

РАСЧЕТ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СПЕКАЕМОЙ КРЕМНЕЗЕМИСТОЙ КЕРАМИКЕ

Гуньков В.В.

Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Описан метод расчета температурных полей в спекаемом керамическом образце цилиндрической формы, имеющем неоднородный состав. Модерирование неоднородности проводилось методом элементарной ячейки. Рассмотренный метод отличается простотой реализации и позволяет учитывать фазовые превращения среды.

Ключевые слова: температурное поле, неоднородная среда, керамика, теплопроводность.

Исследуемый образец имеет форму цилиндра, высота которого $h = 10$ мм, радиус $R = 50$ мм. Изготовлен из смеси SiO_2 и Al_2O_3 с включениями зерен SiC .

В процессе обжига образец помещается в печь, температура которой постоянна в течение длительного времени. Таким образом, температура на поверхность образца принимается равной температуре печи.

Моделирование тепловых полей осуществляется с помощью уравнения теплопроводности. Так как исследуемый образец является цилиндром, для записи уравнения теплопроводности использовались цилиндрические координаты. Образец задавался областью пространства

$$D_3: r \in [0, R], z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right], \varphi \in [0, 2\pi]$$

Температура в каждой точке образца в данный момент времени описывалась функцией, зависящей от четырех переменных $u(r, \varphi, z, t)$. Эта функция удовлетворяет классическому уравнению теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2},$$

с начальными и граничными условиями:

$$u(r, \varphi, z, 0) = T_0 \text{ для } \forall r, \varphi, z \in D_3,$$

$$u(R, \varphi, z, t) = u\left(r, \varphi, \frac{h}{2}, t\right) = u\left(r, \varphi, -\frac{h}{2}, t\right) = T_1 \text{ для } t > 0.$$

где T_0 – начальная температура, T_1 – температура обжига, равная температуре печи.

Используя соображения симметрии, можно существенно упростить задачу, сократив необходимый для ее решения объем вычислений. Во-первых,

учитывая осевую симметрию образца, уравнение можно привести к виду, не зависящему от угла φ , то есть искомая функция будет зависеть только от трёх переменных: $u(r, z, t)$. Во-вторых, воспользовавшись симметрией относительно плоскости $z = 0$, можем рассматривать только область $z > 0$. Таким образом, задача принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\text{в области } D_2: r \in [0, R], z \in \left[0, \frac{h}{2}\right],$$

начальные и граничные условия:

$$u(r, z, 0) = T_0 \text{ для } \forall r, z \in D_2,$$

$$u(R, z, t) = u\left(r, \frac{h}{2}, t\right) = T_1,$$

$$\left. \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial z} \right|_{z=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial u(r, z, t)}{\partial r} \right|_{r=0} = 0.$$

Задача решалась методом сеток. На рисунке 1 изображены изотермы в осевом сечении цилиндрического образца. Для наглядности осевое сечение восстановлено полностью, в то время как моделирование производилось лишь для $z > 0$. Данные моделирования согласуются с результатами экспериментов [1].

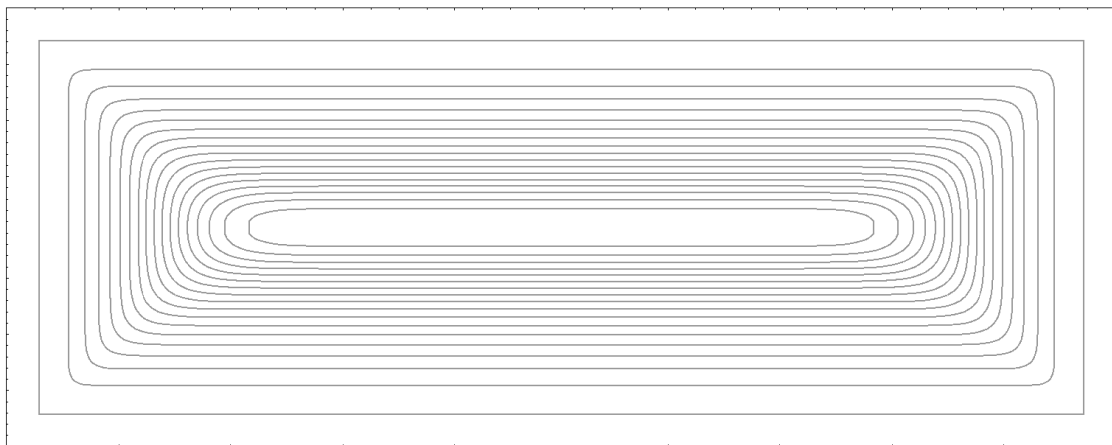


Рисунок 1 - Осевое сечение цилиндрического керамического образца, обжигаемого при постоянной температуре

Следующим этапом развития модели было описание изотерм образца с включениями. Для простоты включения описывались концентрическими кольцами квадратного сечения. Аналогичный способ имитации теплопроводности неоднородных структур широко применяется и описан, например, в [2]. Отличие нашего метода состоит в том, что мы используем не прямоугольные параллелепипеды, а кольца. Пример осевого сечения образца представлен на рисунке 2. Изотермы для этого образца изображены на рисунке 3. Следует обратить внимание, что далее изображается не полное осевое

сечение, а лишь та часть, которая непосредственно моделировалась. Для восстановления полного изображения осевого сечения необходимо воспользоваться соображениями симметрии.

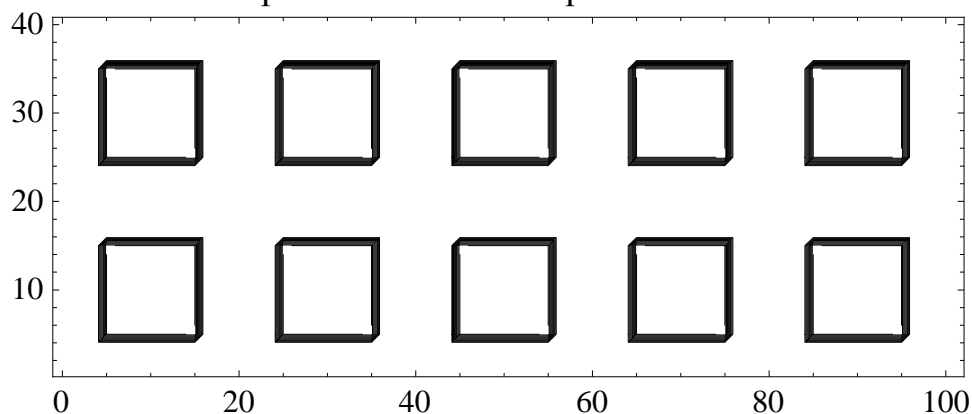


Рисунок 2 - Изображение эффективного сечения образца с включениями

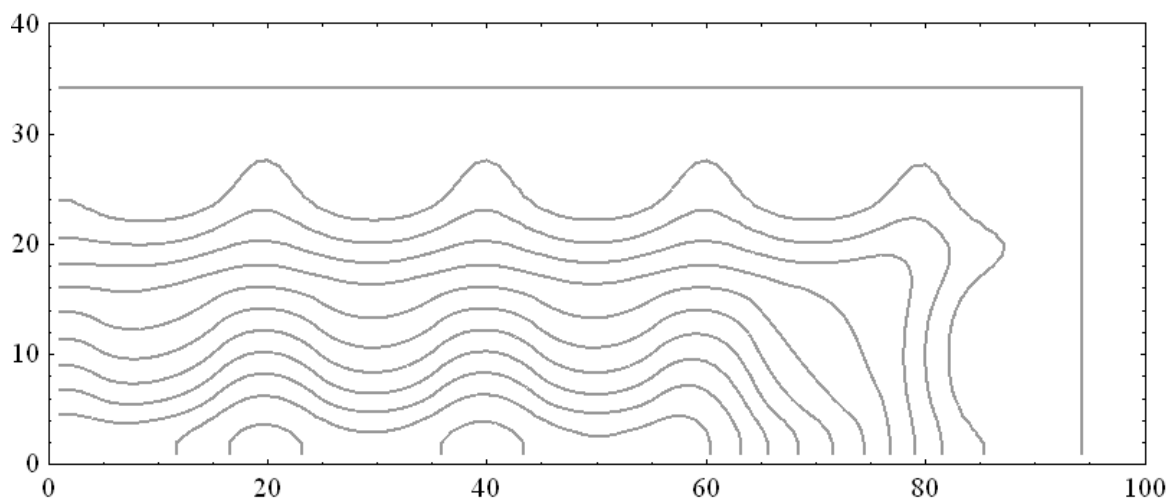


Рисунок 3 - Изотермы в объеме образца, представленного на рисунке 2

Полученные изотермы, очевидно, не отражают абсолютно точно реальной картины, поскольку в экспериментальном образце включения имеют размеры, значительно меньшие по сравнению с размерами образца. Полученные нами изотермы отражают динамику распространения тепловой энергии от поверхности цилиндрического образца к его центру. Они так же удовлетворительно согласуются с результатами, представленными в [1].

Список литературы

1. Четверикова, А.Г. Разрушение керамических материалов со сложным составом под действием термических напряжений / А.Г. Четверикова, О.Н. Каныгина // Вестник Кыргызско-Российского славянского университета. - 2007. - Т. 7. - №8. - С.18-22
2. Дульнев, Г. Н. Процессы переноса в неоднородных средах / Г. Н.

Дульнев, В. Н. Новиков. - М.: Энергия, 1991. – 221 с.