовлены отлично, 6 – хорошо, 4 – удовлетворительно и 2 – плохо. В экзаменационных билетах имеется 40 вопросов. Студент, подготовленный отлично, знает все вопросы, хорошо – 35, удовлетворительно – 25 и плохо – 10 вопросов. Некоторый студент ответил на все 3 вопроса билета. Найдите вероятность того, что он подготовлен: а) хорошо; б) плохо.

15. Из 18 стрелков 5 попадают в мишень с вероятностью 0,8; 7 – с вероятностью 0,7; 4 – с вероятностью 0,6 и 2 – с вероятностью 0,5. Наудачу выбранный стрелок не попал в мишень. К какой группе вероятнее всего принадлежит этот стрелок?

16. Для сдачи экзамена студентам было необходимо подготовить 30 вопросов. Из 25 студентов 10 подготовили все вопросы, 8 – 25 вопросов, 5 – 20 вопросов и 2 – 15 вопросов. Вызванный студент ответил на поставленный вопрос. Найдите вероятность того, что этот студент: а) подготовил все вопросы; б) подготовил только половину вопросов.

17. Число грузовых автомашин, проезжающих по шоссе, на котором стоит бензоколонка, относится к числу легковых машин, проезжающих по шоссе, как 3 к 2. Вероятность того, что будет заправляться грузовая машина, равна 0,1; для легковой машины эта вероятность равна 0,2. К бензоколонке подъехала машина. Найти вероятность того, что это грузовая машина.

18. В специализированную больницу поступают в среднем 50% больных с заболеванием K, 30% - с заболеванием L, 20% - с заболеванием M. Вероятность полного извлечения болезни K равна 0,7; для болезней L и M эти вероятности соответственно равны 0,8 и 0,9. Больной, поступивший в больницу, был выписан здоровым. Найдите вероятность того, что этот больной страдал заболеванием K.

19. В первой урне находится один белый и 9 черных шаров, а во второй – один черный и 5 белых шаров. Из каждой урны удалили случайным образом по одному шару, а оставшиеся шары ссыпали в третью (свободную) урну. Найдите вероятность того, что шар, вынутый из третьей урны, окажется белым.

20. Из 2 близнецов первым родился мальчик. Какова вероятность, что вторым родится тоже мальчик, если среди близнецов вероятность рождения 2 мальчиков и 2

девочек соответственно равна p и q, а для разнополых близнецов вероятность родиться первым для обоих полов одинакова?

21. Имеется 107 монет, причем у одной из них герб с обеих сторон, а остальные монеты обычные. Наугад выбранную монету, не разглядывая, бросают 10 раз, причем при всех бросаниях она падает гербом кверху. Найдите вероятность того, что была выбрана монета с 2 гербами.

22. При переливании крови надо учитывать группу крови донора и больного. Человеку, имеющему четвертую группу крови, можно перелить кровь любой группы; человеку со второй или третьей группой крови можно перелить кровь либо той же группы, либо первой; человеку с первой группой крови можно перелить только кровь первой группы. Среди населения 33,7% имеют первую, 37,5% - вторую, 20,9% - третью и 7,9% - четвертую группу крови. а) Найдите вероятность того, что случайно взятому больному можно перелить кровь случайно взятого донора. б) Найдите вероятность того, что переливание крови можно осуществить, если имеются 2 донора, 3 донора.

23. На 3 дочерей – Алису, Марину и Елену – в семье возложена обязанность, мыть посуду. Поскольку Алиса старшая, ей приходится выполнять 40% всей работы. Остальные 60% работы Марина и Елена делят поровну. Когда Алиса моет посуду, вероятность для нее разбить, по крайней мере, одну тарелку равна 0,02. Для Марины и Елены эта вероятность равна соответственно 0,03 и 0,04. Родители не знают, кто мыл посуду вечером, но они слышали звон разбитой тарелки. Какова вероятность того, что посуду мыла Алиса? Марина? Елена?

24. Агентство по страхованию автомобилей разделяет водителей по 3 классам: класс H_1 (мало рискует), класс H_2 (рискует средне), класс H_3 (рискует сильно). Агентство предполагает, что из всех водителей, застраховавших автомобили, 30% принадлежат к классу H_1 , 50% - к классу H_2 и 20 % - к классу H_3. Вероятность того, что в течение года водитель класса H_1 попадет хотя бы в одну аварию, равна 0,01, для водителей класса H_2 эта вероятность равна 0,02, а для водителя класса H_3 – 0,08. Водитель A страхует свою машину и в течение года попадет в аварию.

Какова вероятность того, что он относится к классу H_1? К классу H_2? К классу H_3?

Контрольная работа №2 по теме: «Случайные величины, их распределение и числовые характеристики»

Задача 1

Дискретная случайная величина X задана таблицей.

1) Найти p_5.

2) Найти функцию распределения случайной величины X и построить ее график.

3) Найти $M(X)$ и $D(X)$.

4) Построить многоугольник распределения.

1.	x_i	-3	-2	-1	1	2	2.	x_i	-7	-4	0	4	7
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	p_5
3.	x_i	-5	-2	0	2	5	4.	x_i	-3	-1	0	4	5
	p_i	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	p_5
5.	x_i	-7	-4	0	4	7	6.	x_i	2	9	10	11	13
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$	p_5
7.	x_i	-6	-4	-2	2	4	8.	x_i	1	3	5	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{16}$	p_5		p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	p_5
9.	x_i	-2	-1	0	3	5	10.	x_i	-3	-2	-1	1	2
	p_i	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{8}$	p_5
11.	x_i	-5	-3	-1	1	5	12.	x_i	1	4	6	7	9
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,2	0,05	0,15	0,3	p_5
13.	x_i	1	3	5	7	9	14.	x_i	-2	0	3	6	8
	p_i	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,3	0,15	0,3	0,2	p_5
15.	x_i	-5	-4	0	1	3	16.	x_i	2	4	5	10	12
	p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	0,1	0,15	0,3	0,2	p_5
17.	x_i	-1	0	1	2	3	18.	x_i	0	3	6	8	9
	p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{8}$	p_5		p_i	0,15	0,35	0,05	0,2	p_5
19.	x_i	-3	-2	1	2	7	20.	x_i	0	3	6	10	11
	p_i	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{48}$	p_5		p_i	0,05	0,4	0,25	0,2	p_5

Задача 2

Непрерывная случайная величина X задана функцией плотности распределения $f(x)$.

1) Построить график функции $f(x)$.

2) Найти функцию распределения $F(x)$, построить график функции $F(x)$.

3) Вычислить $M(X), D(X), \sigma(X)$.

4) Найти: а) $P(a \le x < b)$; б) $P(x < c)$; в) $P(x \ge d)$.

1.	$f(x)=\begin{cases} 3e^{-3x}, & x \ge 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$ $а) P(-2 \le x < 3);$ $б) P(x < 0{,}1);$ $в) P(x \ge 7).$	2.	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{9}{x^{10}}, & x \ge 1; \\ 0, & x < 2. \end{cases}$ $а) P(-2 \le x < 6);$ $б) P(x < 3);$ $в) P(x \ge 5).$
3.	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{0{,}7}{\lvert x \rvert^{8}}, & \lvert x \rvert \ge 1; \\ 0{,}4, & \lvert x \rvert < 1. \end{cases}$ $а) P(-3 \le x < 2);$ $б) P(x < 4);$ $в) P(x \ge -2).$	4.	$f(x)=\dfrac{1}{2}e^{-\lvert x \rvert},$ $а) P(-0{,}5 \le x < 1);$ $б) P(x < 0);$ $в) P(x \ge 1).$
5.	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{7}(2-\lvert x \rvert), & -1 \le x \le 2; \\ 0, & x < -1,\ x > 0. \end{cases}$ $а) P(-3 \le x < 1{,}5);$ $б) P(x < 5);$ $в) P(x \ge 1{,}5).$	6.	$f(x)=\begin{cases} \dfrac{4}{x^{5}}, & x \ge 1; \\ 0, & x < 1. \end{cases}$ $а) P(-4 \le x < 0{,}3);$ $б) P(x < 0{,}5);$ $в) P(x \ge 5).$

7.	$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $а) P(-3\le x<2);$ $б) P(x<5);$ $в) P(x\ge -4).$	8.	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \frac{2}{9}(3x-x^2), & 0<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$ $а) P(0{,}5\le x<1);$ $б) P(x<-4);$ $в) P(x\ge 2).$
9.	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0<x\le \pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$ $а) P(-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{6});$ $б) P(x<\frac{\pi}{4});$ $в) P(x\ge \frac{2}{3}\pi).$	10.	$f(x)=\begin{cases} e^{-x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$ $а) P(-3\le x<2);$ $б) P(x<5);$ $в) P(x\ge -3).$
11.	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le \frac{\pi}{6};\\ 3\sin 3x, & \frac{\pi}{6}<x\le \frac{\pi}{3},\\ 0, & x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$ $а) P(-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{4});$ $б) P(x<\frac{\pi}{2});$ $в) P(x\ge \frac{\pi}{4}).$	12.	$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1\\ x-\frac{1}{2}, & 1<x\le 2\\ 0, & x>2\end{cases}$ $а)\ P(1{,}5\le x<1{,}75);$ $б)\ P(x<2);$ $в)\ P(x\ge 1{,}25).$

13.	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{2},\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $а)P(-\frac{\pi}{2}\le x<\frac{\pi}{3})$; $б)P(X<\frac{\pi}{6})$; $в)P(X\ge\frac{\pi}{4})$.	14.	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x-\dfrac{x^3}{4}, & 0<x\le 2;\\ 0, & x>2.\end{cases}$ $а)P(-3\le x<1)$; $б)P(x<1{,}5)$; $в)P(x\ge 3)$.
15.	$f(x)=\begin{cases}0, & x<0;\\ x, & 0\le x<1;\\ 2-x, & 1\le x<2\\ 0, & x\ge 2.\end{cases}$ $а)P(-3\le x<0{,}5)$; $б)P(x<1{,}5)$; $в)P(x\ge 7)$.	16.	$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{\lvert x\rvert}{2}), & \lvert x\rvert<2;\\ 0, & \lvert x\rvert\ge 2.\end{cases}$ $а)P(-1\le x<1)$; $б)P(x<1{,}5)$; $в)P(x\ge 0{,}5)$.
17.	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{2}{3}(1-\dfrac{x}{3}), & 0<x\le 3;\\ 0, & x>3.\end{cases}$ $а)P(1\le x<2)$; $б)P(x<2{,}5)$; $в)P(x\ge 1)$.	18.	$f(x)=\begin{cases}2e^{-2x}, & x>0\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$ $а)P(-2\le x<1)$; $б)P(x<5)$; $в)P(x\ge 7)$.

19.	$f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi}\cos^2 x, & \lvert x\rvert\le\frac{\pi}{2}\\ 0, & \lvert x\rvert>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ $а) P(-\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{4});$ $б) P(X<\frac{\pi}{6});$ $в) P(X\ge\frac{\pi}{4}).$	20.	$f(x)=\begin{cases}3x^2, & 0<x\le 1,\\ 0, & x\le 0,\quad x>1.\end{cases}$ $а) P(-1\le x<0{,}5);$ $б) P(x<8);$ $в) P(x\ge 0{,}5).$
21	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le-\frac{\pi}{2};\\ \frac{1}{2}\cos x, & -\frac{\pi}{2}<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ $а) P(-\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{3}),$ $б) P(x<\frac{\pi}{6}),$ $в) P(x\ge\pi).$	22	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1}{2}\sin x, & 0<x\le\pi,\\ 0, & x>\pi.\end{cases}$ $а) P(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{3});$ $б) P(x<\frac{\pi}{6});$ $в) P(x\ge\frac{\pi}{2}).$
23	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin x, & 0<x\le\frac{\pi}{2},\\ 0, & x>\frac{\pi}{2}.\end{cases}$ $а) P(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{3});$ $б) P(X<\frac{\pi}{6});$ $в) P(X\ge\pi).$	24	$f(x)=\begin{cases}4e^{-4x}, & x\ge 0\\ 0, & x<0.\end{cases}$ $а) P(2\le x<3);$ $б) P(x<8);$ $в) P(x\ge 10).$

25	$f(x)=\begin{cases}0, & x\le\frac{\pi}{6};\\ 3\sin 3x, & \frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{3},\\ 0, & x>\frac{\pi}{3}.\end{cases}$ $а)P(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{2});$ $б)P(X<\frac{\pi}{6});$ $в)P(X\ge\frac{\pi}{4}).$		

Задача 3

Дана функция распределения случайной величины X.

1) Построить график функции $F(X)$.

2) Найти: а) $P(a\le x<b)$,

б) $P(x<c)$,

в) $P(x\ge d)$.

3)Найти плотность распределения случайной величины X и построить ее график.

1	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x^3, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $а)P(0{,}1\le x<0{,}7),$ $б)P(x<0{,}2),$ $в)P(x\ge 0{,}5).$	2	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin 2x, & 0<x\le\frac{\pi}{4};\\ 1, & x>\frac{\pi}{4}.\end{cases}$ $а)P(\frac{\pi}{12}\le x<\frac{\pi}{8}),$ $б)P(x<\frac{\pi}{6}),$ $в)P(x\ge\frac{\pi}{2}).$

3	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$ $а) P(1\le x<3)$, $б) P(x<3{,}5)$, $в) P(x\ge 5)$.	4	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin 2x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 0, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $а) P(-\dfrac{\pi}{6}\le x<\dfrac{\pi}{3})$, $б) P(x<\dfrac{\pi}{4})$, $в) P(x\ge \dfrac{3\pi}{2})$.
5	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ 1-\cos x, & 0<x\le \dfrac{\pi}{2};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$ $а) P(-\dfrac{\pi}{3}\le x<\dfrac{2\pi}{3})$, $б) P(x<\dfrac{\pi}{4})$, $в) P(x\ge 2\pi)$.	6	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{1}{2}(x^2-x), & 1<x\le 2;\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $а) P(-3\le x<0{,}5)$, $б) P(x<1{,}5)$, $в) P(x\ge 3)$.
7	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le \dfrac{\pi}{6};\\ -\cos 3x, & \dfrac{\pi}{6}<x\le \dfrac{\pi}{3};\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ $а) P(-\dfrac{\pi}{2}\le x<\dfrac{\pi}{4})$, $б) P(x<\dfrac{\pi}{4})$, $в) P(x\ge \dfrac{\pi}{2})$.	8	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ \dfrac{x}{4}+\dfrac{1}{2}, & -2<x\le 2;\\ 1, & x>\dfrac{\pi}{3}.\end{cases}$ $а) P(-1\le x<1)$, $б) P(x<1{,}5)$, $в) P(x\ge 3)$.

9	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ x(2-x), & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $а)P(0{,}5\le x<0{,}75)$, $б)P(x<2)$, $в)P(x\ge 0{,}5)$.	10	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{2}(2-\frac{x}{2}), & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$ $а)P(-2\le x<1)$, $б)P(x<1{,}5)$, $в)P(x\ge 0{,}5)$.
11	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \frac{x-1}{2}, & 1<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $а)P(1{,}5\le x<2)$, $б)P(x<2{,}5)$, $в)P(x\ge -4)$.	12	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ (x-2)^2, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $а)P(0{,}5\le x<2{,}5)$, $б)P(x<4)$, $в)P(x\ge 1{,}5)$.
13	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le -2;\\ 0{,}2(x+2), & -2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$ $а)P(1\le x<2)$, $б)P(x<2{,}5)$, $в)P(x\ge 4)$.	14	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin 4x, & 0<x\le \frac{\pi}{8};\\ 1, & x>\frac{\pi}{8}.\end{cases}$ $а)P(-\frac{\pi}{4}\le x<\frac{\pi}{4})$, $б)P(x<\frac{\pi}{16})$, $в)P(x\ge \frac{\pi}{8})$.
15	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \sin 5x, & 0<x\le \frac{\pi}{10};\\ 0, & x>\frac{\pi}{10}.\end{cases}$ $а)P(-\frac{\pi}{20}\le x<\frac{\pi}{10})$, $б)P(x<\frac{\pi}{20})$, $в)P(x\ge \pi)$.	16	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x}{5}(2-\frac{x}{5}), & 0<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$ $а)P(-5\le x<4)$, $б)P(x<3)$, $в)P(x\ge 4{,}5)$.

17	$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{2x}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-2x}, & x>0.\end{cases}$ $а) P(-2\le x<1);$ $б) P(x<5);$ $в) P(x\ge 4).$	18	$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{3x}, & x\le 0\\ 1-\frac{1}{2}e^{-3x}, & x>0.\end{cases}$ $а) P(-1\le x<3);$ $б) P(x<2);$ $в) P(x\ge 4).$
19	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{x^2}{4}, & 0<x\le 2;\\ 1, & x>2.\end{cases}$ $а) P(-3\le x<1),$ $б) P(x<0{,}5),$ $в) P(x\ge 1{,}5).$	20	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \frac{1-\cos x}{2}, & 0<x\le \pi;\\ 1, & x>\pi.\end{cases}$ $а) P(-\frac{\pi}{3}\le x<\frac{\pi}{4}),$ $б) P(x<\frac{\pi}{6}),$ $в) P(x\ge \frac{\pi}{4}).$
21	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 3;\\ \frac{x-3}{2}, & 3<x\le 5;\\ 1, & x>5.\end{cases}$ $а) P(4\le x<4{,}5),$ $б) P(x<4),$ $в) P(x\ge 6).$	22	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ x, & 0<x\le 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$ $а) P(0{,}5\le x<0{,}75),$ $б) P(x<0{,}25),$ $в) P(x\ge 0{,}8).$
23	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 4;\\ \frac{x-4}{2}, & 4<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$ $а) P(5\le x<5{,}5),$ $б) P(x<7),$ $в) P(x\ge 4{,}2).$	24	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 7;\\ \frac{x-7}{3}, & 7<x\le 10;\\ 1, & x>10.\end{cases}$ $а) P(8\le x<9),$ $б) P(x<7{,}5),$ $в) P(x\ge 12).$

25	$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1;\\ \dfrac{x-1}{5}, & 1<x\le 6;\\ 1, & x>6.\end{cases}$ $а)P(2\le x<4)$, $б)P(x<3)$, $в)P(x\ge 7)$.		

Задача 4

Даны две независимые случайные величины X и Y, причем известны их математические ожидания и дисперсия. Найти величины, указанные в пунктах а), б).

1	$M(X)=3,\quad M(Y)=-5;\qquad а)M(2X+5Y+3XY);$ $D(X)=1,\quad D(Y)=7;\qquad б)D(-5X+6Y+7).$
2	$M(X)=3,\quad M(Y)=-5;\qquad а)M(3X-5Y+7XY+2);$ $D(X)=1,\quad D(Y)=7;\qquad б)D(3X-6Y+5).$
3	$M(X)=2,\quad M(Y)=-4;\qquad а)M(5X-6Y+2XY-9);$ $D(X)=7,\quad D(Y)=3;\qquad б)D(6X+5Y-4).$
4	$M(X)=2,\quad M(Y)=-4;\qquad а)M(4X-3Y+7XY+5);$ $D(X)=1,\quad D(Y)=3;\qquad б)D(-2X+5Y+4).$
5	$M(X)=3,\quad M(Y)=-5;\qquad а)M(7X-4Y+5XY+2);$ $D(X)=2,\quad D(Y)=4;\qquad б)D(2X-5Y+7).$
6	$M(X)=8,\quad M(Y)=-8;\qquad а)M(5X-6Y+2XY-3);$ $D(X)=2,\quad D(Y)=3;\qquad б)D(3X-3Y+5).$
7	$M(X)=-5,\quad M(Y)=4;\qquad а)M(7X-3Y+5XY+2);$ $D(X)=3,\quad D(Y)=1;\qquad б)D(3X-7Y-2).$
8	$M(X)=-8,\quad M(Y)=7;\qquad а)M(9X-6Y+4XY+2);$ $D(X)=2,\quad D(Y)=3;\qquad б)D(4X-8Y+9).$
9	$M(X)=-6,\quad M(Y)=5;\qquad а)M(-5X+2Y+7XY-2);$ $D(X)=1,\quad D(Y)=2;\qquad б)D(-2X+9Y+5).$
10	$M(X)=-8,\quad M(Y)=6;\qquad а)M(-3X+2Y+XY-7);$ $D(X)=4,\quad D(Y)=1;\qquad б)D(5X-9Y+8).$
11	$M(X)=-9,\quad M(Y)=8;\qquad а)M(5X-2Y+9XY-2);$ $D(X)=4,\quad D(Y)=1;\qquad б)D(7X-2Y+11).$
12	$M(X)=-8,\quad M(Y)=7;\qquad а)M(2X-3Y+5XY-8);$ $D(X)=2,\quad D(Y)=3;\qquad б)D(-6X+6Y+1).$

13	$M(X)=-14, \quad M(Y)=8; \qquad а)\, M(7X-6Y+2XY-3);$ $D(X)=2, \quad D(Y)=3; \qquad б)\, D(-6X+3Y+5).$
14	$M(X)=11, \quad M(Y)=-7; \qquad а)\, M(2X-5Y+6XY-8);$ $D(X)=2, \quad D(Y)=1; \qquad б)\, D(-8X+5Y+9).$
15	$M(X)=10, \quad M(Y)=-6; \qquad а)\, M(5X-7Y+11XY-8);$ $D(X)=3, \quad D(Y)=1; \qquad б)\, D(8X-5Y+11).$
16	$M(X)=14, \quad M(Y)=-8; \qquad а)\, M(11X-2Y+5XY-3);$ $D(X)=3, \quad D(Y)=1; \qquad б)\, D(5X-6Y+19).$
17	$M(X)=-9, \quad M(Y)=7; \qquad а)\, M(5X-3Y+7XY-8);$ $D(X)=1, \quad D(Y)=2; \qquad б)\, D(11X-13Y+14).$
18	$M(X)=11, \quad M(Y)=-14; \qquad а)\, M(3X-8Y+XY+13);$ $D(X)=3, \quad D(Y)=4; \qquad б)\, D(-2X+6Y-8).$
19	$M(X)=14, \quad M(Y)=-8; \qquad а)\, M(15X-6Y+7XY+5);$ $D(X)=5, \quad D(Y)=1; \qquad б)\, D(-X+5Y-4).$
20	$M(X)=4, \quad M(Y)=-9; \qquad а)\, M(3X-8Y+2XY-13);$ $D(X)=1, \quad D(Y)=2; \qquad б)\, D(5X-Y+8).$
21	$M(X)=11, \quad M(Y)=8; \qquad а)\, M(11X-6Y+XY+12);$ $D(X)=3, \quad D(Y)=2; \qquad б)\, D(11X-7Y+14).$
22	$M(X)=13, \quad M(Y)=-9; \qquad а)\, M(X-12Y+5XY-18);$ $D(X)=2, \quad D(Y)=3; \qquad б)\, D(-X+5Y+14).$
23	$M(X)=10, \quad M(Y)=-8; \qquad а)\, M(3X-7Y+XY-5);$ $D(X)=3, \quad D(Y)=1; \qquad б)\, D(5X-Y+16).$
24	$M(X)=12, \quad M(Y)=-10; \qquad а)\, M(2X-6Y+5XY-1);$ $D(X)=4, \quad D(Y)=1; \qquad б)\, D(X-7Y+13).$
25	$M(X)=18, \quad M(Y)=-12; \qquad а)\, M(X-8Y+7XY+13);$ $D(X)=5, \quad D(Y)=3; \qquad б)\, D(7X-Y+14).$