Минобрнауки Российской Федерации
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

В.Н. Евсюков

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

издание 2-е, переработанное и дополненное

Рекомендовано Ученым советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программе высшего профессионального образования по техническим специальностям.

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 681.5 (07)
ББК 32.965 я 7
Е 25

Рецензент - доктор технических наук, профессор Н. З. Султанов

Евсюков, В. Н.

Е 25 Теория автоматического управления: учебное пособие для студентов вузов. / В.Н. Евсюков. 2-е изд. перераб. и доп. - Оренбург: ОГУ, 2011. - 260 с.
ISBN

В учебном пособии рассмотрена сущность процесса управления, способы моделирования, основные принципы управления. Рассмотрены методы анализа и синтеза систем, в том числе через переменные состояния. Теоретические вопросы ТАУ излагаются на основании физической сущности процесса с большим количеством примеров. По каждому разделу приведены вопросы для самоконтроля и задачи.

Учебное пособие предназначено для студентов специальностей 220301.65, 230101.65 и других.

$$Е\ \frac{2402000000}{6Л9\text{-}07}$$

УДК 681.5 (07)
ББК 32.965 я 7

ISBN

Содержание

Введение

Теория автоматического управления (ТАУ) – это отрасль науки и техники, охватывающая теорию и практику автоматического управления производственными процессами, т.е. управления без непосредственного участия человека. Под производственным процессом понимают координированное взаимодействие механизмов, машин и агрегатов с целью производства заданного продукта.

В производственных условиях возможно возникновение различных помех. Это не только ухудшило качество производственного процесса, но и нарушилась работоспособность всей системы. Отдельные регуляторы для стабилизации работы устройства появились в давние времена, например, еще в средние века применялся центробежный маятниковый уравнитель скорости хода водяных мукомольных мельниц, использовался регулятор скорости вращения лопастей ветряных мельниц при увеличении силы ветра и другие. Но они не оказали серьезного влияния на формирование теории автоматического управления.

Бурное развитие теории и техники автоматического управления началось в XVIII веке и связано с промышленной революцией. Появились пароходы, паровозы. В Англии к 1750 году на заводах и фабриках работало более 70 тысяч паровых машин. Первым промышленным регулятором этого периода является поплавковый регулятор питания паровой машины, построенный И.И. Ползуновым в 1765 году. Затем центробежный регулятор скорости паровой машины разработанный английским механиком Дж. Уаттом в 1784 году. Первое программное устройство для воспроизведения узора на коврах с помощью перфокарты разработано Ж. Жаккаром в 1808 году. Эти регуляторы создавались на основе инженерной интуиции, методом проб и ошибок, так как не было разработано научной основы автоматического управления. Иногда возникала парадоксальная ситуация, когда очень чувствительный астатический регулятор скорости не стабилизировал работу паровой машины, а способствовал разбалансу её работы. Необходимо было теоретически обосновать взаимодействие регулятора и паровой машины.

Первое теоретическое исследование системы автоматического регулирования с учетом нелинейных фактов было сделано английским физиком Дж. Максвеллом в 1866 году. Но эта работа была посвящена механизму ведения телескопа при слежении за звездами и, образно говоря, для промышленности оказалась «малозаметной». Основоположником теории автоматического регулирования по праву считается И.А. Вышнеградский, опубликовавший в 1876 году свой труд «Об общей теории регуляторов» и в 1878 году работу «О регуляторах непрямого действия». В этих работах осуществлен системный подход к регулятору и паровой машине как к единой динамической системе (что не было в работе Максвелла). Это позволило дать общий методологический подход к исследованию самых разнообразных по принципу действия регуляторов. В этих работах были заложены основы теории устойчивости, разработаны основы современных методов исследования (анализ системы по распределению корней, выделение области устойчивости, определение монотонности регулирования и др.). Общая теория устойчивости динамических систем была разработана в докторской диссертации А.М. Ляпуновым (1892 год), где дано строгое понятие устойчивости движения и предложено два метода определения устойчивости.

До пятидесятых годов прошлого столетия теория автоматического управления базировались на рассмотрении преимущественно линейных дифференциальных уравнений и разрабатывались вопросы устойчивости и вопросы стабилизации регулируемых параметров.

Дальнейшее развитие научно-технического прогресса потребовало нового подхода к задачам управления технологическими процессами. Повысились требования к быстродействию, к точности регулирования, к обеспечению управления объектами с изменяющимися параметрами, с неполной информацией о системе.

Для расчёта многомерных систем всё шире используются методы расчёта автоматических систем на основе матричной модели в переменных состояния. Этот метод позволяет использовать хорошо разработанный математический аппарат линейной алгебры и по-новому рассматривать вопросы качества регулирования через такие характеристики системы как инвариантность, чувствительность, робастность. Такие методы расчёта САУ условно называют «современной» теорией управления. Необходимо отметить, что чёткого разделения на «классическую и «современную» теорию управления нет, и не может быть.

По сравнению с другими учебниками по ТАУ, данное учебное пособие имеет следующее отличие:

- усилена практическая направленность при изучении систем автоматического управления;
- процесс управления рассмотрен более подробно;
- даны определения каждого понятия, которые используются в учебном пособии;
- рассмотрение каждого метода расчёта системы управления основывается, прежде всего, на анализе принципа действия данной системы, а затем показываются теоретические зависимости для анализа и синтеза автоматических систем;
- после рассмотрения каждого метода расчёта системы управления, показаны конкретные примеры, и даны вопросы для самоконтроля полученных знаний.

Автор понимает, что создание учебного пособие с рассмотрением такого разнообразия систем автоматического управления – дело весьма не простое и ответственное, поскольку различные взгляды на содержание и на методику преподавания этой дисциплины имеют право на существование. Автор с благодарностью примет любые замечания и предложения коллег. С автором можно связаться по адресу:

460018 г. Оренбург, ГСП, пр. Победы 13,
государственное образовательное учреждение
«Оренбургский государственный университет»
кафедра «Системы автоматизации производства»,
Евсюков Владимир Николаевич.

1 Общие понятия об управлении

1.1 Сущность процесса управления

1.1.1 Основные понятия и определения

В теории управления к основным понятиям относятся: понятие управления, принципы управления, различные воздействия на систему управления, составные части процесса управления, методы анализа и синтеза автоматических систем.

При анализе технологических процессов прежде всего необходимо определить причинно-следственную связь происходящих событий. Тогда на этой основе можно определить возможные варианты изменения регулируемой величины. Если эта задача решена, то возникает следующая задача: предотвратить нежелательное изменение регулируемой величины и направить её развитие «в нужное русло» или, другими словами, *организовать управление*. Задачи, решаемые в процессе управления, настолько обширны и многообразны, что иногда в них теряется сущность самого процесса управления. Поэтому необходимо с самого начала определить понятие – *управление [8].*

> ***Управление - есть целеподчинённая совокупность действий, обеспечивающих приведение данного процесса к достижению желаемых результатов.***

Рассмотрим некоторые аспекты процесса управления.

Во-первых, *главным в процессе управления является цель управления,* или управление - это целеподчинённое действие.

Цель управления – это желаемый, конечный результат. Есть цель – начинается управление и через управление можно её достичь. Нет цели, и не может быть ни какого управления. Если изменилась цель – меняется управление. Управление всегда целеподчинено. Цель первична, она в основе всего процесса управления.

Во-вторых, *достижение цели прогнозируется в некотором будущем времени*. Это может быть и конкретное время (за 1 секунду регулируемая величина должна увеличиваться до ...). Это может быть и неопределённое время (в течении всего процесса температура не должна превышать ...). Во всех случаях цель ставится на будущее.

В третьих, *управление должно быть своевременным*. Полностью этого добиться не всегда возможно, но желательно максимально сократить запаздывание в управлении, успеть принять необходимые управляющие воздействия, пока процесс не вышел из-под контроля. Даже при правильно выбранном управлении, но при существенном опоздании в создании управляющих воздействиях, цель трудно достичь. Она при таком запаздывании может вообще измениться.

В четвёртых, *управление – это вид человеческой деятельности*. Вообще, эволюционные зачатки управления, а точнее регулирование своих действий присутствует у животных и растений. Но мысленно представить конечный результат при выполнении поставленной цели, смоделировать свою цель, рассмотреть альтернативные варианты управления – всё это сможет сделать только человек.

Итак, цель поставлена. Для её достижения человек ищет *средства*.

Средства управления – это широкое понятие от простых устройств до создания сложного алгоритма управления. Используя самые различные средства, в конце концов получаем результат.

Результат процесса управления – это конкретный показатель достижение заданной цели.

Такое взаимодействие *ЦЕЛЬ-СРЕДСТВА-РЕЗУЛЬТАТ* показано на рисунке 1.1.

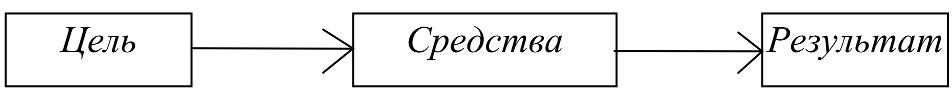


Рисунок 1.1 – Взаимодействие *ЦЕЛЬ-СРЕДСТВА-РЕЗУЛЬТАТ*

Таким образом, организация процесса управления включает: постановку цели, поиск средств ее достижения и организацию их взаимодействия для получения необходимого результата. Если эта задача решена, то обеспечено правильное согласованное взаимодействие в рамках модели *ЦЕЛЬ-СРЕДСТВА-РЕЗУЛЬТАТ*. Рассмотрим основные составляющие процесса управления подробнее.

1.1.2 Цель управления

Первый шаг в создании системы управления – это определение цели управления на основании углубленного анализа данного технологического процесса [2]. Но при этом инженера может сдерживать ***инерционность мышления*** в виде:

– *инерция образов,* когда цель управления определяется «по образу и подобию» других аналогичных систем;

– *инерция специальности,* когда инженер с большим стажем работы «точно знает», что такие цели ставить нельзя.

При определении цели управления существуют еще ***«творческие преграды »:***

– *семантическая преграда,* когда инженер неадекватно понимает сущность технологического процесса;

– *перцентуальная преграда,* когда инженер воспринимает то, чего в действительности нет, необоснованно идеализирует процесс;

– *консервативная преграда,* когда инженер даже не пытается использовать всю глубину своих знаний и принимает упрощенное представление о цели управления;

– *социальная преграда,* когда социальные условия и мировоззрение не способствуют творческому подходу к решению поставленной цели.

Этапы определения цели управления следующие:

– *информационный этап* – это уяснение путей и методов поиска цели управления;

– *аналитический этап* – это установление причинно-следственной связи в исследуемом технологическом процессе;

– *творческий этап* – это определения цели управления на основе критериев качества.

В качестве критерия качества (или функция цели) при определении цели управления может быть принят: технико-экономический, эксплуатационный, эргономический, социальный показатель. Критерий качества отображает наиболее существенный показатель цели управления. Определение цели управления – это трудная задача, и от ее правильного решения зависит эффективность всего процесса управления. Поэтому она должна быть всесторонне проанализирована и обоснована.

1.1.3 Объект управления

В соответствии с поставленной целью выделяют из окружающей среды главное из средств достижения цели – *объект управления*. Объект управления может иметь любую природу: и физическую, и химическую, и биологическую, и социальную. Естественно, что природа объекта управления влияет на характер процесса управления. В англоязычной литературе нет единого термина, эквивалентного нашему понятию «управление». Там существует три самостоятельных термина, government - государственное управление, management - управление в сфере бизнеса, control - управление в технических системах. Введение различных терминов для обозначения управления различными объектами ещё раз подчёркивает, что имеющиеся особенности процесса управления весьма существенны [8].

Объект управления - это часть реальности, выделенная субъектом в соответствии с поставленной целью.

В качестве объекта управления в простейшем случае может быть техническое устройство, в котором происходит процесс управления. Например, это технологическая линия для выпуска продукции или отдельный двигатель с автоматической регулировкой частоты вращения. Объектом управления может быть большое промышленное предприятие и даже целая отрасль народного хозяйства. Это может быть и определенный человек или группа людей. Более того, субъект управления и объект управления может быть одно и тоже лицо, когда человек сам себе ставит цель и управляет своими поступками.

Теория управления изучает закономерности, присущие системам управления независимо от их природы. Объекты управления могут быть технические, экономические, биологические, военные, социальные и другие [2].

Примеры технических объектов:

- объекты машиностроения (станки, прокатные станы и т.д);
- объекты энергетики (теплообменники, генераторы, двигатели и т.д)
- объекты транспорта (автомобили, самолеты, суда и т. д)
- бытовая техника (утюги, холодильники, стиральная машина и т.д.)

Теория автоматического управления долгое время развивалась применительно именно к техническим объектам. Для многих таких объектов имеются достаточно адекватные математические модели и теоретические основы их расчета.

Примеры экономических объектов: завод, торговое предприятие, банки, страховые компании, сфера услуг и т.д. Общим для них является и цель управления и управляемая величина. Это прибыль. Задача управления – обеспечить стабильную прибыль при соблюдении действующих законов. Это более сложные объекты, чем технические. Факторы, влияющие на достижение цели управления находятся в сложной взаимосвязи и содержат элементы неопределенности. Поэтому принимаемые решения носят вероятностный характер.

Биологические объекты – это живые системы от простейших клеток до сложных организмов, которые поддерживают свою жизнедеятельность благодаря действию в них механизма регуляции, который регулирует ритм сердца, дыхания, температуру, процесс пищеварения и другие процессы. В живой природе механизмы регуляции настолько органически встроены в объекты, что не всегда можно выделить такие функциональные элементы, как объект, датчик, задатчик, исполнительный механизм. Но и здесь методы теории управления помогают ученым глубже исследовать происходящие процессы. Например, процесс изменения численности биологической популяции. Такие модели процесса управления биологическими системами позволяют предвидеть резкий рост популяции вредителей (например, саранчи) и принять обоснованные меры борьбы с ними. Например, путем использования естественных врагов для этих вредителей.

Таким образом, выбор объекта управления зависит от поставленной цели. Но само управление, то есть алгоритм воздействия на объект может быть аналогичен для самых различных объектов. Об этом ещё в 1948 г. сказал Норберт Винер.

> «Процессы управления, где бы они не происходили – в живом организме, в машинах, в обществе, подчиняются одним и тем же законам.»

Если любое развитие имеет свои закономерности, свои этапы развития, если это можно определить, то можно предвидеть дальнейшее развитие процесса (в обществе, в организме в технологическом процессе). Значит можно этими процессами управлять.

1.1.4 Средства управления

К понятию «средства управления» относятся: субъект управления, объект управления, ресурсы управляющих воздействий [8].

> ***Субъект управления – это человек или коллектив, который поставил цель и с помощью имеющихся средств добивается результата.***

В качестве субъекта управления могут выступать отдельный индивид или коллектив предприятия. В автоматических устройствах, работающих без участия человека, субъект управления присутствует, образно говоря, «незримо». Ведь это он, субъект управления поставил цель, рассчитал алгоритм работы, создал конструкцию и отладил её работу. Поэтому правомерно считать, что если есть управления каким-либо технологическим процессом, значит есть и субъект этого управления. Средства управления зависят от объекта управления. Они различны, но всегда должно быть соответствие средств управления с объектом управления, с поставленной целью управления. В простейших случаях цель управления может быть чётко определёна в каждый момент времени.

Например, пусть объектом управления является резервуар, в котором уровень жидкости может понижаться при её расходе. Цель управления – добиться постоянного уровня жидкости. Средство управления обеспечивает долив жидкости при понижении её уровня. Результат заключается в поддерживания заданного уровня.

Процесс управления заключается в деятельности субъекта, который направляет управляющие воздействия на объект управления с учётом определённых запасов – *ресурсов управляющих воздействий*, добиваясь результата в соответствии с поставленной целью (рисунок 1.2).

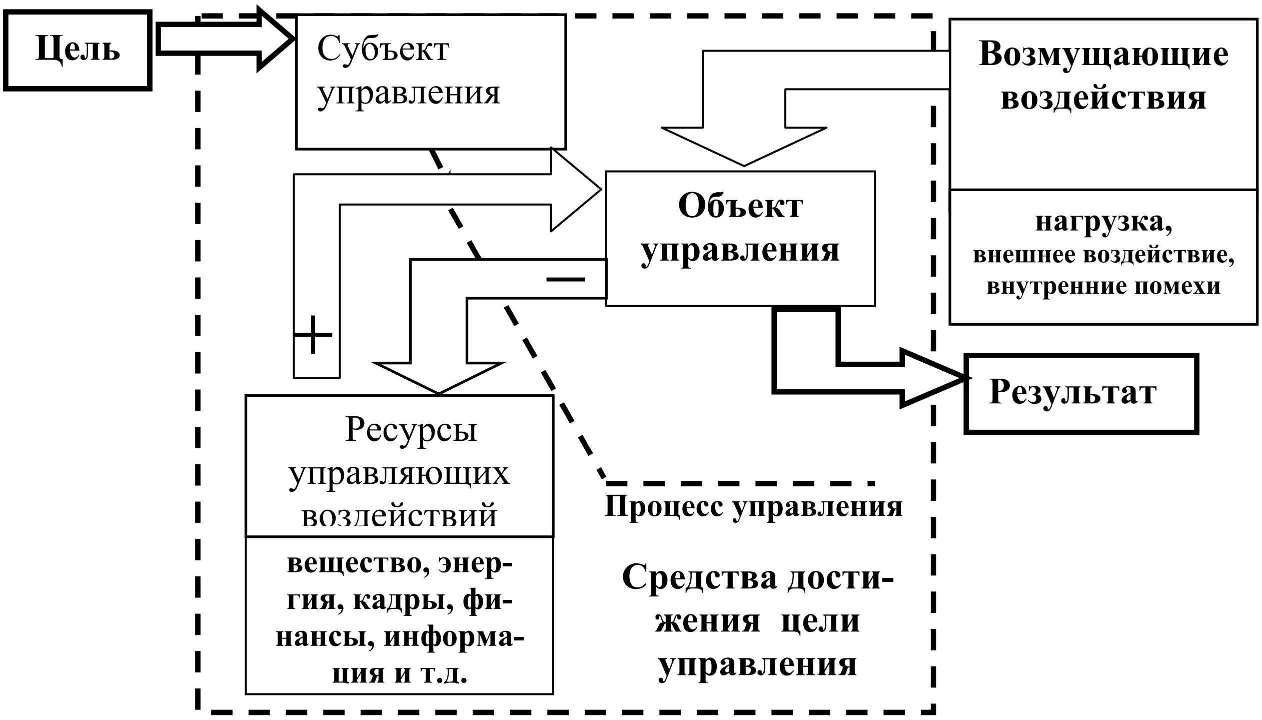


Рисунок 1.2 – Взаимосвязь ресурсов и средств управления в процессе управления

Ресурсы управляющих воздействий – это материальные и идеальные средства, используемые субъектом управления для воздействия на объект управления для достижения поставленной цели.

В общем случае ресурсы управляющих воздействий могут, как подводиться к объекту, так и отводиться от него, то есть иметь знак «+» (подводятся) и знак «-» (отводятся). Так для увеличения числа оборотов электродвигателя необходимо подвести к нему дополнительную энергию, а для уменьшения оборотов – уменьшить подводимую энергию.

В качестве ресурсов управляющих воздействий может быть использована, прежде всего, энергия (электрическая, механическая, тепловая и т.д.). А также вещество, например жидкость для поддержания заданного уровня, или песок для приготовления цементного раствора, или добавка в сталь и т.д. В качестве ресурсов может выступать и дополнительная информация. Особенно часто это показывают в детективных фильмах, когда незначительная деталь (например, газета на столе) изменяет всю картину событий и становится «ключом» к раскрытию действительного происшествия, т.е. помогает достичь поставленной цели – раскрыть преступление. Ресурсы для управления могут быть и в самом человеке. Например, шахматист сделал неожиданный ход конем и выиграл партию; руководитель проанализировал работу предприятия, и принял смелое решение и повысил его рентабельность. Все виды ресурсов трудно даже перечислить.

На рисунке 1.2 показана взаимосвязь ресурсов управляющих воздействий с объектом управления. На этом рисунке указано только пять ресурсов управляющих воздействий, хотя их, конечно, гораздо больше.

Управление каким-либо объектом сводится к управлению ресурсами управляющих воздействий.

Если процесс такого управления ресурсами полностью осуществляет человек – то это *механизация.* Если управление ресурсами осуществляется с помощью специального устройства, то такая система управления называется *автоматической.* Если управление ресурсами осуществляется совместно, когда наиболее важные решения в управлении ресурсами остаются за человеком, а часть процесса управления осуществляется специальным устройством, то такая система называется *автоматизированной.* В данном случае эти определения даны через ресурсы управляющих воздействий. Есть и другие определения этих понятий, но они принципиально не отличаются.

Первое требование для обеспечения правильного управления – объект *управления должен быть адекватен (соответствовать) поставленной цели управления.* Случаи неправильно выработанного объекта бывают при управлении сложным технологическим процессом, когда выбирается легко управляемый объект, но мало влияющий на процесс. А основной объект, от которого существенно зависит цель управления технологическим процессом, оказался трудно управляемый и фактически остался без управляющего воздействия..

Управление каким - либо объектом сводится к управлению ресурсами управляющих воздействий.

Второе требования – *средства управления должны быть адекватны цели управления.* Выражения «Цель оправдывает средства» - не верно! Есть цель – повысить точность регулирования и на это потребовались огромные средства, то эффективность такого управления экономически не обоснована. Особенно наглядно это проявляется во взаимоотношении людей. Цель – показать себя «незаменимым работником», средства – унижение всех остальных. Как правило такими средствами поставленную цель управления добиться нельзя.

Третье требование – *средства управления должны быть адекватны объекту управления.* Для каждого объекта есть такие воздействия, на которые объект практически не реагирует. Есть другая группа воздействий, от которых зависит состояние объекта. Поэтому необходимо не только адекватно поставленной цели выбрать ресурсы управляющих воздействий, но и провести их ранжирование по степени воздействия на объект, и в первую очередь воздействовать теми ресурсами, которые в большей степени изменяют состояние объекта согласно поставленной цели управления.

1.1.5 Возмущающие воздействия

При управлении любым процессом приходится сталкиваться с противодействием этому процессу управления, или с *возмущающими воздействиями*.

Возмущающие воздействия – это те воздействия, которые препятствуют достижению поставленной цели.

Условно виды возмущающих воздействий можно разделить на три группы .

Первая группа - это изменение нагрузки. Обычно это основное противодействие при достижении поставленной цели. Как правило, это воздействие носит случайный характер и заранее трудно определить её значение. Можно только вычислить пределы и характер её изменения и по этим данным рассчитать подачу управляющего воздействия. Например, если поставлена цель стабилизировать частоту вращения двигателя постоянного тока, то в зависимости от изменения нагрузки можно пропорционально изменять силу тока в якоре двигателя, и, тем самым, добиваться поставленной цели.

В некоторых случаях, влиянием нагрузки можно пренебречь. Так, в программном управлении с помощью кулачкового механизма цель управления – точные изменения положения регулируемых величин в соответствии с углом поворота кулачка. Например, система газораспределения в карбюраторном двигателе. Изменение нагрузки на кулачки возникает от противодействия клапанных пружин. Но это не основное возмущение для выполнения поставленной цели управления. В данном автоматическом устройстве основное возмущение – в нарушении программы управления при износе кулачков и деталей газораспределения.

Вторая группа – это внешние возмущающие воздействия от окружающей среды. Например, изменение атмосферных условий (температура, давление, радиация и т.д.) или изменения среды, в которой работает устройство. Причём внешние воздействия не всегда отрицательно действуют на процесс управления. Оно может и способствовать этому процессу. Так встречный ветер затрудняет движение транспорта, а попутный – облегчает.

Третья группа – это внутренние возмущающие воздействия, которые проявляются в объекте управления или в ресурсах управляющих воздействий. При управлении техническими средствами – это нелинейность характеристик, неточность показаний датчиков, трение, гистерезис и т.д. Кроме этого, ресурсы управляющих воздействий не всегда идеально подходят для выполнения данного процесса управления. Так электроэнергия для электрооборудования может быть с большим количеством гармоник; топливо для карбюраторного двигателя низкого качества и т.д. И даже может возникнуть ситуация, когда эти внутренние возмущения (шумы) являются решающими, основными по сравнению с другими проблемами управления. Например, недоброкачественная электроэнергия или сбой в её подаче может стать главной причиной не достижения цели управления. В этом случае процесс управления заключается, прежде всего, в обеспечении стабильной и надёжной подачи электроэнергии.

На основании проведенного анализа процесса управления можно сделать следующие выводы:

1) прежде всего, необходимо оценить реальность поставленной цели управления;

2) учесть всю совокупность возмущающих воздействий, в том числе и маловероятных, то есть *рассмотреть всю систему, состоящую из внешних и внутренних возмущающих воздействий;*

3) учесть ограниченность *системы управляющих ресурсов.* Неограниченных ресурсов практически нет, хотя бы из-за требований экономики;

4) виды управляющих воздействий могут быть самые разнообразные, но они должны быть согласованы между собой или должна быть *система управляющих воздействий.*

Например: Рассмотрение любого управления связано с понятием «система».

САР – система автоматического регулирования;

АСУ – автоматизированная система управления;

ОСУ – оптимальная система управления;

Поэтому при исследование принципов управления и оценки качества управления необходимо использовать *принципы системного подхода к процессу управления.* Системный подход и системный анализ – всё это не должно казаться неким нововведением. Система – это форма существования материи, и значит неотъемлемое свойство человеческого мышления, позволяющая более глубоко и всесторонне рассматривать возникающие проблемы [8].

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.1

1 Что такое управление?

2 Что является главным в процессе управления?

3 Что является объектом управления?

4 Примеры различных объектов управления?

5 В чем отличие субъекта и объекта управления?

6 Может ли объект одновременно быть и субъектом?

7 Что мешает правильно определить цель управления?

8 Перечислите различные средства управления.

9 Может ли информация быть средством управления?

10 Какое управление считается механизацией?

11 Какое управление считается автоматическим?

12 Какое управление считается автоматизацией?

13 В чем заключается адекватность в процессе управления?

14 В чём заключается системность процесса управления?

1.2 Роль модели при анализе процесса управления

1.2.1 Формирование модели системы

Чтобы узнать, как устроена и действует данная система, можно представить ее в виде модели и определить функциональное назначение каждого элемента модели. С помощью функционального анализа модели определяется способ достижения поставленной цели. Этот функциональный анализ проводится по формальной структуре модели.

Покажем основные особенности модели.

Во-первых, *любая модель всегда имеет допущения и по своим характеристикам не полностью соответствует оригиналу и по форме, и по содержанию.* Но между выделенными системными характеристиками модели и оригинала существует полное соответствие.

Во-вторых, *получение модели зависит от предварительных знаний об* *объекте и способа мышления.* Пусть необходимо создать модель человеческого глаза. В этом случае врач, инженер, математик каждый по своему представит эту модель вплоть до того, что одному будет непонятно как у другого модель «работает».

В-третьих, *модель составляется, если есть что-то непонятное в исследуемой системе,* модель уже в процессе составления имеет какую-то неразгаданную тайну. Значит модель – это один из приемов выяснения истины в системе.

Таким образом, любая модель всегда имеет допущения. Она по своим характеристикам не полностью соответствует оригиналу и по форме и по содержанию. *Но между выделенными (изучаемыми) характеристиками модели и оригинала существует полное соответствие.*

Решение задачи управления находится путем сравнения неизвестных фактов в изучаемом процессе с известными, путем выяснения причинно - следственной связи, путем «разложения по полочкам» всех новых обнаруженных фактов. Вот для такого логического соединения неизвестных фактов с известными и создается модель системы управления. Пусть по полученной модели не получилось полного совпадения с действительным явлением, пусть выяснилась только некоторая функциональная зависимость неизвестных фактов с известными. Но при этом истина уже проясняется и надо двигаться дальше, надо усовершенствовать модель и по полученным результатам снова продолжать исследование.

Толчком для создания модели служит научное предположение, ***гипотеза,*** выдвигаемая для объяснения исследуемого явления. От нее зависит и вид, и форма, и содержание модели. Необходимо отметить, что достаточно обоснованная гипотеза - это правильное направление при решении поставленной задачи управления. Получение обоснованной гипотезы можно провести на основе системного подхода:

–определить проблемную ситуацию между управляемой системой и внешней средой;

–определить цель управления и желаемый конечный результат;

–определить, что способствует решению поставленной задачи и что мешает получить желаемый результат.

Если эти задачи успешно решаются с помощью принятой гипотезы, то принятая модель системы управления соответствует поставленной задачи.

1.2.2 Анализ процесса управления по моделям

Анализ – метод исследования системы управления путём разложения её на составные части.

После создания модели начинается её анализ по *выдвинутой гипотезе.* Именно сейчас начинают находить неувязки, несогласованности в работе модели и производит ее доработку путем уточнения коэффициентов и включения дополнительных связей. Наконец, модель сбалансирована, концы с концами сошлись, можно начинать исследовать процесс управления. Начинается «игра». Задаются различные внешние условия (вход), изменяются функциональные зависимости внутри модели, определяются выходные параметры. Самое важное в этом эксперименте то, что его проводят не на самом объекте, а на его модели. И это можно поводить сколь угодно долго, с любыми, даже аварийными ситуациями. Так неизмеримо дешевле и быстрее найти истину, так проще определить оптимальные параметры работы, так безопасно проверить аварийные режимы.

Затем по полученным результатам моделирования переходят к следующему этапу - *сравнение полученных результатов с действительным процессом управления.* Для этого выбираются вполне допустимые режимы работы исследуемого объекта и проводятся опыты. Если обнаружилось хорошее сходство с результатами моделирования, то принятая гипотеза верна и можно действовать дальше. Но при этом все же могут возникнуть сомнения. Как мы получили модель? Часть данных была известна, другая часть просто нами придумана. Затем, при доработке модели все данные еще раз подкорректированы, изменены и как такой субъективно и привольно составленной модели можно доверять? С этой точки зрения правильно! Абсолютного доверия нет! Но как по-другому можно добывать новую истину, если не выдвигать новые гипотезы и не создавать по ним модели?

При решении задач анализа и синтеза систем автоматизированного управления необходимо четко разделить два понятия: строгость и точность решения поставленной проблемы [9].

Строгость характеризуется количеством учитываемых факторов и принятых допущений при обосновании гипотезы для получения соответствующей математической модели.

Точность характеризуется математическим аппаратом для анализа ММ и точностью вычисления.

Часто необоснованные допущения делаются из желания получить *линейную модель,* которая располагает богатым арсеналом методов расчета. Но соответствует ли это реальной системе управления? Второе, часто используемые допущения, это желание получить *стационарную модель*, которая имеет не изменяющиеся со временем параметры. Условие стационарности является математической идеализацией процесса, так как любой процесс изменяет свои параметры во времени. Можно ли этим пренебречь?

1.2.3 Синтез процесса управления по моделям

Синтез – метод исследования системы управления в его единстве и взаимной связи всех составных частей.

В процессе исследования системы управления ставятся и рассматриваются разнообразные задачи. Структурно любая задача включает в себя *условия* и *требования*.

Условия – это информационная система, по которой следует искать решение задачи управления.

Требования - это цель, к которой нужно стремиться при решении задач.

Условия и требования при решении задачи постоянно сталкивается, сопоставляются, изменяются, сближаются и, наконец, находится компромиссное решение. Этот процесс обычно состоит из нескольких стадий.

Оперативная стадия, когда анализируются поставленные задачи и оформляются в более четком и конкретном виде.

Синтетическая стадия, когда определяются те требования к системе управления, которые хотя бы частично выполняются. Затем выделяются остальные требования, выполнение которых пока трудно осуществить. Фактически здесь используется метод анализа.

Аналитическая стадия, когда определяется структура и алгоритм работы такой системы управления, которая идеально выполняет поставленные цели. Затем выявляются причины, которые мешают выполнить эти цели.

Синтез обычно начинается с упрощенной системы управления, анализируется ее работа, при необходимости переходят к более сложной системе. При этом точнее определяется цель управления, объект, параметры технологического процесса и т.д. Таким образом, синтез это итерационный, сложный творческий процесс.

Последовательность синтеза системы управления следующая:

1) постановка цели управления (*оперативная стадия*);

2) выделение объекта управления (*оперативная стадия*);

3) анализ параметров технологического процесса и определение регулируемых величин (*синтетическая стадия*);

4) требования к регулируемым величинам (*синтетическая стадия*);

5) выбор структуры системы управления и алгоритма ее работы (*аналитическая стадия*);

6) выбор регулятора и определения параметров его настройки (*выявление основных взаимодействий*);

7) оптимизация параметров регулятора (*локальная согласованность*);

8) анализ работы всей системы управления (*глобальная согласованность*).

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.2

1 Что такое моделирование системы управления?

2 Основные особенности модели.

3 Специально или вынужденно создают модель системы управления с некоторыми недостающими элементами, которые есть в исследуемой системе?

4 В чем основное преимущество математической модели по сравнению с физической?

5 Можно ли создать модель системы управления без какой либо гипотезы?

6 Можно ли при анализе процесса управления по модели изменять параметры и включать дополнительные связи?

7 Почему к результатам, полученным по модели системы управления, нет абсолютного доверия?

8 Основные требования к математической модели.

9 Что значит строгость постановки задачи при создании системы управления?

10 Что значит точность решения задачи при создании системы управления?

11 Может ли точно решенная задача при создании системы управления для практического использования непригодной?

12 Какие чаще всего принимают необоснованные допущения при создании математической модели системы управления?

13 В чем заключается последовательность синтеза системы управления?

1.3 Согласованность в системе управления

1.3.1 Локальная и глобальная согласованность

Связь эффективности систем управления с согласованностью или несогласованностью ее составляющих элементов не вызывает сомнений и закреплена даже в басне (лебедь, рак и щука). С древних времен известно, что хорошо согласованная в своих действиях армия может победить более многочисленную, но менее согласованную армию. В техническом плане несогласованность управляющей системы с объектом управления выражается в неустойчивости процесса управления.

Согласованность можно разбить на два больших класса:

- ***локальная согласованность*** - это согласованность взаимосвязей между элементами внутри данной системы управления;

- ***глобальная согласованность*** - это согласованность в работе данной системы управления по отношению к другим взаимосвязанным системам управления. С точки зрения процесса управления - это соответствие данной системы управления общей поставленной цели.

Рассмотрим особенности *локальной согласованности.* Это согласованность размеров, расположений и форм. А также согласованность во времени, во взаимодействии и в порядке следования событий. Требовать полную согласованность не всегда приемлемо по экономическим причинам. Поэтому вводится допустимая степень несогласованности. Например, система допусков при изготовлении и сборке деталей.

Основными средствами достижения локальной согласованности в процессе управления являются: оптимизация, адаптация, селекция.

Оптимизация позволяет достигать согласованности в том случае, когда о системе управления и влияющих на нее факторах априорно известно почти все. Тогда можно построить целевую функцию и минимизировать рассогласованность.

Адаптация используется, когда известен лишь критерий качества, но неизвестны (или не полностью известны) параметры системы и условия работы и ограничения. Тогда создается самонастраивающая система, которая в процессе своего функционирования сама вырабатывает недостающую информацию и доводит локальную согласованность до необходимого уровня.

Селекция используется, когда сам критерий качества до конца не определен. Тогда создается несколько систем управления с различными критериями качества и затем путем анализа выбирается лучшая система управления. Обычно используется метод «проб и ошибок».

Особенности *глобальной согласованности.* Поскольку система управления в некоторой степени может удовлетворять различным целям, то вводится понятие «целевая функция», которая определяет степень соответствия данной системы поставленной перед ней цели управления от старшей системы. Например, удовлетворительная, хорошая, отличная система. Степень глобальной согласованности определяется величиной рассогласования данной системы по отношению к общей цели управления.

1.3.2 Системные аспекты процесса управления

Для реализации процесса управления поставленная цель разбивается на подцели. Управление происходит последовательно, путем достижения каждой подцели, но возникают непредвиденные обстоятельства, что приводит к отклонению от намеченного плана. Поэтому необходимо иметь набор альтернативных планов и соответствующих альтернативных действий. Важно при этом не потерять основную цель и постоянно приближаться к этой цели.

Поставленная цель управления должна удовлетворять следующим требованиям:

а) обоснованность принятого решения;

б) оперативность во времени управляющих воздействий;

в) категоричность (однозначность) подаваемых команд;

г) охват, то есть учет параметров при управлении;

д) непрерывность – это своевременная реакция на изменяющуюся обстановку.

Рассмотрим эти требования более подробно [8].

Обоснованность – это максимальное использование потенциальных возможностей системы для достижения поставленной цели.

Стремление более полно обосновывать решение требует дополнительного времени, но при этом теряется *оперативность.* Стремление повысить оперативность при ограниченном времени приводит к тому, что ряд факторов не учитывается, и это может привести к необоснованным и даже ошибочным решениям.

Оперативность - это организация управляющих воздействий в реальном темпе протекания процесса. Управление должно происходить не раньше и не позже, чем это необходимо для достижения цели. Недостаточно принять обоснованное решение, необходимо уметь вовремя его реализовать. Оперативность можно оценить временем между изменением регулируемой величины и временем для определения команды управления.

Однозначность команды достигается путем формализацией действий.

Твердость в управлении достигается путем охвата необходимого множества параметров и четкой последовательности действий.

Гибкость достигается путем постановки конечной цели, а система управления сама выбирает последовательность действий.

Охват – это управление с учетом участия в нем младших систем. Охват зависит от вариантов организации системы управления.

Централизованное управление, когда все команды поступают с центрального пункта управления и охват наиболее полный. Такой алгоритм управления считается жёстким.

***Децентрализованное управление*,** когда с центра управления, даются контрольные параметры технологического процесса, а необходимые команды управления вырабатываются непосредственно на местах, то есть в каждой подсистеме. Такой алгоритм управления считается гибким.

Непрерывность управления – это отсутствие такого положения, когда в какой-то момент времени потерян контроль над действиями младших систем, или когда «ситуация вышла из-под контроля». Чтобы этого не произошло, необходимо:

- *иметь надежную обратную связь со своими подсистемами,* что обеспечивает постоянную информацию о состоянии всей системы;

- *иметь возможность постоянно прогнозировать развитие событий* и вовремя вмешиваться, т.е. предвидеть изменение состояния системы.

Непрерывное управление не означает постоянное, ежесекундное вмешательство в процесс управления. Это может быть и циклическое воздействие; причем, чем выше уровень управляющей системы, тем циклы идут с большим промежутком времени между командами.

Пример. Управление автомобилем - ежесекундное управление с опережением ситуации. Управление полетом космического корабля - циклическое, но позволяет вовремя корректировать траекторию полета. Это тоже непрерывное управление.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.3

1 Что такое локальная согласованность в системе управления?

2 Что такое глобальная согласованность в системе управления?

3 В чем отличие локальной согласованности от глобальной?

4 Как можно показать, что управление достаточно обосновано?

5 Как можно показать, что оперативность достаточно обосновано в процессе управления?

6 Почему оперативность и обоснованность являются противоречивые показателями?

7 Как можно обеспечить твёрдость в процессе управления?

8 Как можно обеспечить гибкость в процессе управления?

9 Как можно сочетать твёрдость и гибкость в процессе управления?

10 Чем отличается жёсткий и гибкий алгоритм управления?

11 Как можно обеспечить непрерывность в процессе управления?

12 Условие однозначности процесса управления.

2 Классификация систем автоматического управления

2.1 Схемы САУ

Работа каждого агрегата в технологическом процессе характеризуется одним или несколькими технологическими параметрами. Например, температурой в помещении, расходом материалов, давлением пара в паровом котле и т.д. Необходимо стабилизировать данный параметр (регулировать) или по заданному алгоритму изменять его значение (управлять).

Для решения этой задачи анализ работы САУ проводится по схемам. Схемы являются основной моделью, которая поясняет принципы действия и взаимодействия в САУ. Различают три вида схем. Принципиальная схема, которая показывает физическую природу элементов автоматики. Функциональная схема, которая показывает функциональное назначение каждого элемента. Структурная схема, которая показывает математическую зависимость между входным и выходным сигналом каждого элемента САУ. Рассмотрим каждый вид схемы более подробно [2,6,10,11].

2.1.1 Принципиальная схема САУ

Принципиальная схема показывает физическую природу элементов автоматики, технические характеристики, принцип действия и взаимодействия.

Изображение элементов должно отвечать обесточенному состоянию всех электрических цепей и отсутствию внешних воздействий на аппаратуру. Для удобства чтения схемы обозначение её элементов проводится в определённой логической последовательности. Они нумеруются слева направо или сверху вниз. Каждому элементу схемы присваивается буквенно-цифровое позиционное обозначение. Буквенные обозначения обычно представляют собой сокращённое наименование каждого элемента схемы, а цифровые показывают нумерацию элементов. Связь между отдельными элементами показывается линиями, идущими от одного элемента к другому. В пояснительном тексте даётся расшифровка всех буквенных и цифровых позиций и объясняется принцип работы данной автоматической системы.

2.1.2 Функциональная схема САУ

При автоматическом управлении используются устройства разнообразной конструкции, различные по физической природе, по принципу действия. При составлении функциональной схемы это различие не учитывается или, другими словами, принцип работы устройств в функциональной схеме не раскрывается. Её назначение – разделить систему автоматического управления на отдельные *функциональные элементы* и показать их взаимодействие.

> ***Функциональный элемент – это условно выделенная часть САУ, выполняющая определённую функцию при реализации заданного алгоритма работы.***

Различают следующие функциональные элементы.

Объект регулирования (ОР) – машины, аппараты или другие устройства, в которых необходимо регулировать заданные технологические параметры.

Исполнительное устройство (ИУ) – функциональный элемент, осуществляющий воздействие на объект регулирования путём изменения потока материальных средств или энергии.

Усилитель (У) – функциональный элемент, в котором, не изменяя физическую природу входного сигнала, осуществляется увеличение его мощности за счёт внешнего (вспомогательного) источника энергии.

Преобразующее устройство (ПУ) – функциональный элемент, применяемый для преобразования сигнала с целью изменения закона управления. Усилительное и преобразующее устройство могут быть объединены в один функциональный блок: усилительно-преобразующее устройство.

Датчик (Д) – функциональный элемент, измеряющий и преобразующий информацию о технологическом параметре работы САУ в сигнал, удобный для обработки и использования в системе управления.

Корректирующее устройство (КУ) – функциональный элемент, служащий для повышения устойчивости САУ и улучшения её динамических характеристик.

Задающее устройство (ЗУ) – функциональный элемент, служащий для формирования сигнала управления, согласно технологическим требованиям.

Сравнивающее устройство – функциональный элемент, осуществляющий алгебраическую операцию по отношению к воздействиям, поступающим на его вход (например, операции сложения или вычитания поступающих сигналов).

Примечание - Сигналы, поступающие на сравнивающее устройство, всегда имеют одинаковую физическую природу (усилие, напряжение, перемещение и др.). Сигналы, выходящие из сравнивающего устройства, могут иметь другую физическую природу. Например, в центробежном регуляторе скорости вращения: на одном входе – центробежная сила при вращении грузиков; на втором входе – противодействующая сила пружин; на выходе – перемещение скользящей муфты.

На функциональной схеме показывают сигналы, действующие в САУ.

Регулируемая величина X(t) – показатель, характеризующий состояние объекта управления. Например, температура, уровень, давление и т.д.

Возмущающее воздействие (помехи) f(t) – воздействие, нарушающее требуемую функциональную зависимость (связь) между задающим воздействием и регулируемой величиной. Чаще всего это нагрузка.

Управляющее воздействие Q(t) – воздействие, поступающее с исполнительного устройства на объект регулирования для реализации заданного алгоритма работы.

Примечание - Составление функциональной схемы надо начинать с определения объекта регулирования и этих сигналов в САУ: *регулируемая величина, возмущающее и управляющее воздействия.*

Задающее воздействие U(t) – величина, соответствующая заданному (предписанному) значению регулируемой величины.

Различают следующие значения регулируемой величины.

Заданное значение регулируемой величины $X_{пр}(t)$ – значение, соответствующее требуемому режиму работы объекта регулирования.

Действительное значение регулируемой величины $X_{дей}(t)$ – значение, соответствующее фактическому режиму работы объекта регулирования.

Динамическая ошибка регулирования $\Delta X(t)$ – разность между предписанным и действительным значениями регулируемой величины при переходном процессе.

Статическая ошибка регулирования $\Delta X(\infty)$ – ошибка регулирования в установившемся режиме.

Все элементы функциональной схемы (кроме сравнивающего устройства) изображаются в виде прямоугольников с указанием их функционального назначения. Сравнивающее устройство изображается в виде окружности с крестиком внутри. Связь между элементами изображается сплошными линиями со стрелками, показывающими направления прохождения сигнала.

В результате образуется последовательная цепь, в которой выходная величина предшествующего элемента служит входной величиной следующего. Эта цепь заканчивается на выходе ОР, то есть на регулируемой величине X(t). Все элементы функциональной схемы обладают однонаправленностью действия, которое заключается в том, что сигнал проходит только от выхода одного элемента на вход другого, и обратного действия на предыдущий элемент не оказывает.

Участок последовательного соединения элементов от точки приложения задающего воздействия до регулируемой величины (до выходного сигнала с ОР) называется *основной (прямой) цепью*. Связь между элементами системы, образованная основной цепью, называется *основной связью*. Если связь направлена с выхода системы регулирования (то есть с ОР) к её входу и сравнивается с сигналом задатчика, то такая обратная связь называется *главной обратной связью*.

Пример 2.1 - Дана принципиальная схема системы автоматического регулирования уровня бензина в поплавковой камере карбюратора (рисунок 2.1). Определить функциональные элементы системы и составить функциональную схему.

РЕШЕНИЕ

Принцип работы. При увеличении расхода бензина из поплавковой камеры уровень бензина уменьшается, поплавок опускается. С поплавком связана игла, которая также опускается, открывает канал и увеличивает приток бензина. В результате уровень бензина в поплавковой камере восстанавливается.

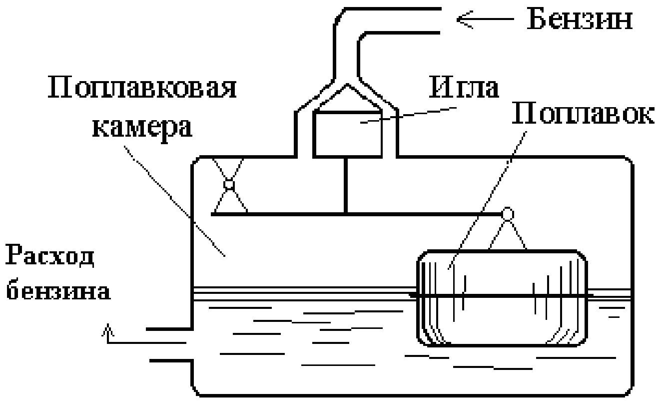


Рисунок 2.1 – Принципиальная схема системы регулирования уровня бензина в поплавковой камере

Определяем ОР и действующие на него факторы.

Объект регулирования (ОР) – поплавковая камера карбюратора, в которой происходит процесс регулирования.

Регулируемая величина X(t) – уровень бензина.

Возмущающее воздействие f(t) – расход бензина.

Управляющее воздействие Q(t) – приток бензина в поплавковую камеру для восстановления заданного уровня.

Функциональная схема ОР и воздействующие на него сигналы показаны на рисунке 2.2

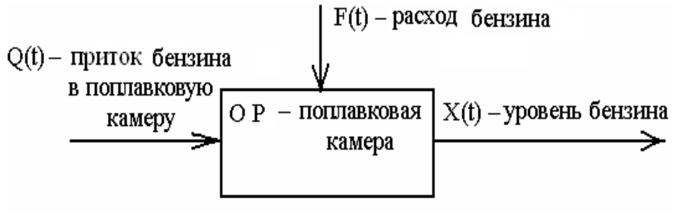


Рисунок 2.2 – Функциональная схема ОР и сигналы, воздействующие на него

Элементы функциональной схемы.

Исполнительное устройство (ИУ) – запорный клапан. Поступление бензина в поплавковую камеру зависит от положения иглы клапана. Чем ниже будет расположена игла, тем больше будет подано бензина в поплавковую камеру.

Датчик (Д) – поплавок, который служит для измерения регулируемой величины (уровня бензина) и преобразования его в перемещение иглы клапана.

Задающее устройство (ЗУ) – длина стержня, на который крепится игла.

Рассмотрим, как в данной автоматической системе происходит работа сравнивающего устройства (рисунок 2.3)

Выходной сигнал от задающего устройства – заданная длина стержня $L_{зад}$, на котором установлена игла клапана.

Выходной сигнал от датчика – действительное расстояние от запорного клапана до уровня бензина $L_{дей}$, которое передается на сравнивающее устройство с помощью поплавка.

Работа сравнивающего устройства заключается в сравнении этих двух сигналов. В результате, чем меньше уровень бензина, и, соответственно, ниже расположен поплавок, тем ниже опускается игла относительно заданного значения, и тем больше будет поступать бензина в поплавковую камеру. Величина перемещения иглы ΔL определяется уравнением:

$$\Delta L = L_{зад} - L_{дей} .$$

На основании рисунков 2.2 и 2.3 составляем функциональную схему регулирования уровня бензина в поплавковой камере, которая показана на рисунке 2.4.

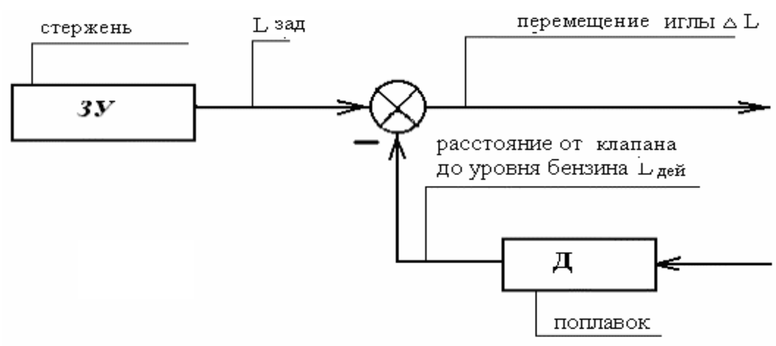


Рисунок 2.3 – Схема работы сравнивающего устройства к примеру 2.1

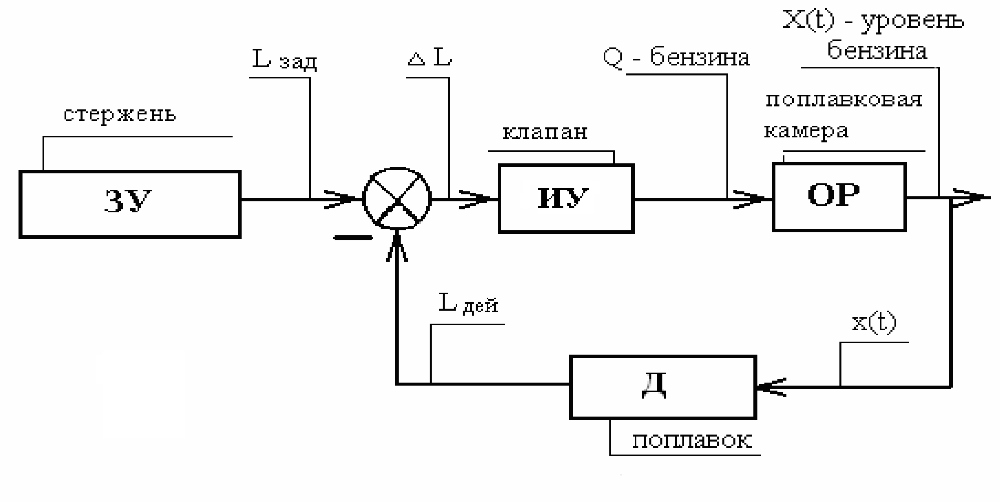


Рисунок 2.4 – Функциональная схема системы к примеру 2.1

2.1.3 Конструктивные элементы функциональной схемы САУ

Для правильного выбора и эффективного использования систем автоматического управления (САУ) надо знать особенности технологического процесса и правильно определить объект регулирования, датчик, задатчик, исполнительное устройство.

Объекты регулирования в зависимости от условий работы могут быть самые разнообразные. К числу часто встречающихся объектов регулирования в машиностроении следует отнести двигатели, турбины, компрессоры, тепловые устройства, паровые котлы, мартеновские печи, подогреватели, а так же различные объекты в виде резервуаров, камер, трубопроводов.

Регулируемые величины в зависимости от технологического процесса могут быть:

- напряжение генератора;
- скорость вращения валов двигателей;
- давление (разрежение) в резервуарах;
- уровень жидкости в сосудах;
- расход газа в трубопроводах;
- температура в подогревателе;
- влажность в помещениях.

Датчики используются для измерения значения заданной величины. Выбор датчиков определяется следующими факторами:

- физическая природа регулируемой величины;
- требуемая точность;
- допустимая инерционность;
- видом преобразованной выходной энергии;
- влияние на состояние замеряемой величины;
- надежность и срок службы.

Все виды датчиков можно разделить на две группы в зависимости от вида выходной энергии. Первая группа – механические:

- дифманометр (вход - давление; выход – перемещение мембраны);
- центробежный тахометр (вход - центробежная сила от вращения грузов; выход - перемещение муфты, соединенной с грузами рычажным механизмом);
- поплавок (вход – уровень жидкости; выход – перемещение рычага, соединенного с поплавком).

Вторая группа датчиков – электрические:

- тахогенератор (вход – скорость вращения якоря двигателя; выход – напряжение тахогенератора);
- термопара (вход – температура; выход – напряжение);
- сопротивления, соединенные в мостовую схему (вход – изменение сопротивления в одном плече моста; выход – изменение напряжения на выходе мостовой схемы).

Исполнительные устройства осуществляют непосредственное воздействие на объект управления. Выбор исполнительного устройства определяется следующими факторами:

- видом используемой энергии;
- необходимой мощностью;
- допускаемой инерционностью;
- обеспечение реверса (изменение направления движения);
- надежностью.

Они разделяются на две группы: электрические и неэлектрические. К электрическим исполнительным устройствам относятся:

- *электродвигатели постоянного тока.* Имеют большой момент при пуске и реверсировании; постоянная времени (инерционность) сравнительно небольшая (от 0,04 до 0,1с); мощность до несколько киловатт; широкий диапазон регулирования частоты вращения (1:100);

- *электродвигатели переменного тока*. Чаще всего используются асинхронные двигатели с питанием от однофазной цепи с пусковой обмоткой, включаемой через конденсатор. При мощности до 30Вт, постоянная времени до 0,1с. При необходимости иметь большую выходную мощность применяются трехфазные двигатели.

- *электромагнитная муфта трения,* состоящая из двух параллельных поверхностей, разделенных небольшим зазором, заполненной смесью масла и стального порошка. На ведущем валу помещена катушка, создающая магнитный поток. При включении катушки слой стального порошка образует надежное сцепление ведущей и ведомой частей муфты. Тангенциальное усиление около 0,7 кг/см^2 ; Постоянная времени порядка 0,01 с.

- *электромагнит* (соленоид) с выходной мощностью от 10^{-3} до 10^3 Вт. Постоянная времени до 0,01 с.

К неэлектрическим исполнительным устройствам относятся:

- *гидравлические двигатели с возвратно – поступательным движением* (силовые цилиндры). Принцип действия основан на преобразовании потенциальной энергии давления жидкости в механическую энергию возвратно – поступательного движения поршня. Давление масла в гидроприводе от 0,8 до 1,2 МН/м^2, коэффициент усиления до 10^6 . Постоянная времени до 0,008 с.

- *гидравлические двигатели с поворотным движением поршня* (лопасти). Применяются для управления щитками самолетов или рулем корабля.

- *гидравлические двигатели с вращательным движением выходного вала*. Его скорость вращения в широких пределах регулируется изменением давления масла.

Гидравлические исполнительные устройства обладают высокой надежностью; плавностью регулирования с широким диапазоном изменения скорости; обеспечивают большой момент при малых габаритах; высокий КПД и просты по обслуживанию. Но имеют малый диапазон радиуса действия; повышенную инерционность при длинных трубопроводах; необходимо иметь насосы и резервуары к ним; зависят от окружающей температуры (вплоть до замерзания отдельных элементов); возможно загрязнение объекта регулирования.

Пневматические исполнительные устройства позволяют обеспечить плавное регулирование с большим диапазоном изменения скорости; более просты по конструкции и уходу, имеют высокий КПД и безопасны в пожарном отношении. Но сравнительно легко загрязняются (нужен хороший фильтр); необходимо иметь компрессор и баллоны к нему; зависят от изменения внешней температуры; нечувствительны к небольшим управляющим импульсам (из-за сжимаемости воздуха)

2.1.4 Структурная схема САУ

Структурная схема показывает математическую зависимость между входным и выходным сигналом каждого элемента и их взаимосвязь.

Структурные элементы так же, как и функциональные элементы, изображаются в виде прямоугольников, а воздействие – в виде стрелок. В простых автоматических устройствах внешний вид функциональной и структурной схемы совпадает. В сложных системах САУ некоторые функциональные элементы разбиваются на отдельные звенья, и для каждого находится математическая зависимость.

Структурная схема САУ отражает порядок прохождения информационного сигнала и его изменение в каждом звене. Она выполняется для получения математической модели всей системы и не учитывает конструктивные особенности и принципы работы элементов. Связь между выходным и входным сигналом каждого звена обычно показывается через передаточную функцию W(p).

С помощью структурных преобразований получают общую передаточную функцию (ПФ) всей системы, которая является достаточно полной математической модели процесса регулирования. По этой ПФ можно провести анализ работы САУ, т.е. определить ее статические и динамические характеристики. По этой ПФ можно провести синтез работы САУ, т.е. определить такие ее параметры, которые наилучшим образом соответствуют поставленной задаче.

***Пример 2.2* -** Составить структурную схему САУ по примеру 2.1

РЕШЕНИЕ. Составление структурной схемы САУ начинается с определения передаточной функции каждого звена. Пусть нам известно:

$W_1(p)$ – передаточная функция поступления бензина в зависимости от положения иглы в исполнительном устройстве;

$W_2(p)$ – передаточная функция уровня бензина в поплавковой камере в зависимости от его поступления и расхода;

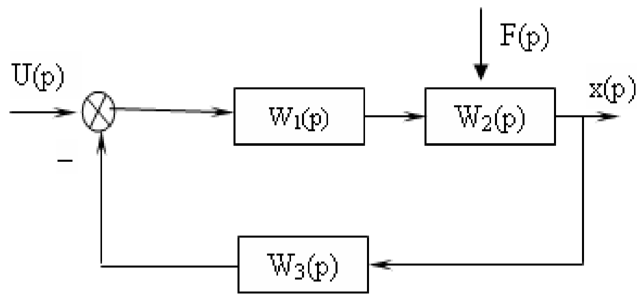


Рисунок 2.5 – Структурная схема САУ к примеру 2.2

$W_3(p)$ – передаточная функция изменения положения поплавка в зависимости от уровня бензина;

$U(p)$ - задающее воздействие;

$x(p)$ – регулируемая величина;

$F(p)$ – возмущающее воздействие. Структурная схема показана на рисунке 2.5.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.1

1 Назначение принципиальной схемы.

2 Как обозначаются элементы принципиальной схемы?

3 Назначение функциональной схемы.

4 Перечислить сигналы функциональной схемы.

5 Перечислить элементы функциональной схемы.

6 Какие различают значения регулируемой величины?

7 Какая связь в функциональной схеме называется прямой и какая называется обратной?

8 Привести примеры объектов регулирования.

9 Привести примеры регулируемых величин.

10 Привести примеры датчиков.

11 Привести примеры исполнительных устройств.

12 Назначение структурной схемы.

13 Как обозначаются элементы структурной схемы

14 Составьте функциональную схему автоматического регулирования подачи зерна по лотку к жерновам ветряной мельницы в зависимости от скорости вращения жерновов.

15 Составьте функциональную схему автоматического получения узоров на ковре с помощью перфокарт.

16 Составьте функциональную схему регулирования уровня воды в котле паровой машины с помощью поплавкового регулятора.

17 Составьте функциональную схему регулирования давления в паровом котле с помощью предохранительного клапана.

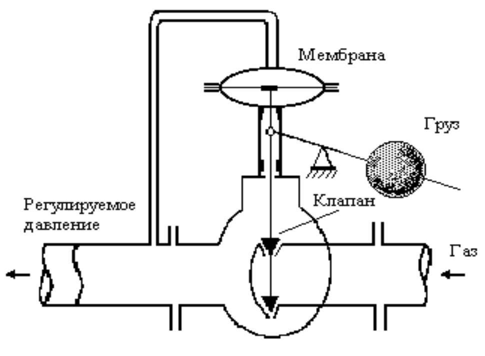


Рисунок 2.6 – Принципиальная схема регулятора давления газа

18 Составьте функциональную схему регулирования давления газа по заданной принципиальной схеме. Принцип работы (рисунок 2.6). При увеличении расхода газа в выходном патрубке уменьшается регулируемое давление. Через соединительную трубку это передается в полость над мембраной, которая под действием груза выгибается вверх. С помощью тяги вместе с мембраной поднимаются клапана, дополнительно открывая проход газа. Увеличивается поток газа, и давление в выходном патрубке восстанавливается.

2.2 Основные принципы управления

В основе построения систем автоматического управления лежат некоторые принципы управления, которые определяют, каким образом осуществляется связь алгоритма функционирования системы с причинами, вызывающими отклонение регулируемой величины от заданной. Алгоритм функционирования составляется на основании технологических, энергетических, экономических и других требований. Он обладает свойствами:

- *определённость* – это общепонятность и конкретность, не оставляющая места для произвольного толкования;

- *массовость* – это возможность решать любую задачу данного класса с различными вариантами исходных данных;

- *результативность* – это возможность после конечного числа актов получить искомый результат;

- *дискретность* – это возможность расчленения алгоритма на отдельные элементарные операции.

В теории автоматического управления считается, что закон изменения регулируемых величин в данном техническом процессе определён. На этом основании необходимо определить *алгоритм автоматического управления* [8].

Алгоритм управления – это способы формирования управляющего воздействия на объект управления.

Рассмотрим *способы формирования алгоритма управления*. В зависимости от алгоритма, то есть от способов получения информации и формирования управляющего воздействия, различают следующие принципы управления:

1) принцип управления по задающему воздействию;

2) принцип управления по возмущению;

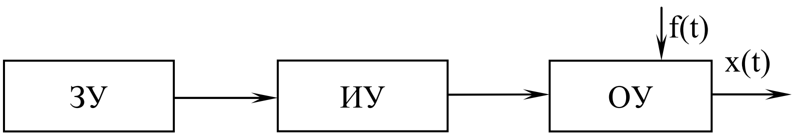
3) принцип управления по отклонению;

4) принцип комбинированного управления.

2.2.1 Принцип управления по задающему воздействию

Алгоритм управления по задающему воздействию вырабатывается по заранее известным сигналам задающего устройства и не корректируется другими связями – по возмущению и по регулируемой величине.

Функциональная схема такого принципа управления показана на рисунке 2.7



ЗУ – задающие устройство;

ИУ – исполнительное устройство;

ОУ – объект управления;

f(t) – возмущающее воздействие;

x(t) – регулируемая величина.

Рисунок 2.7 – Функциональная схема управления по задающему воздействию

Автоматическое управление по этому принципу обеспечивает, например, дозирование для приготовления раствора, автоматическое переключение сигналов в зависимости от времени (стиральная машина), использование храпового механизма при расфасовке сыпучих продуктов.

По такому же принципу работает система управления движением с приводом от кулачка, который вращается непрерывно или периодически. Профиль (рабочая поверхность) кулачка через толкатель обеспечивает заданный алгоритм перемещения рабочего органа. При использовании единого источника движения для нескольких кулачков, их объединяют в распределительный вал. Так осуществляется автоматическое открытие и закрытие клапанов в двигателе автомобиля. Таким образом, кулачок является *задающим устройством* (ЗУ) или программоносителем, клапан – *исполнительным устройством* (ИУ), гнездо клапана – *объектом управления* (ОУ), величина открытия клапана – *регулируе-*

мой величиной (x(t)). Принципы такого управления достаточно просты, и поэтому их изучают на специальных прикладных курсах приборостроения.

2.2.2 Принцип управления по возмущающему воздействию

Алгоритм управления по возмущению вырабатывается с помощью сигналов от возмущающего воздействия и не корректируется с регулируемой величиной.

Функциональная схема такого регулирования показана на рисунке 2.8

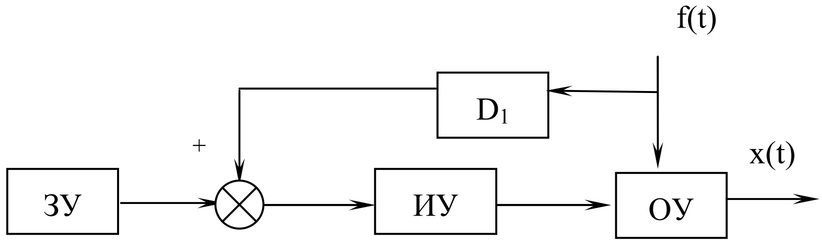


Рисунок 2.8 – Функциональная схема управления по возмущающему воздействию

Величина возмущающего воздействия измеряется с помощью датчика (D_1) и складывается с величиной задающего воздействия (при этом принимается, что сигнал задающего устройства и сигнал с датчика D_1 имеют одинаковую физическую природу). Таким образом, с помощью датчика возмущающего воздействия компенсируется его влияние возмущения на регулируемую величину. По такому принципу работает система автоматической стабилизации концентрации раствора, в котором замеряется изменение поступления основного компонента (возмущение) и пропорционально этому добавляется второй компонент (управление).

В такой системе управления может быть два исполнительных устройства. Одно работает по сигналам задающего устройства (ЗУ), второе работает по сигналу датчика по возмущению (D_1). Причём каждое может работать самостоятельно, вне зависимости друг от друга. В некоторых системах эти сигналы взаимосвязаны и «помогают» друг другу.

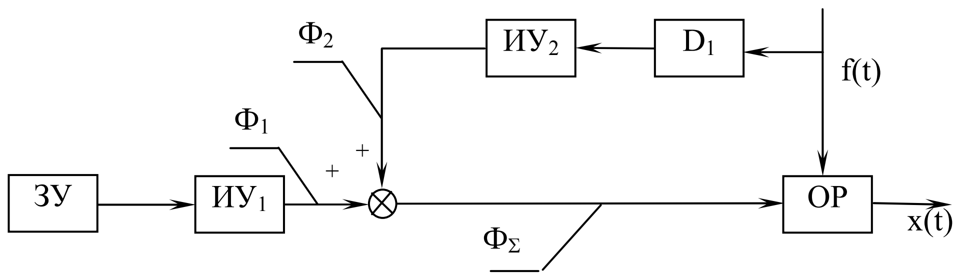


Рисунок 2.9 – Функциональная схема регулирования по возмущению с двумя исполнительными устройствами

По такому принципу работает система автоматической стабилизации напряжения в электромашинном усилителе (ЭМУ), в котором последовательно с нагрузкой подключена компенсационная обмотка (рисунок 2.9). При увеличении нагрузки (возмущающее воздействие) увеличивается сила тока и величина магнитного потока в компенсационной обмотке, который складывается с магнитным потоком основной обмоткой и повышают напряжение на роторе ЭМУ.

На функциональной схеме (рисунок 2.9) обозначено:

$ИУ_1$ – основная обмотка ЭМУ;

$ИУ_2$ – компенсационная обмотка ЭМУ;

$Д_1$ – датчик компенсационная обмотки, который может изменять чувствительность этой обмотки к изменению силы тока (возмущающего воздействия);

$Ф_1$ – магнитный поток основной обмотки ЭМУ;

$Ф_2$ – магнитный поток компенсационной обмотки ЭМУ;

$Ф_3$ – суммарный магнитный поток на ротор ЭМУ.

2.2.3 Принцип управления по отклонению

Алгоритм управления по отклонению вырабатывается по отклонению между заданным значением регулируемой величины и её действительным значением.

Отклонение управляемой величины *x(t)* в объекте управления (ОУ) от требуемого значения может быть вызвано возмущающим воздействием *f(t)* или изменением задающего воздействия *u(t)* (рисунок 2.10).

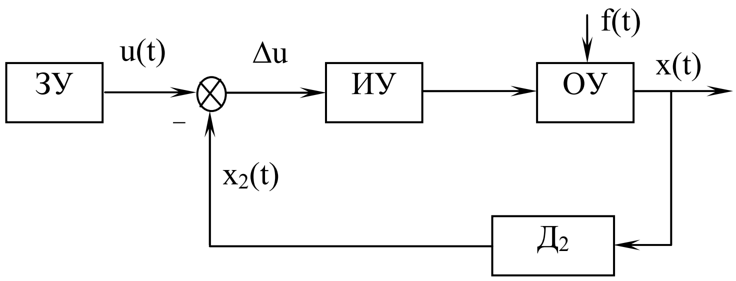


Рисунок 2.10 –Функциональная схема управления по отклонению

Это отклонение *x(t)* измеряется с помощью датчика (D_2) и преобразуется в сигнал $x_2(t)$. На сравнивающем устройстве эти два сигнала сравниваются, и вырабатывается управляющий сигнал $\Delta u = u(t) - x_2(t)$. Таким образом, в системе образуется обратная связь между регулируемой величиной и её заданным значением, которая называется *главной обратной связью*.

Главная обратная связь направлена с выхода системы к её входу и связывает регулируемую величину с заданным её значением.

Кроме главной обратной связи в системе могут быть и другие внутренние или дополнительные обратные связи, например, в усилителе, в исполнительном устройстве. Эти связи, образно говоря, «местного значения», и служат для более эффективной работы отдельных элементов системы. Главная обратная связь является основным источником информации для обеспечения принципа управления по отклонению. Необходимо отметить одну существенную особенность главной обратной связи: *она всегда отрицательная*, то есть её воздействие на объект управления всегда противоположное по сравнению с задающим сигналом. Если этот принцип управления сравнить с принципом управления по возмущению, то там сигнал с датчика возмущающего воздействия D_1 положительный, он *усиливает воздействие на объект* управления, он действует однонаправлено с задающим сигналом. При управлении по отклонению увеличение регулируемой величины *ослабляет воздействие на объект*.

2.2.4 Принцип комбинированного управления

Алгоритм комбинированного управления вырабатывается по отклонению между заданным и действительным значением регулируемой величины и по возмущению.

При комбинированном управлении система автоматического управления имеет два контура управления: по возмущению и по отклонению, которые могут работать самостоятельно, то есть независимо друг от друга. Первый контур управления обеспечивает компенсационную связь с помощью датчика D_1 по основному возмущению (обычно это изменение нагрузки) и устраняет эту ошибку регулирования. Второй контур управления с помощью датчика D_2 обеспечивает контроль за действительным значением регулируемой величины и уменьшает её отклонение от других видов возмущающих воздействий. Этот второй контур позволяет обеспечить устранение всех ошибок регулирования вне зависимости от причины их возникновения.

Функциональная схема такого регулирования показана на рисунке 2.11

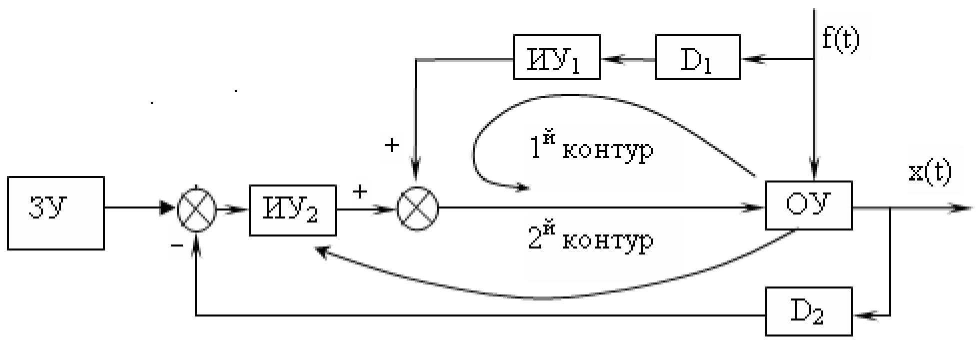


Рисунок 2.11 – Функциональная схема комбинированного управления

2.2.5 Анализ различных принципов управления

Принцип управления по задающему воздействию применяется в тех случаях, когда основной фактор, вызывающий изменение регулируемой величины, является изменением задающего воздействия по определенной программе.

Преимущества:

– простота конструкции автоматического устройства, в котором нет датчиков по возмущающему воздействию и по регулируемой величине;

– высокая надёжность при циклически повторяемых процессах;

– не возникает проблемы устойчивости;

– можно изменить алгоритм работы, не перенастраивая другие звенья регулятора.

Недостатки этого принципа:

– нет контроля за регулируемой величиной;

– нет контроля за возмущающими воздействиями;

– в большинстве таких систем задающее устройство не изменяется;

– нет автоматической корректировки управления.

Принцип управления по возмущению применяется в тех случаях, когда основной фактор, вызывающий изменение регулируемой величины, является изменение нагрузки (чаще всего) или друге виды возмущения. В этих системах возможна полная компенсация влияния данного возмущения.

Преимущества:

– возможно достижение инвариантности регулируемой величины относительно данного возмущения;

– достаточно просто решаются проблемы устойчивости системы;

– управляющее воздействие на объект регулирования может воздействовать раньше (с опережением) относительно реакции управляемой величины на это возмущение.

Недостатки этого принципа:

– нет контроля за регулируемой величиной;

– значительная часть возмущающих воздействий не поддаётся измерению и, соответственно, для них нет компенсационных каналов.

Принцип управления по отклонению применяется в тех случаях, когда значительная часть возмущающих воздействий на систему не поддаётся измерению и, соответственно, отклонение регулируемой величины заранее определить невозможно. Но благодаря жёсткому контролю за регулируемой величиной все её отклонения измеряются датчиком и подаются на регулятор, где сравниваются с заданной величиной, и по полученной разнице происходит регулирование.

Преимущества:

– уменьшение ошибки регулирования не зависит от того, какими возмущающими воздействиями оно вызвано;

– система управления менее чувствительна к изменению параметров регулятора и объекта управления по сравнению с разомкнутым принципом регулирования.

Недостатки этого принципа:

– регулирование происходит с некоторым запаздыванием. Вначале возникает отклонение регулируемой величины от заданного значения, и только потом начинается регулирование;

– в простых одноконтурных системах сложно добиться абсолютной инвариантности к возмущающим воздействиям;

– повышение качества регулирования ограничено проблемой устойчивости системы.

Принцип комбинированного управления применяется в тех случаях, когда объект управления представляет собой достаточно мощную энергетическую систему, где даже небольшое отклонение регулируемой величины вызывает значительные экономические потери. А также в случаях, когда малейшее отклонение в технологическом процессе недопустимо, например, химические реакции. Процесс управления может идти двумя параллельными путями: компенсация возмущающих воздействий (по первому контуру) и окончательное устранение всех отклонений регулируемой величины (по второму контуру).

Таким образом, комбинированные САУ являются наиболее совершенными системами управления, обладают высокой точностью и надёжностью. Недостаток у них один – высокая стоимость.

На рассмотренных принципах управления строятся не только технические системы, а так же системы управления в обществе, в финансовой деятельности, в медицине и т.д. Объекты управления самые разные, а принципы управления едины.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.2

1 Алгоритм управления по задающему воздействию.

2 Примеры принципа управления по задающему воздействию.

3 Преимущество и недостатки принципа управления по задающему воздействию.

4 Алгоритм управления по возмущающему воздействию.

5 Примеры принципа управления по возмущающему воздействию.

6 Преимущество и недостаток принципа управления по возмущающему воздействию.

7 Алгоритм управления по отклонению.

8 Примеры принципа управления по отклонению.

9 Преимущество и недостаток принципа управления по отклонению..

10 Алгоритм комбинированного управления.

11 Где используется принцип комбинированного управления?

12 Преимущество и недостаток принципа комбинированного управления.

13 Самые первые автоматические регуляторы использовались для изменения подачи зерна в ветряных мельницах в зависимости от скорости вращения жерновов мельницы с помощью кулачкового механизма. С увеличением скорости вращения жерновов кулачок чаще встряхивал поток, по которому подавалось зерно, и таким образом увеличивал его подачу под жернова. По какому принципу происходило автоматическое регулирование подачи зерна?

14 В 1808 г. Ж. Жаккар получил авторское свидетельство на изобретение перфокарты для автоматического изменения положения челноков с пряжей для получения узоров на коврах. По какому принципу происходило автоматическое регулирование?

15 В 1681г. Д. Папен изобрел первый регулятор давления для паровых котлов, работающий как предохранительный клапан. По какому принципу происходило автоматическое регулирование?

16 В 1765г. И. Ползунов в Барнауле осуществил регулировку уровня воды в котле паровой машины с помощью поплавкового регулятора. По какому принципу происходило автоматическое регулирование?

2.3 Основные типы автоматических систем

2.3.1 Статические и астатические САУ

Статическая САУ в установившемся режиме работы имеет отклонение регулируемой величины от заданного значения в зависимости от приложенного воздействия на объект регулирования.

Величина этого отклонения характеризуется *относительной статической ошибкой*

$$\delta = \Delta x / x_н,$$

где Δx - отклонение регулируемой величины от заданного значения;

$x_н$ - заданное значение регулируемой величины.

Астатическая САУ в установившемся режиме работы не имеет отклонения регулируемой величины от заданного значения при любом приложенном воздействии на объект регулирования.

Очевидно, что в такой САУ должно быть корректирующее устройство, которое обеспечивает такое регулирование. Это корректирующее устройство называют *интегрирующим звеном.* Оно суммирует (интегрирует) все отклонения регулируемой величины и создаёт управляющий сигнал на объект регулирования. пропорциональный сумме ошибок. Такая корректировка управляющего сигнала продолжается до тех пор, пока не будет полностью ликвидирована ошибка регулирования.

Отличия в работе этих систем:

– в статической САУ в установившемся режиме сохраняется отклонение регулируемой величины и пропорционально этому отклонению регулятор через исполнительное устройство воздействует на объект;

– в астатической САУ в установившемся режиме нет отклонения регулируемой величины, на регулятор не поступает сигнал управления, регулятор отключен. Возникшее отклонение «изменяет выходное значение» интегрирующего звена, которое с помощью исполнительного устройства приближает регулируемую величину к заданному значению, и тем самым полностью ликвидирует отклонение.

2.3.2 Прямое и непрямое регулирование

Регулирование называется прямым, если в автоматической системе не используется вспомогательный источник энергии или энергия датчика достаточна для управления исполнительным устройством.

Такие регуляторы применяются в тех случаях, когда сигнал датчика обладает достаточной мощностью для непосредственного управления регулирующим устройством.

Примерами регуляторов прямого действия являются: регулятор температуры в утюге, когда теплота нагрева утюга достаточна для срабатывания биметаллической пластины для его включения – отключения от сети; регулирование уровня бензина в поплавковой камере карбюратора с помощью поплавка.

Регулирование называется непрямым, если в систему управления подключается вспомогательный источник и энергия датчика усиливается для управления исполнительным устройством.

Примером регуляторов непрямого действия является холодильник, в котором исполнительным устройством является компрессор, работающий от сети переменного тока (сторонний источник энергии), а датчик в виде реле подаёт сигналы включения-отключения компрессора в зависимости от изменения температуры в холодильнике.

2.3.3 Виды сигналов управления

Непрерывный сигнал управления является непрерывной функцией времени; между входными и выходными сигналами всех элементов системы управления существует непрерывная функциональная связь.

Такие регуляторы обычно применяются при прямом регулировании в простых устройствах. Например, регулирование уровня жидкости с помощью поплавка; регулирование давления масла с помощью перепускного клапана; регулирование давления газа с помощью мембранного датчика.

Дискретные сигналы управления характеризуются разрывом непрерывного сигнала; между входными и выходными сигналами элементов системы функциональная связь в некоторых промежутках времени прерывается.

Дискретные сигналы управления в свою очередь разделяются:

- релейные, когда сигнал управления или постоянный по величине, или равен нулю. Фактически он работает в режиме "включено-отключено". Так в автоматическом режиме работает домашний холодильник и утюг. Такие регуляторы - простые по устройству и легко перенастраиваются.

- *позиционные,* когда регулятор имеет два устойчивых положения: одно – «плюс В», второе – «минус В», где В – величина выходного сигнала. Последовательность переключения сигналов регулятора такая, чтобы уменьшить отклонение регулируемой величины.

- *импульсные,* когда сигналы управления модулируется в последовательность импульсов через определённые промежутки времени (такты).Сигнал может быть модулирован по амплитуде или ширине импульса. Есть другие виды модуляции.

2.3.4 Законы регулирования

Закон регулирования - это математическая зависимость между входным и выходным сигналом регулятора.

Входной сигнал равен отклонению регулируемой величины от заданного значения Δx, выходной сигнал - это воздействие регулятора на исполнительное устройство $x_{вых}(t)$. Закон регулирования *непрерывного действия* с линейными законами регулирования имеют вид:

$$x_{вых}(t) = k_p \cdot \Delta x + k_н \int_0^t \Delta x \cdot dt + k_d \frac{d\Delta x}{dt},$$

где $x_{вых}(t)$ – выходной сигнал регулятора;

Δx – входной сигнал;

k_p, $k_н$, $k_д$ – параметры настройки регулятора.

В этом законе регулирования отдельные составляющие называются:

$k_p \cdot \Delta x$ – пропорциональный регулятор, или *П-закон регулирования;*

$k_н \int_0^t \Delta x dt$ – интегральный регулятор, или *И-закон регулирования;*

$k_d \frac{d\Delta x}{dt}$ – дифференциальный регулятор, или *Д-закон регулирования.*

Сумма этих составляющих образует *ПИД-закон регулирования.*

Отдельные составляющие могут отсутствовать, при этом образуется П-, И-, ПИ-, ПД- законы регулирования. Конструкция регулятора позволяет изменить значение коэффициентов k_p, $k_н$, $k_д$, т. е. производить настройку регулятора и получать требуемый характер переходного процесса.

Пропорциональный регулятор $x_{вых}(t) = k_p \Delta x$ имеет настроечный параметр k_p, и с его увеличением статическая ошибка δ уменьшается. Он широко применяется для стабилизации уровня, температуры, давления, если допустимо некоторое отклонение от заданного значения.

Интегральный регулятор $x_{вых}(t) = k_н \int \Delta\, x\, dt$ имеет настроечный параметр $k_н$, характеризующий скорость срабатывания исполнительного устройства, т.к. $dx_{вых}/dt = k_н \Delta\, x$. Регулятор такого типа может находиться в равновесном состоянии только при $\Delta\, x = 0$. Изменение сигнала регулятора продолжается до тех пор, пока полностью не восстановится заданное значение регулируемой величины. Система может стать астатической.

Недостаток И-регулятора в относительно невысокой скорости регулирования. Он имеет неустойчивую динамическую характеристику и применяется на объектах, которые обладают самовыравниванием.

Пропорционально-интегральный регулятор $x_{вых} = k_p \Delta x + k_н \int\limits_0^t \Delta x dt$

имеет два параметра настройки, определяемые коэффициентами k_p и $k_н$. Срабатывание исполнительного устройства будет пропорционально суммарному воздействию от изменения регулируемой величины $\Delta\, x$ и интеграла по времени по $\Delta\, x$. В результате такого регулирования установившееся отклонение регулируемой величины $\Delta\, x$ уменьшается до нуля. Система может стать астатической. ПИ-регуляторы широко используются, когда требуется высокая точность регулирования.

Пропорционально-дифференцирующий регулятор $x_{вых} = k_p \Delta\, x + T_Д \dfrac{d\Delta\, x}{dt}$.

имеет два параметра настройки k_p и $k_н$. Этот регулятор можно представить в виде $x_{вых} = k_p \left(\Delta x + T_П \dfrac{dx}{dt} \right)$, где $T_П$ - постоянная времени предварения.

Регулятор работает следующим образом. В начальный момент времени, после подачи на вход регулятора $\Delta\, x$, его выходная величина под действием дифференцирующей составляющей резко возрастает до своего максимально возможного значения. Затем, по мере приближения регулируемого параметра к постоянному значению, воздействие дифференцирующей составляющей уменьшается и со временем становится равной нулю. В установившемся режиме работы продолжает действовать только постоянная составляющая с коэффициентом k_p, поэтому система имеет статическую ошибку. ПД-регулятор обеспечивает дополнительное воздействие по скорости и уменьшает время переходного процесса, но не влияет на величину статической ошибки. Такие регуляторы используется редко.

Пропорционально-интегрально-дифференцирующий регулятор имеет закон регулирования

$$x_{вых}(t) = k_p\left[\Delta x + \frac{1}{T_и}\int \Delta x dt + T_п\frac{d\Delta x}{dt}\right]$$

Он имеет три параметра настройки: k_p, $T_и$, $T_п$. Такой регулятор называют *изодромным регулятором с предварением.*

Регулятор работает следующим образом. В начальный момент времени дифференцирующее звено форсирует работу регулятора в переходном режиме. Затем интегрирующее звено медленно приближает регулируемую величину к заданному значению, которое может стать равным нулю.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 2.3

1 Что значит статическая система? Как выглядит статическая характеристика такой системы?

2 Что значит астатическая система? Как выглядит астатическая характеристика такой системы?

3 В чем преимущество статической системы регулирования?

4 В чем преимущество астатической системы регулирования?

5 Примеры систем прямого регулирования.

6 Примеры систем непрямого регулирования.

7 Примеры систем с непрерывным сигналом регулирования.

8 Примеры систем с дискретным сигналом регулирования.

9 Как влияет на статическую ошибку П – закон регулирования?

10 Как влияет на статическую ошибку ПИ – закон регулирования?

11 Как влияет на статическую ошибку ПД – закон регулирования?

3 Анализ непрерывных линейных систем

3.1 Статические характеристики системы управления

Раздел теории автоматического управления анализирующий зависимость между параметрами системы в равновесном (установившемся) режиме работы называется статикой системы управления.

Статический режим САУ характеризуется следующими условиями:

- между притоком и расходом регулируемой энергией (веществом) устанавливается баланс равноденствия;

- регулирующий орган, изменяющий приток или расход регулируемой энергией (веществом), неподвижен;

- отклонение регулируемой величины в САУ от заданного значения равно нулю или некоторому постоянному значению.

Исходя, из этих условий можно дать определение статической характеристики системы управления.

Статической характеристикой САУ называется зависимость выходного сигнала от входного в установившемся режиме работы.

Различают линейные и нелинейные статические характеристики. Для линейных статических характеристик зависимость между входной и выходной величиной описывается уравнением статики

$$y_{вых} = k \cdot x_{вх}$$

Если входная и выходная величины имеют одинаковую физическую природу, *то k называют коэффициентом усиления.* При различной физической природе входной и выходной величин *k называют коэффициентом передачи*. Статические характеристики многих механических и электрических элементов в достаточно широком диапазоне изменения параметров можно считать линейными. *Необходимым условием линейности* статической характеристистики звена является условие называемое *принципом суперпозиции*. Пусть к звену приложено воздействие x_1 и x_2. На выходе появилась реакция $y_1 + y_2$. Затем при тех же условиях приложена сумма воздействий $(x_1 + x_2)$ и появилась реакция y_Σ. Необходимым условием линейности является, чтобы реакция $y_1 + y_2$ была равна y_Σ. Кроме этого, в линейной системе, должен также выполнятся фактор масштабирования. Если входное воздействие на звено увеличить в k раз, то и реакция на выходе, тоже должна увеличится в k раз. Это условие называют *принцип гомогенности*.

Статическая характеристика, которая удовлетворяет условию суперпозиции и гомогенности, считается линейной характеристикой.

Для линейной статической характеристики коэффициент k является величиной постоянной при любом значении $x_{вх}$. Если статическая характеристика элемента нелинейная, то коэффициент k является переменной величиной.

3.1.1 Линеаризация нелинейной статической характеристики

В некоторых случаях проводят *линеаризацию* нелинейной статической характеристики, что значительно упрощает расчет САУ.

Линеаризация – это замена нелинейной статической характеристики линейной зависимостью.

Для того, чтобы анализировать нелинейную систему как линейную, необходимо иметь следующие условия:

- характеристика системы имеет непрерывные частные производные в окрестности точки, относительно которой проводится линеаризация;

- отклонение выходной величины Δy при отклонении входного воздействия Δx достаточно малы в окрестности точки, относительно которой проводится линеаризация;

- погрешность линеаризации (отклонение действительной характеристики от прямолинейной) находится в допустимых для расчета пределах.

И главное условие – при линеаризации не должны нарушаться *качественные особенности системы*. Например, система с нелинейным звеном в зависимости от вида воздействия может быть устойчивой или неустойчивой; в системе с нелинейным звеном могут возникнуть автоколебания. Эти и другие особенности системы при теоретическом расчете не определяются, если в системе есть звено с *существенно нелинейной статической характеристикой,* и оно линеаризовано прямолинейной зависимостью. Для таких звеньев используется другой метод линеаризации, который называется метод гармонической линеаризации.

В системах с *несущественно нелинейной статической характеристикой* нелинейного звена после его линеаризации прямолинейной зависимостью качественные особенности в работе системы сохраняются. Но что при этом изменится? Изменится точность расчета (количественные показатели системы). Если полученная точность расчета удовлетворяет поставленной задаче исследования, то такую линеаризацию проводить можно.

При линеаризации несущественно нелинейной статической характеристики используется два метода: метод малых отклонений и метод осреднения (рисунок 3.1).

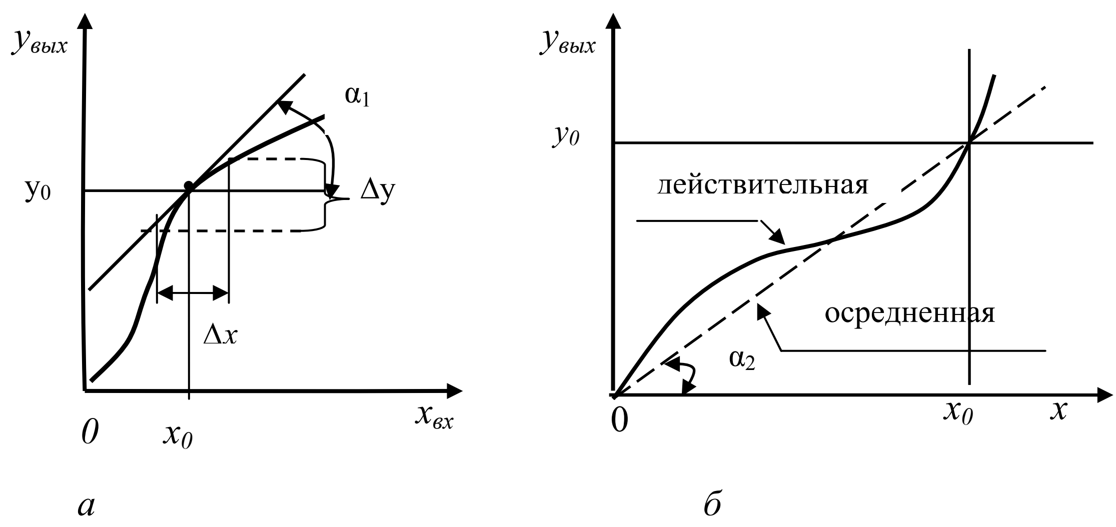


Рисунок 3.1 – Статические характеристики нелинейных элементов САУ

При ***методе малых отклонений*** полученная нелинейная характеристика $y = \psi(x)$ разлагается в ряд Тейлора относительно заданного входного воздействия x_0.

$$\psi(x) = \psi(x_0) + \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0} \frac{\Delta x}{1!} + \left(\frac{\partial^2 \psi(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0} \frac{\Delta x}{2!} + \ldots$$

При достаточно малых отклонениях $\Delta x_{вх}$ можно пренебречь членами ряда, содержащими производные высших порядков. Вычтем из обеих частей уравнения значение заданного режима $\Psi(x_0)$.

$$\Psi(x) - \Psi(x_0) = \Delta\Psi(x) = \left(\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0} \cdot \Delta x$$

Производная $\left(\frac{\partial \Psi(x)}{\partial x}\right)_{x=x_0}$ определяется тангенсом угла наклона касательной к кривой в данной точке, соответствующей $y_0 = \psi(x_0)$. Если рассматривать изменение входного воздействия в пределах Δx, тогда отклонение выходного сигнала будет в пределах Δy (рисунок 3.1 а). В этих пределах считается, что данная система линеаризована с постоянным коэффициентом передачи $k_1 = tg\alpha_1$.

Полученная линеаризованная характеристика нелинейного элемента описывает не заданную зависимость $y = \psi(x)$, а отклонение Δy от Δx. Поэтому полученная линеаризованная характеристика называется *уравнением в малых отклонениях* (или в вариациях).

Метод осреднения используется когда изменение входного воздействия исследуется на всём диапазоне от $x_{вх} = 0$ до $x_{вх} = x_0$. Для этого проводят прямую из начала координат в точку, соответствующую $y = \psi(x_0)$ с коэффициентом передачи $k_2 = tg\alpha_2$. Отклонение между действительным значением нелинейной характеристики и линеаризованным её значением (на рисунке 3.1 б показана в виде прямой пунктирной линии) называется *погрешность линеариза-*

ции. Очевидно, что чем меньше рассматриваемый диапазон изменения входного воздействия, тем меньше будет погрешность линеаризации.

3.1.2 Статическая ошибка регулирования

Для каждого технологического процесса необходимо соблюдение допустимого значения степени неравномерности регулируемой величины или допустимые пределы статической ошибки в установившимся режиме работы.

Статическая ошибка регулирования определяется отклонением регулируемой величины от заданного значения при установившемся режиме работы в зависимости от возмущающих воздействий и управляющего сигнала.

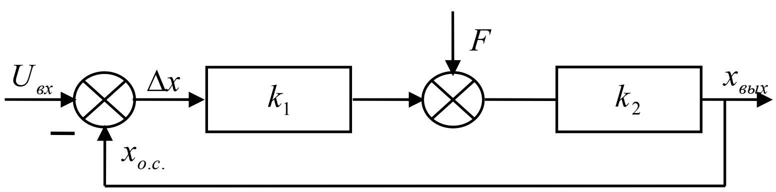


Рисунок 3.2 – Структурная схема системы регулирования

Пусть структурная схема системы регулирования имеет вид, показанный на рисунке 3.2. На систему действует возмущающее воздействие *F*. Общий коэффициент передачи $k_{общ}$ от места приложения F до выходной величины $x_{вых}$ равен

$$k_{общ} = \frac{k_2}{1 + k_1 \cdot k_2}.$$

Ошибка регулирования от возмущающего воздействия $\Delta x_{воз}$

$$\Delta x_{воз} = k_{общ} \cdot F \frac{k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot F,$$

где k_2 - коэффициент передачи участка системы от места приложения возмущения F до выходной величины $x_{вых}$.

Следовательно, коэффициент k_2 определяет статическую ошибку при разомкнутом контуре системы (при отсутствии регулирования с помощью отрицательной обратной связи). Коэффициент $k_{общ}$ определяет статическую ошибку в системе с обратной связью.

Определим статическую ошибку по управлению $\Delta\, x_{упр}$ (рисунок 3.2)

$$\Delta x = x_{вх} - x_{ос} = x_{вх} - \frac{k_1 \cdot k_2 \cdot x_{вх}}{1 + k_1 \cdot k_2} = \frac{\left(1 + k_1 \cdot k_2 - k_1 \cdot k_2\right)}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot x_{вх} = \frac{1}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot x_{вх} = \delta \cdot x_{вх},$$

где $\delta = \dfrac{1}{1 + k_1 \cdot k_2}$ - называется *коэффициент статизма.*

Статическая ошибка по управлению пропорциональна коэффициенту статизма и управляющему сигналу.

Определим статическую ошибку по возмущению через коэффициент статизма

$$\Delta x = \frac{k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot F = \delta \cdot k_2 \cdot F .$$

Статическая ошибка по возмущению пропорциональна коэффициенту статизма, коэффициенту передачи по возмущению и величине этого возмущения.

Суммарная ошибка регулирования Δx_{Σ} при заданном сигнале управления $x_{вх}$ и при возмущении F будет равна

$$\Delta x_{\Sigma} = \frac{1}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot x_{вх} + \frac{k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot F = \delta \cdot \left(x_{вх} + k_2 \cdot F\right).$$

Таким образом, чем меньше коэффициент статизма δ, тем будет меньше суммарная статическая ошибка регулирования. Если возмущающее воздействие (например, в виде шума) приложено на вход системы, тогда суммарная ошибка регулирования определяется

$$\Delta x_{\Sigma} = \frac{1}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot x_{вх} + \frac{k_1 \cdot k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \cdot F .$$

Возмущающее воздействие, приложенное на вход системы, практически полностью переходит в ошибку регулирования.

Примечание - Произведение коэффициентов $k_1 \cdot k_2 = k_y$ - это общий коэффициент усиления системы. Чем больше коэффициент усиления системы, тем меньше коэффициент статизма и, соответственно, меньше статическая ошибка.

Пример 3.1 – Определить общий коэффициент усиления k_y в системе, если необходимо обеспечить коэффициент статизма по управлению $\delta = 0{,}02$

РЕШЕНИЕ

1 Определим общий коэффициент усиления k_y через коэффициент статизма $\delta = \dfrac{1}{1+k_y}$; $\delta \cdot \left(1+k_y\right) = 1;$ $k_y = \dfrac{1}{\delta} - 1.$

2 Подставляем значение $\delta = 0{,}02$

$$k_y = \frac{1}{0{,}02} - 1 = 50 - 1 = 49.$$

ОТВЕТ. Для $\delta = 0{,}02$ коэффициент усиления $k_y = 49$.

3.2 Динамические характеристики САУ

3.2.1 Общие требования к динамике системы

Разработанная система автоматического управления (САУ) должна обладать определёнными динамическими характеристиками [10,11].

1 *Быть устойчивой* или предсказуемым образом реагировать на любые воздействия и начальные условия.

2 *Иметь минимальную статическую ошибку*. Для некоторых систем эта ошибка должна быть равна нулю.

3 *Обладать грубостью* или нечувствительностью к изменению внутренних и внешних возмущающих воздействий. Понятие грубость САУ более широкое, чем только подавление внешних возмущений. Параметры системы с течением времени могут изменяться, например, при износе деталей или при изменении режима работы. Желательно, чтобы система управления была нечувствительна к таким изменениям параметров и к разным режимам своей работы.

4 *Обеспечить минимальную динамическую ошибку* при переходе с одного режима работы на другой режим под действием управляющего или возмущающего воздействия.

Все эти проблемы решаются с помощью анализа и синтеза динамических характеристик системы. Так, устойчивость системы определяется по тому, как регулируемая величина будет изменяться после вывода системы из состояния равновесия. Если она самостоятельно возвращается в исходное состояние – она устойчива. Если её движение продолжается и становится неконтролируемым – она неустойчивая.

Таким образом, расчёт устойчивой работы системы, обеспечение заданной точности регулирования, уменьшение влияния различного рода помех – все это решается с помощью динамических характеристик отдельных звеньев и всей системы.

3.2.2 Виды стандартных воздействий

Прежде чем перейти к изложению применяемых в настоящее время методов исследования систем автоматического управления, необходимо остановиться на видах возмущающих воздействий. Характер возмущающих воздействий зависит от управляемого технологического процесса и может быть весьма разнообразен. При исследовании САУ принято рассматривать наиболее характерные воздействия и, соответственно, реакции системы на эти воздействия.

Стандартным воздействием считается сигнал, имеющий определённый вид и единичный размер.

Для анализа динамических характеристик САУ чаще всего используется два вида стандартных воздействий: единичное ступенчатое воздействие и единичное импульсное воздействие.

Для анализа САУ частотным методом используется гармоническая функция, изменяющаяся по закону синуса или косинуса. Для анализа следящих систем используется линейная функция времени $x(t) = kt$. В некоторых случаях используются сигналы вида : $x(t) = kt^2$ – квадратичная функция времени; $x(t) = kt^3$ – кубическая функция времени.

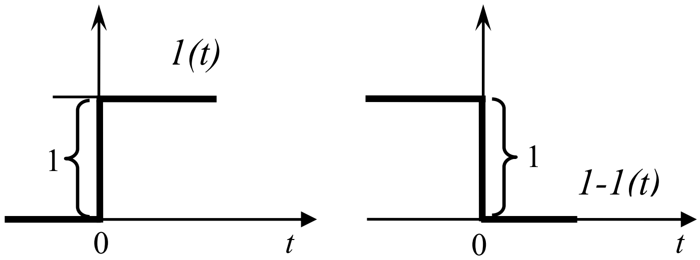


Рисунок 3.3 – Единичная ступенчатая функция

3.2.2.1 Единичная ступенчатая функция

Ступенчатое воздействие описывает мгновенный сброс или включение нагрузки, а также мгновенное изменение сигнала управления. Единичную ступенчатую функцию принято обозначать $1(t)$ (рисунок 3.3). Эта функция записывается

$$\text{при включ.} \quad 1(t) = \begin{cases} 0 \ при \ t < 0 \\ 1 \ при \ t \geq 0 \end{cases};$$

$$\text{при отключ.} \quad 1(t) = \begin{cases} 1 \ при < 0 \\ 0 \ при \geq 0. \end{cases}$$

Динамическая характеристика системы не зависит от того, какая единичная ступенчатая функция подается на вход (при включении или при отключении). Поэтому обычно систему анализируют при подаче единичной функции при включении. Математически единичную ступенчатую функцию определяют так:

Единичная ступенчатая функция при $t < 0$ ***равна нулю, а при*** $t \geq 0$ ***она равна единице.***

Физически она характеризуется воздействием:

Единичная ступенчатая функция – это воздействие, которое мгновенно возрастает от нуля до единицы.

При воздействии на систему единичной ступенчатой функции на выходе системы возникает переходная функция, которая обозначается $h(t)$.

Переходная функция – это реакция системы на единичную ступенчатую функцию при нулевых начальных условиях.

По переходной функции можно построить график временной характеристики, то есть график изменения во времени регулируемой величины при подаче на вход системы единичной ступенчатой функции.

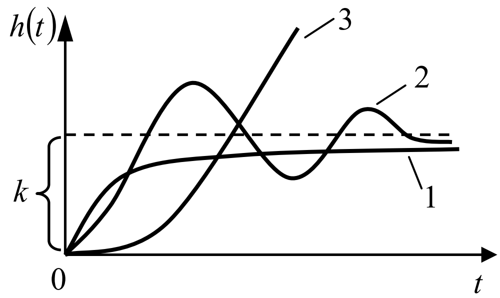


Рисунок 3.4 – Графики переходных функций

Таким образом, если на вход системы подана функция $u(t) = 1(t)$, то на выходе системы будет функция $x(t) = h(t)$.

Графики переходных функции показаны на рисунке 3.4. В зависимости от динамических свойств системы переходная характеристика может плавно переходить в новое установившееся значение *h (∞) = k* (кривая 1), или с колебаниями (2), или не иметь установившегося значения (3).

3.2.2.2 Единичная импульсная функция

Импульсная функция описывает кратковременную перегрузку системы при времени $\tau \to 0$. Единичный импульс – это математическая идеализация предельно короткого импульсного сигнала. Принято считать, что площадь его равна единице при длительности τ, стремящейся к нулю, а высота h равна бесконечности.

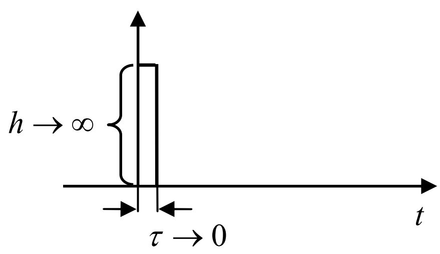


Рисунок 3.5 – Единичная импульсная функция

Выражение для единичного импульса называется единичной импульсной функцией или дельта-функцией и обозначается $\delta(t)$ (рисунок 3.5). Эта функция записывается

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty \textit{ при } t = 0 \\ 0 \textit{ при } t \neq 0. \end{cases}$$

Дельта-функция связана с единичной ступенчатой функцией $\delta(t) = 1'(t)$,

соответственно $1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot dt$..

Математически единичную импульсную функцию определяют так

Единичная импульсная функция при** $t = 0$ **равна бесконечности, а при** $t < 0$ **и при** $t > 0$ **равна нулю.

Физически она характеризуется воздействием

Единичная импульсная функция – это воздействие, которое мгновенно возрастает до бесконечности, а продолжительность его стремится к нулю.

Аналитическое выражение для импульсной переходной характеристики называется весовой функцией и обозначается $\omega(t)$. Этой функции можно дать такое определение:

Весовая функция – это реакция системы на единичную импульсную функцию при нулевых начальных условиях.

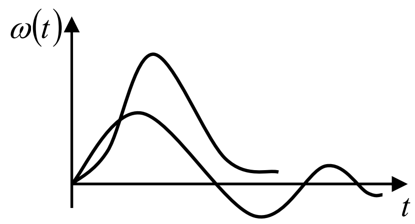


Рисунок 3.6 – Графики весовой функции

Графики весовой функции показаны на рисунке 3.6. В зависимости от динамических свойств системы весовая функция может плавно возвращаться в исходное (нулевое) состояние или иметь колебательный процесс (для устойчивых систем).

Учитывая связь между дельта-функцией и единичной ступенчатой функцией можно установить, что такая же связь между переходной и весовой функцией:

$$\omega(t) = h'(t) \quad \text{или} \quad h(t) = \int_0^t \omega(t) \cdot dt\,.$$

Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.2

1 Что называется единичной ступенчатой функцией?

2 Что называется переходной функцией?

3 Что называется единичной импульсной функцией?

4 Что называется весовой функцией?

3.3 Способы математического описания характеристик САУ

3.3.1 Этапы расчёта систем управления

Расчет системы автоматического управления проводится в несколько этапов.

На первом этапе ограничиваются *качественным описанием системы* и рассматривают её функциональную схему, то есть определяют элементы системы с точки зрения выполнения ими определенных функций: объект управления, датчик, задающее устройство, исполнительное устройство и т.д.

Конечная цель: на основании имеющихся сведений о требуемом законе регулирования заданного технологического процесса собрать всю совокупность сведений о его работе и определить алгоритм управления. При этом не определены *количественные параметры системы*. Такое описание системы называется неформальным описанием системы управления.

На втором этапе анализируют зависимость между параметрами системы в равновесном энергетическом состоянии. Определяются статические характеристики элементов системы. При этом рассчитывается статическая точность регулирования, т.е. точность поддерживания заданного значения регулируемой величины в равновесном состоянии. Это является одним из основных показателей качества работы системы. На основе этих расчетов определяется общая конструктивная схема регулятора. Это уже *качественное описание системы*, в котором используются конкретные параметры элементов САУ и определяется их энергетическое соответствие между собой.

На третьем этапе анализируются динамические характеристики элементов и в конечном итоге динамика изменения регулируемой величины. В связи с этим центральным понятием теории автоматического регулирования является математическая модель системы, характеризующая изменение регулируемой величины во времени.

Математическая модель САУ – это количественная формализация абстрактных представлений об изучаемой системе с помощью

математических средств: дифференциальных, интегральных, алгебраических уравнений и другого математического аппарата.

При анализе работы различных систем выясняется, что элементы с разным принципом действия, конструкцией и с различной природой физических процессов могут описываться одинаковым дифференциальным уравнением, так как они являются сходными по динамическим свойствам. Например, динамические процессы в электрической цепи, в механической системе, тепловые процессы могут описываться аналогичным дифференциальным уравнением. Отсюда следует *первое преимущество* математической модели по сравнению с другими видами моделей – это универсальность языка математики, что позволяет по одним и тем же моделям исследовать различные по физической природе системы. *Второе преимущество* в том, что современные математические методы позволяют достаточно точно проводит анализ системы. *Третье преимущество* в том, что полученные результаты относятся не к одной отдельной системе управления, а сразу для целого множества подобных систем.

На четвертом этапе проводят синтез системы по полученной математической модели, то есть определяют ее оптимальные параметры согласно заданным критериям. При этом необходимо учитывать:

- любая модель составляется, если что-либо неизвестно в системе. Значит математическая модель – это способ поиска лучшего варианта работы исследуемой системы;

- любая модель по своей природе противоречива. С одной стороны, необходимо точнее смоделировать все процессы в системе; с другой стороны, желательно иметь простую удобную модель для исследования. Поэтому лучше начинать исследование системы с упрощенной моделью, а затем по мере получения новых данных постепенно её усложнять и конкретизировать;

- любая математическая модель имеет ряд допущений. Она не полностью соответствует оригиналу по форме и по содержанию. Но между изучаемыми зависимостями должно быть максимальное соответствие.

Основой математической модели САУ является понятие *системный оператор*.

Задать оператор системы – это значит задать правило определения выходного сигнала системы по её входному сигналу.

Пусть U и X множество вариантов для входных и выходных сигналов САУ. Если каждому варианту $u \in U$ ставиться в соответствии определенный вариант $x \in X$, то считается, что задан системный оператор A.

$$Ax(t) = u(t) \quad \text{или} \quad x(t) = A^{-1}u(t).$$

Оператор устанавливает *количественную связь* между входом $u(t)$ и выходом $x(t)$ системы. Для одномерных систем переменные $u(t)$ и $x(t)$ являются скалярными величинами. Для многомерных систем $\boldsymbol{u}(t)$ и $\boldsymbol{x}(t)$ являются векторными величинами, а оператор A в виде матрицы [9].

Процесс выбора оператора завершатся предварительным контролем:

- *контроль характера зависимости* – это проверка направления и скорости изменения одной величины при изменении другой величины. Такое изменение должно соответствовать физическому смыслу поставленной задачи;

- *контроль размерности* – это проверка соотношения физических величин в модели. Например, складывать (вычитать) можно только величины одинаковой физической природы;

- *контроль замкнутости* – это проверка, что модель имеет конечное решение;

- *контроль реальности* – это проверка, что изменение параметров системы соответствует реальной работе объекта управления.

Оператор считается *стационарным*, если его характеристика не зависит (инвариантна) от времени. Другими словами, если входное воздействие на систему имеет сдвиг во времени без изменения своей формы, то реакция системы претерпевает такой же сдвиг во времени без изменения своего вида.

Если система изменяет свои свойства во времени, тогда оператор считается *нестационарным*. В простейшем случае нестационарность сводится к изменению коэффициентов дифференциального уравнения в зависимости от времени.

Оператор считается *детерминированным*, если состояние системы в любой момент времени однозначно определяется по известному начальному состоянию. Однако на практике встречаются системы со случайным (стохастическим) характером изменении своих параметров и изменение состояния системы может быть предсказано только с определенной вероятностью. Такие операторы называются *стохастичными*.

3.3.2 Преобразование Лапласа

При расчете линейных систем автоматического регулирования широко используется математический метод – *преобразование Лапласа* [10,12,15].

Преобразование Лапласа ставит функцию $f(t)$ вещественной переменной t в соответствие функции $F(p)$ комплексной переменной p.

Это преобразование называется *прямым* и выполняется по формуле

$$F(p)=\int_0^{\infty} f(t)\cdot e^{-pt}\cdot dt,$$

где $f(t)$ - исходная функция вещественной переменной подлежащей преобразованию по Лапласу. Эта функция называется *оригиналом*;

p - комплексная переменная преобразования. Её называют *множитель Лапласа*;

$F(p)$ - функция комплексного переменного p. Эта функция называется *изображением*.

Основное преимущество при решении задач по теории управления с помощью преобразования по Лапласу:

Интегральные и дифференциальные уравнения с помощью преобразования Лапласа превращаются в алгебраические уравнения со всеми законами алгебры.

Покажем преобразование по Лапласу $f(t) = A$

$$F(p) = \int_0^\infty A \cdot \ell^{-pt} \cdot dt = -\frac{A}{p} \cdot \ell^{-pt} \Big|_0^\infty = -\frac{A}{p} \cdot \ell^{-p\infty} - (-\frac{A}{p} \cdot \ell^{-p0}) = 0 + \frac{A}{p}.$$

Изображение по Лапласу $f(t) = A\ell^{-at}$

$$F(p) = \int_0^\infty A \cdot \ell^{-\alpha t} \cdot \ell^{-pt} \cdot dt = A\int_0^\infty \ell^{-(\alpha+p)\cdot t} dt = \frac{A\ell^{-(\alpha+p)t}}{-(\alpha+p)}\Bigg|_0^\infty = \frac{1}{\alpha+p}.$$

Для интегрирования функции преобразованной по Лапласу F(p) её надо разделить на множитель Лапласа в степени количества интегралов.

$$\underbrace{\int_0^t\int_0^t \dots \int_0^t}_{n} f(t) \cdot dt \xrightarrow{L} \frac{F(p)}{p^n}.$$

Для дифференцирования функции преобразованной по Лапласу F(p) её надо умножить на множитель Лапласа в степени порядка производной

$$\frac{d^n f(t)}{dt^n} \xrightarrow{L} p^n F(p).$$

Обратите внимание. Вместо интегрального и дифференциального выражения после преобразования по Лапласу получено алгебраическое уравнение со всеми законами алгебры.

Если одновременно необходимо провести интегрирование и дифференцирование, то множитель Лапласа рассматривается как алгебраический коэффициент и его можно сократить

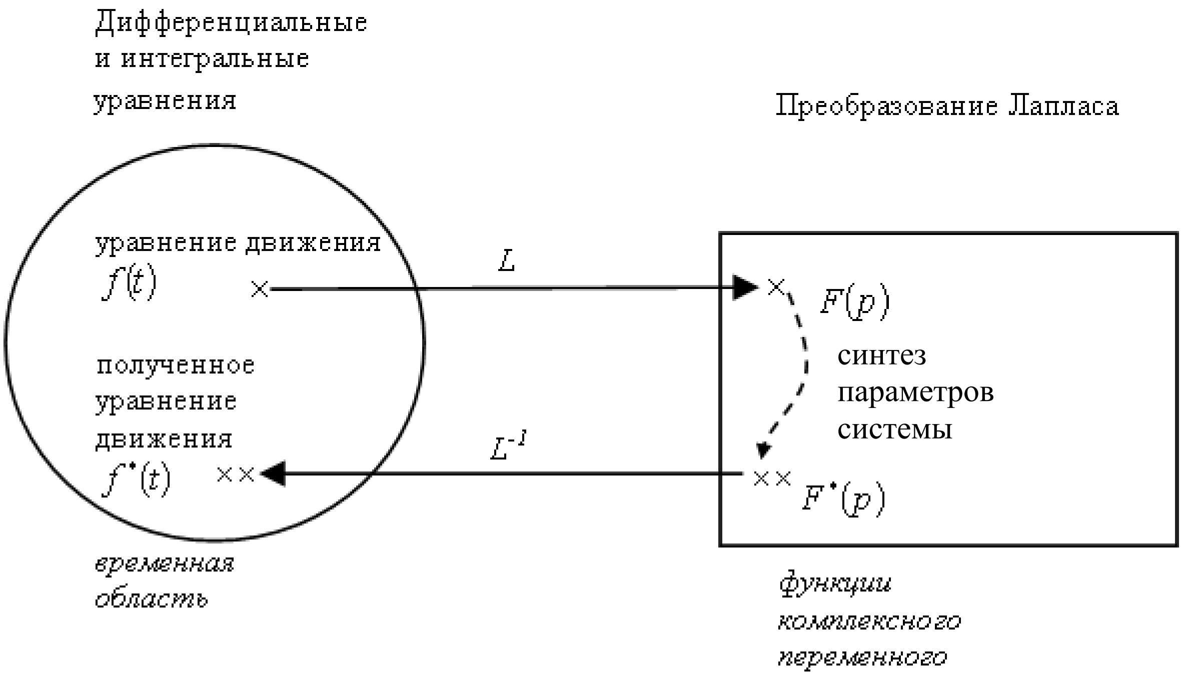
$$\int_0^t \frac{d^3 f(t)}{dt^3} \xrightarrow{L} \frac{p^3 F(p)}{p} = p^2 F(p).$$

Таким образом, вся информация о движении системы во временной области в виде интегральных и дифференциальных уравнений $f(t)$ переводится в функции комплексного переменного $F(p)$ и по ней рассчитываются заданные параметры системы. Полученный результат «возвращается» снова во временную область с помощью *обратного преобразования Лапласа*.

$$f(t)=\frac{1}{2\cdot\pi\cdot j}\cdot\lim_{R\to\infty}\int_{\sigma_1-i\cdot R}^{\sigma_1+i\cdot R}F(p)\cdot e^{pt}\cdot dt,\quad \text{где } R \text{ - радиус сходимости.}$$

Схема определения параметров САУ с использованием преобразования Лапласа показана на рисунке 3.7.

Условие существования обратного преобразования Лапласа аналогично условию существования прямого преобразования Лапласа.



$f(t)$ - уравнения движения системы;

L - прямое преобразование Лапласа;

$F(p)$ - уравнение движения, преобразованное по Лапласу;

$F^*(p)$ - получение заданного уравнения движения;

L^{-1} - обратное преобразование Лапласа;

$f^*(t)$ - полученное уравнение движения во временной области.

Рисунок 3.7 – Схема определения заданного уравнения движения системы с использованием преобразования Лапласа

В заключении еще одно важное свойство преобразования Лапласа.

Прямое и обратное преобразования Лапласа (при решении задач по теории управления автоматических систем) *однозначно*.

3.3.3 Получение изображения Лапласа по заданному оригиналу

Определение математической модели системы начинают с определения зависимости «вход – выход» её отдельных звеньев во временной форме в виде дифференциальных уравнений, которые преобразуют по Лапласу и получают зависимости в виде алгебраических уравнений. Затем с помощью преобразований структурной схемы находится математическая модель всей системы в виде общей передаточной функции. Таким образом, преобразование по Лапласу делается по отдельным звеньям, и затем всё это объединяется в единую математическую модель. Рассмотрим звено с дифференциальным уравнением второго порядка с нулевым начальными условиями (рисунок 3.8).

$$2 \cdot \frac{d^2x(t)}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + x(t) = 5 \cdot U(t) \qquad \frac{5}{2 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1} = W(p)$$

а - во временной области *б* - в области преобразования по Лапласу

Рисунок 3.8 – Звено системы регулирования

Проведем преобразование по Лапласу этого дифференциального уравнения

$$2 \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \cdot \frac{dx}{dt} + x = 5 \cdot U(t) \xrightarrow{L} 2 \cdot p^2 \cdot x(p) + 3 \cdot p \cdot x(p) + x(p) = 5 \cdot U(p)$$

$$\text{или} \quad \left(2 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1\right) \cdot x(p) = 5 \cdot U(p).$$

Согласно правилам алгебраических преобразований общий коэффициент $x(p)$ вынесен за скобки. В области преобразования по Лапласу $U(p)$ - входная величина, а $x(p)$ - выходная величина. Определим отношение выходной величины $x(p)$ к входной величине $U(p)$

$$\frac{x(p)}{U(p)} = \frac{5}{2 \cdot p^2 + 3 \cdot p + 1} = W(p).$$

Это отношение $W(p)$ называется *передаточной функцией звена* (или системы).

Передаточной функцией называется отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины при нулевых начальных условиях.

Нулевые начальные условия – это равенство нулю всех производных регулируемой величины $((\dot{x}(t), \ddot{x}(t), \ldots, \overset{n}{x}(t))$ *при* $t = 0$.

Если при проведении преобразований по Лапласу какая-либо производная при $t = 0$ не равна нулю, то отношение изображения по Лапласу выходной величины к изображению по Лапласу входной величины не является передаточной функцией.

В общем случае передаточную функцию записывают в виде:

$$W(p) = \frac{B(p)}{A(p)},$$

где $B(p)$ - полином, характеризующий воздействие на систему;

$A(p)$ - полином, характеризующий реакцию системы на поданное воздействие.

Следует особо подчеркнуть, что передаточная функция является основной математической моделью линейной системы автоматического регулирования, которая достаточно адекватно характеризует динамику изменения выходной величины. По передаточной функции можно определить устойчивость системы по критерию Рауса или Гурвица, можно получить график переходного процесса, можно определить статическую ошибку регулирования и динамические характеристики процесса регулирования.

Кроме этого, по передаточной функции достаточно просто получить другие виды математических моделей системы. Например, амплитудно-фазовую характеристику разомкнутой системы и по ней определить запас устойчивости по амплитуде и по фазе замкнутой системы. После расчёта системы по передаточной функции достаточно просто можно получить уравнение системы во временной области путём преобразования Лапласа.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.3

1 Этапы расчёта САУ.

2 Что необходимо учитывать при синтезе САУ по математической модели?

3 Что значит задать оператор системы?

4 Как проводится предварительный контроль оператора?

5 Что называется преобразованием Лапласа?

6 Основное преимущество при решении задач по теории управления с помощью преобразования Лапласа?

7 Как проводится прямое преобразование Лапласа и обратное преобразование Лапласа?

8 Что называется оригиналом и что называется изображением при проведении преобразования по Лапласу

9 Как проводится дифференцирование функции преобразованной по Лапласу?

10 Как проводится интегрирование функции преобразованной по Лапласу?

11 Что называется передаточной функцией?

12 Что значит нулевые начальные условия?

13 Что характеризует полином в числителе передаточной функции?

14 Что характеризует полином в знаменателе передаточной функции?

3.3.4 Преобразование Фурье

Метод частотных характеристик автоматических систем возник на базе теоретических исследований периодических функций в области электротехники. По амплитуде и фазе на выходе системы можно судить о динамических свойствах отдельных звеньев и всей системы регулирования. На возможность такого анализа применительно к исследованию динамических свойств усилителей с обратной связью в 1932 г. указал американский физик Х. Найквист, а вопросы применения частотных методов анализа САУ разработал советский ученый А. В. Михайлов в 1938 г.

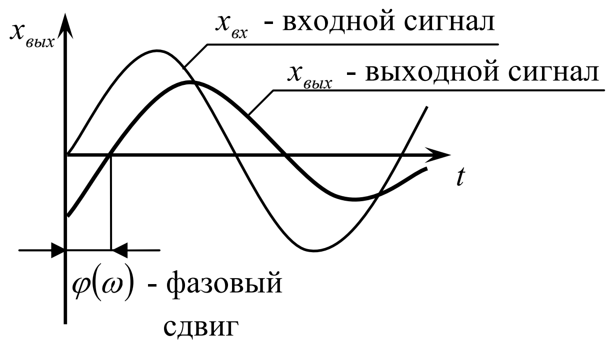


Рисунок 3.9 – Гармонический сигнал на входе и выходе линейной системы

Рассмотрим основные понятия, связанные с частотными характеристиками автоматических систем. Если на вход разомкнутой линейной системы подать гармонический сигнал, то по истечению некоторого времени после подачи этого сигнала, когда закончится переходной процесс, на выходе системы установится также гармонический сигнал с такой же частотой, но с другой амплитудой и фазой (рисунок 3.9).

Амплитуда и фаза на выходе системы при прочих равных условиях зависит от частоты входного сигнала. Пусть на вход разомкнутой системы подается единичный гармонический сигнал в виде $x_{вх}(j\omega) = 1 \cdot e^{j\omega t}$. После затухания переходного процесса устанавливается вынужденные периодические колебания

$$x_{вых}(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j \cdot (\omega t + \varphi)}$$

В общем случае разомкнутая система САУ характеризуется передаточной функцией

$$W(p) = \frac{b_0 \cdot p^m + b_1 \cdot p^{m-1} + b_2 \cdot p^{m-2} + \ldots + b_m}{a_0 \cdot p^n + a_1 \cdot p^{n-1} + a_2 \cdot p^{n-2} + \ldots + a_n}.$$

Учитывая, что $p\left(e^{j\omega t}\right) \xrightarrow{L^{-1}} \frac{d}{dt}\left(e^{j\omega t}\right) = j\omega \cdot e^{j\omega t}$;

$$p^2\left(e^{j\omega t}\right)\xrightarrow{L^{-1}}\frac{d^2}{dt^2}\left(e^{j\omega t}\right)=\left(j\omega\right)^2\cdot e^{j\omega t};$$

$$p^3\left(e^{j\omega t}\right)\xrightarrow{L^{-1}}\frac{d^2}{dt}\left(e^{j\omega t}\right)=\left(j\omega\right)^3\cdot e^{j\omega t};$$

. . . .

$$p^n\left(e^{j\omega t}\right)\xrightarrow{L^{-1}}\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{j\omega t}\right)=\left(j\omega\right)^n\cdot e^{j\omega t}.$$

Тогда передаточная функция разомкнутой системы принимает вид

$$W\left(j\omega\right)=\frac{x_{вых}\left(j\omega\right)}{x_{вх}\left(j\omega\right)}=\frac{A(\omega)\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}}{1\cdot e^{j\omega t}}=\frac{\left(b_0\cdot\left(j\omega\right)^m+b_1\cdot\left(j\omega\right)^{m-1}+\ldots+b_m\right)\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}}{\left(a_0\cdot\left(j\omega\right)^n+a_1\cdot\left(j\omega\right)^{n-1}+\ldots+a_n\right)\cdot e^{j\omega t}}$$

сократим всё на $e^{j\omega t}$

$$W\left(j\omega\right)=A(\omega)\cdot e^{j\varphi}=\frac{b_0\cdot\left(j\omega\right)^m+b_1\cdot\left(j\omega\right)^{m-1}+\ldots+b_m}{a_0\cdot\left(j\omega\right)^n+a_1\cdot\left(j\omega\right)^{n-1}+\ldots+a_n}.$$

Полученное выражение $W\left(j\omega\right)$ называется *частотной передаточной функцией* (ЧПФ). В некоторых учебниках $W\left(j\omega\right)$ называют :

- комплексной частотной функцией;
- частотной функцией, комплексной передаточной функцией;
- комплексной функцией частоты;
- амплитудно-фазовой функцией;
- частотной функцией.

В данном случае ЧПФ получена в два этапа.

Первый этап – проведено прямое преобразование Лапласа заданного дифференциального уравнения и получена ПФ.

Второй этап – ПФ переведена в ЧПФ путем замены p на $j\omega$. Эту операцию можно провести в один этап и заданное дифференциальное уравнение сразу перевести в частотную область. Для этого в теории автоматического управления применяется формула прямого и обратного преобразования Фурье

$$F\left(j\omega\right)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)\cdot e^{-j\omega t}\cdot dt$$ - прямое преобразование Фурье;

$$f\left(t\right)=\frac{1}{2\cdot\pi}\cdot\int\limits_{-\infty}^{\infty}F\left(j\omega\right)\cdot e^{j\omega t}\cdot d\omega$$ - обратное преобразование Фурье,

где $F(j\omega)$ - изображение оригинала функции по Фурье;

$f(t)$ - оригинал временной функции.

Условия существования прямого и обратного преобразования Фурье полностью совпадают с условиями проведения преобразования Лапласа. На основании преобразования Фурье можно дать следующее определение ЧПФ

Частотной передаточной функцией называется отношение изображения по Фурье выходной величины к изображению по Фурье входной величине, при нулевых начальных условиях.

По ЧПФ достаточно просто можно получить другие виды математических моделей системы.

3.3.5 Построение графиков амплитудной и частотной характеристики

Ранее получено выражение частотной передаточной функции (ЧПФ)

$$W(j\omega) = \frac{b_0(j\omega)^m + b_1(j\omega)^{m-1} + \ldots + b_m}{a_0(j\omega)^n + a_1(j\omega)^{n-1} + \ldots + a_n}$$

В этой ЧПФ $(j\omega)^k$ может быть вещественным числом, если k - четное; и оно может быть мнимым числом, если k - нечетное. После возведения каждого $j\omega$ в k - ую степень получаем

$$W(j\omega) = \frac{U_в(\omega) + jV_в(\omega)}{U_a(\omega) + jV_a(\omega)} \quad ,$$

где $U_в(\omega)$ и $U_a(\omega)$ - сумма коэффициентов числителя и знаменателя, где j в четной степени, и поэтому j становится равным минус единице или равен единице;

$jV_в(\omega)$ и $jV_a(\omega)$ - сумма коэффициентов, где j в нечетной степени, и поэтому j становится равным минус j или j.

Числитель и знаменатель полученной ЧПФ умножаем на сопряженное знаменателю выражение.

Примечания.

1 Сопряженной комплексное число является такое, в котором выражение $jV(\omega)$ с противоположным знаком.

2 В частотной передаточной функции (ЧПФ) выполняются все правила алгебраических преобразований. Если дробь умножить на одно и то – же число, то её значение не изменится. Поэтому значение $W(j\omega)$ после умножения на сопряженное знаменателю выражения не изменится, а только получит другой и более удобный вид для расчета.

$$W(j\omega)=\frac{U_в(\omega)+jV_в(\omega)}{U_a(\omega)+jV_a(\omega)}\cdot\frac{U_a(\omega)-jV_a(\omega)}{U_a(\omega)-jV_a(\omega)}=\frac{U_в(\omega)\cdot U_a(\omega)+V_в(\omega)\cdot V_a(\omega)}{U_a^2(\omega)+V_a^2(\omega)}-$$

$$-j\cdot\frac{U_в(\omega)\cdot V_a(\omega)-V_в(\omega)\cdot U_a(\omega)}{U_a^2(\omega)+V_a^2(\omega)}=U(\omega)-jV(\omega),$$

где $U(\omega)$ - вещественная частотная функция

$V(\omega)$ - мнимая частотная функция.

График вещественной частотной функции *(U(ω))*называется вещественной частотной характеристикой (ВЧХ). График мнимой частотной функцией *V(ω)* называется мнимой частотной характеристикой (МЧХ)

Примечание – Для построения любого графика $\left(A(\omega),\ \varphi(\omega),\ W(j\omega)\right)$ прежде всего необходимо определить $U(\omega)$ и $jV(\omega)$.

Пример 3.2 – Уравнение движения динамического звена описывается уравнением

$$T\frac{dx}{dt}+x=kU(t).$$

Определить $U(\omega), V(\omega)$, *A(ω)*, $\varphi(\omega)$.

РЕШЕНИЕ

1 Проведем преобразование Лапласа и определим передаточную функцию звена (ПФ)

$$T\frac{dx}{dt}+x=kU(t)\xrightarrow{L}(Tp+1)x(p)=kU(p).$$

$$W(p)=\frac{x(p)}{U(p)}=\frac{k}{Tp+1}.$$

2 Определяем частотную передаточную функцию (ЧПФ)

$$W(j\omega)=\frac{k}{1+j\omega T}.$$

3 Умножаем числитель и знаменатель частотной передаточной функции на сопряженное знаменателю выражение

$$W(j\omega)=\frac{k}{(1+j\omega T)}\cdot\frac{(1-j\omega T)}{(1-j\omega T)}=\frac{k}{1+\omega^2T^2}-j\cdot\frac{k\omega T}{1+\omega^2T^2}=U(\omega)+jV(\omega),$$

где $U(\omega)=\dfrac{k}{1+\omega^2T^2}$; $\quad V(\omega)=\dfrac{-k\omega T}{1+\omega^2T^2}$.

4 Определяем амплитудную функцию

$$A(\omega)=\sqrt{U^2(\omega)+V^2(\omega)}=\sqrt{\frac{k^2}{\left(1+\omega^2T^2\right)^2}+\frac{k^2\omega^2T^2}{\left(1+\omega^2T^2\right)^2}}=$$

$$=k\cdot\sqrt{\frac{1+\omega^2T^2}{\left(1+\omega^2T^2\right)^2}}=\frac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}.$$

5 Определяем фазовую функцию

$$\varphi(\omega)=arctg\left(\frac{V(\omega)}{U(\omega)}\right)=\frac{\dfrac{-k\cdot\omega T}{1+\omega^2\cdot T^2}}{\dfrac{k}{1+\omega^2\cdot T^2}}=-arctg(\omega T).$$

ОТВЕТ. $U(\omega)=\dfrac{k}{1+\omega^2T^2}$, $V(\omega)=\dfrac{-k\omega\, T}{1+\omega^2T^2}$, $A(\omega)=\dfrac{k}{\sqrt{1+\omega^2T^2}}$, $\varphi(\omega)=-arctg\omega T$

3.4 Элементарные звенья системы управления

Любая система автоматического управления представляет собой определенное сочетание функциональных звеньев (задающее устройство, датчики, исполнительное устройство, усилители и т.д.).

Эти звенья могут иметь разную конструкцию и разный принцип действия. При анализе динамических свойств системы необходимо определить закон преобразования сигнала в каждом функциональном звене. Обычно математическое описание преобразованного сигнала в функциональном звене сводится к дифференциальному уравнению первого или второго порядка. Поэтому передаточные функции этих звеньев также имеют первый или второй порядок. Коэффициенты, входящие в передаточную функцию, непосредственно связаны с конструктивными параметрами функциональных звеньев. Таким образом, САУ разбивается на *элементарные звенья,* а затем по правилам структурных преобразований получают общую передаточную функцию системы или, другими словами, получают *математическую модель системы* в виде общей передаточной функции.

Элементарным звеном САУ называется звено, описываемое дифференциальным уравнением не выше второго порядка.

Все элементарные звенья можно разделить на две группы: устойчивые и неустойчивые.

Устойчивым звеном называется такое, все корни передаточной функции которого имеют отрицательные действительные числа или равные нулю.

Устойчивым звеном называется такое, переходная функция которого имеет установившееся значение или изменяющееся с постоянной скоростью.

Если не выполняется какое-нибудь из этих определений (они взаимосвязаны), то звено неустойчивое.

Такое разделение элементарных звеньев на устойчивые и неустойчивые имеет принципиальное значение. Есть общее правило.

Если в разомкнутой системе есть хотя бы одно неустойчивое звено, то вся система неустойчивая или, другими словами, неработоспособная.

К устойчивым звеньям относятся следующие звенья: усилительное, апериодическое, интегрирующее, дифференцирующее, колебательное. Всего 5 звеньев.

Последовательность рассмотрения динамических характеристик звена:

1) определение;
2) дифференциальное уравнение;
3) примеры;
4) передаточная функция;
5) переходная функция.

3.4.1 Усилительное звено

В усилительном звене выходная величина пропорциональна входному воздействию.

$$x(t) = Ku(t).$$

Примеры: усилители, датчики, рычажные механизмы, редукторы.

Передаточная функция, как отношение выходной величины к входной в преобразовании по Лапласу, имеет вид

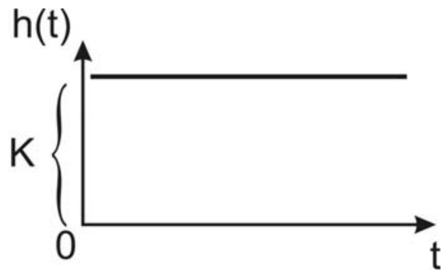


Рисунок 3.10 – График переходной функции усилительного звена

$$W(p) = \frac{x(p)}{u(p)} = K.$$

Переходная функция показывает реакцию системы на ступенчатое воздействие (рисунок 3.10) $h(t) = K$.

Примечание - Усилительное звено ещё называют *безынерционным звеном.*

3.4.2 Апериодическое звено

В апериодическом звене выходная величина описывается дифференциальным уравнением первого порядка.

$$T\frac{dx}{dt} + x = kU(t),$$

где T – постоянная времени;

k – коэффициент усиления.

Примеры: двигатели, маховики, смесители, трубчатые теплообменники, термопары, ректификационные колонны, последовательное включение индуктивного сопротивления или параллельное включение ёмкостного сопротивления в электрической цепи; все инерционные объекты (все движущиеся механизмы имеют массу, значит, имеют инерционность).

Элементы автоматики имеют инерционность, которая проявляется в постепенном нарастании выходного сигнала при ступенчатом входном сигнале. Поэтому в некоторых учебниках апериодическое звено называют *инерционным звеном***.** Эта инерционность характеризуется постоянной времени *T*.

Постоянная времени T – это время, в течение которого выходная величина достигает 62.3 % от заданного значения при ступенчатом входном сигнале.

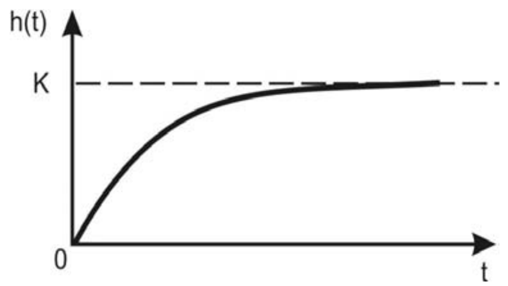


Рисунок 3.11 – График переходной функции апериодического звена

Передаточная функция апериодического звена

$$W(p) = \frac{k}{Tp+1}.$$

Переходная функция $h(t) = k(1 - e^{-t/T})$. График переходной функции изменяется по кривой, которая называется *возрастающей экспонентой* (рисунок 3.11).

3.4.3 Интегрирующее звено

В интегрирующем звене выходная величина пропорциональна интегралу по времени от входной величины.

$$x(t) = k\int_0^t U(t)dt.$$

Примеры: электросчетчик в квартире (вход – количество получаемой энергии; выход – показание электро-счетчика), гидроцилиндр (вход – количество жидкости, подаваемой в цилиндр; выход – перемещение поршня), электрический двигатель (вход – напряжение питания; выход – угол поворота вала двигателя), электрический конденсатор (вход – подаваемое напряжение; выход – заряд конденсатора).

Определим передаточную функцию интегрирующего звена

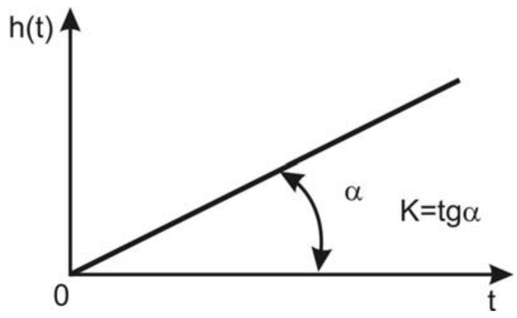


Рисунок 3.12 - График переходной функции интегрирующего звена

$$x(p)=\frac{kU(p)}{p},\ W(p)=\frac{x(p)}{U(p)}=\frac{k}{p}.$$

Переходная функция (рисунок 3.12)

$$x_{\text{вых}}(t)=kt.$$

Для создания астатической системы регулирования, которая не имеет ошибки в установившемся режиме, необходимо включить в него интегрирующее звено.

3.4.4 Дифференцирующее звено

В дифференцирующем звене выходная величина пропорциональна производной по времени от входной величины.

$$x(t)=k\frac{dU(t)}{dt}.$$

Примеры: спидометр в автомашине (вход – частота вращения; выход – угол поворота стрелки спидометра), тахогенератор (вход – частота вращения; выход – напряжение на клеммах тахогенератора), ёмкостное сопротивление при последовательном включении в электрическую цепь (вход – поданное напряжение; выход – скорость изменения напряжения).

Передаточная функция дифференцирующего звена $W(p)=kp$.

Графика переходной функции нет, так как

$$h(t)=k\frac{d[1(t)]}{dt}=k\delta(t)\rightarrow\infty.$$

Напоминаем, что переходная функция – это реакция звена на единичное ступенчатое воздействие. Дифференцирующее звено – это производная по входному воздействию, и в результате получаем импульс $\delta(t)$, который находится на оси ординат. В данном случае рассмотрено идеальное дифференцирующее звено. В реальном дифференцирующем звене необходимо учитывать инерционность звена.

3.4.5 Колебательное звено

В колебательном звене выходная величина описывается дифференциальным уравнением второго порядка с коэффициентом демпфирования от 0 до 1.

Это звено описывается уравнением $T^2\dfrac{d^2x}{dt^2}+2T\xi\dfrac{dt}{dt}+x=kU(t),$

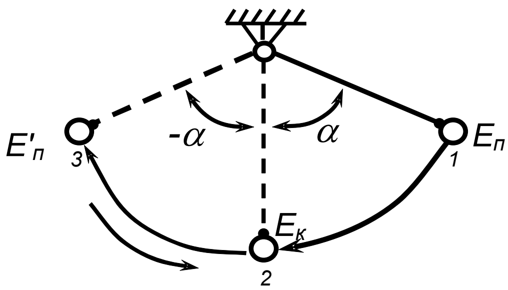


Рисунок 3.13 - Колебание маятника

где T- постоянная времени;

ξ - коэффициент демпфирования.

Примеры. Самый наглядный пример – это колебание маятника (рисунок 3.13). В положении 1 груз маятника имеет потенциальную энергию $E_п$. В положении 2 груз маятника имеет кинетическую энергию движения $E_к$, благодаря которой маятник переходит в положение 3 и снова получает потенциальную энергию E'_n Колебание маятника повторяется, но уже в другую сторону. Выходная величина этого звена - угол α. Под действием трения энергия движения теряется, и в конце концов маятник остановится. Потенциальная и кинетическая энергия становится равной нулю (выходная вели-

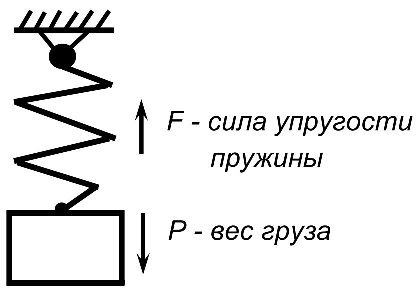


Рисунок 3.14 - Колебание груза подвешенного на пружине

чина - угол $\alpha = 0$).

Другой пример – груз, подвешенный на пружине (рисунок 3.14). После подвешивания груз опускается вниз и растягивает пружину. При этом потенциальная энергия груза переходит в кинетическую энергию движения груза и затем - в потенциальную энергию упругости растянутой пружины. Под действием силы упругости пружины груз поднимается вверх, при этом сила упругости пружины уменьшается и становится меньше веса груза, и груз снова опускается вниз. Таким образом, потенциальная энергия веса груза через кинетическую энергию движения переходит в потенциальную энергию упругости пружины. В данном случае движение прекращается, когда эти два вида энергии уравновешиваются.

Третий пример – электрический колебательный контур, содержащий активное сопротивление, индуктивность и конденсатор (цепочка RCL). Напряжение, поданное на вход контура, преобразуется в электромагнитную энергию индуктивного сопротивления. Разряжаясь через конденсатор, энергия переходит в электростатическую энергию заряда пластин конденсатора.

Физическая причина колебательности в колебательном звене в наличии в звене двух ёмкостей, способных запасать энергию и обмениваться этими запасами.

Передаточная функция :

$$W(p) = \frac{k}{T^2 p^2 + 2\xi T p + 1}.$$

Переходная функция определяется путём решения дифференциального уравнения с комплексными корнями $p_{1,2} = -\lambda \pm j\beta$

$$h(t) = x_{уст} + Ae^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi),$$

где $x_{уст} = kx_{вх}$; $A = -kx_{вх}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; $\varphi = arctg\, \beta / \alpha$;

α – вещественная часть комплексного корня характеристического уравнения;

β – мнимая часть корня.

По графикам переходных характеристик видно, чем больше мнимая часть корня β по сравнению с вещественной, тем больше амплитуда колебаний (рисунок 3.15).

Значение комплексных корней характеристического уравнения зависит от коэффициента демпфирования ξ. Чем меньше значение ξ, тем больше значение мнимой части корня по сравнению вещественной, тем легче происходит переход потенциальной энергии в кинетическую и обратно. Условно принимается, что колебательность в звене начинается при $\xi \leq 0,707$ (или $|\alpha| \leq |\beta|$).

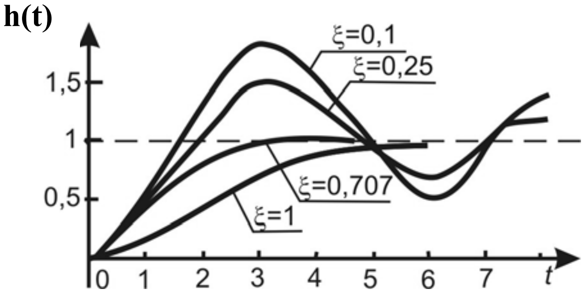


Рисунок 3.15 - Графики переходных характеристик колебательного звена

Примечании - Если частота входного сигнала и собственная частота колебательного звена совпадают, то возникает резонанс частоты. Выходной сигнал при $\xi < 0,01$ может быть в несколько тысяч раз больше входного. Такое свойство электрического колебательного контура называется резонансным усилением и используется в приёмниках, телевизорах, в мобильных телефонах. Это, к сожалению, может случиться в трубопроводах при переменной циркуляции жидкости, в дробилках периодического действия и на других агрегатах. Это однажды случилось на мосту, когда рота французских солдат маршировала по нему и частота шага совпала с собственной частотой моста - мост рухнул.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.4

1 Какие воздействия считаются стандартными?

2 Как математически определяется единичная ступенчатая функция?

3 Что такое переходная функция?

4 Как математически определяется единичная импульсная функция?

5 Что такое весовая функция?

6 Что называется элементарным звеном САУ?

7 Чем отличается переходный процесс неустойчивого и устойчивого звена?

8 Что называется усилительным звеном? Примеры.

9 Передаточная функция (ПФ) усилительного звена.

10 Что называется апериодическим звеном? Примеры.

11 ПФ апериодического звена.

12 Вид переходного процесса апериодического звена?

13 Что называется интегрирующим звеном? Примеры.

14 ПФ интегрирующего звена.

15 Вид переходного процесса интегрирующего звена?

16 Что называется дифференцирующим звеном? Примеры.

17 ПФ дифференцирующего звена.

18 Вид переходного процесса идеального дифференцирующего звена.

19 Что называется колебательным звеном? Примеры.

20 Физическая природа колебательности выходного параметра в колебательном звене.

21 Как определяется резонансная частота (ω_0) в колебательном звене?

3.5 Преобразование структурной схемы САУ

3.5.1 Назначение структурной схемы

Структурная схема САУ показывает прохождение и преобразование сигналов в отдельных звеньях в виде передаточных функций и связь между ними.

Структурная схема является наиболее удобной формой анализа и синтеза САУ с целью исследования её динамических свойств. По структурной схеме можно составить математическую модель системы в виде передаточных функций и определить динамическую характеристику любого участка системы относительно любого входа и любого выхода. Как получить структурную схему?

Первый этап – анализ технологического процесса и определение требований к управлению этим процессом. На этой основе составляется принципиальная схема, где показывают физическую природу элементов, их принцип действия и взаимодействия.

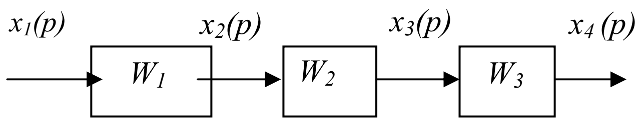
Второй этап – составление функциональной схемы, в которой определяются функции каждого элемента при автоматическом управлении и их взаимосвязи. Это уже более абстрактная схема, где реальные устройства системы заменены блоками с названиями: объект управления, датчик, усилитель, задающее устройство, исполнительное устройство и т.д.

Третий этап – определение математической зависимости между входом и выходом каждого звена в виде передаточной функции и их взаимосвязь. По этим данным составляется структурная схема. В простых системах управления вид функциональной и структурной схемы может совпадать. В сложных системах функциональные звенья разбиваются на несколько структурных звеньев, учитываются дополнительные связи, и полученная структурная схема может иметь другой вид.

Наконец, четвёртый этап – получение общей математической модели, связывающую регулируемую величину с определенным входным сигналом в виде общей передаточной функции. Это делается с помощью *структурных преобразований*.

3.5.2 Правила структурных преобразований

Правило 1. При последовательном соединении звеньев общая передаточная функция (ПФ) равна произведению последовательно соединённых звеньев (рисунок 3.16)



$$W_{общ} = W_1 W_2 W_3$$

Рисунок 3.16 – Получение общей ПФ последовательно соединённых звеньев

Правило 2. При параллельном соединении звеньев общая передаточная функция равна алгебраической сумме передаточных функций (рисунок 3.17)

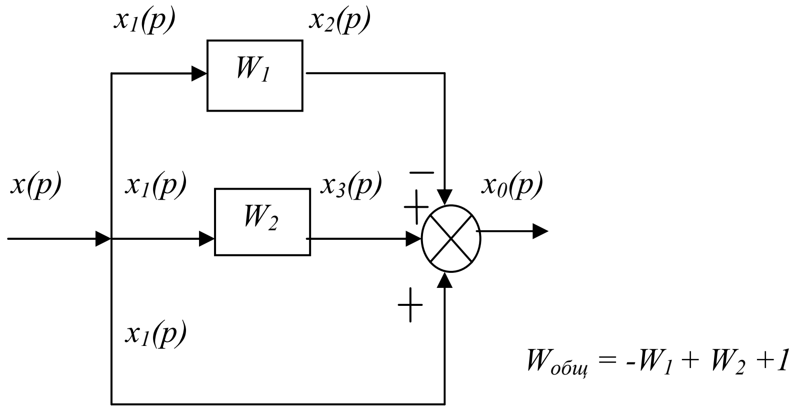


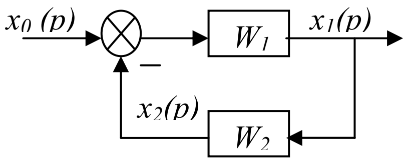
Рисунок 3.17 – Получение общей ПФ параллельно соединённых звеньев

Примечания

1 При получении общей ПФ каждая её составляющая входит в сумматор с тем же знаком, с каким в сумматор входит её выходная величина. Так, $x_2(p)$ входит в сумматор со знаком минус, поэтому W_1 имеет знак минус.

2 Если сигнал сразу подаётся на сумматор, то считается, что $ПФ = 1$. Так $x_1(p)$ входит на сумматор с $W = 1$ (рисунок 3.17).

Правило 3. При включении звена в обратную связь, когда сигнал этого звена имеет противоположное направление относительно звена прямой цепи и подаётся на сумматор со знаком «минус» (рисунок 3.18), то общая передаточная функция имеет вид дроби, где в знаменателе передаточная функция прямой цепи, а в числителе произведение передаточных функций прямой и обратной цепи с добавлением единицы.



$$W_{общ} = \frac{x_1(p)}{x_0(p)} = \frac{W_1}{(1 + W_1 \cdot W_2)}$$

Рисунок 3.18 – Получение общей ПФ звена, охваченного отрицательной обратной связью

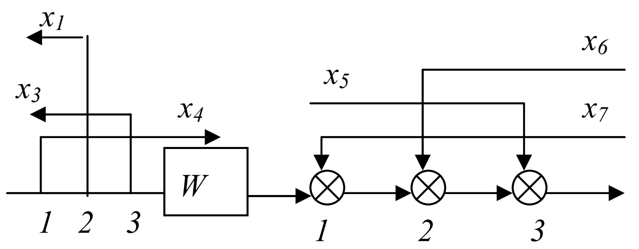
Примечания

1 Если сигнал обратной связи $x_2(p)$ подаётся на сумматор со знаком (+), то в знаменателе формулы общей передаточной функции ставится знак «минус».

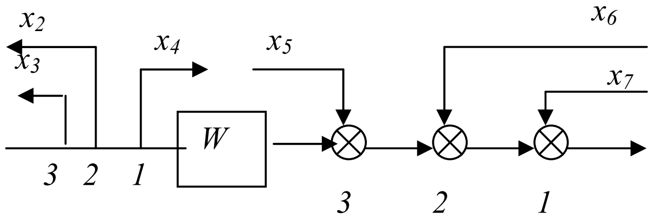
2 Если сигнал обратной связи отрицательный и единичный (т.е. $W_2 = 1$), то общая передаточная функция имеет вид:

$$W_{общ} = \frac{W_1}{(1 + W_1 \cdot 1)}$$

Правило 4. При расположении между звеньями нескольких сумматоров или нескольких узлов разветвления, их можно распределять в любой последовательности (рисунок 3.19)



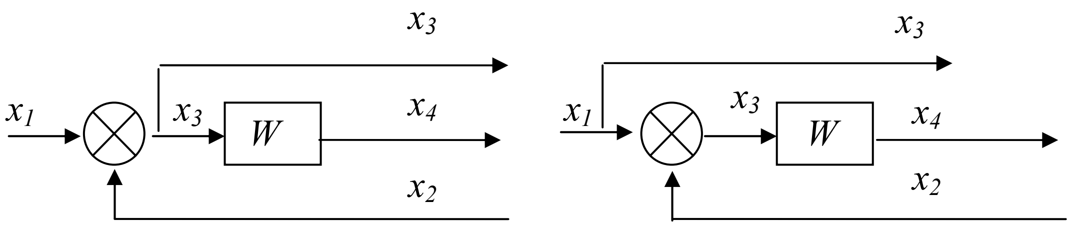
а - исходная схема



б - преобразованная схема

Рисунок 3.19 - Перераспределение сумматоров и узлов

Примечание - Перенесение сумматора через узел разветвления производить нельзя. Для этого есть специальные правила, которые здесь не рассматриваются (рисунок 3.20).



а - исходная схема *б* - преобразованная схема

Рисунок 3.20 - Неправильное преобразование сумматора и узла разветвления. Схемы *а* и *б* не адекватны

3.5.3 Последовательность проведения структурного преобразования

1 Если между звеньями расположено несколько сумматоров или узлов разветвления, то их перераспределяют в удобной последовательности.

2 Полученная схема САУ разбивается на участки.

3 Согласно правилам преобразования звеньев полученные участки схемы заменяются эквивалентными звеньями. Каждое эквивалентное звено получает последовательно возрастающий номер своей передаточной функции, который начинается со следующего после нумерации всех звеньев в исходной структурной схеме. Так, если в исходной схеме 7 звеньев (рисунок 3.21), то нумерация преобразованных участков схемы обозначается № 8, № 9 и т.д.

4 Преобразованная структурная схема снова вычерчивается.

5 Далее проводится преобразование новой полученной схемы.

6 Общая передаточная функция обозначается через $W_{общ}$.

Пример 3.3 **–** Провести структурные преобразования и определить общую передаточную функцию САУ (рисунок 3.21).

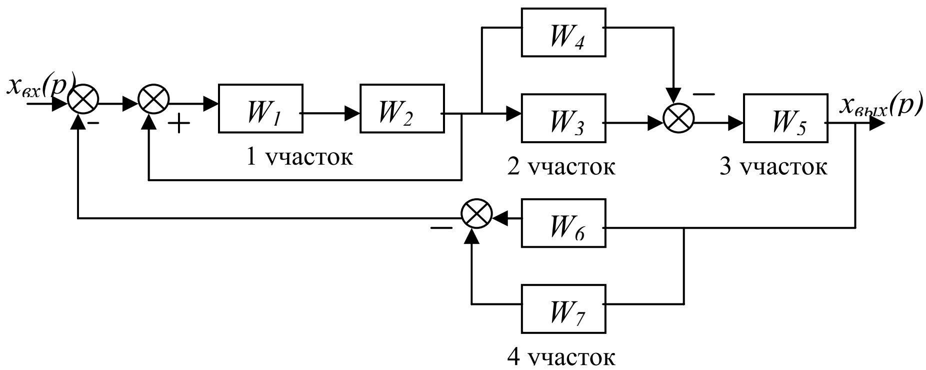


Рисунок 3.21 - Структурная схема к примеру 3.3

РЕШЕНИЕ

1 Разбиваем структурную схему на 4 участка:

1 - й участок W_1 ,W_2;

2 - й участок W_3, W_4;

3 - й участок W_5;

4 - й участок W_6, W_7.

2 Проведем преобразование выделенных участков в эквивалентные звенья

1 участок $W_8 = \dfrac{W_1 W_2}{(1 - W_2 \cdot W_1)}$ (Правило 1, 3; примечание 2);

2 участок $W_9 = W_3 - W_4$ (Правило 2; примечание 1);

4 участок $W_{10} = W_6 - W_7$ (Правило 2; примечание 1).

3 Начертим полученную структурную схему САУ с преобразованными участками (рисунок 3.22).

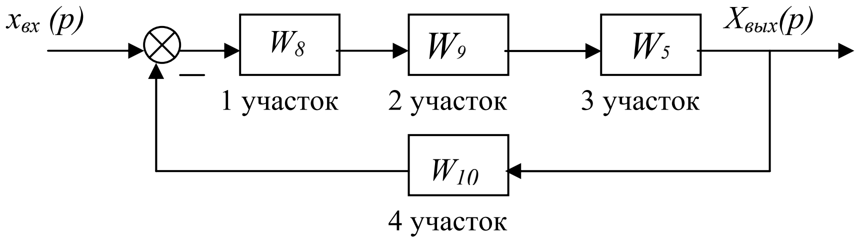


Рисунок 3.22 – Преобразованная структурная схема к примеру 3.3

4 По преобразованной структурной схеме (рисунок 3.22) определяем общую передаточную функцию:

$$W_{общ} = \frac{W_8 W_9 W_5}{(1 + W_8 \cdot W_9 W_5 W_{10})} \quad \text{(Правило 1, 3).}$$

Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.5

1 Что называется структурной схемой?

2 Назначение структурной схемы.

3 Что характеризует каждое звено структурной схемы?

4 Цель преобразования структурной схемы.

5 Правило преобразования последовательно соединенных звеньев.

6 Чему равняется общая передаточная функция трех последовательно соединенных звеньев?

7 Правила преобразования параллельно соединённых звеньев.

8 Чему равняется общая передаточная функция трех параллельно соединенных звеньев, если два звена на выходе имеют отрицательный сигнал?

9 Как определяется общая передаточная функция звена с единичной положительной обратной связью?

10 Как определяется общая передаточная функция звена с единичной отрицательной обратной связью?

11 Можно ли в структурной схеме поменять местами два рядом расположенных сумматора?

12 Можно ли в структурной схеме один сумматор представить как два последовательно соединённых сумматора?

13 Можно ли в структурной схеме поменять местами два рядом расположенных узла разветвления?

14 Можно ли в структурной схеме поменять местами рядом расположенные узел разветвления и сумматор?

15 С какой целью полученная структурная схема разбивается на участки?

16 Как обозначается эквивалентное звено каждого участка?

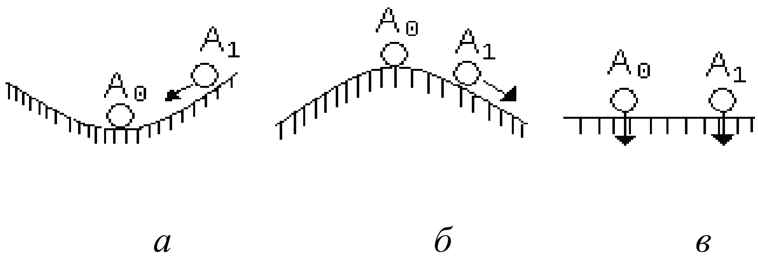
3.6 Устойчивость систем автоматического управления

3.6.1 Понятие устойчивости

На любую автоматическую систему действуют различные возмущения от внешних воздействий и от нестабильности её параметров. Они могут нарушить нормальную работу системы. Поэтому при анализе и синтезе систем управления первостепенное значение имеет её *устойчивость.* Как известно из практики, физически наблюдаемый и действительно существующий процесс является устойчивым. Неустойчивый процесс, с практической точки зрения не имеет смысла. Но при этом необходимо отметить, что многие реальные объекты управления по своим динамическим свойствам неустойчивые. Так синхронный генератор при перегрузке становится динамически неустойчивым, но путём управления его работу можно сделать устойчивым. Современные истребители без активной обратной связи – неустойчивы и просто не могут летать, но с помощью обратной связи – летают! Поэтому первое и основное требование к системе управления – обеспечить устойчивость на заданных режимах работы объекта.

Понятие устойчивости системы связано с её способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних сил, которые вывели её из этого состояния. Если система неустойчивая, то она не возвращается в состояние равновесия и продолжает движение, хотя все воздействия на САУ уже сняты.

Наглядное представление об устойчивом и неустойчивым равновесии даёт рассмотрение системы шар – поверхность (рисунок 3.23).



а - устойчивое состояние ;

б - неустойчивое состояние;

в - безразличное состояние.

Рисунок 3.23 – К понятию устойчивости равновесного состояния системы шар – поверхность

Положение равновесия шара характеризуется точкой A_0. В случае, изображенном на рисунке 3.23 *а* при любом отклонении шара от положения равновесия, например в точку A_1, он под действием силы тяжести будет стремиться снова вернуться в точку A_0. Такое положение равновесия считается *устойчивое.* В случае изображенном на рисунке 3.23 *б* при любом отклонении шара он в дальнейшем будет продолжать это движение и всё дальше отходить от первоначального положения A_0. Такое положение равновесия считается *неустойчивое.* В случае изображенном на рисунке 3.23 *в* шар при отклонении от точки A_0 в точку A_1 остаётся в этом новом положении. Это новое положение считается безразличным равновесием и система в большинстве случаев считается *неустойчивой* или не способной сохранять заданный режим работы.

Устойчивость – это свойство системы самостоятельно возвращаться в прежнее состояние равновесия после вывода её из этого состояния и прекращения возмущающего воздействия.

Пусть система уравнения описываются линеаризованным дифференциальным уравнением относительно регулируемого параметра

$$a_0\frac{d^n x(t)}{dt^n}+a_1\frac{d^{n-1} x(t)}{dt^{n-1}}+\ ...\ +a_n x(t)=b_0\frac{d^m u(t)}{dt^m}+\ ...\ +b_m u(t),$$

где $x(t)$ – регулируемый параметр;

$u(t)$ – управляющее воздействие;

$n,\ m$ – показатели степени дифференциального управления $(n > m)$;

a_i и b_i - постоянные коэффициенты.

Проведём преобразования этого уравнения по Лапласу и определим передаточную функцию

$$a_0 p^n x(p)+a_1 p^{n-1} x(p)+...+a_n x(p)=b_0 p^m u(p)+b_1 p^{m-1} u(p)+...+b_m u(t)$$

$$W(p)=\frac{b_0 p^m+b_1 p^{m-1}+\ ...\ +b_m}{a_0 p^n+a_1 p^{n-1}+...+a_n}\ .$$

Числитель передаточной функции характеризует воздействие на систему. Знаменатель – реакцию систему на единичное воздействие. Какая будет реакция, зависит в линейных системах от знаменателя передаточной функции. Поэтому знаменатель передаточной функции называют *характеристическим полиномом.* Если знаменатель передаточной функции приравнять к нулю, то получаем *характеристическое уравнение*

$$a_0 p^n+a_1 p^{n-1}+\ ...\ +a_n=0.$$

Согласно первой теореме Ляпунова

Необходимым и достаточным условием устойчивости системы управления является отрицательность вещественной части корней характеристического уравнения.

Итак, для определения устойчивости системы надо найти корни характеристического уравнения. Для уравнения первого и второго порядка это сделать просто. Для уравнения третьего порядка можно, но уже сложно. Для уравнения более высокого порядка задача определения корней в виде аналитического выражения требует сложных расчетов. Но фактически для определения устойчивости *не надо определять численные значения корней, а надо определить: все ли вещественные части корней отрицательные.* Это более простая задача и решается она с помощью критериев устойчивость.

Критерий – это математический признак, по которому определяется свойства функции.

Для анализа устойчивости линейных систем наиболее часто применяются алгебраические критерии устойчивости Рауса и Гурвица. Каждый из этих критериев с помощью алгебраических операций над коэффициентами характеристического уравнения устанавливает один и тот же математический факт – отрицательность вещественной части корней. Один критерий можно вывести из другого и поэтому естественно, что если по одному критерию система устойчива, то и по любому другому тоже будет устойчива. Какой из критериев лучше использовать – это зависит от порядка характеристического уравнения и от выбора исследователя.

Прежде, чем рассмотреть алгебраические критерии, отметим

Необходимым условием устойчивости для системы любого порядка является положительность всех коэффициентов характеристического уравнения.

Пример 3.4 - Определить устойчивость системы по характеристическому уравнению

$$p^4 + 8p^2 + 64p + 80 = 0$$

ВЫВОД. Система неустойчивая, так как коэффициент при p^3 равен нулю. Действительно, корни этого уравнения

$$p_1 = -2;\ \ p_2 = -2;\ \ p_3 = +2 + 4j;\ \ p_4 = +2 - 4j$$

Необходимо отметить, что условие устойчивости по Ляпунову пригодны (или работоспособно) только для САУ описываемых дифференциальными уравнениями. Так для линейных импульсных систем, которые описываются не дифференциальными уравнениями, условие устойчивости другое.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.6.1

1 В чём заключается первое и основное требование к системе управления?

2 Что такое устойчивость систем управления?

3 Что характеризует числитель передаточной функции?

4 Что характеризует знаменатель передаточной функции?

5 Как определяется характеристическое уравнение?

6 Необходимое условие устойчивости?

7 Необходимое и достаточное условие устойчивости по Ляпунову.

8 Для каких САУ эти условия устойчивости можно использовать?

3.6.2 Критерий устойчивости Гурвица

Критерий Гурвица представляет собой определитель, составленный из коэффициентов характеристического уравнения, который называют *определителем Гурвица*.

Для устойчивости автоматических системы необходимо и достаточно, чтобы все главные диагональные миноры определителя Гурвица были положительные.

По коэффициентам характеристического уравнения

$$a_0 p^{n} + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \ldots + a_{n-1} p + a_n = 0$$

составляется определитель Гурвица. Для этого по главной диагонали определителя выписываются все коэффициенты характеристического уравнения, начиная со второго (т.е. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$), затем вверх записываются коэффициенты с возрастающим индексом, а вниз с убывающим индексом.

Так, относительно третьего коэффициента в главной диагонали a_3 вверх записываются a_4, a_5 (индекс возрастает), а вниз a_2, a_1, a_0. На остальные оставшиеся места вписываются нули.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & a_9 & \dots & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & a_8 & \dots & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Для проверки правильности заполнения определителя Гурвица необходимо учесть, что по строкам чередуются коэффициенты с нечётными и чётными индексами. Так первая строка нечётные коэффициенты $a_1\, a_3\, a_5\, a_7$ ..., вторая строка чётные коэффициенты $a_0\, a_2\, a_4\, a_6, \dots$ и т.д.

Покажем вычисление миноров в определителе Гурвица для системы 6-го порядка.

$$\begin{array}{c} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \\ \Delta_4 \\ \Delta_5 \\ \Delta_6 \end{array} \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_1 = a_1 > 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ a_0 & a_3 \end{vmatrix} = a_1 a_3 - a_0 a_2 > 0$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 \\ a_0 & a_2 & a_4 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{vmatrix} = a_3\Delta_2 - a_1(a_1a_4 - a_0a_5) > 0$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 \end{vmatrix} = a_4\Delta_3 - a_5[a_2\Delta_2 - a_0(a_1a_4 - a_0a_5)] + a_6(a_2a_1^2 - a_0a_1a_3) > 0$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & 0 & 0 \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & 0 \\ 0 & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 \\ 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_5 \end{vmatrix} = a_5\Delta_4 - a_6a_3\Delta_3 - a_6a_1(a_5\Delta_2 - a_6a_1^2) > 0$$

$$\Delta_6 = a_6\Delta_5 .$$

Примечания

1 Последний определитель обычно не рассчитывается. В данном случае $\Delta_6 = a_6$. Если выполняется необходимое условие устойчивости (все $a_i > 0$), то при $\Delta_5 > 0$ последний минор Δ_6 всегда положителен.

2 Пусть необходимо определить устойчивость системы пятого порядка. Тогда $a_6 = 0$, последний минор $\Delta_5 > 0$ согласно примечанию 1. Неравенства принимают вид

$\Delta_1 = a_1 > 0,$

$\Delta_2 = a_1a_3 - a_0a_2 > 0,$

$\Delta_3 = a_3\Delta_2 - a_1(a_1a_4 - a_0a_5) > 0,$

$\Delta_4 = a_4\Delta_3 - a_5[a_2\Delta_2 - a_0(a_1a_4 - a_0a_5)] > 0.$

3 Пусть необходимо определить устойчивость системы четвертого порядка. Тогда $a_5 = 0$, последний минор $\Delta_4 > 0$ согласно примечанию 1. Неравенства принимают вид

$\Delta_1 = a_1 > 0,$

$\Delta_2 = a_1 a_3 - a_0 a_2 > 0,$

$\Delta_3 = a_3 \Delta_2 - a_1^2 a_4 .$

4 Для устойчивости системы третьего порядка достаточно

$\Delta_2 = a_1 a_3 - a_0 a_2 > 0.$

5 Для систем седьмого порядка и выше определение устойчивости по Гурвицу обычно не делают из-за громоздкости расчетов.

Пример 3.6 - Определить устойчивость САУ по критерию Гурвица по следующему характеристическому уравнению

$$L(p) = p^5 + 3p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 2p + 1 = 0 .$$

РЕШЕНИЕ

1 Все коэффициенты характеристического уравнения положительные. Значит необходимое условие устойчивости выполняется.

2 Составляем определитель Гурвица

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 3 & 7 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 7 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

3 Определяем значения миноров для системы пятого порядка

$$\Delta_1 = 3 > 0;$$

$$\Delta_2 = (3\cdot4-1\cdot7) = 5 > 0;$$

$$\Delta_3 = 7\cdot5-3(3\cdot2-1\cdot1) = 20 > 0;$$

$$\Delta_4 = 2\cdot20-1(4\cdot5-1(3\cdot2-1\cdot1)) = 25 > 0;$$

$\Delta_5 = 1\cdot\Delta_4 = 25$ (можно не вычислять).

ОТВЕТ. Все миноры определителя Гурвица положительны, значит вещественная часть корней характеристического уравнения отрицательна и, согласно теореме Ляпунова, САУ устойчива.

3.6.3 Упрощённый критерий устойчивости В.Н. Евсюкова

Особенность предлагаемого критерия устойчивости разработанного В.Н. Евсюковым в том, что характеристическое уравнение рассматривается по частям. Вначале по соотношению между четырьмя рядом расположенными коэффициентами определяется *необходимое условие устойчивости* [6,7].

Затем рассматривается соотношение между шестью рядом расположенными коэффициентами и определяется *достаточное условие устойчивости*. Перебирая таким образом все коэффициенты характеристического уравнения, определяется устойчивость системы.

Преимущество упрощённого критерия. Благодаря такому отделению необходимого условия устойчивости от достаточного, резко сокращается трудоёмкость вычисления; она фактически не зависит от порядка характеристического уравнения. Перебирая последовательно все коэффициенты можно определить те коэффициенты, из-за которых система неустойчивая. Одновременно становится ясно в какую сторону их надо изменить, чтобы сделать систему устойчивой. По этому критерию можно определить наличие в системе чисто мнимых корней.

Недостаток упрощённого критерия. Достаточные условия устойчивости не являются необходимыми. При невыполнении этих условий система может быть устойчивая, но иметь корни со значительной мнимой частью или существенный колебательный переходной процесс.

Дано характеристическое уравнение

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + a^3 p^{n-3} + \ldots + a_n = 0 .$$

Определяется величина k – скорость убывания коэффициентов характеристического уравнения

$$k_1 = a_1 / a_0, \quad k_2 = a_2 / a_1, \quad k_3 = a_3 / a_2, \quad k_4 = a_4 / a_3 \ldots, \quad k_n = a_n / a_{n-1}$$

Необходимое условие устойчивости заключается в выполнении следующих неравенств

$$\begin{cases} k_1 > k_3 > k_5 > \ldots \\ k_2 > k_4 > k_6 > \ldots \end{cases}$$

Определяется величина n – скорость убывания коэффициента k

$$n_3 = k_3 / k_1, \quad n_4 = k_4 / k_2 \quad \ldots \quad n_n = k_n / k_{n-2}$$

Достаточное условие устойчивости заключается в выполнении следующих неравенств

$$\begin{aligned}
&1 > n_3 + n_4 - n_3 n_4 n_5;\\
&1 > n_4 + n_5 - n_4 n_5 n_6;\\
&1 > n_5 + n_6 - n_5 n_6 n_7;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&1 > n_i + n_{i+1} - n_i n_{i+1} n_{i+2}.
\end{aligned}$$

Примечание – Последнее неравенство состоит из двух слагаемых.

***Пример 3.7* -** Определить устойчивость САУ по следующему характеристическому уравнению

$$L(p) = 1p^5 + 3p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 2p + 1.$$

РЕШЕНИЕ

1Определяем значение величины k

$$k_1 = 3/1 = 1; \quad k_2 = 4/3 = 1{,}3; \quad k_3 = 7/4 = 1{,}75; \quad k_4 = 2/7 = 0{,}28; \quad k_5 = 1/2 = 0{,}5.$$

2 Проверяем выполнение необходимого условия устойчивости

$$\begin{cases} k_1 > k_3 > k_5 \\ k_2 > k_4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3 > 1{,}75 > 0{,}5 \\ 1{,}3 > 0{,}28 \end{cases}$$

Необходимое условие устойчивости выполняется.

3 Определяем величины n

$$n_3 = k_3 / k_1 = 0{,}58; \quad n_4 = k_4 / k_2 = 0{,}21; \quad n_5 = k_5 / k_3 = 0{,}28, \; n_6 = 0.$$

4 Проверяем выполнение достаточного условия устойчивости

$$1 > n_3 + n_4 - n_3 n_4 n_5 = 0{,}58 + 0{,}21 - 0{,}58 \cdot 0{,}21 \cdot 0{,}28 = 0{,}755$$
$$1 > n_4 + n_5 - n_4 n_5 n_6 = 0{,}21 + 0{,}28 - 0 = 0{,}49.$$

ВЫВОД. Необходимое условие устойчивости и достаточное условие устойчивости выполняются. Система устойчивая.

Пример 3.8 - Определить устойчивость САУ по критерию В.Н. Евсюкова по следующему характеристическому уравнению

$$L(p) = 3p^5 + 3p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 2p + 1 = 0\,.$$

РЕШЕНИЕ

1 Определяем величины *k*

$$k_1 = 3/3; \quad k_2 = 4/3; \quad k_3 = 7/4; \quad k_4 = 2/7; \quad k_5 = 1/2.$$

2 Проверяем выполнение необходимого условия устойчивости

$$\begin{cases} 3/3 < 7/4 > 1/2; \\ 4/3 > 2/7. \end{cases}$$

ОТВЕТ. 3/3 < 7/4 Система неустойчивая. Имеется два комплексно-сопряжённых корня с положительной вещественной частью.

Пример 3.9 - Определить устойчивость системы по критерию В.Н. Евсюкова по характеристическому уравнению

$$p^7 + 21p^6 + 142p^5 + 342p^4 + 281p^3 + 621p^2 + 140p + 300 = 0$$

РЕШЕНИЕ

1 Определяем величины *k*

$$k_1 = 21; \quad k_2 = 6{,}76; \; k_3 = 2{,}40; \; k_4 = 0{,}82; \; k_5 = 2{,}20; \; k_6 = 0{,}22; \; k_7 = 2{,}14.$$

2 Проверяем выполнение второго необходимого условия устойчивости:

$$\begin{cases} k_1 > k_3 > k_5 > k_7 \\ k_2 > k_4 > k_6 \end{cases} \qquad \begin{cases} 21 > 2{,}40 > 2{,}20 > 2{,}14 \\ 6{,}76 > 0{,}82 > 0{,}22 \end{cases}$$

Условия выполняются.

3 Определяем значения *n*:

$$n_3 = 0{,}11; \quad n_4 = 0{,}12; \quad n_5 = 0{,}91; \quad n_6 = 0{,}26; \quad n_7 = 0{,}97.$$

4 Проверяем выполнение необходимого условия устойчивости

$$1 > n_3 + n_4 - n_3 n_4 n_5 = 0{,}21;$$

$$1 > n_4 + n_5 - n_4 n_5 n_6 = 1{,}00;$$

$$1 > n_5 + n_6 - n_5 n_6 n_7 = 0{,}94;$$

$$1 > n_6 + n_7 - 0 = 1{,}23.$$

ВЫВОД. Второе неравенство стало равенствами. Значит имеются кратные чисто мнимые корни. Четвёртое неравенство не выполняется. Значит, есть корни с положительной вещественной частью.

Действительно, корни этого характеристического уравнения

$p_1 = -10{,}00;$ $p_2 = -6{,}00;$ $p_3 = -5{,}00;$ $p_4 = -7{,}520 \cdot 10^{-5} - 0{,}999j;$ $p_5 = -1{,}218 \cdot 10^{-5} + 0{,}999j;$ $p_6 = 1{,}219 \cdot 10^{-5} + 1{,}00j;$ $p_7 = 7{,}518 \cdot 10^{-5} - 1{,}00j.$

3.6.4 Критерий устойчивости Михайлова

Критерий устойчивости Михайлова основывается на годографе характеристического уравнения. В зависимости от характера прохождения годографа в комплексной плоскости определяется устойчивость системы. Этот годограф называется *годограф Михайлова.*

Для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова при изменении частоты от нуля до бесконечности повернулся против часовой стрелки, начиная с вещественной оси, на число квадрантов, равное порядку характеристического уравнения, последовательно проходя эти квадранты.

Последовательность построения годографа Михайлова:

- характеристическое уравнение переводится в частотную область путём подстановки вместо p значения $j\omega$;

- разделяются вещественная и мнимая части характеристического уравнения;

- в характеристическом уравнении (переведённом в частотную область) задаются значения ω от нуля до бесконечности и вычисляют отдельно вещественную и мнимую части этого уравнения;

- полученные значения вещественной и мнимой части откладывают в виде точек на декартовой системе координат: ось абсцисс − вещественная часть характеристического уравнения: ось ординат – мнимая часть характеристического уравнения;

- полученные точки соединяют плавной кривой и получают годограф Михайлова;

- для устойчивости САУ годограф Михайлова должен последовательно пройти квадранты и в *«n»* квадранте уйти в бесконечность, где *n* − степень характеристического уравнения.

Пример 3.10 - Определить устойчивость САУ с помощью критерия Михайлова по характеристическому уравнению

$$L(p) = p^5 + 3p^4 + 4p^3 + 7p^2 + 2p + 1 = 0.$$

РЕШЕНИЕ

1 Представим характеристическое уравнение в частотной области

$$L(j\omega) = (j\omega)^5 + 3(j\omega)^4 + 4(j\omega)^3 + 7(j\omega)^2 + 2j\omega + 1 = 0.$$

2 Выделим вещественную и мнимую части

$$L(j\omega) = U(\omega) + jV(\omega) = (1 - 7\omega^2 + 3\omega^4) + j\omega(2 - 4\omega^2 + \omega^4).$$

3 Задаваясь значением ω (0; 0.2; 0.4; и т.д.) вычисляем отдельно вещественную $U(\omega)$ и мнимую $jV(\omega)$ части характеристического уравнения.

Результаты вычисления показаны в таблице 3.1 и на рисунке 3.24.

Таблица 3.1 – Значения $U(\omega)$ и $jV(\omega)$ при изменении ω от 0 до 13 к примеру 3.10

N/n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	1,2	1,4	1,6	1,8	1,85	2	10
$U(\omega)$	1	0,72	-0,04	-1,13	-2,25	-3,00	2,85	-1,19	2,74	9,81	12,1	21	29301
$jV(\omega)$	0	0,368	0,55	0,41	-0,12	-1,00	2,02	-2,79	-2,89	-0,83	0,04	4	96020

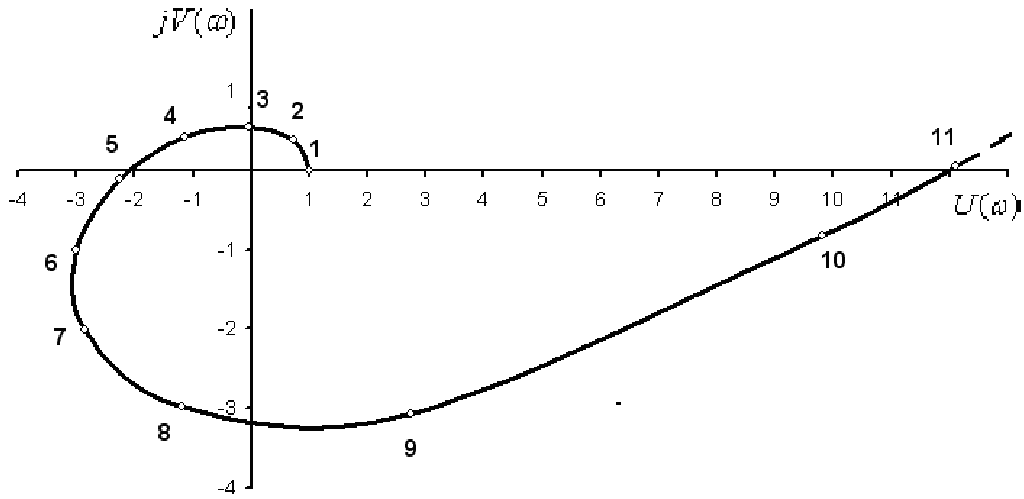


Рисунок 3.24 – Годограф Михайлова к примеру 3.10

ОТВЕТ. Годограф Михайлова при изменении частоты от 0 до бесконечности последовательно проходит против часовой стрелки по всем квадрантам, начиная с вещественной оси и в пятом квадранте при $\omega > 1.85$ уходит в бесконечность. Значит САУ устойчива.

3.6.5 Критерий устойчивости Найквиста

Этот критерий позволяет определять устойчивость наиболее распространенной САУ – системы с обратной связью или замкнутой системы, если известна устойчивость разомкнутой системы. Замкнутая система более склонна к неустойчивой работе, так как на ее вход поступает два сигнала: управляющий сигнал *U(t)* и сигнал обратной связи $X_{oc}(t)$ (рисунок 3.25).

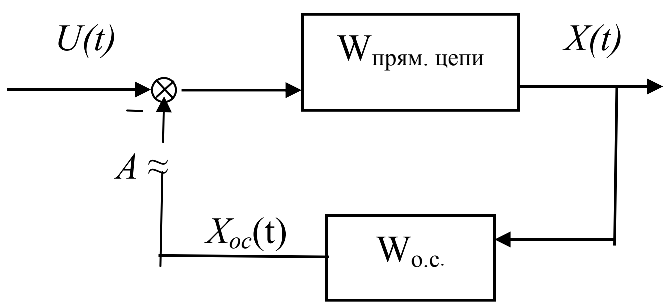


Рисунок 3.25 – САУ с обратной связью

Сигнал обратной связи $X_{oc}(t)$ зависит от динамических свойств разомкнутой системы и при большом коэффициенте усиления под действием этого сигнала в замкнутой системе могут возникнуть колебания с возрастающей амплитудной, т.е. начинается самовозбуждение системы. Критерий Найквиста – частотный критерий. Устойчивость замкнутой системы определяется по АФЧХ разомкнутой системы.

Рассмотрим физическую сущность этого критерия. АФЧХ показывает изменение амплитуды $A(\omega)$ и фазового сдвига $\varphi(\omega)$ сигнала на выходе звена обратной связи (т. *А* согласно рисунка 3.25).

Если этот сигнал при фазовом сдвиге $\varphi(\omega) = -180^0$ подается через *отрицательную обратную связь*, то общий сдвиг будет $\varphi(\omega) = -360^0$. В результате он станет по фазе совпадать с входным сигналом. Возникает вопрос: какой из этих двух сигналов сильнее воздействует на систему? Если более мощным сигналом будет сигнал управления, то система остается управляемой, так как АФЧХ сигнала обратной связи по отношению к входному будет меньше 1 и при повторном прохождении через систему еще больше ослабнет, а с течением времени ослабнет до нуля. Такая отрицательная обратная связь неопасна для системы. Система будет устойчивая к сигналу управления.

Но если на вход первого звена замкнутой САУ будет подаваться сигнал больше 1, то при повторном прохождении через систему он еще больше усилится, а с течением времени будет стремиться к ∞. Система станет «управляться» этим сигналом обратной связи, начнется самовозбуждение системы. На управляющий сигнал она уже не будет реагировать или станет неустойчивой к сигналу управления.

Есть еще один вариант, когда сигнал на входе первого звена замкнутой САУ будет равен единице. В системе возникают незатухающие колебания, которые не могут увеличиваться, так как этот сигнал не увеличивается. Система на границе устойчивости.

Таким образом, устойчивость замкнутой системы можно определить по АФЧХ разомкнутой системы. Критерий Найквиста формируется следующим образом

Замкнутая система будет устойчива, если она устойчива в разомкнутом состоянии и АФЧХ разомкнутой системы на комплексной плоскости не охватывает точку с координатами (-1; j0).

Для полученной АФЧХ системы в разомкнутом состоянии необходимо сделать разрыв цепи перед сумматором, т.е. в точке А (смотри рисунок 3.25) и рассматривать: вход *U(t)*, выход в точке А, а не ее действительную выходную координату *x(t)*.

Пример 3.11 - Определить устойчивость замкнутой системы по передаточной функции разомкнутой системы по критерию Найквиста

$$W(p)_{раз} = \frac{3{,}16}{(p+1)(0{,}01p^2+0{,}1p+1)}.$$

РЕШЕНИЕ

1 Определяем частотную передаточную функцию (ЧПФ) разомкнутой устойчивой системы

$$W(p) = \frac{3{,}16}{(p+1)(0{,}01p^2+0{,}1p+1)} = \frac{3{,}16}{0{,}01p^3+0{,}11p^2+1{,}1p+1}.$$

$$W(j\omega) = \frac{3{,}16}{(1-0{,}11\omega^2)+j\omega(1{,}1-0{,}01\omega^2)}.$$

2 Определяем вещественную и мнимую часть ЧПФ разомкнутой системы

$$W(j\omega) = \frac{3{,}16}{(1-0{,}11\omega^2)+j\omega(1{,}1-0{,}01\omega^2)} \cdot \frac{(1-0{,}11\omega^2)-j\omega(1{,}1-0{,}01\omega^2)}{(1-0{,}11\omega^2)-j\omega(1{,}1-0{,}01\omega^2)} =$$

$$= \frac{3{,}16(1-0{,}11\omega^2)}{(1-0{,}11\omega^2)^2+\omega^2(1{,}1-0{,}01\omega^2)^2} + \frac{-j\omega\cdot 3{,}16(1-0{,}01\omega^2)}{(1-0{,}11\omega^2)^2+\omega^2(1{,}1-0{,}01\omega^2)^2} = U(\omega)+jV(\omega)$$

3 Изменяя ω от 0 до 40 определяем значения АФЧХ разомкнутой системы. Результаты вычисления показаны в таблице 3.2. Годограф Найквиста показан на рисунке 3.26.

АФЧХ разомкнутой *статической* системы (или годограф Найквиста) при изменении частоты от 0 до ∞ образуют замкнутой контур. Начало контура при $\omega = 0$ соответствует $A(0) = K$, где K – коэффициент усиления системы. Конец контура при $\omega = \infty$ соответствует началу координат $A(\infty) \to 0$. Для устойчивой замкнутой системы координата *(-1, j0)* не должна находиться внутри этого контура.

Таблица 3.2 – Вычисление $U(\omega)$ и $V(\omega)$ к примеру 3.11

ω	0	1	2	2,7	4	6	7	8	8,8	10	20	40
U(ω)	3,16	1,16	0,08	-0,37	-0,43	-0,32	-0,26	-0,21	-0,18	-0,13	-0,01	-0,001
V(ω)	0	-1,62	-1,26	-0,94	-0,52	-0,16	-0,07	-0,02	0	0,02	0,01	0,002

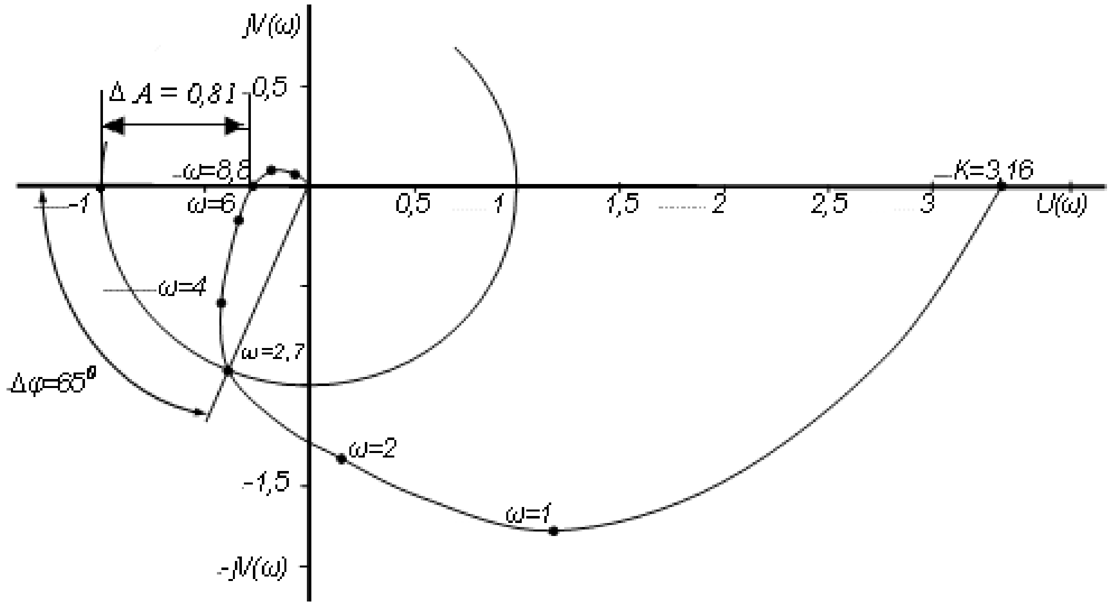


Рисунок 3.26 - Годограф Найквиста к примеру 3.11

ОТВЕТ. Годограф Найквиста не охватывает точку *(-1, j0)*. Замкнутая система будет устойчива.

АФЧХ разомкнутой *астатической* системы имеет интегрирующее звено с амплитудной характеристической $A(\omega)=1/\omega$ и поэтому при изменении частоты от 0 до ∞ образуют разомкнутый контур АФЧХ. Начало контура при ω = 0 соответствует $A(0) \to \infty$ и $\varphi(0) \to -90^o$. Конец контура $A(\infty) \to 0$. Для определения устойчивости такой системы условно начало контура с помощью дуги бесконечно большого радиуса соединяют с положительной осью вещественной характеристики и таким образом получают условно замкнутый контур. Такую частотную характеристику системы можно рассматривать как статическую с замкнутым контуром АФЧХ и с бесконечно большим коэффициентом усиления $K \to \infty$.

Приведем примеры некоторых АФЧ устойчивых разомкнутых систем для устойчивых и неустойчивых замкнутых систем (рисунок 3.27)

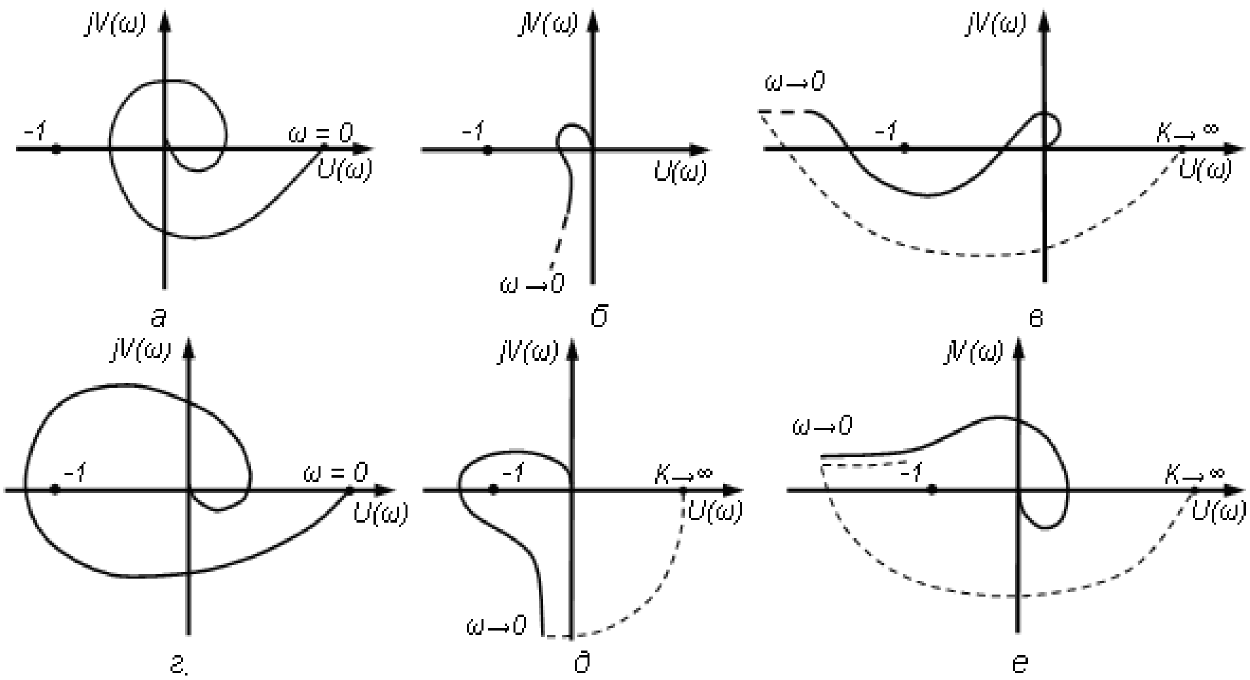


Рисунок 3.27 – АФЧХ разомкнутых систем

а - АФЧХ для устойчивой статической замкнутой системы ;

б - АФЧХ для устойчивой астатической замкнутой системы ;

в - АФЧХ для устойчивой астатической (второго порядка) замкнутой системы ;

г - АФЧХ для неустойчивой статической замкнутой системы ;

д - АФЧХ для неустойчивой астатической замкнутой системы ;

е - АФЧХ для неустойчивой астатической (второго порядка) замкнутой системы.

По критерию Найквиста можно определить *запас устойчивости по модулю*, как расстояние от точки пересечения годографа с отрицательной осью абсцисс до точки (*-1,j0)*. В примере 3.11 запас по модулю $\Delta A = 0,7$. Дополнительно определяется *запас по фазе*, как угол от точки пересечения единого радиуса с годографом Найквиста до отрицательной оси абсцисс. В примере 3.1 запас по фазе $\Delta\ \varphi = 65^{\circ}$.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 6.3

1 Для каких САУ работоспособны условия устойчивости по Ляпунову?

2 Необходимые условия устойчивости.

3 Достаточные условия устойчивости.

4 Что значит критерий устойчивости?

5 Критерий устойчивости Гурвица.

6 Как составляется определитель Гурвица?

7 Если один из миноров Гурвица равен нулю, то как ведёт себя система?

8 Необходимые условия устойчивости по В.Н. Евсюкову.

9 Достаточные условия устойчивости по В.Н. Евсюкову.

10 Как по упрощённому критерию В.Н. Евсюкова определяется в характеристическом уравнении наличие чисто мнимых корней?

11 Если одно необходимое условие устойчивости из неравенства стало равенством, то система устойчивая?

12 Преимущество критерия устойчивости В.Н. Евсюкова.

13 Недостаток критерия устойчивости В.Н. Евсюкова.

14 Критерий устойчивости Михайлова.

15 Как по характеристическому уравнению получить уравнение годографа Михайлова?

16 Как может проходить годограф Михайлова при неустойчивости систем?

17 Если годограф Михайлова проходит через начало координат, то как ведётся себя система?

18 Критерий устойчивости Найквиста.

19 Как преобразуется передаточная функция разомкнутой системы для построения годографа Найквиста?

20 Как определяется устойчивость замкнутой системы, если разомкнутая система астатичная?

21 Если годограф Найквиста проходит через точку с координатой *(-1, j0),* то как ведёт себя система?

3.7 Оценка качества регулирования

3.7.1 Общие положения

К качеству процесса регулирования предъявляются три основные требования:

- точность установившегося режима работы;
- устойчивость работы в этом режиме;
- качество переходного процесса.

Во многих случаях качество процесса регулирования определяют по её реакции на стандартный сигнал в виде единичной ступенчатой функции (смотри 3.2.3). Это делается по следующим причинам:

– скачкообразный входной сигнал является наиболее трудным для его прохождения через систему. С одной стороны, необходимо мгновенно изменить состояние системы (сделать скачок в новое состояние). С другой стороны, необходимо мгновенно остановиться в этом новом состоянии и сразу перейти в статический (установившийся) режим работы.

– по кривой переходного процесса при единичном скачке можно наглядно увидеть все параметры, характеризующие качество регулирования (рисунок 3.28).

Для анализа качества регулирования используют три основных показателя: *время регулирования* (или время переходного процесса); *максимальное отклонение при переходном процессе* (или перерегулирование); *погрешность в установившемся режиме работы* (или статическая ошибка). Эти три показателя качества регулирования всегда определяются при анализе и задаются при проектировании системы управления. Есть и другие показатели качества, которые определяются при колебательном переходном процессе.

3.7.2 Время регулирования

Время регулирования t_p – это интервал времени от момента подачи сигнала до момента, когда отклонение регулируемой величины от установившегося значения будет меньше заданного значения δ.

Обычно в качестве заданного значения δ берут 5 % от нового установившегося режима. Если требуется более высокая точность, то это дополнительно оговаривается.

Теоретически можно принять, что отклонение регулируемой величины от установившегося режима $\delta \rightarrow 0$, тогда время регулирования $t_p \rightarrow \infty$. Такое допущение не дает представления о действительном времени регулирования. Необходимо учитывать нечувствительность датчиков, зазоры и нелинейность характеристик элементов автоматической системы. Поэтому условились под временем регулирования понимать время t_p , по истечении которого отклонение регулируемой величины от установившегося значения уменьшится в m раз.

Пусть установившееся значение выходного сигнала равно единице, а $m = 20$, тогда отклонение от него $\delta = 1/20 = 0{,}05$, или 5 %. В США принимают, $m = 50$, тогда $\delta = 1/50 = 0{,}02$, или 2 %. Величина δ характеризует также степень нечувствительности регулятора. Даже в высокоточных системах регулирования принимают δ не менее 0,01, или 1 %. При этом $m = 100$. Очевидно, что время регулирования с уменьшением δ возрастает.

3.7.3 Динамическая ошибка САУ

При переходе системы от одного установившегося режима работы к другому возможны два случая.

1 Регулируемая величина плавно приближается к новому значению и не выходит за его пределы (кривая 2 – рисунок 3.28 *а*).

2 Регулируемая величина резко возрастает и выходит за пределы нового значения, но затем убывает и становится менее заданного значения. Снова воз-

растает, и таким образом возникает колебательный затухающий процесс приближения к новому установившемуся значению (кривая 3 – рисунок 3.28 *б*).

Динамическая ошибка САУ характеризуется отклонением регулируемой величины за пределами заданного значения при переходном процессе.

Динамическая ошибка САУ определяется величиной перерегулирования

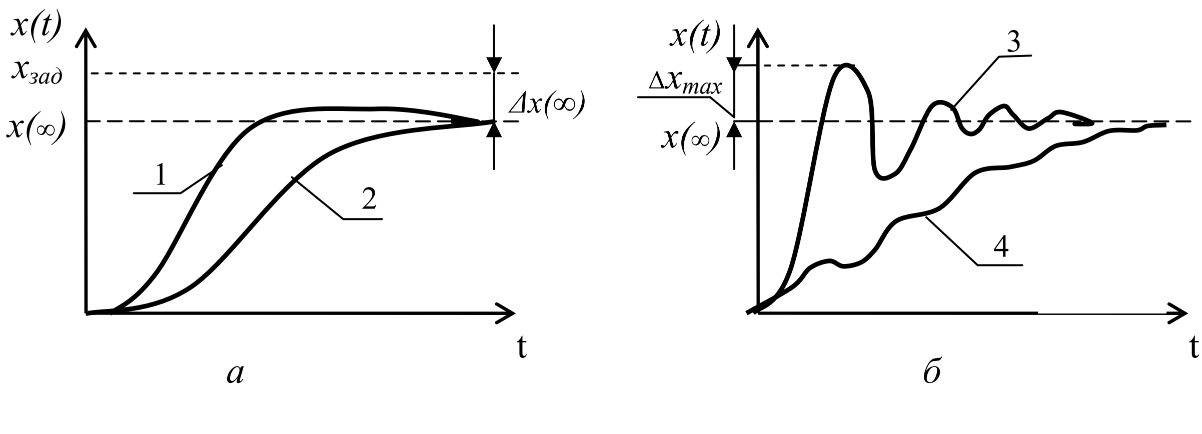
Величина перерегулирования определяется в процентах:

$$\sigma = \frac{\Delta x_{max}(t)}{x(\infty)} \cdot 100 ,$$

где $\Delta x_{max}(t)$ – максимальное положительное отклонение регулируемой величины за пределы установившегося значения;

$x(\infty)$ – установившееся значение регулируемой величины при подаче на вход ступенчатого сигнала.

По величине перерегулирования можно судить о *динамической точности* системы. Чем меньше σ, тем действительное значение регулируемой величины меньше отклоняется от нового установившегося. Обычно принимают $\sigma < 30\ \%$. Есть системы, где перерегулирование вообще не допускается и $\sigma = 0\ \%$.



а - все корни вещественные *б* - среди корней есть комплексно-сопряжённые

Рисунок 3.28 – Виды переходного процесса

Следует заметить, что перерегулирование зависит от корней характеристического уравнения. Если все корни вещественные и отрицательные, то затухание переходного процесса будет *апериодическим*. При одинаковых вещественных корнях может быть небольшое перерегулирование (кривая 1 – рисунок 3.28 *а*), но чаще всего такой переходной процесс протекает без перерегулирования (кривая 2) и называется *монотонным*.

Если среди корней характеристического уравнения есть комплексно-сопряженные корни с существенной мнимой частью, то переходной процесс будет *колебательный с перерегулированием* (кривая 3 - рисунок 3,28 *б*). Если мнимая часть комплексно-сопряжённых корней незначительная, то переходный процесс в основном зависит от вещественной части корня, и переходной процесс может быть *без перерегулирования* (кривая 4). Наличие дополнительных вещественных корней всегда уменьшает перерегулирование.

3.7.4 Статическая ошибка САУ

Два основных показателя качества регулирования (время регулирования и перерегулирование) дают представление о поведении системы в переходном режиме и являются *показателями качества системы в динамическом режиме.*

Погрешность работы системы в стационарном (установившемся) режиме оценивается с помощью статической ошибки. Эту статическую ошибку по аналогии можно назвать *показателем качества системы в статическом режиме*.

Статическая ошибка определяется по отклонению действительного значения регулируемой величины от его заданного значения в стационарном режиме.

Совокупность показателей качества переходного процесса и установившегося режима называется *показателями качества системы*.

Величина ошибки в статическом стационарном режиме показана на рисунке 3.28 *а*

$\Delta x(\infty) = x_{зад} - x_{(\infty)}$, где $\Delta x\ (\infty)$ – статическая ошибка;

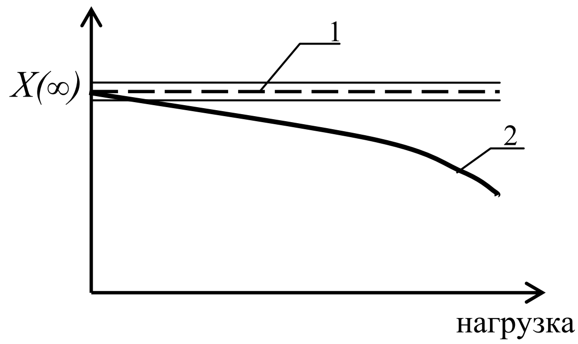
$x_{зад}$ – заданное значение регулируемой величины;

$x_{(\infty)}$ – установившееся значение регулируемой величины.

Говоря о статической ошибке в установившемся режиме, следует отметить, что она слагается из двух составляющих.

Первая составляющая – это техническая ошибка, которая зависит от *точности выполнения деталей регулятора* (от зазоров в кинематических парах, от трения, от нечувствительности датчиков и т.д.).

Вторая составляющая – это статическая ошибка, которая зависит от *типа регулятора*. Регулятор может быть *статический*, тогда в установившемся режиме всегда есть ошибка регулирования. Регулятор может быть *астатический*, тогда в установившемся режиме регулятор доводит ошибку регулирования до нуля в пределах своей чувствительности.



1– при астатическом регуляторе;

2 – при статическом регуляторе.

Рисунок 3.29 – Статические характеристики системы регулирования.

На рисунке 3.29 показано установившееся значение регулируемой величины при астатическом (кривая *1*) и в статическом регуляторе (кривая 2) при разной нагрузке.

Для астатического регулятора статическая ошибка $\Delta x = 0$ при любой установившейся нагрузке. На рисунке 3.29 регулируемая величина показана пунктиром. Некоторое отклонение регулируемой величины от заданного значения в астатическом регуляторе – это техническая ошибка.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 3.7

1 Основные требования к процессу регулирования.

2 Как определяется время регулирования?

3 Как определяется установившееся значение регулируемой величины?

4 Какой переходной процесс считается монотонным?

5 Какой переходной процесс считается колебательным?

4 Синтез систем автоматического управления

4.1 Постановка задачи синтеза

При проектировании САУ возникает целый комплекс задач.

Во-первых, правильно сформулировать основную проблему, обосновать необходимые показатели качества регулирования, определить главную цель и основные требования к процессу регулирования.

Во-вторых, выявить и проанализировать граничные условия (ограничения) на основе полученной информации и прогнозирования работы системы.

В-третьих, выбрать функционально необходимые элементы системы (датчики, преобразующие и исполнительные элементы, усилители и т.д.), исходя из конструктивных возможностей и особенности функционирования.

В-четвёртых, получить желаемые динамические и статические характеристики САУ. Проанализировать возможный компромисс между качеством процесса управления, с одной стороны, возможностью технической реализации – с другой стороны.

Этот процесс является сложным, итеративным, циклическим и на любом этапе может привести к изменению цели проектирования. Более того, если после окончательного решения испытание САУ дало нежелательный результат, то необходимо снова пересмотреть всю постановку задачи и критерий качества, а затем начать поиск новых решений. Необходимо анализировать не только полученные результаты, а весь процесс проектирования, чтобы еще раз убедиться в правильности проведения расчётов.

Такой анализ удобнее провести по этапам.

На информационном этапе анализируются цели и задачи управления, рассматриваются различные методы решения.

На аналитическом этапе анализируются причинно-следственные связи в изучаемой системе. Для этого данная САУ рассматривается как единое целое с системой вышестоящего уровня, определяются её функциональные связи, выделяются главные и вспомогательные функции, а также бесполезные и даже вредные функции. Определяется значимость каждой функции, выявляются «узкие места». Более конкретно ставятся задачи проектирования.

На творческом этапе осуществляется дополнительный поиск решения поставленных задач на основе уточнённого критерия качества. Критерий качества отражает тот из наиболее существенных признаков, по которым принимаемое решение можно выделить из множества возможных решений, обеспечивающих достижение цели при заданных ограничениях.

Главная проблема, которую надо решать на этих этапах – преодоление противоречия между поставленными задачами и наличием средств для их решения.

4.2 Анализ и синтез САУ через переменные состояния системы

4.2.1 Переменные состояния системы

Передаточные функции описывают динамику стационарной системы управления, в которой параметры системы не зависят от времени. Современные системы нестационарные, многие параметры системы в процессе регулирования изменяются. Например, повышается (или понижается) температура в объекте, изменяется скорость движения отдельных элементов. Передаточная функция не раскрывает такое изменение характеристик отдельных элементов САУ. Она фактически характеризует динамику только выходной регулируемой величины; она не показывает, что делается внутри системы, как изменяется состояние отдельных её элементов.

Зная, как изменяется состояние отдельных элементов системы, можно предвидеть, как изменится в дальнейшем значение регулируемой величины. Такая более полная информация о системе основана на понятии *переменные состояния системы* [3].

Переменные состояния системы определяются совокупностью состояний её элементов с учётом внешних воздействий и позволяют определить её будущее состояние и регулируемые величины.

Такую математическую модель динамической системы можно представить в следующем виде (рисунок 4.1).

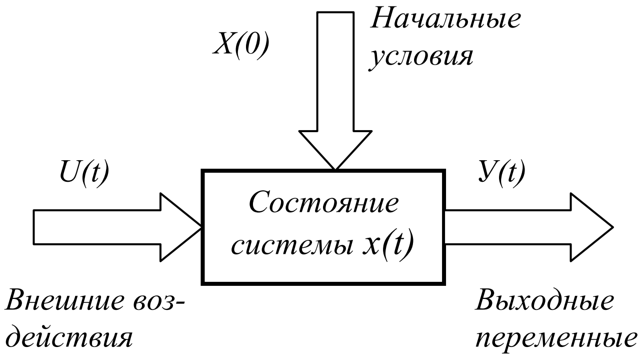


Рисунок 4.1 – Математическая модель динамической системы

Рассмотрим понятие ***начальные условия*** через понятие переменные состояния системы на примере электрической цепи, содержащей емкостное и индуктивное сопротивление. Если известно входное воздействие в начальный момент времени t_0, то для определения выходной величины необходимо знать токи, протекающие через индуктивность и напряжение на конденсаторе в этот начальный момент t_0. Эти токи и напряжение характеризуют начальное состояние электрической цепи. В этом смысле состояние электрической цепи связывается с её «памятью» о накопленной предыдущей энергии, о начальных условиях движения.

Начальные условия определятся накопленной энергией в системе в момент воздействия на неё возмущающих сигналов.

Аналогично можно рассмотреть понятие ***граничных условий*** через понятие переменные состояния системы. В электрической цепи количество накопленной энергии зависит от емкости конденсатора и индуктивности магнитной катушки и не может быть беспредельно большой. Она ограничена энергетическими возможностями этих элементов или граничными условиями. В механических системах граничные условия могут быть заданы допустимым значением ускорения из условия механической прочности деталей. Чаще всего (это удобно при расчёте) граничные условия определяются допустимым сигналом управления или максимально допустимой нагрузкой. На основании этого можно дать такую энергетическую трактовку понятия граничных условий.

Граничные условия определяются максимальным значением энергии, которую может принять данная система.

Дифференциальные уравнения системы можно рассматривать как количество информации о состоянии элементов системы. Тогда понятие переменные состояния системы определяется следующим образом.

Переменные состояния системы в момент времени t_o – это количество информации, которая вместе с входными переменными определяют поведение системы в будущем.

Набор переменных состояния системы обозначают $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_m(t)$. Они выбираются исследователем в зависимости от поставленной задачи. В одной и той же системе можно выбрать разный набор переменных состояния и получить разные уравнения системы. Каждое уравнение правомочно, но получено относительно разных переменных состояния. Входные переменные обозначают $u_1(t)$, $u_2(t)$, …, $u_m(t)$. Они характеризуют воздействие на систему. Выходные переменные $y_1(t)$, $y_2(t)$, …, $y_к(t)$. Они характеризуют изменение регулируемых параметров. Общий вид математической модели САУ через переменные состояния показан на рисунке 4.2.

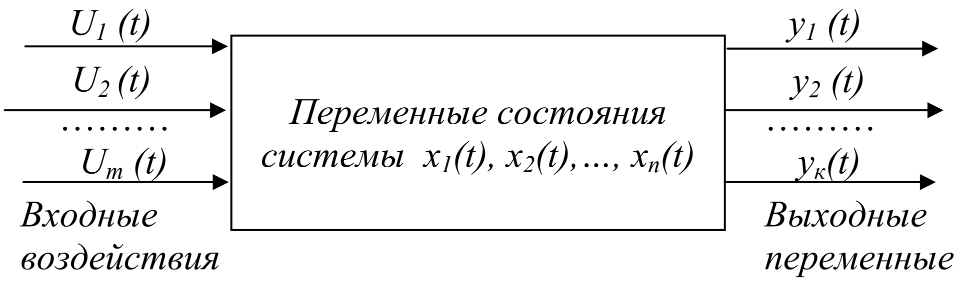


Рисунок 4.2 – Математическая модель САУ через переменные состояния

Простым примером переменной состояния системы может служить выключатель электролампы. У него два положения состояния: «включено» или «выключено». Если известно, в каком положении находится выключатель в момент t_0 , и какое приложено входное воздействие, то всегда можно определить будущее состояние этой системы.

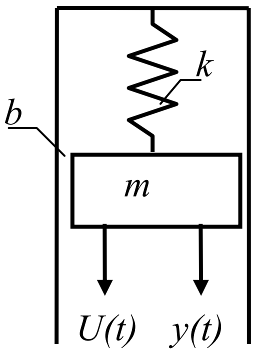


Рисунок 4.3 - Система «масса-пружина»

Пример 4.1 [3] **-** Определить переменные состояния системы на примере механической системы «масса-пружина» (рисунок 4.3). Параметры системы

k – коэффициент упругости пружины;

b – трение о стенки цилиндра;

m – масса груза;

$U(t)$ – входное воздействие;

$y(t)$ – выходное переменные;

Дифференциальное уравнение этой системы

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+ky(t)=U(t).$$

Примем в качестве переменных состояний

$$\begin{cases} x_1(t)=y(t) & \text{- положение груза,} \\ x_2(t)=\dfrac{dy(t)}{dt} & \text{- скорость движения груза.} \end{cases}$$

Тогда дифференциальное уравнение системы принимает вид

$$m\frac{dx_2(t)}{dt}+bx_2(t)+kx_1(t)=U(t).$$

Из этого уравнения определяем $\dfrac{dx_2(t)}{dt}$ и $\dfrac{dx_1(t)}{dt}$

$$\begin{cases} \dfrac{dx_2(t)}{dt}=-\dfrac{k}{m}x_1(t)-\dfrac{b}{m}x_2(t)+\dfrac{1}{m}U(t); \\ \dfrac{dx_1(t)}{dt}=x_2(t). \end{cases}$$

Первое уравнение получено из дифференциального уравнения системы. Второе уравнение получено по условию принятых переменных состояния. Эти уравнения описывают поведение системы в терминах изменения положения груза по каждой переменной состояния.

4.2.2 Уравнения состояния системы в матричной форме

Пусть известны $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots \dot{x}_n$ – изменение переменных состояния;

$U_1, U_2, \ldots U_m$ – входные воздействия.

Тогда состояния системы в общем случае описываются системой дифференциальных уравнений первого порядка

$$\dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + b_{11}U_1 + b_{12}U_2 + \ldots + b_{1m}U_m;$$

$$\dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + b_{21}U_1 + b_{22}U_2 + \ldots + b_{2m}U_m;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + b_{n1}U_1 + b_{n2}U_2 + \ldots + b_{nm}U_m.$$

Эта система дифференциальных уравнений в матричной форме имеет вид

$$\underset{\Downarrow}{\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}} = \underset{\Downarrow}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}} \cdot \underset{\Downarrow}{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}} + \underset{\Downarrow}{\begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1m} \\ b_{12} & \ldots & b_{2m} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nm} \end{vmatrix}} \cdot \underset{\Downarrow}{\begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}},$$

X *– вектор состояния*	***A(t)*** *- матрица состояния*	***X*** *– вектор состояния*	***B(t)*** *- матрица входных состояний*	***U*** *– вектор входных сигналов*

Полученную систему можно записать в виде $\boldsymbol{\dot{x} = A(t)\cdot x + B(t)\cdot U}$

Матрица ***A(t)*** является квадратной матрицей $n \times n$, а матрица ***B(t)*** имеет размерность $n \times m$ (n- состояние, m-входные сигналы). Полученные уравнения состояния в матричной форме связывает скорость изменения состояния с самим состоянием в данный момент и входными сигналами.

Система, в которой коэффициенты матрицы ***A(t)*** и ***B(t)*** зависят от времени *t,* называется *нестационарной системой.*

Система, в которой коэффициенты матрицы ***A*** и ***B*** не зависят от времени *t,* называется *стационарной системой.*

Поведение системы (её движение) характеризуется фазовой траекторией в фазовом пространстве.

Фазовое пространство системы n-го порядка называется n – мерное пространство, координаты которого представляют собой производные по времени переменных состояний $x_i(t)$.

Число координат пространства состояний равно порядку системы дифференциальных уравнений. Эти координаты могут быть абстрактными величинами, лишенными физического смысла. Они могут и не соответствовать реальным физическим величинам исследуемого процесса, и получены искусственным путём. Но это позволяет обеспечивать адекватность математической модели САУ.

Пусть в данной системе известны переменные состояния $x_1, x_2, \ldots, x_n$, которые связанны с выходными сигналами $y_i(t)$ через коэффициенты C_i. Тогда уравнение выхода в общем случае имеет вид

$$\begin{aligned}
&y_1(t) = C_{11}x_1 + C_{12}x_2 + \ldots + C_{1n}x_n;\\
&y_2(t) = C_{21}x_1 + C_{22}x_2 + \ldots + C_{2n}x_n;\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&y_k(t) = C_{k1}x_1 + C_{k2}x_2 + \ldots + C_{kn}x_n.
\end{aligned}$$

Эту систему уравнений представим в матричной форме

$$\underbrace{\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_k \end{vmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{y} \text{ – вектор} \\ \text{измерения}}} = \underbrace{\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \ldots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \ldots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{k1} & C_{k2} & \ldots & C_{kn} \end{vmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{C(t)} \text{ – матрицы выходных} \\ \text{состояний}}} \cdot \underbrace{\begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{vmatrix}}_{\substack{\boldsymbol{x} \text{ – вектор} \\ \text{состояния}}}$$

Полученную систему можно записать в виде

$\boldsymbol{y(t) = C(t) \cdot x}$, где матрица $\boldsymbol{C(t)}$ имеет размерность $k \times n$.

Получение дифференциальных уравнений многомерной системы в матричной форме можно представить в следующем виде (рисунок 4.4).

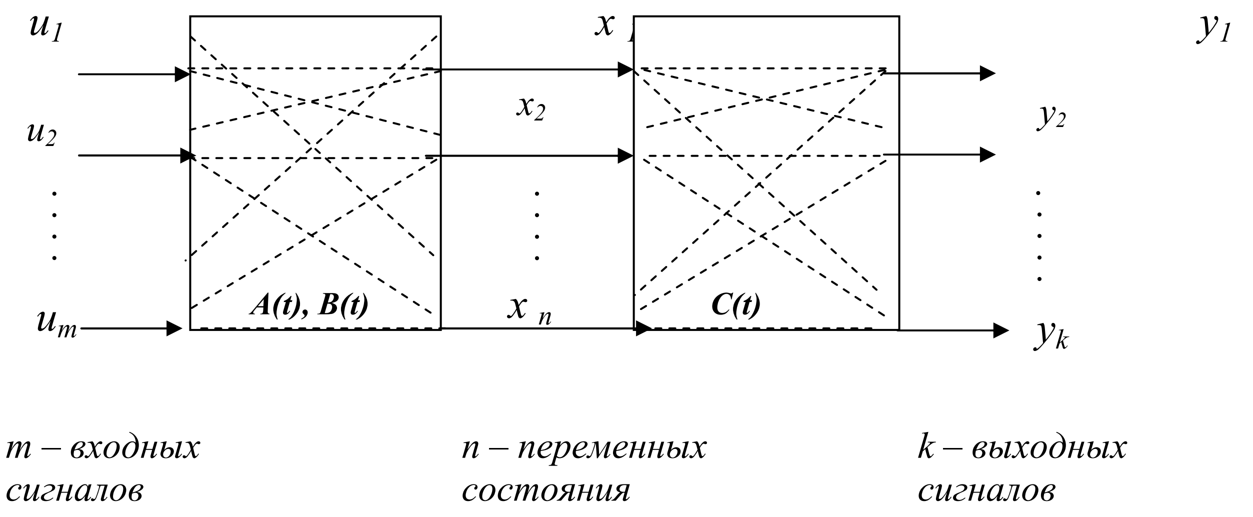


Рисунок 4.4 – Многомерная система уравнений в матричной форме

Вопросы для самоконтроля к подразделу 4.2.1 - 4.2.2

1 Как определяются переменные состояния системы?

2 Как определяются начальные условия через переменные состояния системы?

3 Как определяются граничные условия через переменные состояния системы?

4 Как определяется дифференциальное уравнение через переменные состояния системы?

5 При составлении дифференциального уравнения в матричной форме что характеризует матрица ***A***?

6 Что характеризует матрица ***B***?

7 Что характеризует матрица ***C***?

8 Что такое вектор состояния?

9 Что такое вектор измерения?

4.2.3 Определение управляемости системы

Для решения задач управления важно знать, обладает ли данный объект свойством управляемости в смысле возможности перевода управляемых величин из заданных начальных значений в новые конечные значения. Ранее предполагалось, что объект таким свойством обладает, иначе какой смысл ставить задачу управления? Но, возможно, что не все переменные состояния реагируют на сигнал управления. При сложных вариантах управления, или при ошибке в выборе структурной схемы управления, или в выборе параметров регулятора, и объект может терять свойство управляемости.

Система является вполне управляемой, если существует такое допустимое управление, которое может перевести систему из произвольного начального состояния $x(t_0)$ в другое заданное состояние $x(t_k)$ на конечном интервале времени (t_0, t_k).

Условие управляемости определяется по рангу матрицы управляемости $\boldsymbol{P_c}$

$$ranq\ \boldsymbol{P}_c = [\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{AB},\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \ldots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] = n,$$

где n- это ранг матрицы **A**.

Для одномерной системы (с одним входом и одним выходом) условие управляемости определяется по уравнению

$$\Delta\boldsymbol{P}_c = [\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{AB}\ \boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B} \ldots \boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}] \neq 0,$$

где $\Delta\boldsymbol{P}_c$ - определитель матрицы $\boldsymbol{P}_c$.

Этот определитель может быть и положительным и отрицательным, но *не должен быть равным нулю.*

Пример 4.2 - Определить управляемость системы по заданной передаточной функции третьего порядка

$$W(p) = \frac{b_0}{p^3 + a_2 p^2 + a_1 p + a_0}.$$

1 Матричное уравнение этой системы имеет вид

$$\dot{x} = \underbrace{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{A}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{B}} u, \qquad y = \underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}}_{\boldsymbol{C}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}$$

2 Определяется значение $\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{AB},\ \boldsymbol{A^2B}$

$$\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{vmatrix} \qquad \boldsymbol{AB} = \begin{vmatrix} 0 \\ b_0 \\ -a_2 b_0 \end{vmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_0 a_2 & a_1 a_2 & \left(a_2^2 - a_1\right) \end{vmatrix}.$$

$$\boldsymbol{A^2B} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_0 a_2 & a_1 a_2 & \left(a_2^2 - a_1\right) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_0 \\ -a_2 b_0 \\ (a_2^{\ 2} - a_1) b_0 \end{vmatrix}$$

3 В результате получаем матрицу управляемости

$$\boldsymbol{P_C} = \left| \boldsymbol{A} \quad \boldsymbol{AB} \quad \boldsymbol{A^2B} \right| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & b_0 \\ 0 & b_0 & -a_2 b_0 \\ b_0 & -a_2 & \left(a_2^{\ 2} - a_1\right) \end{vmatrix}$$

4 Находим определитель матрицы $\Delta \boldsymbol{P_c}$

$$\Delta \boldsymbol{P_c} = b_0 (0 \cdot (-a_2 b_0) - b_0^2) = -b_0^3$$

ВЫВОД. Определитель отличен от нуля. Система полностью управляемая при $b_0 \neq 0$.

4.2.4 Определение наблюдаемости системы

Наблюдаемость системы связана со способностью оценивать переменные состояния. Считается, что система может быть наблюдаемой, если каждая переменная состояния вносит свой вклад в выходной сигнал системы. Если составлен граф системы, и от каждой переменной состояния существует путь к выходной переменной, значит она наблюдаемая.

Система является вполне наблюдаемой, если по $y(t)$ на выходе системы можно оценить начальное значение переменных состояний $x(t_0)$ на конечном интервале времени (t_0, t_k).

Пусть многомерная система, описывается матричным уравнением

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}, \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} .$$

Условие наблюдаемости определяется по рангу матрицы $\boldsymbol{Q}$

$$rang\ \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{vmatrix} = n,$$

где n - это ранг матрицы **A**.

Для одномерной системы условие наблюдаемости определяется по определителю матрицы ΔQ, который не должен быть равен нулю.

$$\Delta \boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{CA} \\ \vdots \\ \boldsymbol{CA}^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

Пример 4.3 - Определить наблюдаемость системы по примеру 4.2.

РЕШЕНИЕ

1 Матричное уравнение примера 4.2

$$\begin{vmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{vmatrix} = \underset{A}{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} + \underset{B}{\begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ b_0 \end{vmatrix}} u, \qquad y = \underset{C}{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}.$$

2 Определяем значение

$$\boldsymbol{C}, \quad \boldsymbol{CA}, \quad \boldsymbol{CA^2}. \qquad \boldsymbol{C} = [1\ 0\ 0], \qquad \boldsymbol{CA} = [0\ 1\ 0],$$

$$\boldsymbol{CA^2} = (1 \quad 0 \quad 0) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \\ a_0 a_2 & a_1 a_2 & (a_2^2 - a_1) \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{Q} = \begin{vmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}, \qquad \Delta\boldsymbol{Q} = 1.$$

ВЫВОД. Система полностью наблюдаемая.

4.2.5 Определение устойчивости системы

Рассмотрим систему в уравнениях состояния

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}\,; \qquad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}$$

Преобразуем это уравнение по Лапласу $p\cdot\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{x}(p) + \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(p);$

$$(\lambda\cdot\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})\,\boldsymbol{x}(p) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(p); \quad \boldsymbol{x}(p) = \frac{\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(p)}{(\lambda\cdot\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})},$$

где $\boldsymbol{I}$ - единичная матрица;

λ - корень характеристического уравнения.

Полученное значение $\boldsymbol{x}(p)$ подставляется в уравнение выхода, тоже преобразованного по Лапласу

$$\boldsymbol{y}(p) = \boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{x}(p); \quad \boldsymbol{y}(p) = \frac{\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u}(p)}{(\lambda\cdot\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}.$$

Определяется передаточная функция системы $W(p)$ заданная в уравнениях состояния. Напоминаем, что передаточная функция – это отношение выходного сигнала $\boldsymbol{y}(p)$ к входному сигналу $\boldsymbol{u}(p)$ в преобразовании по Лапласу и при нулевых начальных условиях

$$W(p) = \frac{\boldsymbol{y}(p)}{\boldsymbol{u}(p)} = \frac{\boldsymbol{C}\cdot\boldsymbol{B}}{(\lambda\cdot\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A})}.$$

Таким образом, ($\lambda\cdot\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$) является характеристическим полиномом передаточной функции $W(p)$. Напоминаем, что условие устойчивости по Ляпунову заключается в отрицательности вещественной части корней характеристического уравнения ($\lambda\cdot\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}$) = 0.

Пример 4.4 - Определить устойчивость системы заданного уравнениями состояния

$$\dot{x}_1 = x_1 - 2x_2 + u;$$
$$\dot{x}_2 = 2x_1 + x_2.$$

РЕШЕНИЕ

1 Представим это уравнение в матричном виде

$$\frac{d}{dt} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \end{vmatrix} \cdot u .$$

2 Определяется характеристическое уравнение

$$det(\lambda\, I - A) = det\left\{\begin{vmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\} = det\ \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2 + 4 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 + 4 = 0 .$$

3 Определяются корни этого уравнения

$$\lambda_{12} = \frac{+2}{2} \pm \frac{\sqrt{2^2 - 4 \cdot 5}}{2} = +1 \pm j2 .$$

ОТВЕТ. Вещественная часть корней положительная, следовательно, система неустойчивая.

Понятие «наблюдаемость» и «управляемость» не связаны друг с другом. Они определяются с помощью разных матриц. Система может быть наблюдаемая, но не полностью управляемая. Обратите внимание, что совсем неуправляемых или ненаблюдаемых систем практически не бывает. Вопрос стоит в том, чтобы определить систему вполне (или полностью), по всем переменным ее состояния и наблюдаемой, и управляемой. Если по какой то переменной состояния это не соответствует, то считается, что система не полностью наблюдаемая или не вполне управляемая.

При этом не надо смешивать два понятия: управляемость и устойчивость системы. Управляемость характеризуется способностью перевода системы по всем переменным состояния в другое состояние. Устойчивость характеризуется способностью системы самостоятельно восстанавливать исходное состояние после снятия всех воздействий. Если система устойчивая, то она может неограниченное время находиться в другом состоянии, в другом режиме работы.

Система может быть управляемой, ее можно перевести в другое состояние, но она может быть неустойчивой, не способная выдержать новый режим работы. Математически эти два понятия определяются разными методами. Устойчивость определяется по Ляпунову: если корни характеристического уравнения отрицательные, то система устойчивая [4]. Управляемость определяется с помощью матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Если в одномерной системе определитель полученной матрицы управляемости $\Delta \boldsymbol{P}$ не равен нулю, значит система управляемая, но при этом она может быть неустойчивой. Система может быть наблюдаемой и определители матрицы наблюдаемости $\Delta \boldsymbol{Q}$ не равны нулю, но она может быть неустойчивой. Чтобы автоматическая система надежно работала, она должна быть наблюдаемой, управляемой, устойчивой.

4.2.6 Определение чувствительности системы

Ранее были рассмотрены основные положения, обеспечивающие управляемость системы при различных *внешних управляющих воздействиях.* Качество процесса управления может быть нарушено и под действием *внутренних возмущающих воздействий*.

Чувствительность системы управления – это зависимость регулируемой величины от изменения параметров системы.

Для системы управления важно, чтобы малые отклонения параметров в звеньях системы не приводили к существенным изменениям в её работе. Причины внутренней нестабильности системы управления:

- нелинейные характеристики звеньев системы;
- наличие резонанса в системе;
- трение, гистерезис, насыщение и т.д.

Абсолютная чувствительность определяется как вариация изменения передаточной функции системы $W_c(p)$ к вариации изменения передаточной функции звена $W_{зв}(p)$ и определяется, как частная производная

$$S_{абс} = \partial W_c / \partial W_{зв}$$

Относительная чувствительность отражает связь между относительными вариациями изменения передаточной функции системы и относительными вариациями изменения передаточной функции звена

$$S_{отн} = \frac{\partial W_c}{W_c} / \frac{\partial W_{зв}}{W_{зв}} = S_{абс} \cdot \frac{W_{зв}}{W_c}$$

Определим чувствительность в системе с обратной связью.

В системе с отрицательной обратной связью общая передаточная функция равна

$$W_{общ} = \frac{W_1}{1 + W_1 W_2}$$

Пусть в данной системе передаточная функция звена в прямой цепи W_1 изменила свою характеристику

$$W_1 = W_{10} + \delta W_1$$

Абсолютная функция чувствительности определяется путем дифференцирования общей передаточной функции по W_1

$$S_{абс} = \frac{1}{(1 + W_1 W_2)^2}$$

Относительная функция чувствительности

$$S_{отн} = S_{абс} \cdot W_1 / \frac{W_1}{(1 + W_1 W_2)} = \frac{1}{1 + W_1 W_2}$$

Итак, относительная чувствительность уменьшается при возрастании коэффициента усиления в цепи обратной связи W_2. Поэтому, *можно стабилизировать систему за счет отрицательной обратной связи.* Особенно это эффективно при большом коэффициенте усиления, когда $|W_1 \cdot W_2| \to \infty$, то $S_{отн} \to 0$.

Пусть звено обратной связи в системе изменяет свою характеристику

$$W_2 = W_{20} + \delta W_2$$

Абсолютная функция чувствительности

$$S_{абс} = \frac{-W_1^2}{(1+W_1W_2)^2}$$

Относительная функция чувствительности

$$S_{отн} = \frac{-W_1^2}{(1+W_1W_2)^2} \cdot \frac{(1+W_1W_2)W_2}{W_1} = \frac{-W_1W_2}{(1+W_1W_2)}$$

Итак, относительная чувствительность, при любом значении W_1 имеет большое значение, которое близко к (-1). Следовательно, даже *небольшая нестабильность звена в цепи обратной связи делает всю систему очень чувствительной к этой нестабильности.*

Пример 4.5 - Для стабилизации работы усилителя с коэффициентом усиления $K_у = 10^4$ включена отрицательная обратная связь с $K_{ос} = 0{,}001$. Определить изменение чувствительности усилителя к нестабильности своей работы.

РЕШЕНИЕ

1 Без обратной связи $S_{отн} = 1$, или все погрешности в работе усилителя поступают на его выход и ничем не компенсируются

2 Определяем коэффициент усиления с отрицательной обратной связью

$$K_{у(об.связь)} = \frac{K_у}{1+K_у \cdot K_{ос}} = \frac{10^4}{1+10^4 \cdot 0{,}001} = 909$$

3 Определяем относительную чувствительность

$$S_{отн} = \frac{1}{1+K_у \cdot K_{ос}} = \frac{1}{1+10^4 \cdot 0{,}001} = 0{,}09 \approx 9\%$$

ОТВЕТ. При включении отрицательной обратной связи стабильность работы усилителя увеличилась почти в 10 раз, но коэффициент усиления снизился почти в 10 раз. За повышение качества работы усилителя надо «расплачиваться» количеством (снижением коэффициента усиления).

4.2.7 Определение робастности системы

Если система рассчитана при наличии всей необходимой информации, то в процессе заводского изготовления деталей в пределах установленного допуска, в процессе сборки неизбежны отклонения от проекта. Затем при обкатке, регулировке, возникают дополнительные отклонения. Проблема заключается в том, чтобы система сохраняла заданную работоспособность при этих неконтролируемых изменениях параметров системы. Считается, что система, которая обладает достаточной надежностью при различных условиях работы является *робастной системой*.

Робастная система управления обладает требуемым качеством работы при случайным характере возмущающих воздействий.

От робастной системы требуется, чтобы она:

-обладала *инвариантностью* к внешним возмущениям;

- обладала *низкой чувствительностью* к изменению ее параметров;
- сохраняла *устойчивость* при различных режимах работы.

По сути, робастность характеризуется нечувствительностью системы к тем факторам, которые не были учтены на этапе проектирования. Например, зазоры в механических системах, изменение трения при нагреве деталей, шумы в датчиках электрических систем, нелинейность характеристик при различных режимах работы и т. д. Дополнительно к этому, робастные системы должны быть инвариантны к внешним воздействиям: к изменению нагрузки, к вибрации; должны надежно работать при изменении влажности и атмосферного давления, а также при других изменениях внешних условии работы. Простейшим примером такой робастной системы являются швейцарские ручные часы моего деда, которые точно ходят зимой и летом, в жару и в дождь, без какого-либо ремонта уже более 60 лет.

В принципе, робастные системы – это адаптивные, самонастраивающиеся системы. Но экономически целесообразно иметь обычные системы, которые без контура самонастройки достаточно нечувствительны к различным видам возмущения.

Пример 4.6 - Повысить робастность системы с помощью коэффициента *К*. Необходимо добиться, чтобы при изменении его на $\Delta K = \pm 0{,}9$ система оставалась устойчивой. Характеристическое уравнение системы

$$p^2 - p(K + 1) + K + 4 = 0\,.$$

РЕШЕНИЕ

Задача сводится к обеспечению робастности системы, то есть к сохранению ее работоспособности при заданных колебаниях коэффициента К путем минимизации ее чувствительности.

1 Согласно критериям апериодического регулирования, предложенного автором [7], максимально устойчивая система второго порядка имеет характеристическое уравнение

$$p^2 + 2p + 1 = 0,\ \text{корни которого}\ \lambda_1 = \lambda_2 = -1.$$

2 Приравняем коэффициенты заданного характеристического уравнения и характеристического уравнения с максимальной устойчивостью. В результате получим

$$-(K + 1) = 2, \quad K = -3; \quad K + 4 = 1, \qquad K = -3.$$

3 При любом другом значении коэффициента *К* система может оказаться на границе устойчивости, а при изменении *К* на $\Delta K = 0{,}9$ стать неустойчивой. Так при $K = -1{,}5$ система устойчивая, но при изменении этого коэффициента на 0,9 система становится неустойчивой. При $K = -3$ и $\Delta K = \pm 0{,}9$ система остается устойчивой.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 4.2.3 – 4.2.7

1 Что называется управляемостью системы?

2 Как определяется управляемость по матричному уравнению системы?

3 Что называется наблюдаемостью системы?

4 Как определяется наблюдаемость по матричному уравнению системы?

5 Как определяется характеристический полином передаточной функции по матричному уравнению системы?

6 Можно ли по полученному характеристическому полиному определить устойчивость алгебраическими критериями?

7 Что называется чувствительностью системы?

8 Как определяется относительная чувствительность?

9 Можно ли стабилизировать систему за счёт отрицательной обратной связи?

10 Можно ли стабилизировать звено в цепи обратной связи за счёт изменения передаточной функции в прямой цепи?

11 Как определяется робастность системы?

12 Требование к робастной системе.

4.3 Основы проектирования систем управления

4.3.1 Общие положения

Первой проблемой, которая решалась в теории автоматического управления, было обеспечение её устойчивости. Первые научные исследования были посвящены определению устойчивости (Раус (1874 г.), И.А. Вышнеградский (1876 г.), А.М. Ляпунов (1892 г.), А. Гурвиц (1895 г.)). Позднее центральной задачей в теории управления стало достижение необходимого качества управления. Обобщение накопленных знаний привело к созданию методов синтеза систем управления с заданной степенью устойчивости и необходимыми динамическими и статическими показателями качества.

Основные конструктивные элементы систем управления (объекты, исполнительные устройства, преобразователи, усилители и т.п.), как правило, комплектуются из стандартного оборудования. Главное требование к этим элементам – обеспечить необходимую мощность установки и заданную статическую точность процесса управления. Следующая задача – система должна обладать хорошими динамическими показателями качества управления. Таким образом полное обеспечение требуемых качеств системы управления сводится к решению следующих задач в теории автоматического управления:

- обеспечение устойчивой работы в статическом режиме;
- обеспечение запаса устойчивости при неучтенных возмущающих воздействиях;
- повышение точности управления в статическом режиме;
- уменьшение динамических ошибок в переходном режиме;
- увеличение быстродействия системы.

Чаще всего при решении одной задачи возникает проблема с решением другой задачи. Так при повышении точности регулирования в статическом режиме за счет увеличения коэффициента усиления в замкнутой системе снижается запас устойчивости. В зависимости от назначения системы одни задачи становятся основными, а другие в виде граничных условий. Так в системе стабилизации регулируемой величины главная задача – максимально уменьшить влияние возмущающих воздействий. В следящей системе – облегчить необходимое быстродействие при максимальном уменьшении статической и динамической ошибки. Если система не обладает требуемыми свойствами, то проводится *коррекция системы.*

> ***Коррекция САУ – это изменение статических и динамических характеристик элементов системы с целью обеспечения требуемого запаса устойчивости, повышения статической точности и уменьшения динамических ошибок***.

Основные этапы коррекции:

- определение желаемой статической и динамической характеристики;
- выбор места включения корректирующего звена;
- определение структуры корректирующего звена;
- расчет параметров корректирующего звена.

Определение желаемой характеристики системы зависит от её назначения, используемого оборудования, экономической целесообразности.

Основными видами корректирующих звеньев являются *усилительное, апериодическое, дифференцирующие, интегрирующие,* и их сочетания. Эти корректирующие звенья разделяются на *пассивные* (не имеющие источников энергии) и *активные* (имеющие источник энергии).

> ***Коррекция системы позволяет улучшить её статические и динамические свойства путем изменения коэффициентов системы и/или введения производных и интеграла в корректирующие звенья.***

Как показал опыт использования корректирующих звеньев, наибольший эффект при коррекции системы получается если корректирующее звено включено в обратную связь (в местную или в главную). Рассмотрим вопросы такой коррекции подробнее [2, 9, 14].

4.3.2 Способы включения корректирующего звена

Различают три способа включения корректирующего звена:

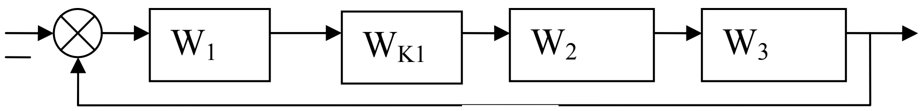
– последовательное включение в главную цепь управления;

– включение в местную обратную связь относительно одного или нескольких элементов главной цепи;

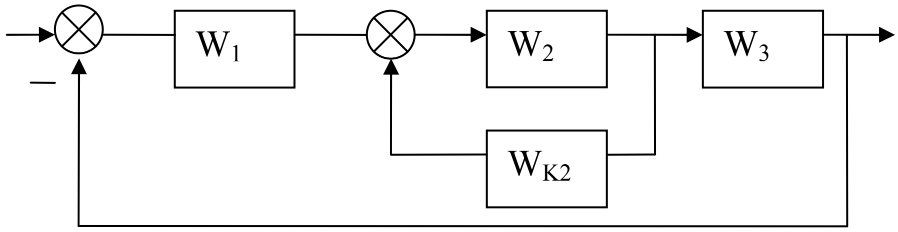
– параллельное включение относительно одного или нескольких элементов главной цепи.

Каждое из этих включений имеет своё преимущество и свой недостаток.

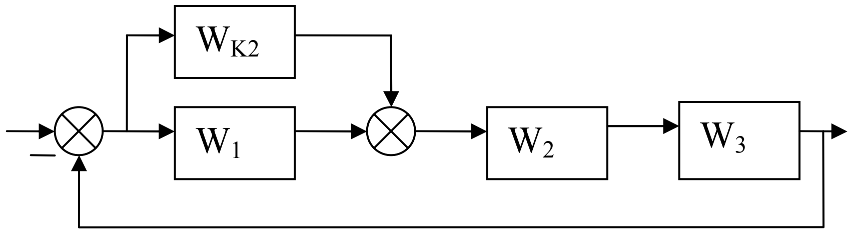
Последовательное корректирующее звено (рисунок 4.5 *а*) наиболее удобно применять в системах, у которых сигнал управления представляет собой напряжение постоянного тока. В этих случаях корректирующее звено W_{K1} обычно выполняется из пассивного четырехполюсника. Учитывая, что сигнал управления в виде сигнала рассогласования весьма мал, а пассивное корректирующее звено дополнительно снижает уровень сигнала, поэтому требуется предварительное усиление сигнала рассогласования (усилитель W_1).



а



б



в

а - последовательное включение; *б* - включение в обратной связи; *в* - параллельное включение.

Рисунок 4.5 – Способы включения корректирующих звеньев

При последовательном включении дифференцирующего звена ускоряется переходной процесс, а при включении интегрирующего звена снижается статическая ошибка регулирования.

Преимущество последовательной коррекции:

– сравнительно не сложно рассчитать корректирующее звено;
– расширение полосы пропускания;
– относительная простота реализации.

Недостаток последовательной коррекции:

– снижение уровня сигнала управления;
– увеличение чувствительности к помехам;
– необходимость согласовывать сопротивления корректирующих элементов с входными и выходными элементами системы.

Включение корректирующего звена в местную обратную связь (рисунок 4.5 *б*).

Такое включение наиболее удобно применять, если необходимо существенно изменить статическую и динамическую характеристику системы. Передаточная функция звена с корректирующим звеном в отрицательной обратной связи

$$W_{экв}(p) = \frac{W_2(p)}{1 + W_2(p)W_{K2}(p)},$$

где $W_2(p)$ - передаточная функция звена в главной цепи;

$W_{K2}(p)$ - передаточная функция корректирующего звена;

$W_{экв}(p)$ - передаточная функция эквивалентного звена.

Если в достаточно широком диапазоне справедливо неравенство $1 << W(j\omega)W_{K2}(j\omega)$, тогда эквивалентное звено $W_{экв}(j\omega) \approx 1/W_{K2}(j\omega)$. Значит, динамические свойства этого участка системы могут полностью определяться корректирующим звеном. Статические свойства, т.е. работа в установившемся режиме тоже определяются корректирующим звеном. Так нелинейная статическая характеристика становится более линейной при достаточно стабильных параметрах корректирующего звена.

Преимущество корректирующего звена в обратной связи:

- значительная эффективность коррекции;
- возможность широкого применения;
- малая чувствительность от помех;
- повышение быстродействия системы;
- уменьшение ошибки регулирования.

Недостатки такой коррекции:

- более сложный расчет и схема включения;
- возможность перегрузки в главной цепи.

Параллельное включение корректирующего звена (рисунок 4.5 *в*)

При этом корректирующее звено включается параллельно какому-либо звену в главной цепи. Иногда такое параллельное включение позволяет при меньшей сложности корректирующего звена обеспечить нужное преобразование сигнала.

Преимущества и недостатки такой коррекции системы аналогичны, как при последовательной коррекции.

4.3.3 Жёсткая обратная связь с усилительным звеном

Жесткая обратная связь (ЖОС) образуется путем включения в цепь местной обратной связи усилительного корректирующего звена.

Охват звена $W(p)$ ЖОС с коэффициентом K_2 приводит к изменению его передаточной функции (рисунок 4.6).

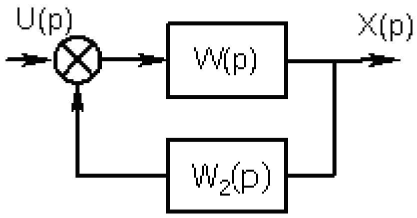


Рисунок 4.6 – Включение корректирующего звена в местную обратную связь

$$W_{экв}(p) = \frac{W(p)}{1 \pm W(p)K_2},$$

где $W(p)$ - передаточная функция охватываемого звена;

$W_2(p) = K_2$ - передаточная функция в цепи обратной связи.

$W_{экв}(p)$ - передаточная функция звена с обратной связью;

Пусть отрицательная ЖОС с коэффициентом K_2 охватывает усилитель

. тогда $$W_{экв}(p) = \frac{K_1}{1 + K_1 K_2}.$$

Получено эквивалентное звено с меньшим коэффициентом усиления. Если статическая характеристика усилителя была нелинейной, то ЖОС делает ее более линейной, а работу усилителя более стабильной. При положительной обратной связи коэффициент усиления увеличивается на $(1 - K_1 K_2)$, но при $1 < K_1 K_2$ усилитель может стать неустойчивым звеном.

Пусть отрицательная ЖОС с коэффициентом K_2 охватывает апериодическое звено

$$W_{экв} = \frac{K_1}{(Tp+1)+K_1K_2} = \frac{K_1}{Tp+(1+K_1K_2)}$$

Разделим числитель и знаменатель на $(1+K_1K_2)$, получим

$$W_{экв} = \frac{\dfrac{K_1}{(1+K_1K_2)}}{\dfrac{Tp}{(1+K_1K_2)}+1} = \frac{K^*}{T^*p+1}$$

Полученное эквивалентное звено осталось апериодическим с меньшим коэффициентом усиления $(K^* < K)$, но более быстродействующее ($T^* < T_1$). При положительной ЖОС увеличивается коэффициент усиления и постоянная времени, но при $(1 < K_1K_2)$ эквивалентное звено становится неустойчивым.

Пусть отрицательная ЖОС охватывает интегрирующее звено

$$W_{экв}(p) = \frac{\dfrac{1}{Tp}}{1+\dfrac{K_2}{Tp}} = \frac{1}{Tp+1\cdot K_2} = \frac{\dfrac{1}{K_2}}{\dfrac{Tp}{K_2}+1} = \frac{K^*}{T^*p+1}.$$

Применение ГОС стало апериодическим с другим коэффициентом усиления и постоянной времени. При положительной ЖОС эквивалентное звено становится неустойчивым.

Пусть отрицательная ЖОС охватывает дифференцирующее звено

$$W_{экв}(p) = \frac{Tp}{1+TK_2p}.$$

Применение ГОС стало реальное дифференцирующее звено. При положительной ЖОС оно становится неустойчивым.

ВЫВОДЫ.

1 При отрицательной ЖОС эквивалентное звено остается устойчивым, но изменяются его параметры, а для интегрирующего и дифференцирующего звена изменяется тип звена.

2 При положительной ЖОС эквивалентное усилительное и апериодическое звено устойчиво при $1 > K_1 K_2$, интегрирующее и дифференцирующее звено при любом K_2 неустойчиво.

4.3.4 Гибкая обратная связь с дифференцирующим звеном

Гибкая обратная связь (ГОС) образуется путем включения в цепь местной обратной связи дифференцирующего звена.

Пусть отрицательная ГОС в виде дифференцирующего звена $W(p) = T_2 p$ охватывает усилительное звено

$$W_{экв}(p) = \frac{K}{1 + T_2 K p}$$

Получено эквивалентное звено в виде апериодического звена. При положительной ГОС эквивалентное звено становится неустойчивым.

Пусть отрицательное ГОС охватывает апериодическое звено

$$W_{экв}(p) = \frac{K}{T_1 p + 1 + K T_2 p} = \frac{K}{(T_1 + K T_2)p + 1}$$

Применение ГОС позволяет не изменяя коэффициент усиления увеличить постоянную времени. При положительной ГОС постоянная времени уменьшается и при $T_1 < K T_2$ звено становится неустойчивым.

Пусть отрицательная ГОС охватывает интегрирующее звено

$$W_{экв}(p) = \frac{\frac{K}{T_1 p}}{1 + \frac{K}{T_1 p} T_2 p} = \frac{\frac{K}{T_1 p}}{\frac{T_1 + K T_2}{T_1}} = \frac{K}{(T_1 + K T_2)p} = \frac{K}{T^* p},$$

Применение ГОС позволяет не изменяя коэффициента усиления увеличить постоянную времени. При отрицательной ГОС постоянная времени уменьшается на величину $K T_2$. При положительной ГОС и при $T_1 < K T_2$ эквивалентное звено становится неустойчивым.

Пусть отрицательная ГОС охватывает дифференцирующее звено

$$W_{экв}(p) = \frac{T_1 p}{1 + T_1 T_2 p^2}.$$

Получено эквивалентное неустойчивое звено при любых значениях T_1 и T_2

ВЫВОДЫ.

При отрицательной ГОС в виде дифференцирующего звена в эквивалентном звене возрастает постоянная времени, а дифференцирующее звено охваченное дифференцирующим звеном становится неустойчивым.

1 При положительной ГОС в виде дифференцирующего звена в апериодическом и интегрирующем звене уменьшается постоянная времени, но при $T_1 < KT_2$ эти звенья становятся неустойчивые.

4.3.5 Гибкая обратная связь с интегрирующим звеном

ГОС образуется путем подключения в цепь местной обратной связи интегрирующего звена.

Пусть отрицательная ГОС в виде интегрирующего звена $W(p) = 1/T_2 p$ охватывает усилительное звено $W(p) = K$

$$W_{экв}(p) = \frac{K}{1 + \frac{K}{T_2 p}} = \frac{KT_2 p}{T_2 p + K}$$

Полученное эквивалентное звено стало реально дифференцирующим. При положительной ГОС оно неустойчивое.

Пусть отрицательная ГОС охватывает апериодическое звено

$$W_{экв}(p) = \frac{\frac{K}{T_1 p + 1}}{1 + \frac{K}{(T_1 p + 1)} \cdot \frac{1}{T_2 p}} = \frac{KT_2 p}{T_1 T_2 p^2 + T_2 p + K}$$

Полученное эквивалентное звено состоит из двух звеньев. Первое - идеальное дифференцирующее $W_1(p) = KT_2 p$. Второе звено стало апериодическим звеном второго порядка $W_2(p) = 1/(T_1 T_2 p + T_2 p + K)$. При положительной ГОС оно неустойчивое.

Пусть отрицательная ГОС охватывает дифференцирующее звено

$$W_{экв}(p) = \frac{T_1 p}{1 + \dfrac{T_1 p}{T_2 p}} = \frac{T_1 T_2 p}{T_2 + T_1} = T * p,$$

Полученное эквивалентное звено осталось дифференцирующим с новым значением постоянной времени. При положительной ГОС это звено неустойчиво.

Пусть отрицательная ГОС охватывает интегрирующее звено

$$W_{экв}(p) = \frac{\dfrac{1}{T_1 p}}{1 + \dfrac{1}{T_1 T_2 p^2}} = \frac{T_2 p}{(T_1 T_2 p^2 + 1)}$$

Полученное эквивалентное звено неустойчивое при любых значения T_1 и T_2.

ВЫВОДЫ

1 Если отрицательная ГОС в виде интегрирующего звена охватывает усилительное или апериодическое звено, то эквивалентное звено становится дифференцирующим; если ГОС охватывает интегрирующее звено, то эквивалентное звено становится неустойчивым.

2 Если положительное ГОС в виде интегрирующего звена охватывает любое звено, то эквивалентное звено неустойчиво.

ОБЩИЕ ВЫВОДЫ

1 Отрицательная обратная связь замедляет процессы в эквивалентном звене. Для некоторых соотношений постоянных времени охватываемого звена и постоянных времени в цепи обратной связи ГОС делает эквивалентное звено неустойчивым.

2 Положительная обратная связь ускоряет процессы в эквивалентном звене, повышает коэффициент усиления. Но при этом должно быть ограничение на коэффициент передачи и постоянную времени в звене обратной связи.

Многие звенья вообще нельзя охватывать положительной ГОС. При этом они сразу становятся неустойчивые.

4.4 Регуляторы автоматических систем

4.4.1 Постановка задачи

Автоматические регуляторы в настоящее время являются самым массовым видом средств автоматизации технологических процессов. Для правильного выбора и эффективного использования автоматических регуляторов надо хорошо знать их возможности, алгоритм работы, технические характеристики. Особенно важно уметь правильно учитывать динамические характеристики регуляторов, поскольку в реальных производственных условиях регулятор находится под влиянием изменяющихся воздействий и должен реагировать на них согласно заданного закона регулирования. Поэтому, при разработке конкретных автоматических систем регулирования, необходимо:

- провести анализ динамических характеристик объекта регулирования;
- разработать алгоритм работы регулятора;
- установить объём информатизации, необходимой для управления технологическим процессом;
- выбрать средства управления;
- согласовать динамические характеристики объекта и регулятора;
- определить оптимальные параметры регулятора.

Следует отметить, что применение тех или иных регуляторов в значительной степени определяется экономической целесообразностью и прежде всего обеспечением безопасности для здоровья обслуживающего персонала.

Максимальный экономический эффект при автоматизации производственных процессов может быть получен, когда эти вопросы решаются уже в процессе проектирования с учётом современных методов и средств автоматизации, когда оператор будет свободен от решения текущих, стандартных решений при работе агрегата.

4.4.2 Анализ применяемых регуляторов

Автоматические регуляторы характеризуются большим разнообразием по назначению, принципу действия, конструктивным особенностям, по виду используемой энергии, по закону регулирования и т.п. В связи с этим рассмотрим основные признаки, по которым классифицируются промышленные регуляторы [13].

По виду регулируемого параметра:

- регуляторы температуры, давления, расхода, скорости вращения, напряжения, тока и т.п. Необходимо отметить, что многие современные регуляторы являются универсальными для различных технологических параметров. Специфическую особенность имеет конструкция чувствительного элемента датчика и преобразующего устройства.

По виду используемой энергии:

- электрические регуляторы, позволяющие просто реализовать сложный алгоритм регулирования с практически неограниченным радиусом действия, легкость монтажа и настройки;
- пневматические регуляторы имеют сравнительно простую конструкцию;
- гидравлические регуляторы обеспечивают большие усилия при малых габаритах, высокую чувствительность и плавность регулирования.

По конструктивному исполнению:

- регуляторы приборного типа не имеют непосредственную связь с первичным измерительным преобразователем и работают только в комплексе с вторичным прибором и через специальный преобразователь подают сигнал на исполнительное устройство. Чаще всего этот сигнал в виде разности заданного и действительного значения регулируемой величины;
- регуляторы аппаратного типа выполняются в виде двух самостоятельных аппаратов. Первый - определяет отклонение регулируемого параметра, второй - формирует сигнал по заданному закону управления;

- регулятор блочного типа состоит из унифицированных блоков, выполняющих простейшие операции. Все входные и выходные сигналы унифицированы. Такой принцип построения позволяет обеспечить универсальность регулятора и использовать его для регулирования самых различных параметров системы.

По числу регулируемых параметров:

- одноканальные, которые обеспечивают регулирование одного параметра в работе системы;

- многоканальные, которые обеспечивают регулирование нескольких параметров системы. Например, соотношение расхода материала, соотношение давления и температуры и т.п.

4.4.3 Выбор типа регулятора

Определяющим условием при выборе типа регулятора являются требования, предъявляемые к качеству процесса регулирования. При этом под выбором типа, регулятора понимают выбор закона регулирования. Пропорциональный или П-регулятор; интегральный или И-регулятор; пропорционально-интегрирующий или ПИ-регулятор; пропорционально-дифференцирующий или ПД-регулятор; пропорционально-интегрально-дифференцирующий или ПИД-регулятор. Выбирается простейший по закону регулирования, и, следовательно, более дешевый и простой в эксплуатации.

Главными показателями, определяющими выбор регулятора, являются динамические характеристики объекта (коэффициент передачи $K_{об}$, постоянная времени $T_{об}$, запаздывание $\tau_{об}$) и требования к допустимой ошибки регулирования (динамической и статической).

Предварительный выбор регулятора может быть сделан по следующим соображениям:

– И - регулятор только для объектов со значительным самовыравниванием;
– П, ПИ, ПИД - регуляторы пригодны для любых объектов;

– И, ПИ, ПИД - регуляторы обеспечивают астатическое регулирование;

– П- регулятор имеет статическую ошибку;

– И- регулятор имеет большое время регулирования;

– ПД- регуляторы имеют меньшее время регулирования по сравнению с П- регулятором, но динамически менее устойчивые.

ВЫВОД. Наиболее простой и надежный П-регулятор; наиболее высокие качества регулирования имеет ПИД-регулятор.

Второй показатель, по которому выбирается регулятор – это согласованность динамических характеристик выбранного регулятора и объекта регулирования (ОР). Возможны такие случаи, когда ОР по своим динамическим свойствам не способен полностью выполнить команду регулятора, когда их статические и динамические характеристики не согласуются при любых настроечных параметрах регулятора. Исходные данные для согласования динамических характеристик регулятора и объекта являются следующие:

– постоянная времени объекта $T_{об}$;

– чистое запаздывание (от регулятора до объекта) $\tau_{об}$;

– коэффициент передачи объекта $K_{об}$;

– допустимая динамическая ошибка $\triangle x_{дин}$;

– допустимое время регулирования t_p;

– допустимая статическая ошибка регулирования $\triangle x_{ст}$;

– воздействие исполнительного органа $\triangle y$ (в процентах от полного хода).

По этим характеристикам определяют *динамический коэффициент объекта регулирования* $R_q^{об}$.

Для статических объектов (с самовыравниванием) $R_q^{об} = \triangle x \cdot K_{об} \cdot \triangle y$.

Для астатических объектов (без самовыравнивания) $R_q^{об} = \triangle x \cdot T_{об}/\tau_{об} \cdot \triangle y$.

Определение *динамического коэффициента регулятора* $R_q^{рег}$ проводится в зависимости от вида переходного процесса (рисунок 4.7). Различают:

- апериодический переходной процесс (без перерегулирования);
- переходной процесс с перерегулированием до 20 % ;
- переходной процесс по минимуму ИКО (интегральная квадратичная оценка).

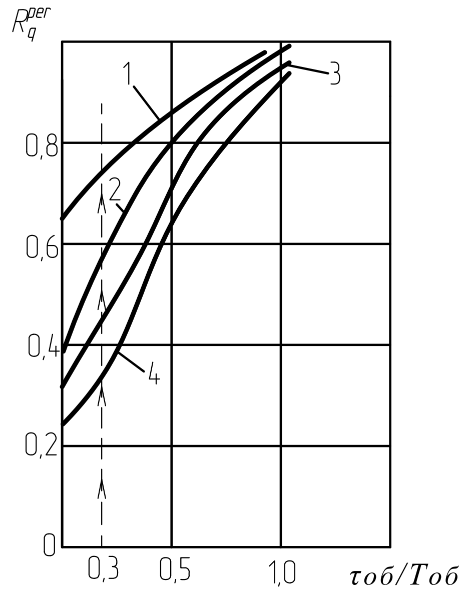


Рисунок 4.7 – Динамический коэффициент регулятора для объектов с самовыравниванием и до 20 % перерегулирования

В зависимости от соотношения $\tau_{об}/T_{об}$ составлены графики для выбора типа регулятора по величине динамического коэффициента регулятора R_q. На рисунке 4.7 показан график зависимости $R_q^{рег}$ от $\tau_{об}/T_{об}$ для объектов с самовыравниванием и до 20 % перерегулирования

1 – для И-регулятора;

2 – для П-регулятора;

3 – для ПИ-регулятора;

4 – для ПИД-регулятора.

Примечание – Для других видов переходного процесса эти зависимости аналогичны.

Согласование динамических характеристик регулятора и объекта определяется по неравенству

$$R_q^{рег} < R_q^{об},$$

где $R_q^{рег}$ – динамический коэффициент регулятора;

$R_q^{об}$ – динамический коэффициент объекта.

4.4.4 Примеры расчёта регулятора

Пример 4.7 [13] – Выбрать закон регулирования для статического объекта со следующими параметрами

$K_{об} = 1,8;$ $T_{об} = 130$ с; $\tau_{об} = 40$ с; $\triangle y_{об} = 20\ \%$ хода ИУ.

Технологические требования к автоматическому регулированию: $\triangle x_{ст} < 6^0$ С; $\triangle x_{дин} < 20^0$ С; $t_{рег} < 400$ с; $\sigma\,\% < 20\ \%;$

РЕШЕНИЕ

1 Определяем динамический коэффициент объекта

$$R_q^{об} = \frac{\Delta x_{дим}}{K_{об} \cdot \Delta y} = \frac{20}{1,8 \cdot 20} = 0,56$$

2 Определяем отношение $\tau_{об} / T_{об} = 40 / 130 = 0,3$

3 Динамические коэффициенты регулятора при $\tau_{об} / T_{об} = 0,3$ (рисунок 4.7) следующие:

- для И-регулятора $R_q = 0,72$; - для ПИ-регулятора $R_q = 0,44$;

- для П-регулятора $R_q = 0,54$; - для ПИД-регулятора $R_q = 0,40$.

ВЫВОДЫ. Динамический коэффициент И-регулятора ($R_q = 0,72$) не согласуется с динамическим коэффициентом объекта ($R_q^{об} = 0,56$). Получаем соотношение $R_q > R_q^{об}$ ($0,72 > 0,56$). Остальные типы регуляторов (П, ПИ, ПИД) имеют R_q меньше $R_q^{об}$ и могут быть использованы для автоматического регулирования.

Пример 4.8 - Проверить выбранные регуляторы в примере 4.7 по возможности обеспечить заданное время регулирования ($t_{рег} < 400\ с$) и заданную статическую точность ($\triangle x_{ст} < 6\ ^0$ С). Определить настроечные параметры регулятора (K_P, $T_и$, $T_п$).

Для системы с самовыравниванием и с перерегулированием до 20 % принимаются следующие соотношения $t_р / \tau_{об}$ для определения минимально возможного времени регулирования.

$t_р / \tau_{об} \le 6,5$ для П-регулятора;

$t_р / \tau_{об} \le 12$ для ПИ-регулятора;

$t_р / \tau_{об} \le 8$ для ПИД-регулятора;

Статическая ошибка определяется по формуле $\Delta x_{cm} = 0{,}14 K_{об} \Delta y_{об}$

РЕШЕНИЕ.

1 Определяем время регулирования при $\tau_{об} = 40$ с.

$t_р = 6{,}5 \cdot 40 \le 260$ с для П-регулятора;

$t_р = 12 \cdot 40 \le 480$ с для ПИ-регулятора;

$t_р = 8 \cdot 40 \le 320$ с для ПИД-регулятора.

2 Определяем статическую ошибку регулирования

$\triangle x_{cm} = 0{,}14 \cdot 1{,}8 \cdot 20 = 5{,}1^0$ для П-регулятора

$\triangle x_{cm} = 0^0$ для ПИ-регулятора и ПИД-регулятора.

ВЫВОДЫ.

– ПИ-регулятор при заданном времени запаздывания $\tau_{об}$ не способен обеспечить допустимое время регулирования ($t_р < 400$ с);

– П-регулятор может обеспечить достаточное быстродействие при статической ошибке $\triangle x_{cm} = 5{,}1^\circ$;

–ПИД-регулятор обеспечивает $\triangle x_{cm} = 0$, но время переходного процесса увеличивается на 23 %, по сравнению с П-регулятором.

Настроечные параметры в соответствии с выбранным законами регулирования рассчитывают следующие:

- для П-регулятора коэффициент $K_р$;
- для ПИ - регулятора коэффициент $K_р$ и $T_и$;
- для ПИД-регулятора коэффициенты $K_р$, $T_и$, $T_п$.

Настроечный параметр для П-регулятора

$$K_P = \frac{0{,}7 \cdot T_{об}}{K_{об} \cdot \tau_{об}} = \frac{0{,}7 \cdot 230}{1{,}8 \cdot 40} = 2{,}23.$$

Настроечный параметр для ПИ-регулятора

$$K_P = \frac{0{,}7}{K_{об} \cdot \tau_{об} / T_{об}} = \frac{0{,}7}{1{,}8 \cdot 40 / 400} = 3{,}88;$$

$$T_и = 0{,}7 \cdot T_{об} = 280.$$

Настроечный параметр для ПИД-регулятора

$$K_P = \frac{1{,}2 \cdot T_{об}}{K_{об} \cdot \tau_{об}} = \frac{1{,}2 \cdot 230}{1{,}8 \cdot 40} = 3{,}83.$$

$$T_и = 2\ \tau_{об} = 2 \cdot 40 = 80;$$

$$T_п = 0{,}4\ \tau_{об} = 0{,}4 \cdot 40 = 16\ .$$

Полученные значения $K_р$, $T_и$, $T_п$ являются приближенными и подлежат последующему уточнению.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 4.4

1 По каким признакам классифицируются регуляторы?

2 Главные показатели для выбора регулятора.

3 Характеристика П-регулятора.

4 Характеристика И-регулятора.

5 Характеристика ПИ-регулятора.

6 Характеристика ПИД-регулятора.

7 Что характеризует динамический коэффициент объекта ($R_q^{об}$)?

8 По каким параметрам определяется $R_q^{об}$ для статических объектов?

9 Что характеризует динамический коэффициент регулятора ($R_q^{рег}$)?

10 По каким параметрам определяется $R_q^{рег}$?

11 Условие согласования динамических характеристик регулятора и объекта.

12 Какие настроечные параметры рассчитываются для П, ПИ, ПИД-регу ляторов?

5 Системы импульсного регулирования (СИР)

5.1 Определение импульсной системы и ее назначение

Автоматическая система регулирования, содержащая устройство в котором через равные промежутки времени непрерывный сигнал управления принудительно прерывается и превращается в последовательность импульсов, называется системой импульсного регулирования (СИР).

Устройство, которое обеспечивает преобразование непрерывного сигнала в последовательность импульсов называется импульсным элементом (ИЭ).

Системы импульсного регулирования по сравнению с системами, имеющими непрерывный сигнал управления, имеют следующие преимущества:

- обеспечивают более высокую точность при преобразовании и передачи информации;

- обеспечивают более высокую устойчивость системы благодаря наличию паузы при передачи сигнала;

- в цифровых системах управления, которые являются одним из видов импульсных систем, имеется возможность реализовать достаточно сложный алгоритм управления;

- с помощью одной СИР можно осуществлять управление процессами в нескольких управляемых объектах путем поочередного их подключения;

- во многих случаях они оказываются проще и надежнее в конструктивном отношении по сравнению с системами непрерывного решения.

СИР получили широкое распространение в технике [2, 6, 12, 15]. Они, например, используются для автоматической регулировки усилий, для подстройки частоты приемников, для сопровождения цели по дальности, при работе радиолокационной станции в режиме кругового обзора. Они успешно применяются при регулировании медленно протекающих процессов, таких как регулирование температуры в котлах, печах, нагревателях, регулирование давление газов, паров, жидкостей. СИР применяется в системах телеуправления для получения достаточно точных результатов. Управление спутниками, станцией «Мир» осуществляется и с помощью СИР. Благодаря широкого диапазона регулирования и высокой надежности СИР все шире используется при управлении самыми разными объектами.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.1

1 Какая САУ является импульсной?

2 Что называется импульсным элементом?

3 Преимущество СИР.

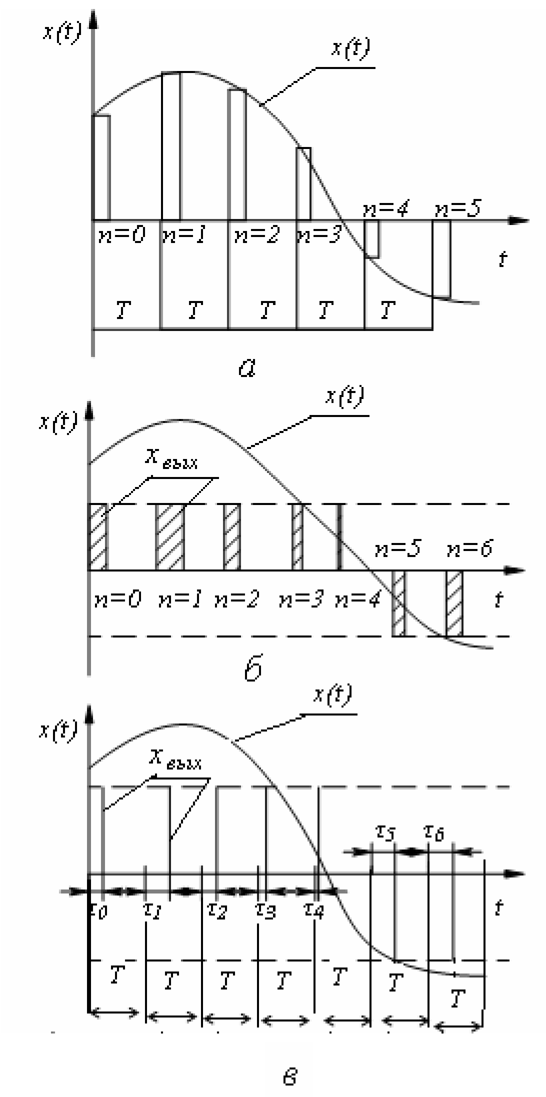
4 Где используются СИР?

5.2 Виды импульсной модуляции

Импульсная система содержит импульсный элемент (ИЭ), который осуществляет квантование (преобразование) непрерывного входного сигнала $x(t)$ в последовательность модулированных импульсов. Основными параметрами модулированных импульсов является *амплитуда* (высота) импульса А, *длительность* (ширина) импульса ℓ, *положение импульса* τ внутри периода его повторения T.

Входной величиной на импульсный элемент (ИЭ) является непрерывная функция времени $x(t)$. Выходной величиной $x_{вых}$ является последовательность равностоящих друг от друга во времени импульсов. Параметры выходных импульсов с ИЭ определяются в дискретные моменты времени $t = nT$ называемые моментами съема импульсов. Эти моменты съема определяются числом n, где $n = 0,1,2,\ldots$. Величина T называется периодом чередования импульсов или тактом импульсного элемента. Различные способы квантования непрерывного сигнала и преобразование его в последовательность модулированных импульсов показаны на рисунке 5.1.

В амплитудном импульсном элементе происходит *амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)* непрерывного сигнала в последовательность импульсов постоянной длительности. Амплитуда этих импульсов $x_{вых}$ пропорциональна значению входного сигнала *x(t)*. Эти сигналы на выходе импульсного элемента подаются в систему через равные промежутки времени *T* (рисунок 5.1 а).



а - квантование по АИМ;

б - квантование по ШИМ;

в - квантование по ВИМ.

Рисунок 5.1 - Различные виды квантования сигналов

В широтном импульсном элементе происходит *широтно-импульсная модуляция (ШИМ)* непрерывного сигнала в импульсы постоянной амплитуды, но длительность этих импульсов $x_{вых}$ пропорциональна значению входного сигнала *x(t)* (рисунок 5.1б).

Временной импульсный элемент осуществляет *временную импульсную модуляцию (ВИМ)* непрерывного сигнала в импульсы постоянной амплитуды и постоянной длительности, а положение импульсов внутри такта сдвинуто на величину $\tau_i = \alpha T_i$, где коэффициент α пропорционален значению входного сигнала *x(t)* (рисунок 5.1 в).

Есть и другие способы квантования сигналов, а также различные формы импульсов, например, треугольные, синусоидальные, экспотенциальные и т.д. Анализ СИР при различной форма импульсов принципиально не отличается. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать СИР с амплитудно-импульсной модуляцией (АИМ), как наиболее простую при расчете.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.2

1 Что характеризует такт в ИЭ?

2 Как производится амплитудно-импульсная модуляция (АИМ)?

3 Как производится широтно-импульсная модуляция (ШИМ)?

4 Как производится временная импульсная модуляция (ВИМ)?

5 Какие еще бывают формы импульсов?

5.3 Передаточная функция прямоугольного импульса

Для определения *передаточной функции K(p)* прямоугольного импульса нужно получить её изображение по Лапласу. Переходную функцию прямоугольного импульса можно представить как сумму двух ступенчатых функций, где вторая ступенчатая функция сдвинута на величину запаздывания τ и имеет противоположную полярность (рисунок 5.2)

$$K(t) = 1(t) - 1(t-\tau).$$

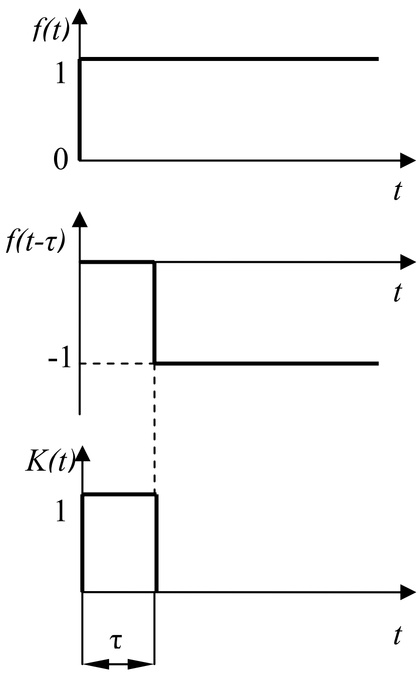


Рисунок 5.2 - Формирование прямоугольного импульса

Изображение Лапласа этой формулы

$$K(p) = \frac{1}{p} - \frac{1 \cdot e^{-\tau p}}{p} = \frac{1 - e^{-\tau p}}{p}.$$

Получена передаточная функция прямоугольного импульса. Числитель полученной передаточной функции можно разложить в ряд Маклорена около $\tau \to 0$ (считается, что продолжительность импульса очень мала).

$$1 - e^{-\tau p} = 1 - [1 - \tau p + (-\tau p)^2 / 2 + \ldots].$$

Если $\tau \to 0$, то этот ряд быстро сходится и можно ограничиться первыми членами ряда

$$1 - 1 + \tau p = \tau p.$$

При $\tau \to 0$ передаточная функция $K(p) = \tau p / p = \tau$.

При расчете СИР значение τ определяют через *коэффициент скважности* $\gamma = \tau/T$, тогда $\tau = \gamma T$. Передаточная функция прямоугольного импульса через коэффициент скважности

$$K(p) = \frac{1 - e^{-\gamma Tp}}{p} \quad \text{или} \quad K(p) = \gamma T \ \text{при} \ \gamma \to 0.$$

Для упрощения анализа СИР вместо текущего времени t применяют относительное время $\bar{t} = t/T$, где T – период повторения импульсов или такт квантования. Таким образом за единицу времени принимают не секунду, а время такта. Множитель Лапласа p при относительном времени обозначают q, где $p = q/T$, а полученное изображение умножают на $1/T$. Например, передаточная функция прямоугольного импульса в относительном времени

$$K(q) = \frac{1}{T} \cdot \frac{1 - e^{\frac{-\gamma Tq}{T}}}{q/T} = \frac{1 - e^{-\gamma q}}{q}.$$

Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.3

1 Как происходит формирование прямоугольного импульса в ИЭ?

2 Передаточная функция прямоугольного импульса.

3 Передаточная функция прямоугольного импульса при $\gamma << 1$.

4 Как определяется коэффициент скважности ?

5 Что принимается за единицу времени при переводе СИР в относительное время?

6 Как проводится перевод СИР в относительное время?

5.4 Решетчатая функция

СИР можно представить в виде последовательного соединения импульсного элемента и непрерывной части системы. Непрерывная часть системы реагирует лишь на дискретные значения сигнала импульсного элемента. На этом основании непрерывную часть системы заменяют *решетчатой функцией* или функцией дискретного аргумента.

Решетчатой называется функция, которую образуют аргументы непрерывной функции при дискретных равностоящих друг от друга значениях независимой переменной.

Эта функция существует только при дискретных значениях аргумента, а между этими значениями она не существует (рисунок 5.3). Решетчатую функцию обозначают $f\,[n]$, где n порядковый номер дискретного значения независимой переменной импульсного элемента.

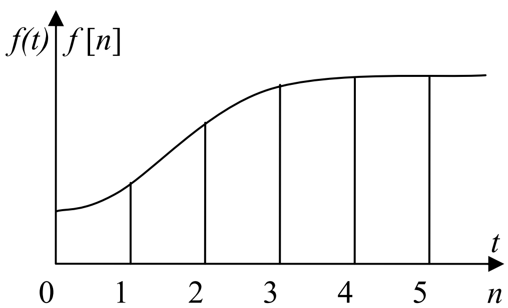


Рисунок 5.3 - Непрерывная функция *f(t)* и соответствующая решетчатая функция $f\,[n]$

Примечания - Полученная решетчатая функция отражает непрерывную функцию лишь в дискретные моменты времени. Для выявления поведения непрерывной функции между этими дискретными моментами времени вводят промежуточное фиксированное время $\pm\,\Delta\;t$, которое может изменяться в пределах такта от 0 до T. При этом решетчатая функция $f\,[nT \pm \Delta\;t]$ называется *смещенной функцией*. Если решетчатая функция в относительном масштабе времени, то смещенная функция обозначается $f\,[n,\;\varepsilon]$, где $\varepsilon = \pm\,\Delta\;t/T$. Анализ СИР со смещенной функцией и без смещения ($\varepsilon = 0$) принципиально не отличается, только становится более громоздким. В дальнейшем принимаем $\varepsilon = 0$.

Скорость изменения *непрерывной функции f(t)* определяется первой производной $df(t)/dt$. Скорость изменения *решетчатой функции* $f\,[n]$ или разность первого порядка определяется разностью между следующим и предыдущей ординатой импульса

$$\Delta f[n] = f[n+1] - f[n].$$

Разность второго порядка $\Delta^2 f\,[n]$ определяется

$$\Delta^2 f[n] = \Delta f[n+1] - \Delta f[n].$$

Разность k-го порядка определяется

$$\Delta^k f[n] = \Delta^{k-1} f[n+1] - \Delta^{k-1} f[n].$$

При исследовании непрерывных линейных систем используют *дифференциальное уравнение системы k-го порядка*

$$f(t) = a_k \frac{d^k x}{dt^k} + a_{k-1} \frac{d^{k-1} x}{dt^{k-1}} + \ldots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x.$$

При исследовании СИР используется *разностное уравнение k-го порядка*

$$f[n] = a_k \Delta^k x[n] + a_{k-1} \Delta^{k-1} x[n] + \ldots + a \Delta x[n] + a_0 x[n],$$

где $f[n]$ - известная дискретная функция;

$x[n]$ - искомая дискретная функция, представляющая собой решение разностного уравнения.

Решение разностного уравнения можно найти различными методами, аналогично решению дифференциального уравнения. Наиболее удобный метод основан на дискретном преобразовании Лапласа.

5.5 Дискретное преобразование Лапласа

Обычное преобразование Лапласа - это преобразование непрерывной функции

$$F(p) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} dt.$$

Дискретное преобразование Лапласа (или *D*-преобразование) – это преобразование решетчатой функции. Выражение для дискретного преобразования Лапласа получается, если интеграл заменить на сумму, непрерывную функцию *f(t)* на решетчатую $f[n]$, время *t* на дискретный аргумент *n*. Если в качестве аргумента берется относительное время $\bar{t} = t/T$, то выражение для *D*-преобразования

$$D\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} f[n] \cdot e^{-qn}.$$

Пример 5.1 - Дана единичная ступенчатая решетчатая функция $f[n] = 1[n]$ (рисунок 5.4). Определить $D\{f[n]\}$.

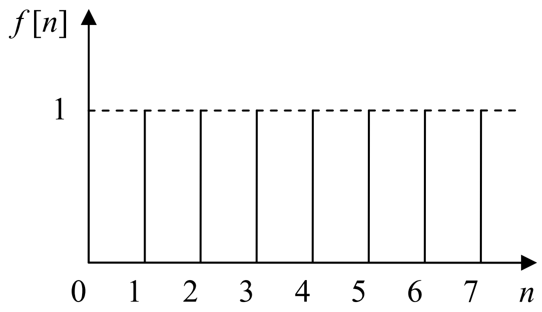


Рисунок 5.4 – Единичная ступенчатая решетчатая функция

РЕШЕНИЕ

$$D\{f[n]\} = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \cdot e^{-qn} = 1 + e^{-q} + e^{-2q} + e^{-3q} + \ldots,$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$.

Полученное выражение представляет собой бесконечную геометрическую прогрессию. Первый член прогрессии $a = 1$, знаменатель прогрессии $b = e^{-q}$. Сумма этой прогрессии определяется по формуле

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-qn} = \frac{a}{1-b} = \frac{1}{1-e^{-q}} \cdot \frac{e^q}{e^q} = \frac{e^q}{e^q - 1}.$$

В дискретное D-преобразование переменная q входит в виде e^q. Поэтому это преобразование не является рациональной функцией от q. В связи с этим исключается возможность применения обычных методов анализа. Если в D-преобразовании e^q заменить на z, то получим так называемое z-преобразование, которое является рациональной функцией. Преимущество z-преобразования:

- анализ импульсных сигналов систем в плоскости z во многом будет подобен уже известному анализу непрерывных систем в плоскости p;

- расчет импульсных систем проводится по передаточной функции, где вместо множителя Лапласа p используется z , и расчёт проводится аналогично расчету линейных систем;

- обратное z-преобразование, то есть определение значения $f[nT]$ проводится сравнительно просто, аналогично обратному L-преобразованию линейных систем;

- при расчете импульсных систем все звенья системы (в том числе линейные зависимости) преобразуются по z-преобразованию. В таблице 5.1 показано такое z-преобразование.

Таблица 5.1 - Таблица линейного и дискретного преобразования по Лапласу

Линейная система		Система импульсного регулирования	
$f(t)$	$F(p)$	$f[n]$	$F[n]$
$1(t)$	$1/p$	$1[n]$	$\dfrac{z}{z-1}$
t	$1/p^2$	n	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$
t^2	$2/p^3$	n^2	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$\dfrac{1}{p+\alpha}$	$e^{-\alpha n}$	$\dfrac{z}{z-e^{-\alpha T}}$
$\sin \beta t$	$\dfrac{\beta}{p^2+\beta^2}$	$\sin \beta n$	$\dfrac{z \sin \beta T}{z^2-2z\cos \beta T+1}$
$\cos \beta t$	$\dfrac{p}{p^2+\beta^2}$	$\cos \beta n$	$\dfrac{z(z-\cos \beta T)}{z^2-2z\cos \beta T+1}$

Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.5

1 Что называется дискретным преобразованием Лапласа?

2 Как определяется сумма бесконечной прогрессии при проведении D-преобразования единичной ступенчатой функции?

3 Как производится z-преобразования?

4 Преимущество расчета СИР после z-преобразования.

5.6 Получение передаточной функции СИР

Дискретную передаточную функцию $K(z)$ можно получить по передаточной функции линейной системы $W(p)$. Для этого $W(p)$ предварительно разлагают на простые дроби и преобразуют значения *F(p)* и в $F[z]$ (таблица 5.1). Затем с помощью алгебраических преобразований определяют $K[z]$.

Пример 5.2 [10] - Определить $K[z]$ при $\gamma << 1$ согласно заданной структурной схемы рисунка 5.5. Амплитуда входного сигнала K_n.

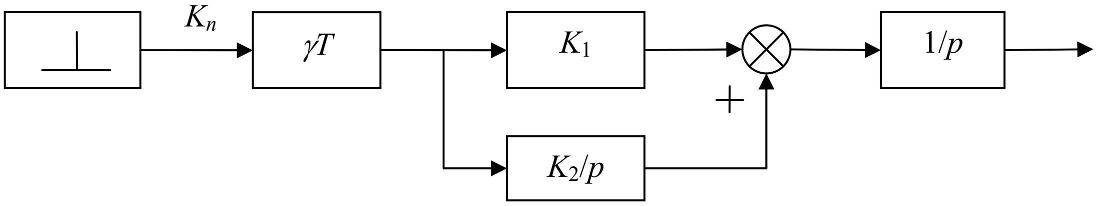


Рисунок 5.5 - Структурная схема СИР к примеру 5.2

РЕШЕНИЕ

1 Передаточная функция линейной разомкнутой системы

$$W_p(p) = K_n \cdot \gamma T\left(\frac{K_1}{p} + \frac{K_2}{p^2}\right).$$

2 Согласно таблице 5.1 проводим Z-преобразование и получаем передаточную функцию импульсной системы

$$K_p[z] = K_u\gamma T\left(\frac{K_1 z}{z-1} + \frac{K_2 z}{(z-1)^2}\right) = \frac{K_u\gamma T K_1 z^2 + K_u\gamma T(K_2 - K_1)z}{(z-1)^2} = \frac{b_2 z^2 + b_1 z}{a_2 z^2 + a_1 z + a_0},$$

где $b_2 = K_n\gamma T K_1$; $b_1 = K_n\gamma T(K_2 - K_1)$; $a_2 = 1$; $a_1 = -2$; $a_0 = 1$.

5.7 Условие устойчивости замкнутой СИР

Особенности расчёта такой СИР в том, что импульсный элемент замкнутой системы находится внутри замкнутого контура (рисунок 5.6).

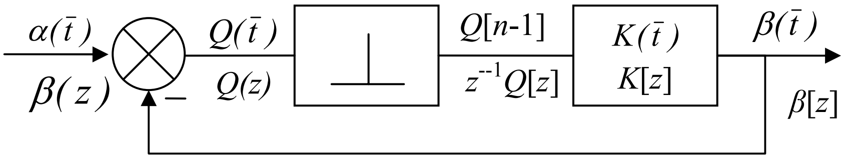


Рисунок 5.6 – Простейшая структурная схема замкнутой СИР

В замкнутой СИР сигнал $Q(\bar{t}) = \alpha(\bar{t}) - \beta(\bar{t})$. Поэтому параметры импульсов

Q(z), воздействующие на непрерывную часть системы зависят дополнительно от управляемой величины $\beta(z)$. В тех системах, у которых приведённая непрерывная часть малоинерционная, управляемая величина системы $\beta(z)$ претерпевает скачок в момент поступления импульсов с выхода системы на вход. Тогда передаточная функция замкнутой импульсной системы по управлению $K_{зам}[z]$ с единичной обратной связью через разомкнутую систему $K_{раз}[z]$ определяется

$$K_{зам}[z]=\frac{K_{раз}[z]}{1+z^{-1}K_{раз}[z]}.$$

Если сигнал, поступающий на импульсный элемент не имеет скачков, тогда передаточная функция замкнутой системы $K_{зам}[z]$ через разомкнутую $K_{раз}[z]$

$$K_{зам}[z]=\frac{K_{раз}[z]}{1+K_{раз}[z]}.$$

Эта формула аналогична известной формуле замкнутой линейной САУ.

Пример 5.3 - Определить передаточную функцию замкнутой импульсной системы по передаточной функции разомкнутой системы по примеру 5.2 при

$$K_{раз}[z]=\frac{b_2z^2+b_1z}{a_2z^2+a_1z+a_0}.$$

РЕШЕНИЕ

$$K_{зам}[z]=\frac{K_{раз}[z]}{1+K_{раз}[z]}=\frac{\dfrac{b_2z^2+b_1z}{a_2z^2+a_1z+a_0}}{1+\dfrac{b_2z^2+b_1z}{a_2z^2+a_1z+a_0}}=\frac{b_2z^2+b_1z}{(a_2+b_2)z^2+(a_1+b_1)z+a_0}.$$

Условия устойчивости СИР как и в теории линейных САУ определяются по характеристическому уравнению замкнутой системы

$$K_з[z]=\frac{K_p[z]}{1+K_p[z]}=\frac{b_mz^m+b_{m-1}z^{m-1}+...+b_0}{C_nz^n+C_{n-1}z^{n-1}+...+C_0}.$$

Пусть определены корни характеристического уравнения $z_1, z_{2,\dots} z_n$, тогда переходная составляющая решения

$$\alpha_n[t] = A_1 z_1^{\bar{t}} + A_2 z_2^{\bar{t}} + \dots + A_n z_n^{\bar{t}}.$$

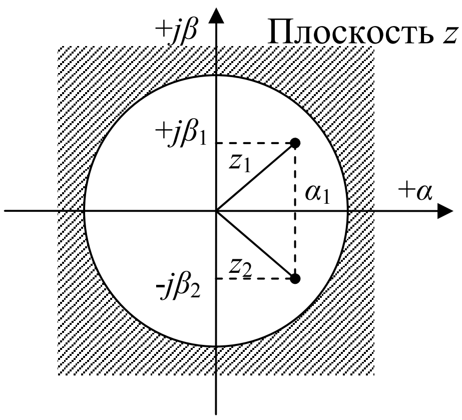
По этой формуле видно, что $\alpha_n[\bar{t}]$ стремится к нулю только тогда, когда все корни z_i при $t \to \infty$ будут убывать и каждый стремится к нулю. Это возможно, если $|z_i|<1$. Поэтому условие устойчивости СИР.

Импульсная система будет устойчивой, если все корни характеристического уравнения замкнутой системы по модулю меньше единицы.

Напоминаем, что модуль комплексного корня z_i определяется $z_i = \sqrt{\alpha_i^2 + \beta_i^2}$.

Обратите внимание! Вещественная часть комплексного корня СИР может быть как положительной, так и отрицательной.

Расположение корней замкнутой СИР можно показать на плоскости корней z в виде окружности единичного радиуса (рисунок 5.5 *а*).



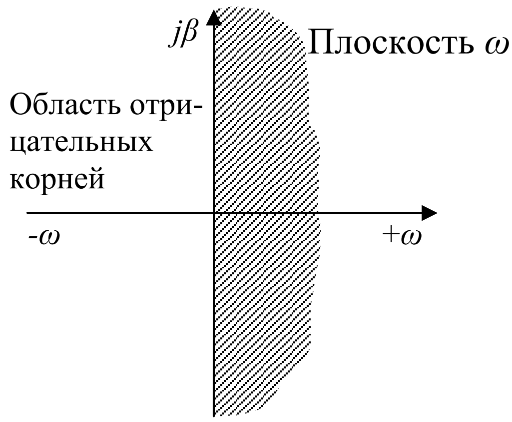


Рисунок 5.5 - Изображение корней замкнутой СИР на плоскости z и плоскости ω

Пример 5.4 - Определить устойчивость СИР по характеристическому уравнению замкнутой импульсной системы

$$K_{зам}(z) = \frac{z - 0{,}11}{z^2 - 1{,}78z + 0{,}89}.$$

РЕШЕНИЕ

1 Определяем корни характеристического уравнения

$$z_{1,2} = 0{,}89 \pm j0{,}31 .$$

2 Определяем модуль комплексного корня

$$|z| = \sqrt{0{,}89^2 + 0{,}31^2} = 0{,}94 .$$

ВЫВОД. $|z| < 1$. Система устойчивая.

Устойчивость СИР можно определить косвенным методом. Критерия устойчивости непрерывных САУ в расположении всех корней в левой части плоскости корней p. Критерий устойчивости СИР в расположении всех корней внутри круга единичного радиуса плоскости корней z. Для того, чтобы отобразить единичный круг в левую часть комплексной плоскости корней необходимо провести *билинейное преобразование* и в характеристическое уравнение вместо z подставить

$$z = \frac{1+\omega}{1-\omega}.$$

После приведения к общему знаменателю оставляется только числитель и получаем новое характеристическое уравнение того же порядка

$$F_3(\omega) = c_n\omega^n + c_{n-1}\omega^{n-1} + \ldots + c_0 = 0 .$$

Условие устойчивости

Если все корни преобразованного характеристического уравнения ω_i расположены в левой части плоскости ω, то СИР устойчивая.

Устойчивость СИР после преобразования характеристического уравнения можно определять по тем же критериям, по которым определяется устойчивость в непрерывных САУ.

Пример 5.5 - Определить устойчивость СИР по данным примера 5.4 с помощью билинейного преобразования.

РЕШЕНИЕ

1 В характеристическое уравнение подставим $z = (1+\omega)/(1-\omega)$

$$z^2 - 1{,}78z + 0{,}89 = \left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right)^2 - 1{,}78\left(\frac{1+\omega}{1-\omega}\right) + 0{,}89 = 0\,.$$

2 Полученное уравнение подведем под общий знаменатель

$$\frac{(1+\omega)^2 - 1{,}78(1+\omega)(1-\omega) + 0{,}89(1-\omega)^2}{(1-\omega)^2} = \frac{3{,}67\omega^2 + 0{,}22\omega + 0{,}11}{(1-\omega)^2} = 0\,.$$

3 Определяем устойчивость по критерию Гурвица

$$3{,}67\omega^2 + 0{,}22\omega + 0{,}11 = 0$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 0{,}22 & 0 \\ 3{,}67 & 0{,}11 \end{vmatrix} = 0{,}22 \cdot 0{,}11 - 0 = 0{,}0242.$$

ОТВЕТ. $\Delta_2 > 0$. Система устойчивая.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.7

1 В чем отличие передаточной функции замкнутой СИР, если сигнал поступающий с выхода СИР на его вход претерпевает скачек?

2 Условие устойчивости СИР по корням характеристического уравнения.

3 Как должны располагаться корни характеристического уравнения на плоскости *z* устойчивой СИР?

4 Зачем проводится билинейное преобразование характеристического уравнения?

5 Как должны располагаться корни преобразованного характеристического уравнения на плоскости ω?

6 Можно ли для определения устойчивости СИР по преобразованному характеристическому уравнению использовать критерии устойчивости линейных САУ?

5.8 Анализ качества СИР

СИР анализируется по таким же показателям как и линейная САУ: время регулирования, динамическая ошибка, статическая ошибка. Эти параметры определяются по реакции системы на ступенчатую функцию и выполнение обратного z-преобразования. Используются два метода определения оригинала (временную функцию) по ее z-изображению переходного процесса:

- разложение z-изображения переходного процесса на элементарные дроби и нахождение оригинала по таблице 5.1. Сумма составляющих оригиналов представляет собой искомый переходной процесс;

- разложение z-изображения переходного процесса в степенной ряд по степени z^{-1}.

Рассмотрим первый метод на конкретном примере.

Пример 5.6 [12] - Дана передаточная функция СИР

$$K[z] = \frac{0{,}1}{z^2 - 1{,}3z + 0{,}4}.$$

Определить параметры переходного процесса по первому методу.

РЕШЕНИЕ

1 Определим z-изображение переходного процесса

$$x[z] = \frac{0{,}1}{z^2 - 1{,}3z + 0{,}4} \cdot \frac{z}{z-1} = \frac{0{,}1z}{z^3 - 2{,}3z^2 + 1{,}7z - 0{,}4}.$$

2 Корни характеристического уравнения

$$z_1 = 1; \quad z_2 = -0{,}8; \quad z_3 = -0{,}5.$$

3 Разлагаем z-изображения на простые дроби

$$x(z) = \frac{A_1 z}{z-1} + \frac{A_2 z}{z-0{,}8} + \frac{A_3 z}{z-0{,}5}.$$

4 Определяем коэффициенты разложения (аналогично как в линейной САУ)

$$A_i(z_i)=\frac{0{,}1z_i}{3(z_i)^2-2\cdot 2{,}3(z_i)+1{,}7}.$$

$$A_1(z_1=1)=\frac{0{,}1z}{3z^2-4{,}6z+1{,}7}=\frac{0{,}1}{3\cdot 1^2-4{,}6\cdot 1+1{,}7}=1.$$

$$A_2(z_2=0{,}8)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}8}{3\cdot(0{,}8)^2-4{,}6\cdot 0{,}8+1{,}7}=-1{,}3.$$

$$A_3(z_3=0{,}5)=\frac{0{,}1\cdot 0{,}5}{3\cdot(0{,}5)^2-4{,}6\cdot 0{,}5+1{,}7}=0{,}3.$$

В результате получаем

$$x(z)=\frac{z}{z-1}-\frac{1{,}3z}{z-0{,}8}+\frac{0{,}3z}{z-0{,}6}=\frac{z}{z-1}-\frac{1{,}3z}{z-e^{-\alpha_1 T}}+\frac{0{,}3z}{z-e^{-\alpha_2 T}}.$$

5 Принимаем время такта T = 1 с, определяем α_1 и α_2

$$0{,}8=e^{-\alpha_1 T}\qquad \alpha_1=\frac{1}{T}ln\frac{1}{0{,}8}=0{,}22;$$

$$0{,}6=e^{-\alpha_2 T}\qquad \alpha_2=\frac{1}{T}ln\frac{1}{0{,}6}=0{,}53.$$

6 Проводим обратное z-преобразование

$$x[\mathrm{n}]=1-1{,}3\cdot e^{-0{,}22n}+0{,}3\cdot e^{-0{,}53n}.$$

7 Задаваясь значением n = 0, 1, 2, 3, … определяем $x[n]$. Результаты расчета приведены в таблице 5.2

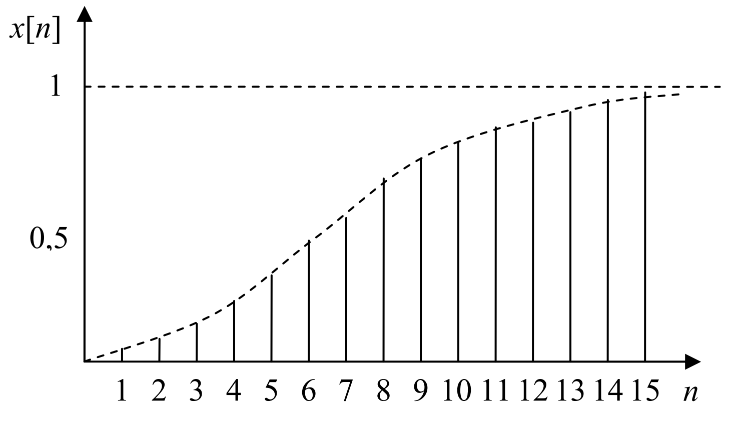


Рисунок 5.6 - Переходной процесс СИР

Таблица 5.2 – Расчет переходного процесса

n	1	$-1{,}3e^{-0{,}22n}$	$0{,}3e^{-0{,}53n}$	$x[n]$
0	1	-1,3	0,3	0
1	1	-1,04	0,14	0,1
2	1	-0,85	0,08	0,23
3	1	-0,67	0,02	0,35
…	…	…	…	…
14	1	-0,06	0,00	0,94
15	1	-0,04	0,00	0,96

ОТВЕТ. Время регулирования t_p = 15·1с=15 с. Перерегулирования и статической ошибки нет

Пример 5.7 - По данным примера 5.6 определить параметры переходного процесса по второму методу.

РЕШЕНИЕ

1 Проведем разложение полученного z-преобразования переходного процесса в степенной ряд по степени z^{-1}

$$
\begin{array}{l|l}
-\,0{,}1z \quad +0 \quad + \quad 0 \quad + \quad 0 & \underline{z^3-2{,}3z^2+1{,}7z-0{,}4} \\
\underline{0{,}1z-0{,}23+0{,}17z^{-1}-0{,}04z} & 0{,}1z^{-2}+0{,}23z^{-3}+0{,}35z^{-4}+\ldots \\
\quad -\,0{,}23-0{,}17z^{-1}+0{,}04z \quad + \quad 0 & \\
\quad \underline{0{,}23-0{,}52z^{-1}+0{,}39z^{-2}-0{,}092z^{-3}} & \\
\qquad -\,0{,}35z^{-1}-0{,}35z^{-2}+0{,}092z^{3} & \\
\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

ВЫВОД. Коэффициенты в степенном ряду соответствуют значениям $x[n]$ переходного процесса полученного по первому методу (смотри столбец $x[n]$ таблицы 5.2).

Вопросы для самоконтроля к подразделу 5.8

1 Какими показателями качества регулирования характеризуется СИР?

2 Зачем проводится разложение z-изображения переходного процесса на элементарные дроби?

3 Как определяются коэффициенты A_i в элементарных дробях?

4 Как определяются коэффициенты α_i в элементарных дробях?

5 Как определяются значения $x[n]$ по каждой элементарной дроби $x[z]$?

6 Как разлагается полученное z-изображение переходного процесса в степенной ряд?

7 Что характеризуют коэффициенты степенного ряда после разложения полученного z- преобразования по степени z^{-1} ?

6 Нелинейные системы управления (НСУ)

6.1 Особенности нелинейных систем управления

Практически редко встречаются системы управления, которые точно описываются линейными уравнениями. Большинство элементов имеют линейную статическую характеристику только на отдельных ограниченных участках. Причины нелинейности статических характеристик могут быть различные. Это насыщение, трение, зазоры, петля гистерезиса и т.д. Кроме того, характеристики элементов системы в процессе работы могут изменяться в зависимости от ряда условий.

Система автоматического управления считается нелинейной, если она содержит хотя бы одно звено с нелинейной статической характеристикой.

Характеристика системы считается нелинейной, если не выполняется *принцип суперпозиции* – при сложении различных воздействий на систему её реакция равна сумме реакций от каждого отдельного воздействия. Это позволяет в линейных системах однозначно определять динамическую характеристику системы от каждого воздействия отдельно. В нелинейной системе управления (НСУ) такой однозначной зависимости нет. Принцип суперпозиции – не выполняется. Реакция системы от каждого воздействия отличаются между собой. Есть и другие особенности поведения НСУ, которые при расчёте системы по линейным дифференциальным уравнениям не определяются. Рассмотрим эти особенности [2, 12, 14, 15].

В НСУ при изменении начальных условий могут существенно измениться динамические свойства. При этом может быть два вида установившегося значения регулируемой величины: *устойчивое состояние равновесия и устойчивое состояние автоколебаний*.

Возникшие в системе автоколебания могут быть устойчивыми и неустойчивыми. Неустойчивые автоколебания при малых случайных воздействиях могут легко переходить в другой периодический режим с другой амплитудой и с другой частотой. Устойчивые автоколебания имеют постоянную амплитуду и частоту. При случайных малых отклонениях система возвращается к этому автоколебательному режиму работы. Таким образом, к устойчивому автоколебательному режиму могут сходиться периодические процессы «снизу» (при малых начальных отклонениях) и «сверху» (при больших начальных отклонениях). Амплитуда и частота такого устойчивого автоколебательного режима в нелинейной системе может не зависеть от начальных условий, а зависеть только от вида нелинейного элемента

Вторая существенная особенность НСУ в определении устойчивости, которые отличается от определения устойчивости линейных систем. В линейных системах устойчивость полностью зависит от корней характеристического уравнения. Согласно теореме Ляпунова, если все корни имеют отрицательную действительную часть, то линейная система устойчивая. Устойчивость линейных систем не зависит от вида и величины воздействий. Устойчивость НСУ зависит от величины воздействия. Одна и та же нелинейная система при одном воздействии может перейти в новое установившееся состояние, а при другом воздействии стать неуправляемой. Для анализа устойчивости в НСУ введены понятия: устойчивость «в малом», устойчивость «в большом», устойчивость «в целом». Система может быть устойчивая «в малом», но неустойчивая «в большом» и наоборот. Если НСУ устойчивая при любых воздействиях, то она считается устойчивой «в целом».

Если при изменении начальных условий система попала в область с колебательным переходным процессом, а для ее работы необходим монотонный переходной процесс, то с помощью отрицательной дифференцирующей обратной связи в нелинейном звене можно создать так называемый *скользящий режим работы*. При этом режиме работы колебания регулируемого параметра переходят, образно говоря, в «микроколебания» относительно экспоненты и возникает установившейся режим работы. Таким образом, из области автоколебаний система переводится в область монотонного переходного процесса.

Если на нелинейное звено подавать высокочастотный периодический сигнал, то его нелинейная характеристика может линеаризоваться. Такая линеаризация нелинейной зависимости называется *вибрационная линеаризация.* Она позволяет НСУ делать более устойчивой и надежной. Например, если нелинейность звена в виде зазора или сухого трения, то с помощью вибрационной линеаризации выходной сигнал становится близким по своему виду к прямолинейной зависимости.

Для управления объектом со значительным запаздыванием в НСУ используется *логический алгоритм управления* (ЛАУ), который обеспечивает переменную структуру регулятора. В общем случае ЛАУ представляет собой нелинейную функцию в зависимости от параметров работы системы и может скачкообразно или по заданной программе изменять структуру системы. Это позволяет значительно повысить точность и быстродействие системы управления и расширить область допустимых нагрузок и управляющих воздействий.

Таким образом, анализ системы по линеаризованному дифференциальному уравнению даёт приближённую оценку динамических свойств нелинейной системы и не позволяет учесть следующие её особенности:

– зависимость устойчивости системы от уровня воздействия на неё;

– различные виды установившихся режимов;

– изменение динамических свойств системы при изменении режимов её работы.

Такие особенности в работе реальной автоматической системы возникают, если в системе есть хотя бы один нелинейный элемент (звено).

Нелинейные звенья, с одной стороны, делают поведение системы менее предсказуемой. Но, с другой стороны, нелинейные звенья могут специально вводится в систему для придания системе управления особых свойств, которые принципиально недостижимы с помощью линейных звеньев. Например, для уменьшения динамической ошибки или для получения максимального быстродействия. В ряде случаев нелинейные регулирующие устройства оказываются более простыми и надежными, чем линейные. Поэтому нелинейные элементы широко используются в системах самонастройки и в оптимальных системах управления.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 6.1

1 Какая САУ считается нелинейной?

2 Почему линейную систему математически анализировать проще, чем нелинейную?

3 Как определяется “принцип суперпозиции”?

4 Какие качества нелинейной системы управления (НСУ) нельзя определить по линеаризованному дифференциальному уравнению?

5 Какие два вида устойчивого состояния имеет НСУ?

6 Возникновение установившегося автоколебательного режима в НСУ может зависеть от начальных условий?

7 Может ли возникновение автоколебательного режима не зависеть от начальных условий?

8 Какие три вида устойчивости имеет нелинейная система управления?

9 Что значит система устойчива «в целом»?

10 Как изменяется характеристика нелинейного звена при скользящем режиме?

11 Как производится вибрационная линеаризация?

12 Как используется логический алгоритм управления?

13 В чём преимущество нелинейных корректирующих устройств?

6.2 Классификация характеристик нелинейных элементов

При рассмотрении нелинейного элемента принимаем, что выходная величина зависит от одной входной переменной $x_{вх}$. При этом число всевозможных значений выходной величины $x_{вых}$ при заданном значении входной величины $x_{вх}$ может быть два. Например, за счёт люфта в механическом звене (рисунок 6.3 *б*), или петли гистерезиса в электромагнитном реле (рисунок 6.4 *в*). При малом значении петли гистерезиса этой величиной пренебрегают, что значительно упрощает расчёт.

Статическая характеристика нелинейной системы не всегда существенном образом отличается от статической характеристики линейной системы. Например, при незначительной величине люфта, кулоновского трения, насыщения усилителя и т.д. Такие статические характеристики нелинейного элемента называются несущественно-нелинейными.

Несущественно-нелинейной статической характеристикой называется такая, которую можно аппроксимировать линейной зависимостью без нарушения качественных показателей нелинейной системы.

Если ошибка аппроксимации (отклонение действительного значения нелинейной зависимости от аппроксимированной линейной зависимости) в пределах точности расчёта, то такая аппроксимация допустима.

Динамическая характеристика нелинейной системы может существенно зависеть от нелинейного элемента и иметь свои специфические особенности. Например, при изменении входного сигнала устойчивый переходной процесс в НСУ может стать неустойчивым. Заметим, что в линейной системе устойчивость не зависит от входного сигнала. Такие статические характеристики нелинейного элемента называются существенно-нелинейными.

Существенно-нелинейной статической характеристикой называется такая, которую нельзя аппроксимировать линейной зависимостью без нарушения качественных показателей нелинейной системы.

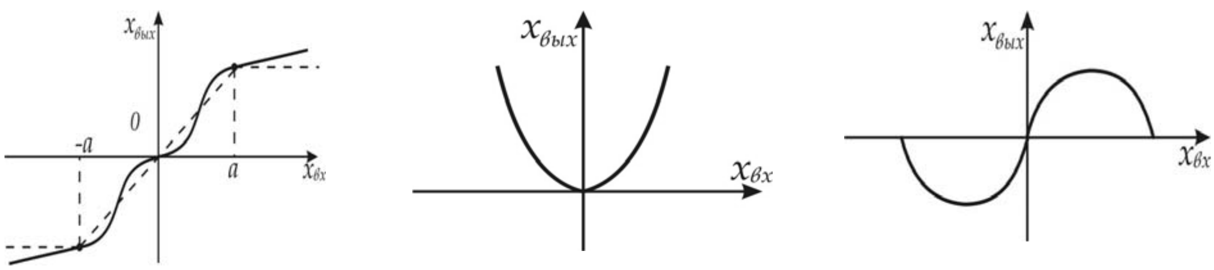
Например, если в нелинейной системе в качестве усилителя используется идеальное реле (без зоны нечувствительности), то может возникнуть автоколебательный режим её работы. В линейной системе такое *новое качество её работы* не определяется потому, что такого режима не бывает.

Нелинейные характеристики делятся на *естественные и искусственные.*

Естественная нелинейная характеристика элемента является результатом его физической природы и принципа действия.

Искусственная нелинейность специально вводится в характеристику элементов с целью получения новых динамических свойств системы, которые другим методом получить достаточно сложно.

Нелинейные характеристики могут иметь различные типы симметрии: чётно-симметричная характеристика, нечётно-симметричная характеристика, несимметричная характеристика [5,6].



а *б* *в*

а – нечётно-симметричная нелинейная характеристика;

б – чётно-симметричная нелинейная характеристика $x_{вых} = k \cdot x_{вх}^2$;

в – нечётно-симметричная нелинейная характеристика $x_{вых} = k \cdot sin\ x_{вх}$.

Рисунок 6.1 – Характеристики элементов с гладкой однозначной нелинейностью

Если нелинейная характеристика удовлетворяет условию F(x) = F(-x) , то такую характеристику называют симметричной относительно оси ординат или чётно-симметричной (рисунок 6.1 б).

Если нелинейная характеристика удовлетворяет условию F(x) = -F(-x) , то такую характеристику называют симметричной относительно начала координат или нечётно-симметричной (рисунок 6.1 в).

Если нелинейная характеристика не удовлетворяет ни одному из приведённых условий, то такую характеристику называют несимметричной.

Нелинейные характеристики разделяются на гладкие, ломанные и кусочно-линейные.

Если в любой точке характеристики существует производная $dx_{вых}/dx_{вх}$, то такая характеристика считается гладкой (рисунок 6.1).

Если характеристика имеет изломы, в которых производная $dx_{вых}/dx_{вх}$ однозначно не определяется, то такая характеристика считается ломаной (рисунок 6.2)

Если характеристика между точками излома имеет прямолинейную зависимость, то такая характеристика считается кусочно-линейной (рисунок 6.2)

В ряде случаев для упрощения расчёта гладкую характеристику приближенно заменяют кусочно-линейной (рисунок 6.1 *а*), которые разделяются на непрерывные и разрывные.

Если в точке излома характеристика имеет однозначное значение, то такая характеристика считается непрерывной (рисунок 6.2)

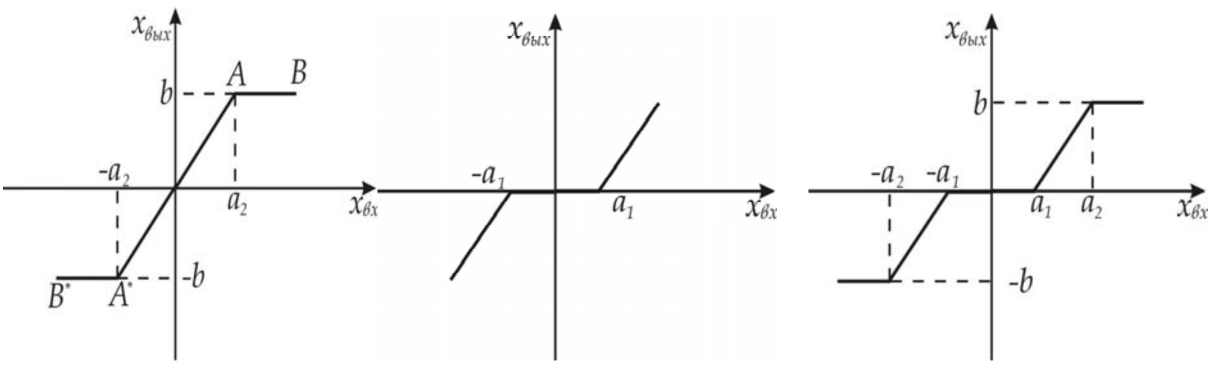
Если в точке излома характеристика имеет неоднозначное значение, то такая характеристика считается разрывной (рисунок 6.4)

Типичным примером разрывной характеристики является релейная характеристика, в которой при значении входной величины соответствующей срабатыванию реле, выходная величина имеет два значения: реле ещё не сработало и реле уже сработало. При этом выходная величина, образно говоря, разрывается в точке излома на две части, разделённых на величину срабатывания реле.

Нелинейные характеристики с однозначной и неоднозначной нелинейностью - это *статические характеристики*. Нелинейные характеристики в виде дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, которые содержат производные (или другие комбинации) – это *динамические характеристики.* Нелинейные характеристики, которые изменяют параметры системы по правилам «если-то» называются *логическими характеристиками.*

Для упрощения расчёта автоматических систем нелинейную характеристику с гладкой нелинейностью аппроксимируют характеристикой с кусочно-линейной зависимостью. Это на рисунке 6.1 *а* показано пунктирной линией.

Нелинейные характеристики могут быть разделены на однозначные (рисунок 6.2 *а, б, в*) и неоднозначные (рисунок 6.3 *а, б, в*). Рассмотрим типовые, кусочно-линейные, однозначные характеристики нелинейных элементов.



а *б* *в*

а - нелинейная характеристика с насыщением;

б - нелинейная характеристика с зоной нечувствительности;

в - нелинейная характеристика с насыщением и зоной нечувствительности.

Рисунок 6.2 – Характеристика элементов с кусочно-линейной однозначной зависимостью

Характеристика, показанная на рисунке 6.2 *а* имеет линейную зону (A^* A) и участок насыщения (AB и B^*A^*). Уравнение такой статической характеристики

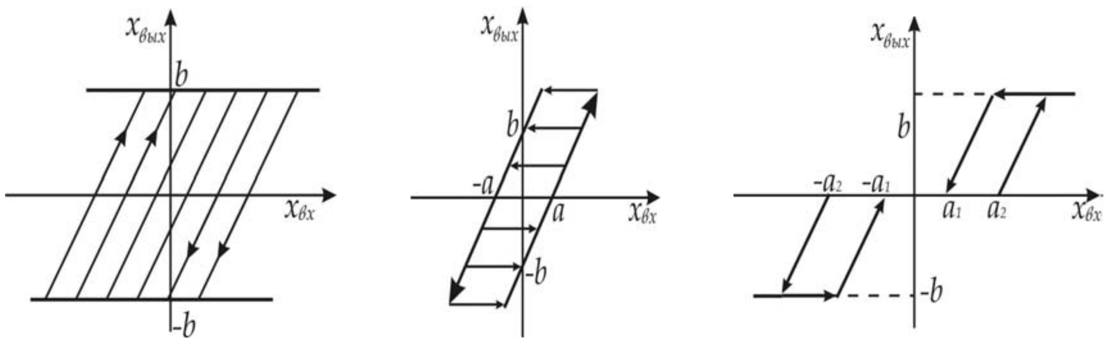
$$x_{вых} = k \cdot x_{вх} \qquad \text{при } |x_{вх}| \le a_2,$$

$$x_{вых} = b \cdot siqn(x_{вх}) \quad \text{при } |x_{вх}| > a_2$$

Примечание – Функция *siqn* означает

$$siqn = \begin{vmatrix} 1 & при & x > 0 \\ 0 & при & x = 0 \\ -1 & при & x < 0 \end{vmatrix}$$

Рассмотрим неоднозначные кусочно-линейные характеристики нелинейных элементов (рисунок 6.3).



а *б* *в*

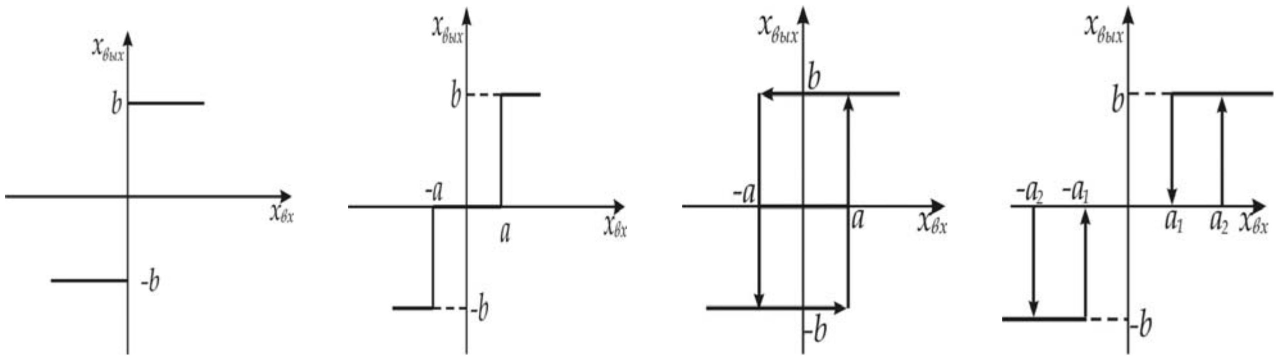
а - нелинейная характеристика типа «упор» для ограничения движения;

б - нелинейная характеристика типа «люфт», без зоны нечувствительности;

в - нелинейная характеристика типа «люфт», с зоной нечувствительности.

Рисунок 6.3 – Характеристика элементов с неоднозначной кусочно-линейной зависимостью

Если в системе есть элемент с релейной характеристикой, то такая система называется релейной или дискретной системой, в которой релейный элемент осуществляет квантование сигнала по уровню (рисунок 6.4).



а *б* *в* *г*

а - характеристика идеального реле;

б - характеристика реле с зоной нечувствительности;

в - характеристика реле с гистерезисом;

г - характеристика реле с зоной нечувствительности и гистерезисом.

Рисунок 6.4 – Характеристики реле

Из приведённых уравнений видно, что при отсутствии петли гистерезиса выходное воздействие реле зависит только от значения $x_{вх}$ или $x_{вых} = f(x_{вх})$. При наличии петли гистерезиса значение $x_{вых}$ зависит ещё от производной по $x_{вх}$ или $x_{вых} = f(x_{вх}, \dot{x}_{вх})$, где $\dot{x}_{вх}$ характеризует наличие «памяти» у реле.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 6.2

1 Отличие естественной и искусственной нелинейной характеристики.

2 Отличие существенной и несущественной нелинейной характеристики

3 Как проводится аппроксимация нелинейной зависимости?

4 Как определяется ошибка аппроксимации?

5 Отличие однозначной и многозначной нелинейной характеристики.

6 В чём отличие идеального реле от других видов реле?

7 В чём отличие реле с зоной нечувствительности от других видов реле?

8 В чём отличие идеального реле от других видов реле?

9 Какая характеристика называется чётно-симметричной?

10 Какая характеристика называется нечётно-симметричной?

6.3 Метод фазовой траекторий

6.3.1 Общие понятия о фазовом пространстве

Этот метод основан на понятии о фазовом пространстве. Известно, что состояние системы, описываемое дифференциальным уравнением, вполне определяется, если в каждый момент времени значение регулируемой величины и её *(n-1)* производных известно (где *n* – порядок дифференциального уравнения). Это даёт возможность представить состояние системы в некотором n-мерном пространстве, которое называется *фазовым пространством*.

Фазовое пространство образовано системой координат, состоящей из регулируемой величины и её производных.

Состояние системы в таком фазовом пространстве изобразится точкой или её состояние можно рассматривать, как задание фаз для точки М.

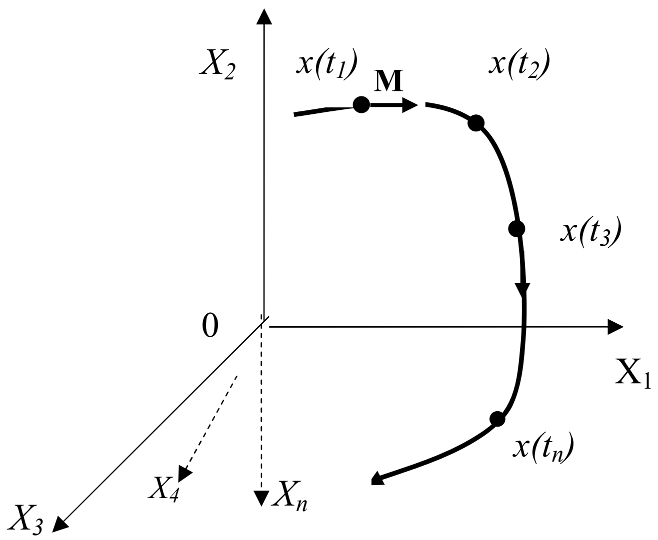


Рисунок 6.5 – Фазовая траектория точки М в фазовом пространстве

Процесс изменения состояния системы представляет собой некоторое движение изображающей точки или в фазовом пространстве её фазовой траекторией движения $\{x(t_1), x(t_1), ..., x(t_n)\}$ (рисунок 6.5).

Фазовая траектория движения показывает изменение регулируемой ве личины в фазовом пространстве.

Фазовая траектория в фазовом пространстве, таким образом, даёт геометрическое представление о динамике исследуемого процесса. Но при этом координата времени отсутствует. Время отображается в неявном виде, поэтому фазовая траектория не даёт *временную динамическую характеристику системы*, а является *качественной динамической характеристикой.* Эта динамическая характеристика достаточно полная. Она показывает не только значения производных (X_2, X_3, … , X_n) в каждый момент времени, но и закон изменения каждой производной, что по временной динамической характеристике не всегда можно определить. Кроме этого, временную динамическую характеристику (то есть кривую переходного процесса) можно построить по фазовой траектории различными способами.

Фазовая траектория показывает динамику движения системы при ненулевых начальных условиях. Эти начальные условия изображаются начальной точкой фазовой траектории. При равновесии в системе, когда изменение регулируемой величины нет и все производные по регулируемой величине равны нулю, то это состояние системы изображается конечной точкой фазовой траектории, которая называется *особой точкой* [6,7,9].

Особая точка фазовой траектории соответствует равенству нулю всех координат фазового пространства.

В общем случае нелинейная система может иметь различные установившиеся значения по оси *x,* в том числе и не в начале координат, например, за счёт зоны нечувствительности нелинейного элемента. Тогда систему координат можно перенести в это новое установившееся значение и при этом закон изменения движения системы по производным регулируемой величины не изменяется. Поэтому для удобства расчёта принимается, что *особая точка соответствует началу координат.* При изменении начальных условий, соответственно изменится фазовая траектория. В результате получаем целый набор фазовых траекторий для данной системы или *фазовый портрет системы*.

Фазовым портретом системы называется совокупность фазовых траекторий для различных начальных условий.

Графически изобразить фазовый портрет в *n*-мерном пространстве невозможно. Поэтому при анализе нелинейных систем ограничиваются двухмерной *фазовой плоскостью*, которая практически позволяет изучить все особенности поведения нелинейной системы.

Фазовой плоскостью называется двухмерное фазовое простран-

ство с двумя фазовыми координатами: регулируемая величина и её первая производная.

Метод анализа по фазовой плоскости достаточно прост и отличается большой наглядностью. По оси абсцисс откладывается значение переменной *x*. По оси ординат откладывается значение *y, где* $y = dx/dt$. Состояние системы в каждый момент времени характеризуется значениями *x* и *y*. Изменение значений *x* и *y* на фазовой плоскости даёт возможность судить о качественной динамической характеристике системы.

6.3.2 Предельные циклы фазовой траектории

Понятие предельного цикла рассмотрим на основе понятия устойчивого движения системы по второму (прямому) методу Ляпунова. Этот метод основан на простой идее, известной из механики: в положении равновесия система имеет минимум потенциальной энергии. Абсолютный минимум энергии считается равным нулю. Тогда, если движение системы стремится к нулю – она устойчивая. Если движение системы происходит с увеличением потенциальной энергии – она неустойчивая.

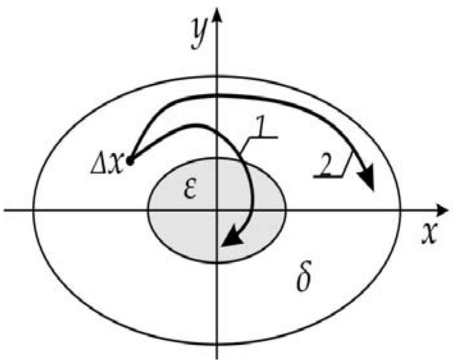


Рисунок 6.6 – Траектория движения устойчивой и неустойчивой системы

Рассмотрим различные варианты движения систем на фазовой плоскости (рисунок 6.6). Равновесие системы соответствует началу координат (точка 0). Область допустимого отклонения системы от абсолютного минимума (точка 0) обозначим ε. Заданную область отклонения параметров системы обозначим δ. Условие устойчивости по Ляпунову следующее. Система считается устойчивой, если при отклонении параметров системы в пределах достаточно малой области δ траектория движения системы достигает область допустимого отклонения системы от абсолютного минимума (область ε) и остаётся в пределах этой области (кривая 1, рисунок 6.6). Система считается неустойчивой, если при отклонении параметров системы в пределах области δ траектория движения системы не достигает области ε (кривая 2).

Таким образом, устойчивость системы по Ляпунову рассматривается при достаточно малых начальных отклонениях параметров системы, то есть устойчивость «в малом». Поведение неустойчивой системы «в малом» характеризуется расходящимся процессом. Но амплитуда расходящихся колебаний из-за нелинейности характеристики может увеличиваться до определённого предела и затем оставаться постоянной [11,12].

На рисунке 6.7 *а* показана фазовая характеристика системы, которая при отклонении «в малом» (Δx_1) имеет вид неустойчивого фокуса. Спираль этой фазовой характеристики расходится, асимптотически приближаясь к некоторому изолированному *замкнутому контуру*, имеющему конечные размеры.

Изолированная фазовая траектория в виде замкнутого контура называется предельным циклом.

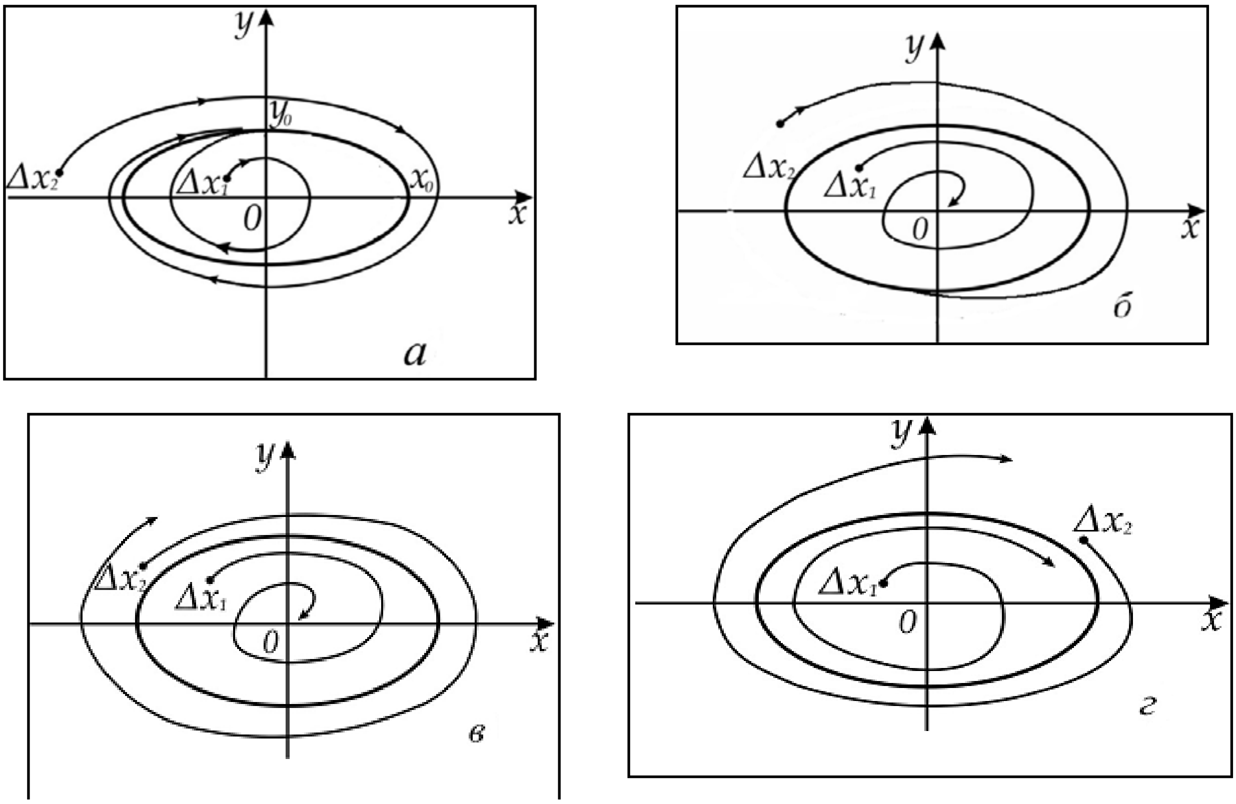


Рисунок 6.7 – Предельные циклы фазовых траекторий

Если система попала на устойчивый предельный цикл, то она обладает *устойчивыми автоколебаниями*. Амплитуда автоколебаний определяется по оси абсцисс (x_0), скорость изменения колебаний определяется по оси ординат (y_0). Пусть выходная величина системы имеет отклонение Δx_2. Фазовая характеристика имеет вид устойчивого фокуса и траектория движения системы стремится к устойчивому предельному циклу. В данном случае система устойчива «в большом» при отклонении Δx_2, но она неустойчива «в малом» при отклонении Δx_1, т.к. эта фазовая траектория системы удаляется от абсолютного минимума (точка 0). Такой предельный цикл (рисунок 6.7 *а*) называется *устойчивым в «большом»*.

Если фазовая траектория при любых отклонениях системы Δx_1 и Δx_2 имеет вид сходящегося фокуса и двигается к абсолютному минимуму (рисунок 6.7 *б)*, то такая система считается *устойчивой и «в малом», и «в большом». Она устойчива «в общем».* Предельный цикл (если он существует) неустойчивый.

Если система имеет отклонение в пределах малой величины Δx_1 (рисунок 6.7 *в*) и фазовая характеристика имеет вид устойчивого фокуса, то установившееся значение системы стремится в область допустимого отклонения или даже в точку 0.

Система устойчива «в малом». Но если при отклонении выходной величины на величину больше предельного цикла, например, Δx_2, то фазовая характеристика имеет вид неустойчивого фокуса и система с течением времени увеличивает амплитуду своих колебаний, система становится *неустойчива «в большом»*. Таким образом одна и та же система в зависимости от отклонения Δx может быть *устойчива «в малом»* (при Δx_1) и *неустойчива «в большом»* (при Δx_2). Предельный цикл (если он существует) является неустойчивым.

Если фазовая траектория системы при малых отклонениях (Δx_1) и при больших отклонениях параметра (Δx_2) имеют вид расходящегося фокуса (рисунок 6.7 *г*), то такая система *неустойчива и «в малом», и «в большом».* Предельный цикл (если он существует) является неустойчивым.

Примечание - Анализ амплитудных колебаний в НСУ проводится по первой (основной) гармонике. Как правило, в НСУ возникают гармоники и более высокого порядка. Определение параметров этих гармоник математически сложная задача и в данном пособии не рассматривается.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 6.3.2

1 Критерий устойчивости по второму (прямому) методу Ляпунова.

2 Что значит устойчивость «в малом»?

3 Что значит устойчивость «в большом»?

4 Что значит устойчивость «в общем»?

5 Что называется предельным циклом?

6 Что значит устойчивый предельный цикл? Какая при этом будет устойчивость «в малом» и устойчивость «в большом»?

7 Что значит неустойчивый предельный цикл? Будет ли при этом устойчивость «в малом» и устойчивость «в большом»?

8 Может ли быть устойчивость “в общем” при неустойчивом предельном цикле?

9 Может ли система иметь несколько предельных циклов как устойчивых, так и неустойчивых?

6.3.3 Анализ НСУ методом фазовых траекторий

Для анализа процесса регулирования в НСУ по фазовой траектории уравнение системы второго порядка представляют в виде двух уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt}=y; \qquad \frac{dy}{dt}=f\left(x, y, \mathrm{F}(x)\right),$$

где x – регулируемая величина;

y – скорость изменения регулируемой величины;

$F(x)$ – характеристика нелинейного элемента.

Чтобы изобразить динамику процесса на фазовой плоскости, из этих двух уравнений исключают время. Для этого первое уравнение делят на второе

$$\frac{dx/dt}{dy/dt}=\frac{\partial x}{\partial y}=\frac{y}{f\left(x,\ y,\ \mathrm{F}(x)\right)}, \qquad \partial x=\frac{y\partial y}{f\left(x,\ y,\ \mathrm{F}(x)\right)}.$$

Интегрируя это выражение, получаем уравнение траектории на фазовой плоскости в виде зависимости регулируемой величины *x* от скорости ее изменения *y*

$$x=\int\frac{y\partial y}{f\left(x,\ y,\ F(x)\right)}.$$

Характеристику нелинейного элемента, можно аппроксимировать кусочно-линейными функциями, которые изображаются ломаными линиями с точками разрыва. Эти точки разрыва на фазовой плоскости изображаются вертикальными линиями, которые называются *линии переключения.* Эти линии делят фазовую плоскость на ряд областей (рисунок 6.10)

Построение фазовой траектории ведут по этим областям, то есть по отдельным линеаризованным участкам системы. Начальное значение каждого нового участка равно конечному значению предыдущего участка. Если нелинейный элемент имеет кусочно-линейную характеристику, то поведение системы на каждом участке описывается *линейным дифференциальным уравнением с постоянными коэффициентами.* При пересечении изображающей точки на фазовой плоскости линией переключения коэффициенты дифференциального уравнения изменяют свои значения и снова остаются постоянными до следующей линии переключения. Так как линейные дифференциальные уравнения легко интегрируются, то получение уравнения фазовой траектории каждого участка можно получить достаточно просто.

Рассмотрим построение фазовой траектории релейной системы и анализ переходного процесса на конкретном примере.

Пример 6.1 – Определить устойчивость и качество переходного процесса релейной системы по фазовой траектории. Простейший вид структурной схемы показан на рисунке 6.8. Статическая характеристика реле с зоной нечувствительности показана на рисунке 6.9.

Параметры системы: K = 1, T = 10.

Параметры реле: /b/ =3, /α/ = 2.

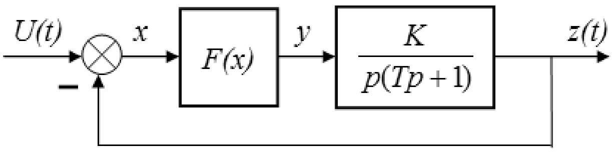


Рисунок 6.8 – Структурная схема релейной следящей системы к примеру 6.1

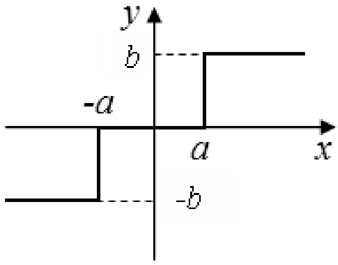


Рисунок 6.9 – Статическая характеристика релейного элемента с зоной нечувствительности

РЕШЕНИЕ

1 Определим общую передаточную функцию системы

$$W_{общ}(p) = \frac{\dfrac{F(x)k}{p(Tp+1)}}{1 + \dfrac{F(x)k}{p(Tp+1)}} = \frac{F(x)k}{Tp^2 + p + F(x)k}.$$

2 Проанализируем собственное движение системы по характеристическому уравнению

$$Tp^2 + p + F(x)k = 0.$$

Представим это уравнение в виде дифференциального уравнения и введем уравнение по скорости изменения *x*. Тогда получаем систему двух уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y\ ; \\ T\dfrac{dy}{dt} + y + F(x)k = 0. \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y\ ; \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-(y + F(x)k)}{T}. \end{cases}$$

3 Первое уравнение делим на второе и определяем значение ∂x

$$\frac{dx/dt}{dy/dt}=\frac{Ty}{-(y+F(x)k)}$$

$$\partial x=\frac{-Ty\cdot\partial y}{y+F(x)k}=\frac{-T\left[y+F(x)k-F(x)k\right]\partial y}{y+F(x)k}=-T\partial y+\frac{TF(x)k\cdot\partial y}{y+F(x)k}.$$

4 Проинтегрируем полученное уравнение и получаем уравнение фазовой траектории

$$x=-T\cdot y+T\cdot k\cdot F(x)ln\left|y+k\cdot F(x)\right|+C_0,$$

где C_0 – постоянная интегрирования, характеризующая начальные условия движения системы;

x – регулируемая величина;

y – скорость движения регулируемой величины.

5 Начальное значение фазовой траектории зависит от заданных начальных условий C_0. Пусть при $t = 0$ начальное значение фазовой траектории равно x_0 и y_0. Определим C_0

$$x_0=-Ty_0+T\cdot k\cdot F(x)ln\left|y_0+kF(x)\right|+C_0;$$

$$C_0=x_0+Ty_0-T\cdot k\cdot F(x)ln\left|y_0+kF(x)\right|.$$

Тогда уравнение фазовой траектории с учетом начальных условий

$$x=x_0+T(y_0-y)+T\cdot k\cdot F(x)ln\left|\frac{y+kF(x)}{y_0+kF(x)}\right|.$$

6 В полученном уравнении фазовой траектории характеристика релейного элемента в зависимости от величины x может иметь три различных значения

$$F(x)=\begin{vmatrix} -b, & при\ x\le -a; \\ 0, & при\ |x|<a; \\ b, & при\ x\ge -a. \end{vmatrix}$$

Уравнение фазовой траектории можно разделить на три участка

I участок $\quad x_1=x_0+T(y_0-y)-T\cdot b\cdot k\cdot ln\left|\frac{y-kb}{y_0-kb}\right|,\quad при\ x\le -a;$

II участок $\quad x_1 = x_0 + T\left(y_0 - y\right),$ $\qquad$ *при* $|x| < a$;

III участок $\quad x_1 = x_0 + T(y_0 - y) + T \cdot k \cdot b \cdot ln\left|\dfrac{y + kb}{y_0 + kb}\right|,$ *при* $x \geq a$.

Переход фазовой траектории с одного участка на другой происходит при срабатывании реле на *линиях переключения*. На этих линиях переключения производятся «сшивание» фазовых траекторий между участками. Построим фазовую траекторию при следующих значений параметров системы $k = 1;\ T = 10;$ $b = \pm 3;\quad a = \pm 2$ (рисунок 6.10).

Начальное значение движения системы $x_{01} = -6;\ y_{01} = 0$.

7 Движение системы начинается на I участке. Реле включено b = -3.

$$x_1 = x_0 + T(y_{01} - y) - T \cdot k \cdot b \cdot ln\left|\frac{y - kb}{y_{01} - kb}\right| = -6 + 10(0 - y) - 10 \cdot 3 \cdot ln\left|\frac{y - 3}{0 - 3}\right|.$$

При $y = 0 \qquad x_1 = -6 - 0 - 30 \cdot 0 = -6.$

При $y = 0{,}8 \qquad x_1 = -6 - 8 - 30 \cdot (-0{,}31) = -4{,}7.$

При $y = 1{,}29 \qquad x_1 = -6 - 12{,}9 - 30 \cdot (-0{,}56) = -2.$

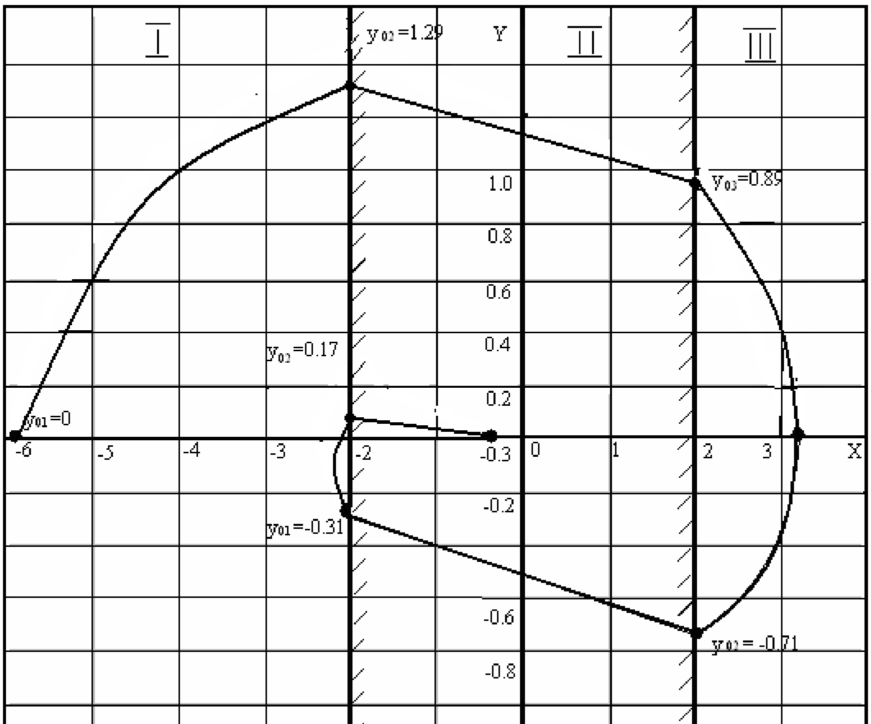


Рисунок 6.10 – Фазовая траектория релейной системы к примеру 6.1

Фазовая траектория дошла до линии переключения и при $x_1 = -2$ реле отключается (зона нечувствительности), но система по инерции продолжает движение на участке II.

8 Определим фазовую траекторию на участке II. Начальные условия движения на этом участке $x_{02} = -2;\ y_{02} = -1,29$. Реле отключено b = 0.

$x_2 = x_{02} + T\left(y_{02} - y\right) = -2 + 10 \cdot \left(1,29 - y\right).$

При $y = 1,2$ $\quad x_2 = -2 + 10 \cdot (1,29 - 1,2) = -1,1.$

При $y = 1$ $\quad x_2 = -2 + 10 \cdot (1,29 - 1) = 0,9.$

При $y = 0,89$ $\quad x_2 = -2 + 10 \cdot (1,29 - 0,89) = +2.$

При $x_2 = 2$ реле включается и система двигается на участке III.

9 Определим фазовую траекторию на участке III. Начальные условия движения на этом участке $x_{03} = +2;\ y_{03} = 0,89$. Реле включено (b = +3).

$$x_3 = x_{03} + T(y_{03} - y) - T \cdot k \cdot b \cdot ln\left|\frac{y - kb}{y_{03} - kb}\right| = +2 + 10(0,89 - y) + 10 \cdot 3 \cdot ln\left|\frac{y + 3}{0,89 + 3}\right|$$

При $y = 0,5$ $\quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 - 0,5) + 30 \cdot ln\left|\frac{0,5 + 3}{3,89}\right| = 2,73.$

При $y = 0$ $\quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 - 0) + 30 \cdot ln\left|\frac{0 + 3}{3,89}\right| = 3,11.$

При $y = -0,5$ $\quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 + 0,5) + 30 \cdot ln\left|\frac{-0,5 + 3}{3,89}\right| = 2,64.$

При $y = -0,71$ $\quad x_3 = +2 + 10 \cdot (0,89 + 0,71) + 30 \cdot ln\left|\frac{-0,71 + 3}{3,89}\right| = 2,00.$

При $x_3 = +2$ реле отключается, но система продолжает движение по инерции на участке II.

10 Определим фазовую траекторию на участке II. Начальные условия движения на этом участке $x_{04} = +2;\ y_{04} = -0,71$. Реле отключено (b = 0).

$x_2 = x_{02} + T\left(y_{04} - y\right) + 0$

При $y = -0,5$ $\quad x_4 = +2 + 10 \cdot (-0,71 + 0,5) = +0,1.$

При y = - 0,35 $x_4 = +2 + 10 \cdot (-0,71 + 0,35) = -1,6.$

При y = - 0,31 $x_4 = +2 + 10 \cdot (-0,71 + 0,31) = -2.$

При $x_2 = -2$ реле включается, и система движется на участке I.

11 Определим фазовую траекторию на участке I. Начальные условия $x_{05} = -2;\ y_{05} = -0,31$. Реле включено (b = -3).

При y = 0 $x_5 = -2 - 10 \cdot (-0,31 - 0) - 30 \cdot 0,098 = -2,3.$

При y = 0,17 $x_5 = -2 - 10 \cdot (-0,31 - 0,17) - 30 \cdot 0,15 = -2,0.$

12 При $x_1 > -2$ реле отключается (снова зона нечувствительности). Фазовая траектория на участке II при начальных условиях $x_6 = -2;\ y_6 = 0,17$.

При $y = 0$ $x_6 = -2 + 10 \cdot (0,17 - 0) = -2 + 1,7 = -0,3$ (движение закончено).

ОТВЕТ. Система устойчивая «в общем» (при любых начальных условиях). Установившееся значение – устойчивое состояние равновесия при $x_\infty = -\ 0,3$. Переходной процесс – колебательный, затухающий.

Вопросы для самопроверки к подразделу 6.3.3

1 Можно ли провести анализ НСУ методом фазовой плоскости для любого типа реле?

2 Можно ли провести анализ НСУ методом фазовой плоскости для системы любого порядка?

3 Последовательность математических операций для получения уравнения фазовой траектории для системы второго порядка.

4 В зависимости от какого параметра релейной системы фазовая плоскость разбивается на участки.

5 Что называется линиями переключения?

6 Как по фазовой траектории определить устойчивость системы?

6.4 Метод гармонической линеаризации

6.4.1 Основные положения

Под этим общим названием объединяются группы методов анализа нелинейных систем, основанных на анализе амплитудно-частотных характеристик, в нелинейных системах. Сущность метода заключается в замене нелинейного элемента системы эквивалентным линейным, который одинаково с нелинейным элементом преобразует гармонические колебания Такая замена позволяет исследовать НСУ частотными методами, которые используются при исследовании линейных систем. Этот метод позволяет определить:

- возможность возникновения в системе автоколебаний;
- условия возникновения устойчивого колебательного режима;
- параметры этого автоколебательного режима.

Обратите внимание! Это приближённый метод и основан на ряде допущений, которые в реальных НСУ полностью не выполняются. Поэтому определяется возможность возникновения автоколебаний и, соответственно, возможные его параметры.

В дальнейшем будет рассмотрен анализ не всех видов нелинейных систем, а значительно узкий класс, в котором *нелинейный элемент является безинерционным звеном с нечётно-симметричной статической характеристикой.*

Для нелинейного элемента в виде реле сущность этого метода можно показать достаточно наглядно, и математическое выражение более простое, чем для других видов нелинейного элемента. Поэтому рассмотрим НСУ с релейным элементом. Исследования таких нелинейных систем основана на гипотезе низкочастотного фильтра линейной части системы и на предположении о гармоническом характере свободного движения в нелинейной системе.

По этому методу исследования выбирается некоторая расчетная структурная схема, в которой нелинейный элемент (НЭ) выделен в качестве входного звена, а вся остальная линейная часть (ЛЧ) системы объединена в одну общую передаточную функцию, которая располагается после нелинейного элемента (рисунок 6.11). Рассмотрим прохождение некоторого гармонического сигнала через нелинейный элемент в виде идеального реле (без зоны нечувствительности). Если сигнал на входе НЭ является синусоидальным

$$x(t) = A\sin\omega t,$$

то на выходе НЭ получаем гармонический сигнал

$$y(t) = F(x) = F(A\sin\omega t).$$

Функция $F(A\sin\omega t)$ является периодической и может быть разложена в ряд Фурье.

$$y(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{\infty}(B_k \sin\omega_k t + C_k \cos\omega_k t).$$

Прохождение синусоидального сигнала через идеальное реле показано в расчетно - структурной схеме (рисунок 6.11).

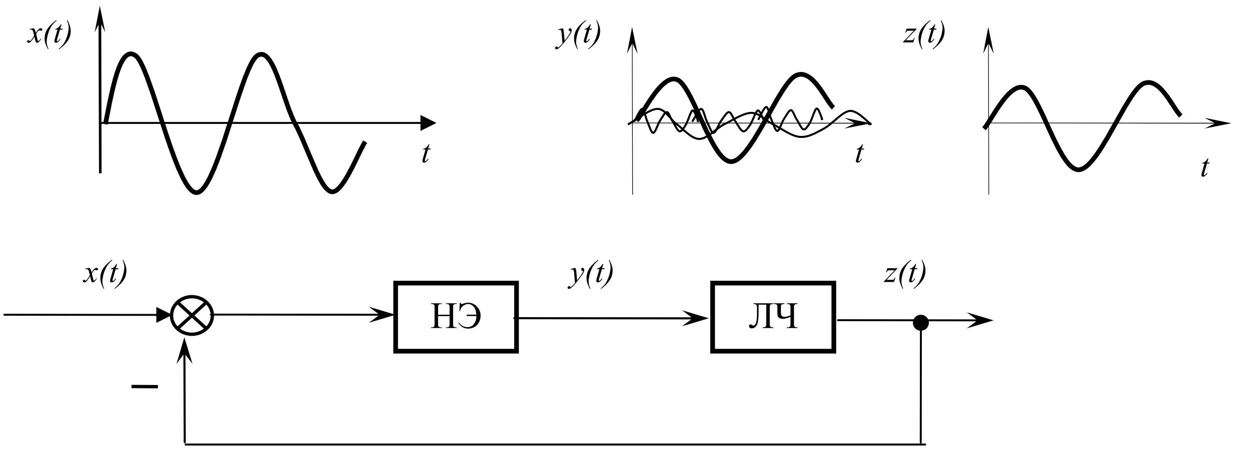


Рисунок 6.11 – Расчетная структурная схема нелинейной системы

Следовательно, на линейную часть системы (ЛЧ) действует сигнал, содержащий весь спектр частот (после разложения их в ряд Фурье), которые возникли в идеальном реле (НЭ). В силу принципа суперпозиции в линейной части системы каждая гармоника действует независимо от остальных. Амплитуда каждой гармоники на выходе линейной части системы $z(t)$ будет зависеть от динамических свойств этой линейной части. Изменение амплитуды высокочастотных гармоник показано на рисунке 6.12.

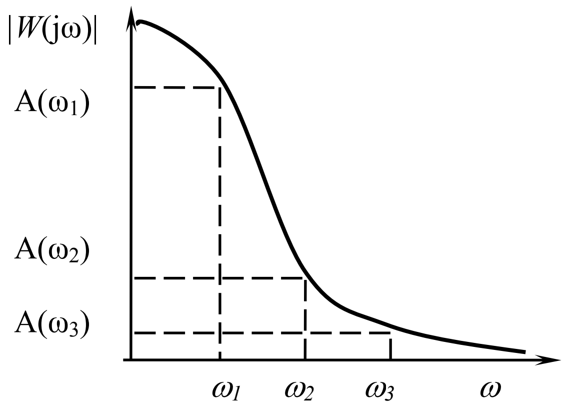


Рисунок 6.12 – Амплитудная характеристика линейной части системы (ЛЧ)

Пусть при заданном значении частоты входного сигнала ω_1 амплитуда равна $A(\omega_1)$. Если при других частотах $\omega_2 = 2\omega_1$, $\omega_3 = 3\omega_1$, $\omega_4 = 4\omega_1$, и т.д. амплитуды значительно меньше, то линейную часть системы можно считать фильтром низких частот, который не пропускает высшие гармоники, порождённые нелинейным элементом, и на выходе ЛЧ остается только первая гармоника (смотри рисунок 6.11).

Таким образом, расчет колебаний в НСУ производится при выполнении двух условий:

- на вход нелинейного элемента (НЭ) поступает гармонический сигнал с заданной частотой;

- линейная часть системы (ЛЧ) обладает свойством низкочастотного фильтра и гасит все высшие гармоники, порождаемые нелинейным элементом.

На выходе системе рассматривается только первая гармоника. На рисунке 6.11 эта первая гармоника на графике *z(t)* показана жирной линией.

6.4.2 Определение гармонической передаточной функции

Пусть на вход нелинейного звена в виде релейного элемента с зоной нечувствительности (рисунок 6.13 *а*) подан синусоидальный сигнал (рисунок 6.13 *б*). На выходе релейного элемента возникает последовательность прямоугольных импульсов (рисунок 6.13 *в*).

Высота прямоугольных импульсов соответствует выходной величине реле. Частота следования импульсов полностью совпадает с частотой входного синусоидального сигнала. Ширина импульса зависит от амплитуды входного сигнала. С увеличением амплитуды *A* ширина импульсов увеличивается.

Полученную функцию выходного сигнала разложим в ряд Фурье с учетом, что входной сигнал центрированный ($x_0 = 0$) и расчет ведется по первой (основной) гармонике выходного сигнала $y(t) = B_1 \sin \omega t + C_1 \cos \omega t$

Учитывая, что петли гистерезиса нет, то $C_1 = 0$.

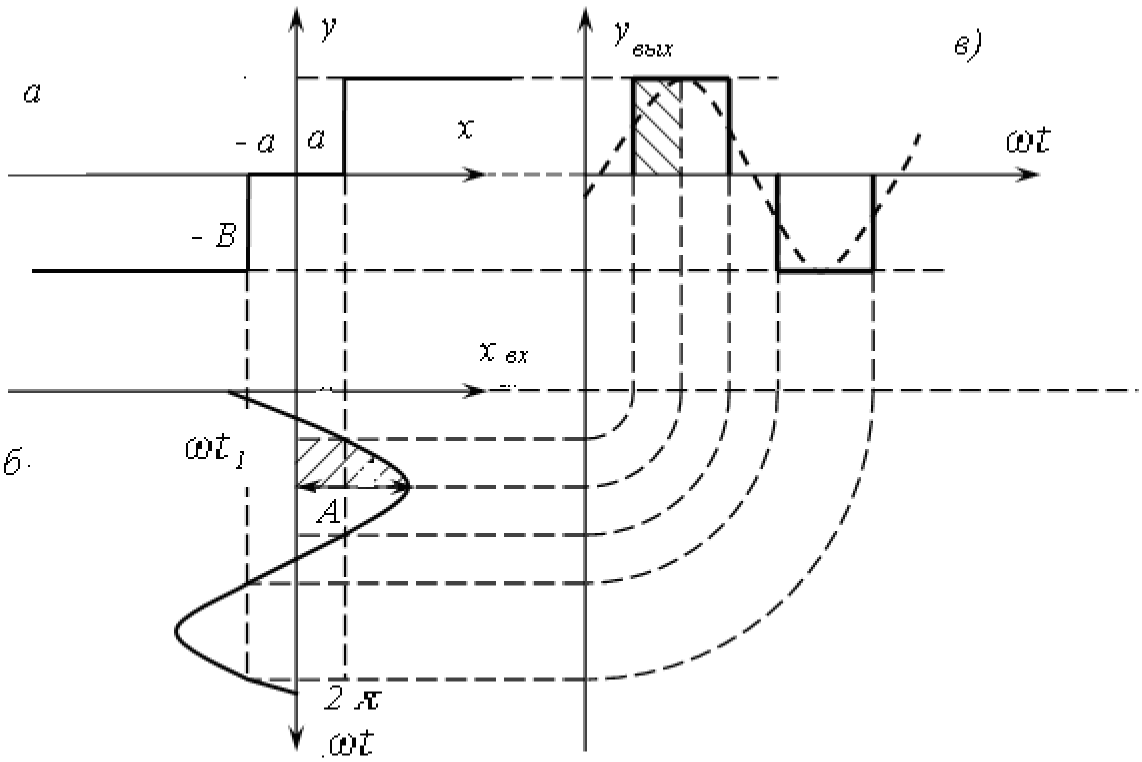


Рисунок 6.13 – К определению гармонической передаточной функции релейного элемента с зоной нечувствительности

На вход релейного сигнала подана вся синусоида от $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$, поэтому соответствующая величина первой гармоники выходного сигнала B_1 определяется уравнением

$$B_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} B \sin \omega t \, d\omega t$$

По рисунку 6.13 *б* видно, что реле срабатывает при входном сигнал больше зоны нечувствительности или $A \cdot \sin \omega t_1 \geq |a_1|$. На участке от 0 до ωt_1 выходного сигнала нет. Следовательно, интегрирование надо осуществлять с момента ωt_1. Поскольку выходной сигнал с реле симметричен, то можно изменить пределы интегрирования (так проще взять интеграл). Интегрирование будет выполняться в пределах от ωt_1 до $\pi /2$. Эта часть входного и выходного сигнала на рисунке 6.13 заштрихована. Затем полученный результат надо учетверить, чтобы получить значение первой гармоники от всей синусоиды от $\omega t = 0$ до $\omega t = 2\pi$. В результате определяем $y(t)$

$$B_1 = \frac{4}{\pi}\int_{\omega t_1}^{\pi/2}(B\sin\omega t)d\omega t = -\frac{4B}{\pi}\left[-\cos\omega t\right]_{\omega t_1}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4B}{\pi}\cos\omega t_1 .$$

В полученном уравнении выразим $\cos\omega t_1$ через $\sin\omega t_1$

$$B_1 = \frac{4B}{\pi}\sqrt{1-\sin^2\omega t_1} .$$

Значение $\sin\omega t_1$ связано с амплитудой входного сигнала A и зоной нечувствительности реле a следующим соотношением

$$A\sin\omega t_1 = a \quad \text{или} \quad \sin\omega t_1 = \frac{a}{A} .$$

Подставим это значение $\sin\omega t_1$ в выражение B_1 и получаем значение амплитуды выходного сигнала в зависимости от амплитуды входного сигнала и зоны нечувствительности реле

$$B_1 = \frac{4B}{\pi}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} .$$

Чтобы получить передаточную функцию релейного элемента с зоной нечувствительности надо взять отношение первой гармоники выходного сигнала B_1 к амплитуде входного сигнала A. При изменении входного сигнала A изменяется значение передаточной функции. Поэтому она обозначается $W(A)$

$$W(A) = \frac{B_1}{A} = \frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} .$$

Гармонической передаточной функцией нелинейного элемента называется отношение амплитуды первой гармоники выходного сигнала к амплитуде входного сигнала

Гармоническая, так как она характеризует первой гармонике ряда Фурье выходного сигнала. В дальнейшем будем её обозначать Г-ПФ (гармоническая передаточная функция). Эту передаточную функцию еще называют: *гармонический коэффициент преобразования нелинейного элемента*, *передаточная функция эквивалентного линейного звена.*

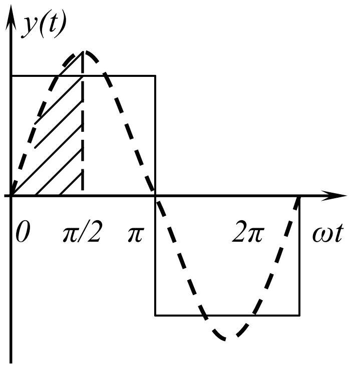


Рисунок 6.14 – Графики выходного сигнала идеального реле и его первой гармоники ряда Фурье

Рассмотрим получение гармонической передаточной функции (Г-ПФ) идеальное реле. Выходной сигнал будет иметь вид, показанный на рисунке 6.14. После аппроксимации выходного сигнала первой гармоникой в виде синусоиды (на рисунке 6.14 показано штриховой жирной линией), получаем пределы измерения четверти выходной синусоиды от $\omega t = 0$ до $\omega t = \pi/2$. Эта часть синусоиды заштрихована. Вся амплитуда выходного сигнала определяется

$$B_1 = \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} B\sin\omega t \cdot d\omega t = \frac{4B}{\pi}\left[-\cos\omega t\right]_0^{\pi/2} = \frac{4B}{\pi}\cdot 1\,.$$

Тогда Г- ФП идеального реле при выходном сигнале B и при амплитуде входного сигнала A

$$W(A) = \frac{y}{A} = \frac{4B}{\pi \cdot A}.$$

Таким образом, ограничиваясь рассмотрением первой гармоники на выходе реле при гармоническом сигнале на его входе, заданный вид однозначной нелинейности заменяют *линейным уравнением* в виде Г-ПФ, которое зависит только от амплитуды входного сигнала A и обозначается $W(A)$. Если статическая характеристика реле не однозначна, то Г-ПФ зависит от двух параметров синусоидального сигнала: от амплитуды и частоты и обозначается $W(A,\omega)$. Для других видов нелинейности Г-ПФ имеет более сложную математическую зависимость от амплитуды (при однозначной нелинейности). Например, для усилительного звена с зоной насыщения Г-ПФ имеет вид

$$W(A)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{a}{2}-\frac{\sin 2a}{4}+\frac{a\cdot\cos a}{A}\right).$$

В иностранной литературе этот метод гармонической линеаризации называется методом описывающих функций.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 6.4

1 Для каких нелинейных элементов определяется гармоническая передаточная функция (Г-ПФ)?

2 При каких входных сигналах определяется Г-ПФ?

3 На какой гипотезе основаны определения Г-ПФ?

4 В каких случаях учитывается коэффициент C_1?

5 Как составляется расчётная структурная схема нелинейной системы?

6 Чему равняется выходной сигнал с релейного элемента с зоной нечувствительности при $a < A\cdot \sin \omega t$?

7 Чему равняется выходной сигнал с релейного элемента без зоны нечувствительности?

8 Как зависит значение выходного сигнала при увеличении амплитуды входного сигнала A?

9 Что называется гармонической передаточной функцией (Г-ПФ)?

10 В чём отличие Г-ПФ идеального реле от Г-ПФ реле с зоной нечувствительности?

6.5 Анализ НСУ методом Гольдфарба

6.5.1 Основные положения

Это графоаналитический способ основан на критерии устойчивости Найквиста. Предварительно структурную схему НСУ преобразуют так, чтобы все линейные элементы объединяют в одну частотную передаточную функции

$W_{л.ч}(j\omega)$, а нелинейный элемент был представлен в виде гармонической частотной передаточной функцией $W_{н.э}(A)$ на входе системы (рисунок 6.11). Тогда общая передаточная функция системы в разомкнутом состоянии

$$W_{раз}(j\,\omega, A) = W_{н.э}(A)\cdot W_{л.ч}(j\omega).$$

Предположим, что замкнутая НСУ находится на границе устойчивости и в ней возникли незатухающие колебания (автоколебания). Тогда согласно критерию Найквиста амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой системы $W_{раз}(j\omega, A)$ должна проходить через точку с координатами $(-1, j0)$. Отсюда условие существования автоколебаний в замкнутой системе

$$W_{н.э}(A)\cdot W_{л.ч}(j\omega) = -1.$$

Непосредственно построить эту амплитудно-фазовую характеристику на комплексной плоскости трудно. В этом уравнении две переменных величины: частота ω, которую изменяем от 0 до ∞ и амплитуда входного сигнала на нелинейного элемента A, которая определяется по $W_{л.ч}(j\omega)$. Л.С. Гольдфарб предложил это уравнение представить в виде

$$W_{л.ч}(j\omega) = \frac{-1}{W_{н.э}(A)}.$$

Автоколебания в системе возможны, если выполняются два условия гармонического баланса

$$\begin{cases} \left|W_{л.ч}(j\omega)\right| = \left|\dfrac{1}{W_{н.э}(A)}\right|; \\ \varphi_{н.э}(A) + \varphi_{л.ч}(\omega) = -\pi. \end{cases}$$

Полученные уравнения проще всего решать графоаналитически. Очевидно, что если эти два годографа на комплексной плоскости не пересекаются, то они не имеют общего решения, и в исследуемой системе нет колебательного процесса (рисунок 6.15 *а*). Если эти годографы пересекаются, то есть общее решение и возникает колебательный процесс (рисунок 6.15 *б*). Если эти годографы пересекаются в двух точках, то в исследуемой системе есть два вида колебательных процессов. Из них один вид или с амплитудой A_1 – неустойчивый колебательный процесс, а второй вид с амплитудой A_2 – устойчивый колебательный процесс (рисунок 6.14 *в*).

Об устойчивости или неустойчивости колебательного процесса, например, когда нелинейный элемент в виде реле с зоной нечувствительности, судят следующим образом. Пусть годографы пересекаются в точке A_1 при частоте ω_1 и амплитуде A_1 (рисунок 6.15 *в*). Зададим некоторое приращение ΔA . Для устойчивости автоколебаний требуется , чтобы при $A_1 + \Delta A$ колебания становились затухающие и амплитуда возвращалась к A_1. При $A_1 - \Delta A$ колебания становились возрастающие и амплитуда тоже возвращается к A_1 . Для нелинейного элемента в виде идеального реле колебательный процесс всегда устойчивый (рисунок 6.15 б)

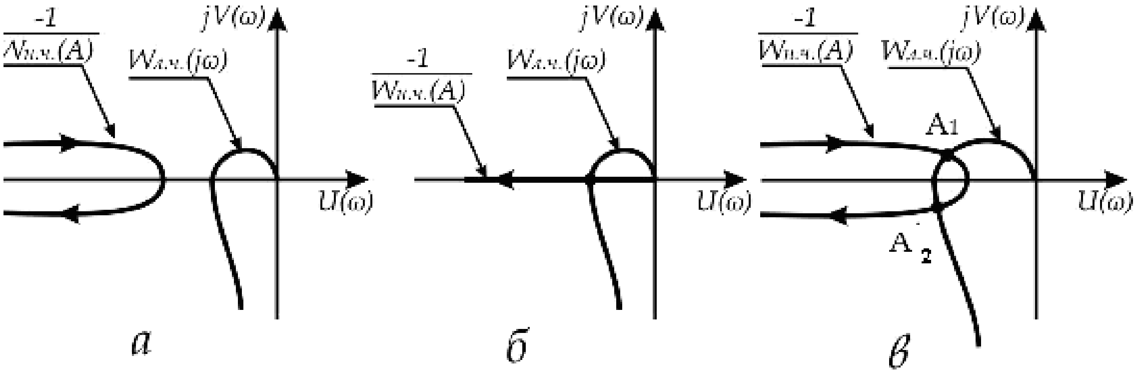


Рисунок 6.15 – Взаимное расположение АФЧ линейной части системы $W_{л.ч.}(j\omega)$ и гармонически линеаризованной характеристики реле - $1/W_{н.ч.}(A)$

6.5.2 Примеры анализа релейной системы методом Гольдфарба

При анализе НСУ наиболее простые расчёты, когда нелинейный элемент в виде реле. Расчёт НСУ с другой нелинейной характеристикой (с зоной нечувствительности, с насыщением, с гистерезисом и др.) принципиально не отличается, но трудоёмкость значительно возрастает. Поэтому в следующих примерах будет проведён анализ НСУ, где нелинейным элементом является реле.

Пример 6.2 – Исследовать релейную систему на возможность возникновения автоколебаний, структурная схема которой показана на рисунке 6.16.

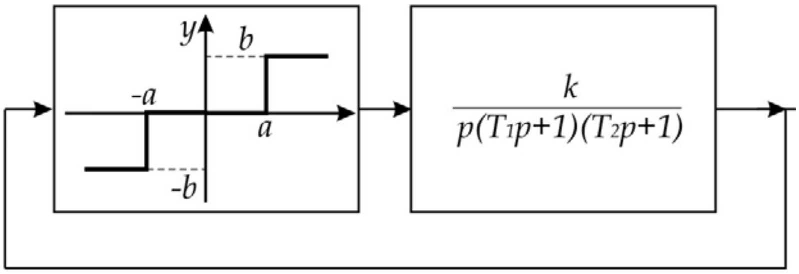


Рисунок 6.16 – Структурная схема релейной системы к примеру 6.2

Параметры линейной части системы $k = 2,\ T_1 = 0{,}05c,\ T_2 = 0{,}02\ c$. Параметры реле $a = 0{,}25,\ b = 110$.

РЕШЕНИЕ

1 Определим параметры амплитудно-фазовой характеристики линейной части системы по её частотной передаточной функции

$$W_{л.ч}(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+T_1 j\omega)(1+T_2 j\omega)}.$$

Модуль этой характеристики

$$A(\omega) = |W_{л.ч}(j\omega)| = \frac{k}{\omega\sqrt{1+T_1^2\omega^2}\sqrt{1+T_2^2\omega^2}} = \frac{2}{\omega\sqrt{1+0{,}0025\omega^2}\sqrt{1+0{,}0004\omega^2}}.$$

Фаза этой характеристики

$\varphi(\omega) = -90^0 - arctg\, T_1\omega - arctg\, T_2\,\omega = -90^0 - arctg\, 0{,}05\omega - arctg\, 0{,}02\,\omega.$

Определяем параметры этой характеристики (таблица 6.1).

Таблица 6.1 – Расчёт АФЧХ к примеру 6.2

ω	15	20	30	32	40	60
A(ω)	0,102	0,066	0,032	0,028	0,017	0,006
$\varphi^o(\omega)$	-142 º	-156 º	-177 º	-180 º	-192º	-211º

2 Гармонически линеаризованная передаточная функция (Г-ПФ) реле с зоной нечувствительности

$$W_{н.э}(A) = \frac{4b}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{\alpha}{A}\right)^2}.$$

Обозначим $\frac{-1}{W_{н.э}(A)} = Z(A)$. После подстановки численных значений

$$Z(A) = -\frac{\pi A^2}{440\sqrt{A^2 - 0,0625}}.$$

Задаемся значениями A от $A > 0,25$ до $A \to \infty$ и определяем параметры этой характеристики. Результаты вычисления показаны в таблице 6.2.

Таблица 6.2 – Расчёт Z*(A)* к примеру 6.2

A	0,2501	0,2503	0,2505	0,35	3,85	10
Z(A)	-0,63	-0,11	-0,028	-0,0035	-0,028	-0,071

3 По результатам расчёта построим амплитудно-фазовую характеристику линейной части системы и *Z(A)* на комплексной плоскости (рисунок 6.17).

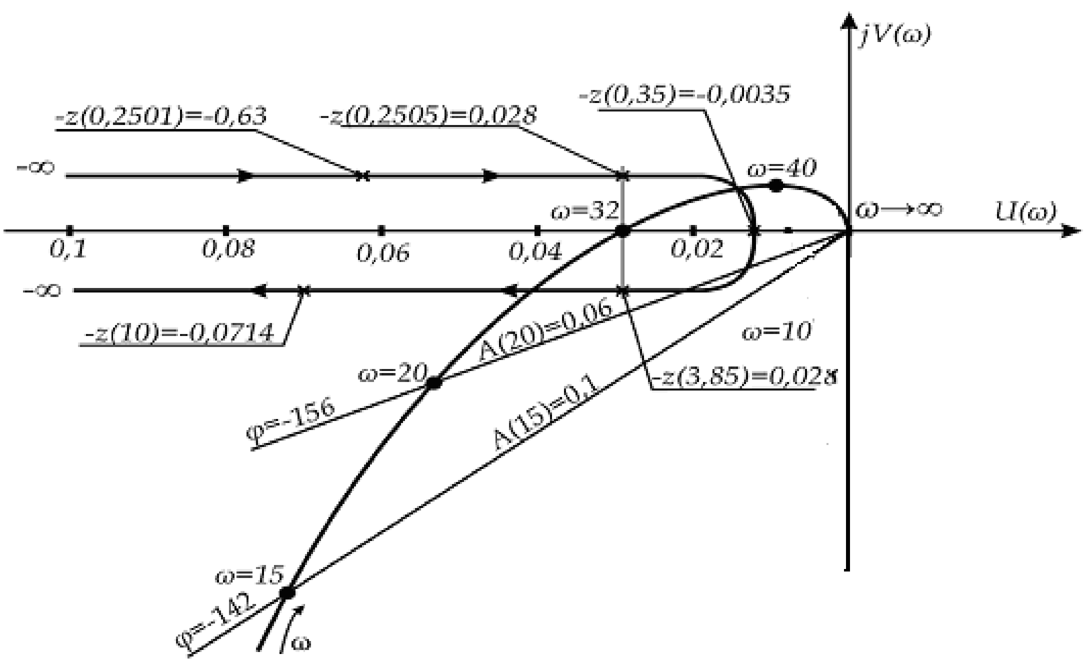


Рисунок 6.17 – АФЧХ линейной части системы и Z(A) к примеру 6.2

Годограф $Z(A)$ проходит по отрицательной вещественной полуоси комплексной плоскости. Для удобства анализа расположения годограф $Z(A)$ при его возрастании показан выше отрицательной полуоси, а при его убывании ниже отрицательной полуоси.

4 Годографы $W_{л.ч}(j\omega)$ и $Z(A)$ пересекаются в двух точках. Значит автоколебательный режим работы системы возможен (рисунок 6.17). Система имеет два периодических решения

$$x_1(t) = A_1 \sin \omega_1 t, \quad x_2(t) = A_2 \sin \omega_1 t,$$

5 Согласно таблице 6.1 при $\omega_1 = 32\ c^{-1}$, $A(\omega) = 0,028$ при $\varphi(\omega) = -180°$

Соответственно $Z(A) = -0,028.$

6 Согласно таблицы 6.2 при $z(A) = -0,028$ возможны два значения амплитуды $A_1 = 0,2505$ и $A_2 = 3,85.$

Тогда $x_1(t) = 0,2505 \sin 32t, \quad x_2(t) = 3,85 \sin 32\,t.$

7 Определим устойчивость периодического решения при $A_1 = 0,2505$

$$x_1(t) = 0,2505 \sin 32t\,.$$

Зададим некоторое приращение $\pm \Delta A = 0,0003$ к значению $A_1 = 0,2505$ и определим устойчивость системы по критерию Найквиста.

При $A_1 + \Delta A = 0,2505 + 0,0003 = 0,2508$

$$W(A = 0,2508) = \frac{4b}{\pi A}\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{A}\right)^2} = \frac{4 \cdot 110}{3,14 \cdot 0,2508}\sqrt{1 - \left(\frac{0,25}{0,2508}\right)^2} = 558,43 \cdot 0,0798 = 44,567.$$

$$W_{л.ч}(32) \cdot W_{н.э}(0,2508) = -0,028 \cdot 44,567 = -1,2478.$$

При $A_1 + \Delta A = 0,2505$ разомкнутая система охватывает точку (-1; j_0)). Амплитуда периодических колебаний будет продолжать возрастать.

При $A_1 - \Delta A = 0,2505 - 0,0003 = 0,2502.$

$$W_{н.э}(A=0{,}2502)=\frac{4\cdot 110}{3{,}14\cdot 0{,}2502}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}25}{0{,}2502}\right)^2}=559{,}77\cdot 0{,}03997=22{,}377;$$

$$W_{л.ч}(j32)\cdot W_{н.э}(0{,}2502) = -\,0{,}028\cdot 22{,}377 = -0{,}6265.$$

Амплитуда периодических колебаний будет продолжать уменьшаться.

ВЫВОД. При любом отклонении от $A_1 = 0{,}2505$ процесс будет расходящийся. Периодическое решение $x\,(t) = 0{,}2505\ sin32\ t$ - неустойчивое.

8 Определим устойчивость полученного периодического решения при $A_2=3{,}85$. Зададим некоторое приращение $+\ \Delta A = 0{,}1$ к значению $A_2=3{,}85$ и определим устойчивость по критерию Найквиста.

При $A_2 + \Delta A = 3{,}85+0{,}1 = 3{,}95;$

$$W_{н.э}(3{,}95)=\frac{4\cdot 110}{3{,}14\cdot 3{,}95}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}25}{3{,}95}\right)^2}=35{,}457\cdot 0{,}9977=35{,}386;$$

$$W_{л.ч}(j32)\cdot W_{н.э}(3{,}95) = -\,0{,}028\cdot 35{,}386 = -\,0{,}990.$$

При $A_2 + \Delta A = 3{,}95$ система устойчивая и амплитуда периодических колебаний будет уменьшаться и приближаться к $A_2 = 3{,}85$

При $A_2 - \Delta A = 3{,}85-0{,}1 = 3{,}75;$

$$W_{н.э}(3{,}75)=\frac{4\cdot 110}{3{,}14\cdot 3{,}75}\sqrt{1-\left(\frac{0{,}25}{3{,}75}\right)^2}=37{,}348\cdot 0{,}9977=37{,}264;$$

$$W_{л.ч}(j32)\cdot W_{н.э}(3{,}75) = -0{,}028\cdot 37{,}264 = -1{,}043.$$

При $A_2 - \Delta A = 3{,}75$ система неустойчивая и амплитуда периодических колебаний будет возрастать и приближаться обратно к $A_2 = 3{,}85$.

ОБЩИЙ ВЫВОД. Данная система имеет два периодических решений:

- при $A_1 = 0{,}2505$; $x_1(t) = 0{,}2505\ sin\ 32t$ - неустойчивый колебательный режим *;*

- при $A_2 = 3{,}85$; $x_2(t) = 3{,}85\ sin\ 32\ t$ - устойчивый автоколебательный режим.

Пример 6.3 – Исследовать систему на возможность возникновения автоколебаний по условиям примера 6.2 при $k = 0{,}14$ (коэффициент усиления).

РЕШЕНИЕ.

Фазовая характеристика линейной части системы не зависит от коэффициента k. Поэтому в данном примере $\varphi(32) = -180^0$.

1 Определим амплитудную характеристику линейной части системы при $\omega = 32$ и $k = 0,14$

$$A'(32) = \frac{0,14}{32\left(\sqrt{1+0,0025\cdot 32^2}\right)\cdot\left(\sqrt{1+0,000432^2}\right)} = \frac{0,14}{32\cdot 1,1886\cdot 1,1187} \approx 0,00195$$

2 Параметры реле не зависят от коэффициента усиления k. Поэтому характеристика Z(A) примера 6.2 соответствует условию данного примера.

Значение $Z(A)$ достигает минимум по абсолютному значению

при $A = \alpha\sqrt{2} = 0,25\cdot 1,41 = 0,3525$.

Тогда $$\left|Z(A)\right|_{min} = \frac{\pi\cdot A}{2\cdot b} = \frac{3,14\cdot 0,3525}{2\cdot 110} = \left|0,00503\right|.$$

3 Условие возникновения автоколебаний $A'(32) \geq |Z(A)|_{min}$. Согласно полученной амплитудной характеристики линейной части системы при $k = 0,14$ значение $|A'(32) = 0,00195| < |Z(A)_{min} = 0,00503|$. Они не пересекаются. $A'(32) = 0,00195 < (|z(A)|_{min}\ 0,00503))$.

Условие возникновения автоколебания не выполняется. Автоколебаний в данной системе не возникнет.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 6.5

1 На каком критерии устойчивости основан анализ НСУ по методу Гольдфарба?

2 Условие существования автоколебаний в замкнутой НСУ.

3 Как определяется уравнение годографа Z(A)?

4 Как определяется точки пересечения годографов Z(A) и A(ω)?

5 Как определяется амплитуда колебаний?

6 Как анализируется устойчивость автоколебаний?

7 Оптимальные системы управления (ОСУ)

7.1 Общие сведения об оптимальном управлении

В широком понятии слово «оптимальный» означает наилучший в смысле заданного критерия качества или критерия оптимальности. Эти критерии могут быть различными в зависимости от поставленных задач управления. Примерами оптимальных систем управления являются: управление полётом самолёта по данному маршруту с минимальным расходом топлива; управление курсом корабля с учётом различных ограничений по состоянию моря и погоды; управление мощностями генераторов электростанций, обеспечивающее минимальную стоимость электроэнергии.

В настоящее время теория оптимальных систем всё шире используется в следящих системах для измерения координат летящих самолётов с разной скоростью и на разных высотах, при проектировании экстраполирующей системы (с предвидением изменения полезного сигнала), при определении оптимальной оценки сигнала на основании функции потерь по бейесову критерию, при принятии оптимального решения с помощью методов теории игр. Это ещё далеко не полный список примеров, где всё шире используется теоретические основы оптимального управления [1,4, 5,7,14].

Автоматическая система, которая обеспечивает наилучший показатель качества при заданных условиях работы и наложенных ограничениях, называется оптимальной системой управления (ОСУ).

В зависимости от наличия априорной (предварительной) информации о состоянии объекта управления и возможных изменениях его динамических свойств различают следующие оптимальные системы.

1 Если структура и параметры всей системы заранее заданы и в процессе управления не изменяются (система с полной априорной информацией), то задача оптимального управления сводится к определению оптимального алгоритма управления. ***Это система оптимального управления (СОУ).***

2 Если при заданной структуре системы управления динамические свойства объекта управления могут случайным образом изменятся (система с неполной априорной информацией), то алгоритм управления тоже будет меняться. Задача оптимального управления сводится к непрерывному поиску экстремума по управляющему воздействию. ***Это системы экстремального управления (СЭУ).***

3 Если в системе случайным образом изменяются свойства объекта управления, непредсказуемо изменяются возмущающие воздействия, тогда цель управления добиться стабилизации динамических характеристик системы или обеспечить приспособление системы к работе в новых неожиданных условиях. Задача оптимального управления сводятся к поиску и реализации приемов стабилизации динамических свойств системы, или к анализу возникающих новых условий работы и поиску методов адаптации системы. ***Это адаптивные системы автоматического управления (АСАУ).***

Прежде всего определим: в чем принципиальное отличие оптимальных систем управления (ОСУ) от автоматических систем управления (АСУ).

Во-первых, в определении понятия качество управления. В АСУ показатели качества управления определяются по управляемому параметру - это время переходного процесса, перерегулирование, установившаяся статическая ошибка и т.д. В ОСУ показатель качества управления – это технико-экономические показатели работы системы (быстродействие, энергоемкость, надежность и т.д.).

Во-вторых, по конечному результату решения. В АСУ задача считается решена, если показатели качества управления находятся в заданных пределах, хотя и есть возможность дальнейшего повышения качества работы системы. В ОСУ задача считается решена, если заданный критерий оптимальности достиг экстремума, т.е. своего предельного значения и дальнейшее повышение заданного критерия уже невозможно (с учетом наложенных ограничений).

В-третьих, это математический аппарат. Для линейных АСУ при постановке различных задач по анализу и синтезу системы широко используется преобразование Лапласа. Для ОСУ этот эффективный метод расчета, к сожалению, не всегда применим т.к. оптимальные системы обычно описываются нелинейными уравнениями и оптимальное управление является нелинейной функцией. Поэтому для каждого класса оптимальных систем разработаны свои специальные методы расчета.

В-четвертых, по наличию априорной информации о системе. В АСУ для решения поставленной задачи заранее даны исчерпывающие данные о системе. В ОСУ чаще всего полной информации о системе нет и недостающая информация определяется по мере решения задачи управления.

Таким образом, синтез оптимальных систем имеет ряд особенностей. Вопрос о синтезе оптимальной системы возникает тогда, когда выбор лучшего показателя качества управления вступает в противоречие с ограниченными возможностями данной системы. Когда для достижения заданного показателя качества управления необходимо использовать все резервы системы (энергетические, кинематические, механические и т.д.).

Качество данной оптимальной системы зависит от правильности выбора критерия качества управления, который в свою очередь зависит от технико-экономического критерия работы всей системы. Трудность выбора критерия оптимальности состоит еще в том, что из целого ряда требований к критериям качества управления необходимо выбрать основной, а остальные учесть как ограничения. Требования надо предъявлять реальные, а не идеальные, зачастую и не осуществимые. При этом учитывать, что некоторые требования бывают противоречивые, например: максимальная надежность (запас прочности, резервирование) и стоимость изготовления, или максимальное быстродействие и минимальные затраты энергии. Различают следующие критерии оптимальности [2, 9, 14]:

1) критерий оптимальности по быстродействию

$$J = \int_{t_0}^{t_k} 1dx = t_k - t_0 = T_{рег} \to min;$$

2) критерий оптимальности по расходу ресурсов

$$J = \int_{t_0}^{t_k} \sum_{i=1}^{m} C_i \left[U_i(t) \right] dt \to min;$$

где $i = 1 \to m$ - различные участки пути;

C_i - коэффициенты связи расхода ресурса и управляющего воздействия;

U_i - управляющие воздействия;

3) критерий оптимальности по траектории движения

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (a_1 x + a_2 \dot{x} + U + a_3 \dot{U})^2 dt \to min,$$

где a_i - весовые коэффициенты;

$\dot{x}$ - скорость;

x - путь;

U - управляющее воздействие;

$\dot{U}$ - скорость управляющего воздействия.

4) критерий оптимальности по качеству переходного процесса

$$J = \int_{t_0}^{t_k} (x_{уст} - x(t))^2 dt \to min;$$

5) критерий оптимальности при случайных воздействиях на систему

$$J = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_{0}^{T} \Delta x^2 dt \to min .$$

В общем случае критерий оптимальности имеет вид

$$J = \int_{y_0}^{y_1} F(\overline{x}, \overline{U}, A, B, C, t) dy ,$$

где J - показатель качества регулирования;

F - функциональная зависимость;

$\overline{U}$ - управляющее воздействие и его производные;

$\bar{x}$ - путь и его производные;

A, B, C – ограничение по параметрам системы;

t - время;

y_i - в пределах какого параметра определяется оптимум (чаще в пределах времени).

Критерий оптимальности в каждом конкретном случае имеет вполне определенный физический смысл: минимальное время регулирования, минимум затраченной энергии, максимум перемещения за заданный промежуток времени и т.д. Нельзя ставить задачу одновременного и полного выполнения критериев оптимальности по двум и более показателям качества регулирования. Он определяется по одному основному показателю работы, а другие задаются в области допустимых значений и, как правило, полученное оптимальное значение параметров системы находится на границе допустимых значений. Оптимальная система - это система автоматического управления на её предельных возможностях.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 7.1

1 Объясните понятие: «оптимальная система автоматического управления» (ОСУ).

2 Какие системы считаются системами оптимального управления (СОУ)?

3 Какие системы считаются системами экстремального управления (СЭУ)?

4 Какие системы считаются системами адаптивного управления (АСАУ)?

5 Отличие оптимальных систем управления (ОСУ) от автоматических систем управления (АСУ):

- в определении понятия качества управления;

- по конечному результату решения;
- по использованию математического аппарата;
- по наличию априорной информации о системе.

6 Какие используются критерии оптимальности?

7.1.1 Определение оптимального пути по уравнению Эйлера

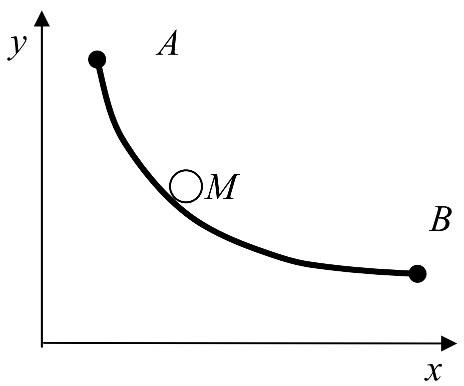


Рисунок 7.1 – К задаче И. Бернулли

В 1696 году появилась работа И. Бернулли «Новая задача, к решению которой приглашаются математики». Задача следующая: *«В вертикальной плоскости даны две точки А и В (рисунок 7.1). Определить траекторию пути, опускаясь по которому под действием собственной тяжести, тело М при движении от точки А дойдёт до точки В в кратчайшее время».*

Фактически впервые для математиков была поставлена задача определения оптимальной траектории пути.

Чаще всего оптимальное управление находится как функция времени, т.е. как программное управление. В общем случае оптимальное управление может быть определено как функция фазовых координат.

Для составления функционала по интегральному критерию качества необходимо иметь следующие данные:

1) уравнение объекта управления (системы);
2) критерий оптимальности;
3) граничные условия.

Необходимые условия экстремума функционала качества управления определяются по уравнению Эйлера для определения оптимального пути $x(t)$

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = 0 .$$

Уравнение Эйлера для определения оптимального управления *U(t)*

$$\frac{\partial F}{\partial U} - \frac{d}{dt} \cdot \frac{\partial F}{\partial \dot{U}} = 0 .$$

Конечная задача расчета - определить оптимальное уравнение пути $x^*(t) = f(t)$ и уравнение оптимального управления $U^*(t) = f(t)$, при котором критерий оптимальности $J^* \to min\ (max)$.

Пример 7.1 **–** Дан функциональный критерий оптимальности

$$J = \int_0^\infty F(x)dt = \int_0^\infty (x^2 + T^2 \dot{x}^2)dt \to min .$$

Необходимо определить оптимальное уравнение пути $x^*(t) = f(t)$ проходящего через точки $x(0) = x_0$ и $x(\infty) = 0$ при котором $J \to min$.

Граничные условия: начальное при $t = 0;$ $\quad x(0) = x_0;$

конечное при $t \to \infty;$ $\quad x(\infty) = 0.$

РЕШЕНИЕ

1 Уравнение Эйлера

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = 0 .$$

2 Подставляем значение функционала *F(x)*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial\left(x^2 + T_2 \dot{x}^2\right)}{\partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial(x^2 + T^2 \dot{x}^2)}{\partial \dot{x}} = 2T^2 \dot{x}, \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial 2 \cdot T^2 \dot{x}}{\partial t} = 2T^2 \ddot{x}.$$

3 Получаем уравнение Эйлера для определения оптимального пути

$$2x - 2T^2 \ddot{x} = 0 .$$

4 Решение полученного дифференциального уравнения пути

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}} + C_2 e^{+\frac{t}{T}} .$$

5 Так как по граничному условию полученное уравнение пути убывающая функция, то $C_2 = 0$ и решение принимает вид

$$x(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}}.$$

6 Коэффициент C_1 определяем по начальным условиям (данная задача с закрепленными концами)

$$x(0) = C_1 \cdot 1 = x_0$$

ОТВЕТ. Оптимальное уравнение пути является уравнением экстремали

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{T}}$$

7.1.2 Определение оптимального управления по принципу максимума Понтрягина

Напомним, что при определении оптимального управления методом Эйлера, полученное подынтегральное выражение $F(x, u, t)$ должно быть однозначное, непрерывное, с частными производными до третьего порядка включительно. В практических расчетах эти условия редко выполняются. Например, если исполнительное устройство системы является электрический двигатель, то обычно накладываются ограничения по силе тока, а действительное оптимальное управление может быть релейным. Это значит, что нарушаются основные условия, на которых строится расчет по классическому вариационному исчислению. Эти трудности преодолены в методе определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина, который он сформулировал в 1953 году как необходимое условие экстремума для задач оптимального управления.

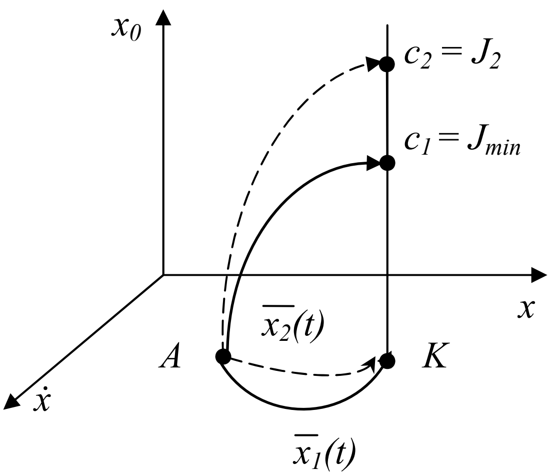
Прежде чем излагать алгоритм решения по этому методу, сделаем несколько пояснений. Введем n-мерное Евклидово пространство, которое образовано координатой x и её производными. Такое пространство называется ***фазовым пространством***. Состояние системы в любой момент можно охарактеризовать положением точки в этом фазовом пространстве или положение вектора, проведенным из начала координат в заданную точку фазового пространства.

Пусть уравнение объекта описывается дифференциальным уравнением n-порядка

$$a_0\frac{d^n x}{dt}+a\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+a_2\frac{d^{n-2}x}{dt^{n-2}}+...+a_n x=k\cdot u.$$

Введём обозначения $\dot{x}=x_1$, $\dot{x}_1=x_2$, $\dot{x}_2=x_3$, $\dot{x}_3=x_4$, … . Тогда уравнение объекта можно записать в виде системы n уравнений первого порядка

$$\begin{cases}\dot{x}_1=f_1(x,u);\\ \dot{x}_2=f_2(x,u);\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dot{x}_n=f_n(x,u).\end{cases}$$



A – начальное состояние системы;

K – конечное состояние системы;

$x(t)$ – фазовая траектория движения;

J_{min} – минимальное значение критерия оптимальности;

J_2 – другое значение критерия оптимальности.

Рисунок 7.2 - Геометрическая интерпретация принципа максимума Понтрягина

Эти значения $\dot{x}_1$, $\dot{x}_2$, ... $\dot{x}_n$ описывают систему через координаты фазового пространства. В число фазовых координат включает ещё величину x_0 , характеризующую текущее значение функционала качества

$$J=\int_{t_0}^{t_1}F(u,x)\,dt,$$

тогда $x_0=F(u,x)$.

В результате получаем фазовое пространство из $(n+1)$ координат. Это «новое» фазовое пространство показано на рисунке 7.2 для случая, когда объект управления описывается уравнениями второго порядка, т.е. имеет две фазовые координаты x и $\dot{x}$. К ним добавляется третья – x_0.

Геометрическая интерпретация этой задачи состоит в следующем. Допустим, что система второго порядка должна быть переведена из начального положения А в конечное положение К по оптимальной траектории $\bar{x}_1(t)$. В $(n+1)$ – мерном (трехмерном) пространстве (с учетом критерия качества x_0) это перемещение соответствует фазовой траектории AK и критерию качества $KC_1 = J_{min}$.

Если перемещение произошло по другой (не оптимальной) траектории $\bar{x}_2(t),$ то такому перемещению будет соответствовать другой критерий качества $J_2 > J_{min}$ и отрезок $KC_2 > KC_1$. Следовательно, задача минимизации функционала качества может быть сведена к минимизации значения дополнительной фазовой координаты x_0, если экстремум – минимум J.

Выводы

Уравнение объекта регулирования должно быть представлено через фазовые координаты;

Критерий оптимальности представляется через дополнительную фазовую координату x_0.

Оптимальной траекторией движения соответствует минимальное значение критерия качества (согласно рисунку 7.2)

Оптимальной траекторией движения соответствует оптимальное управление.

Определим оптимальную траекторию движения. Пусть задача оптимального управления состоит в переводе за минимальное время системы из положения A в положение K (рисунок 7.3) и пусть траектория движения $ABCDK$ является оптимальной.

Время перехода от $t = 0$ до $t = t_n$ разобьем на участки с одинаковым временем Δt_i при переходе по оптимальной траектории между каждым участком. Такие поверхности называются *изохромными.* Очевидно, что для достижения минимального времени перехода необходимо двигаться по оптимальной траектории *ABCDK,* а любое отклонение от нее (например, по *ANLMK)* приведет к увеличению времени перехода. Например, перемещение в точку *N* можно представить как перемещение вначале по *AB,* а далее по изохроме к точке *N.* Любые движения вдоль изохромы - это пустая потеря времени, это «кружение» вокруг заданной конечной точки без приближения к ней. Поэтому оптимальная траектория должна быть нормалью (перпендикулярна) к изохромам. Принцип максимума сводится к соблюдению этого условия.

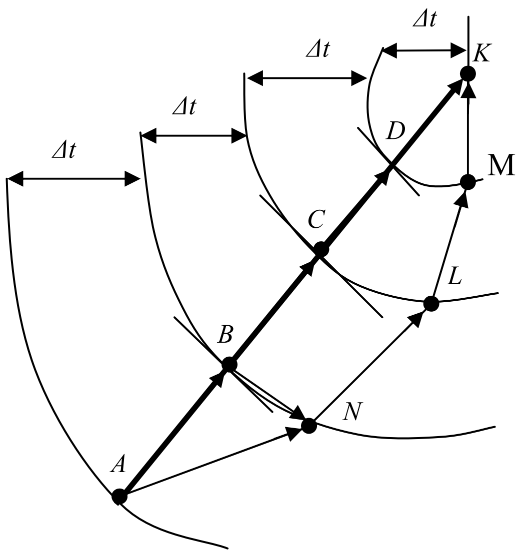


Рисунок 7.3 – Геометрическая интерпретация оптимальной траектории движения системы по принципу максимума Понтрягина

На протяжении всей оптимальной траектории скалярное произведение вектора скорости на вектор обратной (по направлению) градиенту по времени должен быть максимальным.

Примечание — Скалярное произведение двух векторов должно быть максимальное. Это означает, что угол α между ними должен стремится к *0*, так как их модуль вычисляется через произведение и косинуса угла между ними.

Обозначим вектор скорости υ, градиент к изохромам $grad\ \Delta t_i$, вектор обратный градиенту к изохромам $\varphi_i = -grad\ \Delta t_i$. Тогда условия оптимального движения через все изохромы

$$H = \sum_{i=1} \varphi_i \upsilon \rightarrow max$$

Это уравнение называется уравнением Гамильтона.

Сумма скалярных произведений вектора скорости на вектор обратной градиенту времени должна быть максимальна.

Это условие и есть принцип максимума Понтрягина. В общем случае при произвольном критерии оптимальности эти изохромы преобразуются в изоповерхности. Условие оптимальности при этом сохраняется прежним. Практическая методика расчета не требует определения этих изоповерхностей. Необходимые векторы φ_i или векторы управления определяются по формуле

$$\frac{d\varphi_i}{dt} = -\sum_{1}^{n+1} \frac{df_i}{dx_i} \cdot \varphi_i ,$$

где $\frac{d\varphi_i}{dt}$ - производная по искомому вектору управления;

φ_i - искомый вектор управления;

f_i - уравнение объекта управления, относительно x_i координаты векторного пространства;

x_i - координата векторного пространства.

По полученным значениям производной $\frac{d\varphi_i}{dt}$ определяется значение искомого вектора уравнения φ_i и с учетом фазовой координаты f_i составляется уравнение Гамильтона (Н).

С физической точки зрения для механической системы уравнение Гамильтона характеризует полную энергию системы, которая должна оставаться положительной и максимально допустимой в процессе управления, а функции φ_i являются импульсами и задают направление движения. Для электрической системы уравнение Гамильтона – это мощность управляющего воздействия, а функции φ_i – импульсы этой мощности.

Методика определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина следующая.

1 Уравнение системы автоматического уравнения представляется в виде системы уравнений фазового пространства. Вводится дополнительная координата x_0, характеризующая значение функционала качества.

$$\frac{dx_0}{dt}=f_1,\ \ \frac{dx}{dt}=f_2,\ \ \frac{d\dot{x}}{dt}=f_3,\ \ \ldots,\ \ \frac{d^n x}{dt^n}=f_n.$$

2 Определяются производные вектора управления по $\frac{d\varphi_i}{dt}$.

3 Определяются значения векторов управления φ_i.

4 Составляется уравнение Гамильтона.

5 Определяются условия при которых уравнение Гамильтона → max.

6 Из этого условия находится оптимальное управление.

Пример 7.2– Объект управления описывается дифференциальным уравнением

$$T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=ku(t).$$

Определить оптимальный алгоритм управления, переводящий объект из положения $x = 0,\ \ \dot{x}=0$ в положение $x = x_n$, $\dot{x}=0$ за минимальное время. Ограничение на управляющие воздействия $|u|\le u_{max}$. Таким образом, исходные данные следующие.

1 Уравнение объекта управления. $T\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{dx}{dt}=ku(t).$

2 Критерий оптимальности – быстродействие $J=\int_0^t 1\cdot dt\to min.$

Так как подынтегральное выражение критерия оптимальности равно 1, то $\frac{dx_0}{dt}=0$ и координаты x_0 – нет.

3 Граничные условия

начальные $\begin{cases}x(0)=0;\\ \dot{x}(0)=0;\end{cases}$ конечные $\begin{cases}x(\infty)=x_n;\\ \dot{x}(\infty)=0.\end{cases}$

4 Ограничения $|u|\le u_{max}$.

Все необходимые данные есть.

РЕШЕНИЕ.

1 Представить уравнение САУ в виде системы уравнений фазового пространства. Для этого вводим новую координату $\frac{dx}{dt} = x_1$ и получаем систему уравнений объекта управления будет

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x_1 = f_1; \\ \frac{dx_1}{dt} = \frac{1}{T}(ku - x_1) = f_2. \end{cases}$$

2 Определяем производные векторов управления

$$\frac{d\varphi_1}{dt} = -\left[\frac{df_1}{dx}\varphi_1 + \frac{df_2}{dx}\varphi_2\right] = -\left[\frac{dx_1}{dx}\varphi_1 + \frac{d\left(\frac{1}{T}(kU - x_1)\right)}{dx}\varphi_2\right] = -[0\varphi_1 + 0\varphi_2] = 0;$$

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = -\left[\frac{dx_1}{dx_1}\varphi_1 + \frac{d\left(\frac{1}{T}(kU - x_1)\right)}{dx_1}\varphi_2\right] = -\left[1\varphi_1 - \left(\frac{1}{T}\varphi_2\right)\right] = \frac{1}{T}\varphi_2 - \varphi_1.$$

3 Определяем значения векторов управления $\begin{cases} \varphi_1 = c_1 \\ \varphi_2 = c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}}. \end{cases}$

4 Составим уравнение Гамильтона $H = [f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2]$

$$H = x_1 c_1 + \frac{1}{T}(kU - x_1)\left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}}\right) = \frac{k}{T}U\left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}}\right) - \frac{x_1}{T}\left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}}\right) + x_1 c_1.$$

Максимальное значение уравнения Гамильтона зависит от управляющего воздействия U, которое может принять любое значение в пределах принятого ограничения. Поэтому те члены уравнения Гамильтона, которые не содержат U можно отбросить.

$$H_{max} = \frac{k}{T}\left(c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}} \right) U \to max.$$

5 Находим оптимальное управление по условию $H \to max$. Чтобы уравнение Гамильтона имело всегда плюс максимум, необходимо:

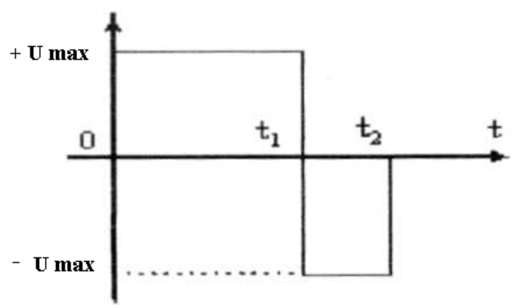


Рисунок 7.4 – График оптимального управления к примеру 7.2

а) управляющее воздействие принять равным U_{max};

б) если выражение в скобках положительное, то $+ U_{max}$. Если выражение в скобках отрицательное, то минус U_{max}. То есть, управляющее воздействие должно столько раз менять свой знак, сколько раз он меняется в векторе управления $\varphi_2 = c_1 - c_2 e^{\frac{t}{T}}$. Для данного примера условия $H \to max$ следующие

Пусть $c_1 > c_2$, при $t < t_1$ $c_1 > c_2 e^{\frac{t_1}{T}}$, тогда $U = + U_{max}$.

Если при $c_1 < c_2 e^{\frac{t}{T}}$, при $t_1 < t < t_2$ тогда $U = - U_{max}$ (смотри рисунок 7.4).

ОТВЕТ. $U(t) = \sigma U_{max}$, где $\sigma = \pm 1$. По окончании управления $U = 0$.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 7.1.2

1 Преимущество определения оптимального управления по принципу максимума Понтрягина по сравнению с уравнением Эйлера.

2 Что называют фазовым пространством?

3 Как определяются координаты фазового пространства?

4 Как определяется оптимальная траектория в фазовом пространстве?

5 Как определяются векторы управления φ_i?

6 Как получают уравнение Гамильтона?

7 Как определяется условие, при котором уравнение Гамильтона будет

максимальное?

8 С какой целью в фазовое пространство вводят дополнительную координату x_0 ?

9 В каких случаях эта дополнительная координата $x_0 = 0$?

7.1.3 Определение оптимального управления методом динамического программирования Беллмана

В послевоенные годы наряду с задачами оптимального управления в технике возникли задачи оптимального управления в экономике, в финансовой деятельности, в управлении войсками и т.д. На основе существующих методов такие задачи не имели эффективного численного решения. Это привлекло математиков к поиску оптимального решения этих задач другим методом. Было обнаружено, что процесс решения многих из них может быть представлен как некоторый многоплановый процесс принятия решений. Такой метод решения получил название *метод динамического программирования*, что означает принятие решения с учетом динамики развития исследуемой системы. Основу этого метода, разработанного американским математиком Р. Беллманом, составляет *принцип оптимальности*, который позволяет каждый участок процесса рассматривать отдельно от другого участка. Основой принципа такой оптимальности является следующее положение.

Любой конечный участок оптимальной траектории является тоже оптимальной траекторией.

Такое решение общей поставленной задачи позволяет составить программу на ЭВМ по решению задачи по отдельным участкам.

Поставленную задачу решают не целиком, а разбивают на отдельные участи, в которых задача оптимизации решается проще.

Часто расчет удобнее производить с конечного участка и методом «пятясь назад» дойти до начального участка. На основании вышеизложенного основу метода динамического программирования можно сформулировать так.

Поиск оптимума не зависит от предыдущего состояния системы и определяется лишь ее состоянием в рассматриваемый момент времени.

Действительно, если оптимальное решение определяется начиная с конечного участка и достигло до какого то *K*-участка, то можно утверждать, что полученная траектория движения от этого *K*-участка до конца оптимальна и независит от того, какую траекторию пути определим от начала до этого *K*-участка. Или, полученное оптимальное решение не зависит от предыдущего состояния, от решения, которое потом получим до *K*-участка.

Для получения решения общей задачи оптимального управления необходимо произвести состыковку этих участков и получить «связанную цепочку» отдельно решенных задач. Количество таких участков или этапов производственной деятельности в экономике, в развитии банковской структуры, в управлении военными действиями и т. д. может быть несколько сотен, а вариантов решения на каждом участке – тысячи. Для анализа всех этих вариантов используется мощная ЭВМ с большим объемом памяти, чтобы обеспечить анализ всех возможных вариантов на каждом участке исследуемой системы.

Рассмотрим применение принципа динамического программирования на конкретном упрощенном примере.

Пример 7.3 **–** Между пунктами *A* и *B* определить оптимальную траекторию пути, чтобы стоимость строительства была минимальна. Весь путь разбит на шесть этапов проектирования. Известны возможные варианты на каждом этапе и стоимость каждого варианта. Определить оптимальный вариант каждого этапа.

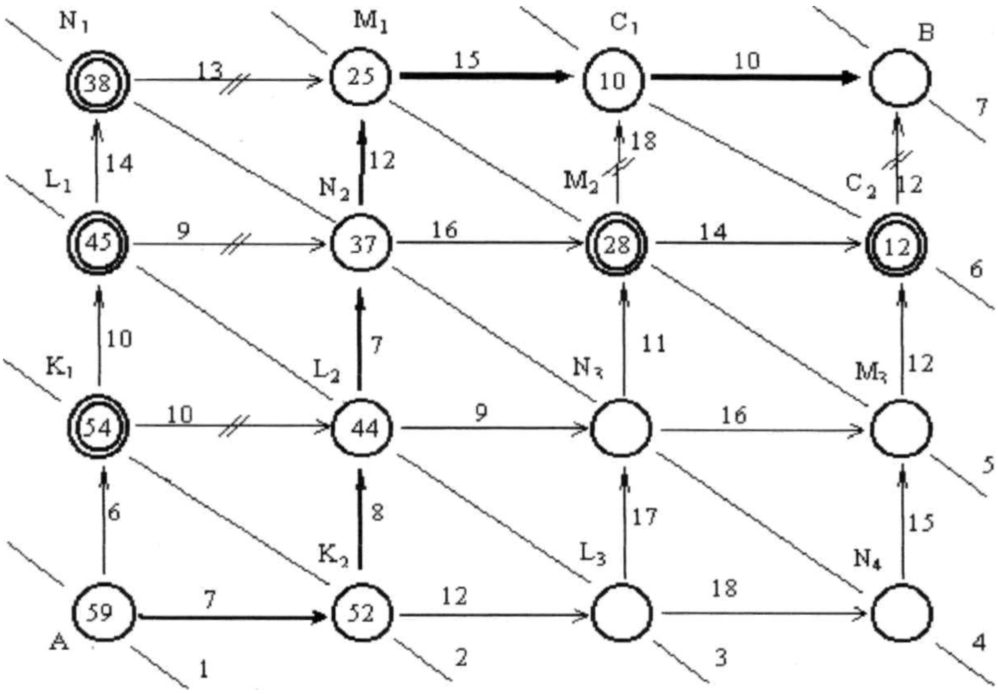
РЕШЕНИЕ

Обозначим первый этап 1-2 между пунктами А и пунктами K_1, K_2; второй этап 2-3 между пунктами K_1, K_2 и L_1, L_2, L_3; третий этап 3-4 между пунктами L_1, L_2, L_3 и N_1, N_2, N_3, N_4; четвертый этап 4-5 между пунктами N_1, N_2, N_3, N_4 и

M_1, M_2, M_3; пятый этап между пунктами M_1, M_2, M_3 и C_1, C_2; и, наконец, шестой этап между пунктами C_1, C_2 и конечным пунктом B. Стоимость прокладки дороги от каждого пункта одного этапа до каждого пункта другого этапа известна и показана на стрелках (рисунок 7.5).

1 Решение начинаем с конца, с точки B, в которую можно попасть за последний шестой этап из точки C_1 или из C_2. Выбираем C_1 - B = 10, а C_2 - B = 12 отбрасываем, как более дорогой путь. Обозначим в кружке C1 = 10.

2 В пункт C_1 можно попасть по M_1 - C_1 = 15 или по M_2 - C_1 = 18. Выбираем M_1 - C_1 = 15 как более дешевый, а путь M_2 - C_1 = 18 - отбрасываем, как более дорогой. Обозначим пункт M_1 = 10+15 = 25.



A, B - начальный и конечный пункт пути;

K_i, L_i, N_i, M_i, C_i - узловые пункты этапов, в которых показывается полученная стоимость пути начиная с конечного пункта B;

○ - данный узловой пункт не рассчитывался как заведомо неприемлемый;

◎ - данный узловой пункт рассчитывался, но по критерию минимума затрат не подходит.

Рисунок 7.5 - Нахождение оптимальной траектории пути методом динамического программирования к примеру 7.3

3 В пункт M_1 можно попасть по N_1 - M_1 = 13 или по N_2 - M_1 = 12. Выбираем N_2 - M_1 = 12. Обозначим пункт N_2 = 25+12 = 37.

4 В пункт N_2 можно попасть по L_1 - N_2 = 9 или по L_2 - N_2 = 7. Выбираем L_2 - N_2 = 7. Обозначим пункт L_2 = 44.

5 В пункт L_2 можно попасть по K_1 - L_2 = 10 или по K_2 - L_2 = 8. Выбираем K_2 - L_2 = 8. Обозначим пункт K_2 = 52.

6 В пункт L_2 можно попасть по K_1 - L_2 = 10 или по K_2 - L_2 = 8. Выбираем K_2 - L_2 = 8. Обозначим пункт K_2 = 52.

7 Однозначно выбираем путь A - K_2 = 7. Обозначим A = 59.

ОТВЕТ. Минимальная стоимость пути 59 условных единиц.

Полученный оптимальный путь можно трактовать как оптимальную траекторию движения в такой принятой системе координат. Отметим ряд особенностей:

1) оптимальная траектория пути определяется при каждом шаге двигаясь от B назад;
2) «пятясь назад» отбрасываются не только рядом расположенные варианты, C_2, M_2, N_1, L_1, K_1, но и многие другие варианты. Так пункты L_3, N_3, N_4, M_3 вообще не рассматривались, как заведомо не приемлемые;
3) в американской литературе этот метод, при котором часть вариантов вообще не рассматривается, называется *«метод сожженных мостов»*.

7.1.4 Рекурентные формулы по методу Беллмана

Выяснив основы и идеи метода динамического программирования, определим расчетные формулы этого метода, используя результаты расчета по примеру 7.3.

Пусть объект управления описывается уравнением $\frac{dx}{dt} = f(x,u)$.

Критерий оптимальности $J = \int_0^T \sigma_1(x,u)dt + \varphi(x(T)) \to \min$.

Время окончания регулирования T - задано.

Произведем дискретизацию задачи, то есть заменим непрерывную систему дискретно-непрывной. Для этого разобьем интервал времени регулирования Т на N равных участков с малой продолжительностью $\Delta = T / N$. Тогда дифференциальное уравнение отдельных участков будет уравнением в конечных разностях

$$\frac{x(k+1)-x(k)}{\Delta} = F\left[x(k),u(k)\right], \quad \text{или} \quad x(k+1) = x(k) + F\left[x(k),u(k)\right]\cdot \Delta,$$

где k – номер участка;

Δ – время прохождения этого участка.

Критерий оптимальности так же представим в виде суммы

$$J = \sum_{0}^{N-1} \sigma[(x(k),u(k)] + \varphi(x(n)) \to min.$$

Далее требуется определить дискретные значения управляющих воздействий на каждом участке, обеспечивающих минимизацию критерия оптимальности.

Рассмотрим последний участок разбиения $(n-1)$. Определим на нем критерий оптимальности

$$J_{N-1} = \sigma[x(n-1),u(n-1)] + \varphi(x(n)).$$

Таким образом, функционал качества зависит от выбранной траектории пути $x(n-1)$, от управления системы на этом участке $u(n-1)$, а так же от состояния системы в конце пути $\varphi(x(n))$. Выберем такую траекторию пути $x^*(n-1)$ и такое управление $u^*(n-1)$, что бы этот функционал был минимален и равен J^*_{N-1} .Тогда

$$J^*_{N-1} = \sigma(x^*(n-1),u^*(n-1) + \varphi(x(n)) \to \min.$$

Запомним полученное значение J^*_{N-1} перейдем к предпоследнему участку $n-2$

$$J^*_{N-2} = \sigma\left[x(n-2),u(n-2)\right] + J^*_{N-1}\left[\sigma(x^*(n-1),u^*(n-1)+\varphi(x(n))\right].$$

Определим на этом участке такую траекторию пути $x^*(n-2)$ и такое уравнение $u^*(n-2)$, чтобы этот функционал был минимален

$$J^*{}_{N-2} = \sigma\left[x^*(n-i), u^*(n-i)\right] + J^*{}_{N-1}.$$

Запомним полученное значение $J^*{}_{N-2}$, а величину $J^*{}_{N-1}$ можно изъять из памяти, так как она вошла в $J^*{}_{N-2}$. Переходим к следующему шагу. Так последовательно переходя от шага к шагу получаем аналогичное по виду формулу для определения пути и управления на любом $(n-i)$ участке

$$J^*{}_{N-1} = \sigma\left[x^*(n-i), u^*(n-i)\right] + J^*{}_{N-i-1}.$$

Эта формула является рекуррентным соотношением для определения функционала на любом шаге.

Еще раз следует отметить, что первоначально в ЭВМ закладываются все возможные шаги искомой траектории, и для этого ЭВМ должна обладать большой емкостью запоминающего устройства. Но благодаря методу Беллмана происходит целенаправленный поиск оптимальных значений, и это сокращает объем расчета.

7.1.5 Непрерывные формулы по методу Беллмана

Некоторые задачи оптимального управления проще решаются по *непрерывной формуле уравнения динамического программирования.* Пусть объект управления описывается уравнением

$$\frac{dx}{dt} = f(x,u).$$

Критерии оптимальности $J = \int_0^T \sigma(x,u)dt + 0 \to min$.

Затраты в конечном пункте примем равным 0.

Непрерывная формула уравнения Беллмана для определения оптимального пути.

$$\sigma(x,u)+f(x,u)\frac{dJ^*}{dx}=0, \qquad (7.1)$$

где $\sigma(x,u)$ - подынтегральная функция критерия оптимальности;

$f(x,u)$ - уравнение объекта управления;

J^* - критерий оптимальности по регулируемому параметру;

x - регулируемый параметр.

Уравнение объекта управления может состоять из системы уравнений и еще добавляется условие на ограничение регулируемой координаты. Поэтому второе слагаемое в общем случае может состоять из суммы $\sum_1^i f_i(x,u)\frac{dJ_i^*}{dx_i}$.

Возьмем в полученной формуле Беллмана производную по управлению

Непрерывная формула уравнения Беллмана для определения оптимального управления.

$$\frac{d\sigma(x,u)}{du}+\frac{df(x,u)}{du}\cdot\frac{dJ^*}{dx}=0. \qquad (7.2)$$

Эти два уравнения Беллмана являются основными для определения оптимального пути и управления. Заметим, что критерий оптимальности *J** должен быть дифференцируемый по регулируемому параметру, что не всегда выполняется. Но и в этом случае можно определить оптимальное управление.

Пример 7.4 **–** Объект управления описывается системой уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx_1}{dt}=ku & (7.3)\\[2ex] \dfrac{dx_2}{dt}=-x_1 & (7.4)\end{cases}$$

Критерий оптимальности - минимум время переходного процесса

$$J=\int_0^\infty 1\cdot dt\to\min.$$

Ограничения $$Q = \int_0^{t_{ПП}} k_1 u^2 dt \le Q_0 \,. \tag{7.5}$$

Граничные условия: начальные $\begin{cases} x(0) = 0; \\ \dot{x}(0) = 0; \end{cases}$ конечные $\begin{cases} x(t_{nn}) = x_n; \\ \dot{x}(t_{nn}) = 0. \end{cases}$

РЕШЕНИЕ

1 Представим исходные данные этого примера в фазовых координатах

$$\frac{dx_1}{dt} = ku = f_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = -x_1 = f_2, \qquad \frac{dx_3}{dt} = k_1 u^2 = f_3.$$

2 Составим уравнение Беллмана для определения оптимальной траектории пути (смотри 7.1)

$$\sigma(x,u) + f_1 \frac{dJ^*}{dx_1} + f_2 \frac{dJ^*}{dx_2} + f_3 \frac{dJ^*}{dx_3} = 0;$$

$$1 + ku \frac{dJ^*}{dx_1} - x_1 \frac{dJ^*}{dx_2} + k_1 u^2 \frac{dJ^*}{dx_3} = 0, \tag{7.6}$$

где $\sigma(x,u) = 1$(критерии оптимальности – быстродействие).

3 Для определения оптимального управления возьмем производную по управлению (смотри 7.2)

$$k \frac{dJ^*}{dx_1} + 2k_1 u^* \frac{dJ^*}{dx_3} = 0 \,. \tag{7.7}$$

4 Из этого уравнения определяем u^*

$$u^* = -\frac{k}{2k_1} \cdot \frac{dJ^*/dx_1}{dJ^*/dx_3} \,. \tag{7.8}$$

5 Полученное значение u подставляем в уравнение оптимальной траектории пути (7.6)

$$1 + k\left(-\frac{k}{2k_1} \cdot \frac{dJ^*/dx_1}{dJ^*/dx_3}\right) \cdot \frac{dJ^*}{dx_1} - x_1 \frac{dJ^*}{dx_2} + k_1 \left(-\frac{k}{2k_1} \cdot \frac{dJ^*/dx_1}{dJ^*/dx_3}\right)^2 \cdot \frac{dJ^*}{dx_3} = 0. \tag{7.9}$$

После преобразований получаем

$$\frac{dJ^*}{dx_3} - x_1 \frac{dJ^*}{dx_2} \cdot \frac{dJ^*}{dx_3} - \frac{k^2}{4k_1}\left(\frac{dJ^*}{dx_1}\right)^2 = 0. \qquad (7.10)$$

6 Критерий оптимальности представим в следующем виде

$$J^* = (1 + a_1 x)^{3/2} + a_2 x_2 + a_3 x_3 . \qquad (7.11)$$

Такое представление критерия оптимальности позволяет рассматривать его как линейную зависимость по параметрам фазового пространства.

7 Определим производные для J^* по всем координатам фазового пространства

$$\frac{dJ^*}{dx_1} = \frac{3}{2} a_1 \sqrt{1 + a_1 x_1}\,, \qquad \frac{dJ^*}{dx_2} = a_2, \qquad \frac{dJ^*}{dx_3} = a_3. \qquad (7.12)$$

8 Полученные значения $\dfrac{dJ^*}{dx_i}$ через a_1, a_2, a_3 подставляем в уравнение оптимально управления и определяем u^*

$$u^* = -\frac{3}{2} \cdot \frac{k \cdot a_1 \cdot \sqrt{1 + a_1 x}}{2 \cdot k_2 \cdot a_3}. \qquad (7.13)$$

9 Теперь необходимо определить значение введенных коэффициентов a_1, a_2, a_3 через параметры системы. Для этого полученные значения частных производных подставляем в уравнение оптимальной траектории пути (7.10) и после преобразования имеем

$$a_3 - x a_2 a_3 = \frac{9k^2}{16k_1} a_1^{\,2} + \frac{9k^2}{16k_1} a_1^{\,3} x_1 . \qquad (7.14)$$

10 Приняв значение $a_3 = 1$ определим a_1, a_2 через параметры системы

$$a_1 = \frac{4}{3k}\sqrt{k_1}, \qquad a_2 = \frac{-4}{3k}\sqrt{k_1}. \qquad (7.15)$$

11 Подставляем найденное значение частных производных a_1, a_2 в уравнение управления. Окончательно получаем оптимальный алгоритм управления

$$u^* = -\frac{1}{\sqrt{k_1}}\sqrt{1+\frac{4}{3k}\sqrt{k_1 x_1}} = -c_1\sqrt{1+c_2\cdot x_1}, \qquad (7.16)$$

где $$c_1 = \frac{1}{\sqrt{k_1}}, \quad c_2 = \frac{4}{3k}\sqrt{k_1}.$$

ВЫВОД. Алгоритм оптимального управления получен в функции фазовой координаты системы x_1.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 1.3

1 Почему метод разработанный Беллманом назван методом динамического программирования?

2 Основной принцип метода Беллмана.

3 Основное отличие метода Беллмана от метода Понтрягина.

4 Почему поиск оптимума не зависит от предыдущего состояния системы?

5 Почему метод Беллмана называют «метод пятясь назад»?

6 Почему метод Беллмана еще называют «метод сожженных мостов»?

7 Почему для метода Беллмана нужна ЭВМ с большим объемом памяти?

8 Что значит «рекуррентное соотношение» в методе Беллмана?

9 В непрерывной формуле уравнения Беллмана что означают следующие ее составляющие: $\sigma(x,u), f(x,u), J^*, x, u$?

10 Как задаются критерий оптимальности J^*?

11 Как определяются производные по J^* по координатам фазового пространства?

7.2 Системы экстремального управления (СЭУ)

Для многих технологических процессов характерным является наличие экстремума по регулируемому параметру. Объекты с такими характеристиками называются *экстремальными*. Примерами таких объектов могут быть двигатель внутреннего сгорания, имеющий максимальный КПД при определенном отношении нагрузки и мощности двигателя; отопительные котлы, имеющие максимальную температуру в топке при определенном соотношении подаваемого газа и воздуха; аппараты химической промышленности, имеющих оптимальный ход реакции при определенном соотношении реагируемых веществ. Анализ таких технологических процессов показывает, что экстремальную характеристику процесса можно ожидать там, где одновременно протекают процессы ведущие к противоположным результатам. Например, температура в топке определяется количеством сжигаемого топлива и подаваемого воздуха. При недостатке воздуха топливо сгорает не полностью и, следовательно, выделяется меньше тепла. При избытке воздуха топливо полностью сгорает, но часть тепла идет на нагрев избытка воздуха и уносится из топки. Очевидно, что существует такое соотношение между количеством сжигаемого топлива и количеством подаваемого воздуха, когда температура в топке будет максимальная или регулируемый параметр достигнет своего экстремального значения. Если нагрузка отопительного котла или качество топлива (например, уголь) случайным образом меняется, то для разных сочетаний этих величин система управления должна обеспечить максимальную температуру в топке.

Системы, осуществляющие постоянный автоматический поиск оптимального управляющего воздействия при заданной структуре системы и случайным образом изменяющихся ее параметрах, называются системами экстремального управления.

Системы оптимального управления (СОУ), которые рассмотрены в подразделе (7.1), и системы экстремального управления (СЭУ), которые рассматриваются в этом подразделе (7.2) в принципе имеют одинаковую цель управления – обеспечить оптимальное управление по заданному критерию качества. В чем заключается различие этих двух систем управления?

Первое отличие. Структура и параметры системы в СОУ заранее заданы и в процессе регулирования не изменяются (система с полной априорной информацией). Параметры системы в СЭУ изменяются случайным образом (система с не полной априорной информацией).

Второе отличие. Возмущающие воздействия в СОУ (например, нагрузка) заранее известны и в процессе управления не изменяются. Возмущающие воздействия в СЭУ заранее не известны и могут случайным образом изменяться.

Третье отличие. Граничные условия (начало и конец) в СОУ конкретно заданы в задачах с закрепленными концами или заданны в виде уравнений линий (или поверхностей). Граничные условия в СЭУ неизвестны, могут случайным образом изменяться и, более того, задача точного определения полученного экстремального значения регулируемого параметра – не ставится. Это значение через некоторое время при изменении условий работы системы может оказаться другим, но всегда должно быть экстремально соответствовать критерию качества регулирования.

Четвертое отличие. Полученное оптимальное управление в СОУ остается неизменным в течении всего процесса управления. Полученное экстремальное управление в СЭУ для данного момента времени может оказаться другим через сколь угодно малый промежуток времени. Более того, даже при установившемся режиме работы экстремальное управление не устанавливается на каком определенном значении, а происходит колебания этого значения, которое в СЭУ называется *процессом рысканья*. Образно говоря, в СЭУ «покой нам только снится».

Чтобы кратко охарактеризовать отличие СОУ от СЭУ можно поставленные задачи управления сравнить с задачами, которые решают Иван - царевич и Василиса - премудрая в русских народных сказаниях. Задание Ивану - царевичу: пойди в тридесятое царство и достань «молодильное» яблоко. Его задача: найти оптимальный путь и оптимальное управление. Такая проблема решается в СОУ. Задача Василисе - премудрой: пойти туда, не зная куда и принести то, не зная что, но это должно быть самое-самое, не зная какое. Такая проблема решается в СЭУ.

Некоторые авторы учебников по теории автоматического управления рассматривают СЭУ как один из видов адаптивных систем автоматического управления (АСАУ). На наш взгляд адаптивные системы – это дальнейшее развитие экстремальных систем и они отличаются следующими дополнительными признаками.

Во-первых. В СЭУ при управлении процессом структуру и параметры регулятора не изменяют, в АСАУ адаптивное управление системы проводится путем изменения параметров регулятора и даже структуры системы.

Во-вторых. В СЭУ полученное экстремальное управление даже при постоянстве всех возмущающих воздействиях не остается постоянным, а всегда колебнется около экстремального значения (рысканье). В АСАУ полученное оптимальное управление может быть постоянным при постоянстве всех видов возмущений.

В-третьих. Основные методы экстремального управления: поиск экстремума по производной, по приращению и другие. В АСАУ эти методы используют редко, а чаще для управления процессом используют амплитудно-частотные методы и различные методы с эталонной моделью. Поэтому в данном пособии СЭУ выделено в отдельный класс систем.

СЭУ можно классифицировать по следующим признакам:

а) по числу управляемых параметров:

- однопараметрические, качество работы которых зависит от одного управляющего параметра;

- многопараметрические, качество работы которых зависит от нескольких управляющих параметров.

б) по числу экстремумов в характеристике объекта:

- экстремальная характеристика имеет один экстремум;

- экстремальная характеристика имеет несколько экстремумов, в том числе локальных, не основных.

в) по степени инерционности объекта:

- объект управления малоинерционный и постоянной времени объекта можно пренебречь;

- объект управления достаточно инерционный и постоянную времени необходимо учитывать.

г) по формированию сигнала управления:

- пропорциональные СЭУ, в которых сигнал управления пропорционален величине рассогласования между экстремальным и действительным значением критерия оптимальности;

- релейные СЭУ, в которых сигнал управления всегда постоянен по величине и изменяется только по знаку. Такие системы более простые, надежные и более устойчивые к различным помехам. Они получили широкое применение в промышленности и поэтому будут рассмотрены в основном релейные системы.

д) по способу поиска экстремума:

- поиск экстремума сканированием;
- поиск экстремума по производной;
- поиск экстремума по приращению;
- поиск экстремума с принудительным сигналом.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 7.2

1 Какие объекты называются экстремальными? Примеры.

2 В чем физическая причина экстремальности технологического процесса?

3 Объясните экстремальность технологического процесса – сгорание угля в топке котла.

4 В чем заключается различие систем оптимального управления (СОУ) и систем экстремального управления (СЭУ)?

5 По каким признакам можно показать, что адаптивные системы автоматического управления (АСАУ) являются дальнейшим развитием систем экстремального управления (СЭУ)?

6 Как классифицируются СЭУ по числу управляемых параметров?

7 Как классифицируются СЭУ по числу экстремумов в характеристике объекта?

8 Как классифицируются СЭУ по степени инерционности объекта?

7.2.1 СЭУ с поиском экстремума по производной

Экстремальную характеристику системы в первом приближении можно аппроксимировать параболой вида

$$y = f(x) = a\ x^2 + в\ x + c\ .$$

Приведенное уравнение не учитывает дрейф этой характеристики, который происходит при изменении динамических свойств системы. Сделаем допущение, что эти изменения по времени незначительны и можно считать, что коэффициенты $a, в, c$ - постоянные величины. Наличие экстремума математически определяется равенством нулю производной экстремальной характеристики т.е. $dy/dx = 0$**.** Направление движения к экстремуму определяется знаком производной.

Преобразуем экстремальную характеристику

$$y = ax^2 + bx + c = a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2}) + c - \frac{b^2}{4a^2} = a(x + \frac{b}{2a}) + c - \frac{b^2}{4a^2} = a(x - x_Э)^2 + y_Э;$$

где x - текущее значение управляющего сигнала;

$x_Э = -b/2a$ - значение управляющего сигнала, при котором характеристика имеет экстремум;

$y_Э = c - b^2/4a^2$ - экстремум характеристики.

Если $a < 0$, то экстремальное значение - максимум, если $a > 0$, то экстремальное значение – минимум.

Пусть $a < 0$, тогда экстремальная характеристика имеет вид, показанный на рисунке 7.6. При $x = x_1$ выражение в круглых скобках отрицательное, так как $x_1 < x_Э$, но производная $dy/dx = -2a(x_1 - x_Э)$ будет положительная (так как $a < 0$). Режим работы системы расположен на возрастающей ветви (т. N на рисунке 7.6) и для достижения экстремума необходимо увеличивать значение управляющего сигнала x.

При $x = x_2$ выражение в круглых скобках положительное, так как $x_2 > x_Э$, но производная $dy/dx = -2a(x_2 - x_Э)$ будет отрицательная. Режим работы системы соответствует спадающей ветви (т. М на рисунке 7.6) для достижения экстремума необходимо уменьшить значение управляющего сигнала.

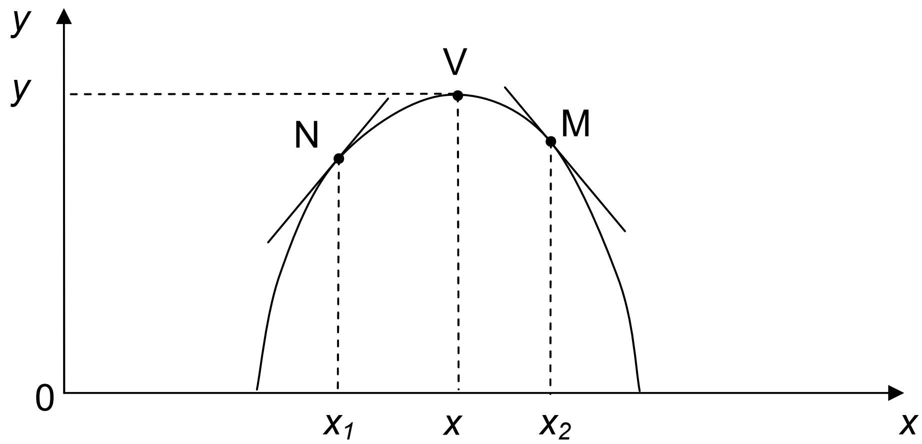


Рисунок 7.6 - Поиск экстремума по чувствительности

Рассмотрим схему автоматического управления СЭУ по чувствительности.

Производная по экстремальной характеристики

$$dy/dx = 2a(x - x_Э)$$

Величина производной зависит от разности между x и $x_Э$. Релейная СЭУ с сигнум-реле выдает сигнал на исполнительное устройство того знака, с которым приходит сигнал на сигнум-реле. Величина этого сигнала всегда постоянная и равна U_0 , изменяется только знак сигнала (+ U_0 или - U_0).

Величина dy/dx определяется поэтапно.

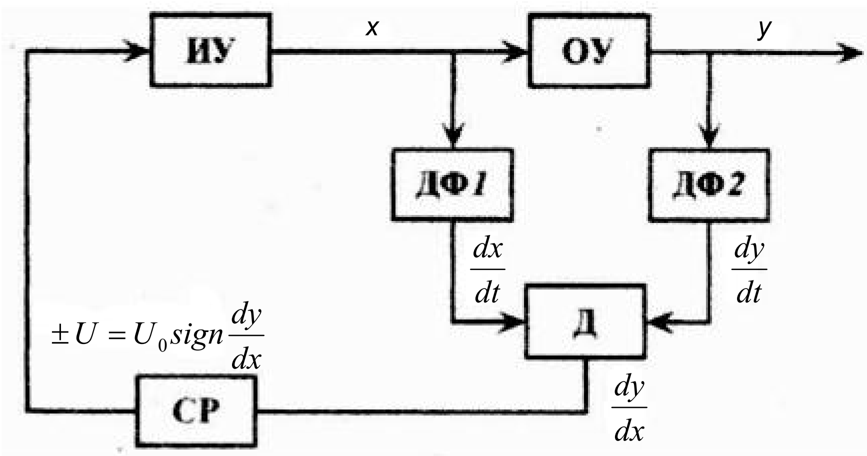
1-й этап. Определяется скорость изменения управляющего воздействия по времени dx/dt.

2-й этап. Определяется скорость изменения критерия качества по времени согласно экстремальной характеристики dy/dt.

3-й этап. Определяется производная экстремальной характеристики по управляющему воздействию

$$\frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{dy}{dx}.$$

Если при увеличении *x* знак производной управляющего воздействия по времени *dx/dt* и знак производной экстремальной характеристики по времени *dy/dt* - совпали, (пусть $a<0$), то $dy/dx>0$ и управляющее воздействие *x* продолжает движение в сторону увеличения *x*. Если знаки этих производных не совпали, то $dy/dx<0$, и управляющее воздействие *x* изменяет направление движения на обратное. Схема такой СЭУ показана на рисунке 7.7.



ИУ – исполнительное устройство;

ОУ – объект управления с экстремальной характеристикой;

ДФ – дифференцирующий блок;

Д – блок деления;

СР – сигнум-реле.

Рисунок 7.7 - Схема управления СЭУ по чувствительности

Алгоритм работы. Сигнал управления *x* с исполнительного устройства (ИУ) подается на дифференцирующий блок (ДФ1) и определяется направление изменения этого сигнала *dx/dt*. Значение экстремальной характеристики *y* в этот момент времени подается на ДФ2 и определяется производная по времени критерия качества (*dy/dt*). Затем в блоке деления (Д) расчитывается производная экстремальной характеристики по управляющему воздействию *dy/dx* и этот сигнал подается на сигнум-реле, где в зависимости от знака *dy/dx* вырабатывается сигнал управления на исполнительное устройство (ИУ). Если производная

dy/dx положительна, то режим работы СЭУ находится слева от экстремума и сигнал управления $+u$. Если производная отрицательна, то режим работы справа от экстремума и сигнал управления минус u. При достижении экстремума $dy/dx = 0$, значение управляющего сигнала $u = 0$.

Существенный недостаток такой системы в том, что ее нормальная работа может быть нарушена, если на входе системы появится случайная помеха и сигнум-реле будет срабатывать на сигнал помехи. Для устранения этого недостатка в систему вводят дополнительный контур, позволяющий периодически производить самоконтроль работы СЭУ.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 7.2.1

1 Как преобразуется экстремальная характеристика в виде параболы через коэффициенты $x_Э$ и $y_Э$?

2 Что характеризуют коэффициенты $x_Э$ и $y_Э$?

3 Что характеризует знак коэффициента a ?

4 Как рассчитывается нахождения x на возрастающей или убывающей характеристике СЭУ?

5 Как определяется нахождения x на возрастающей или убывающей характеристике СЭУ при автоматическом управлении?

6 В чем недостаток такой СЭУ?

7.2.2 СЭУ с поиском экстремума по приращению

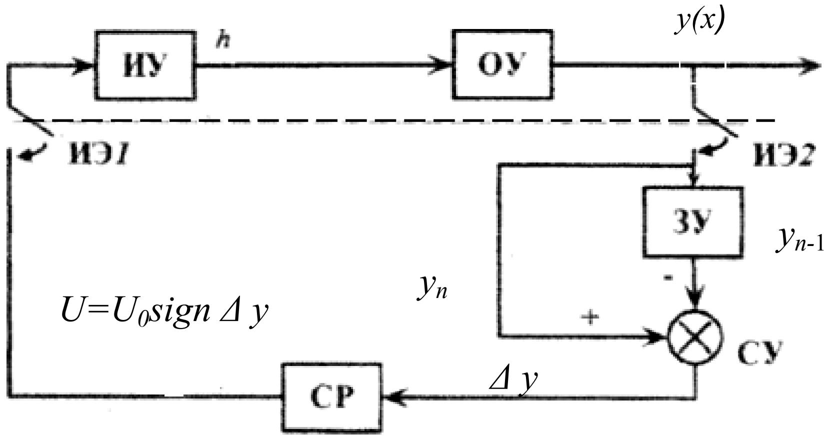
Известно, что экстремумом функции $y(x)$ называется такое ее значение, когда выполняются неравенство $y(x_Э \pm h) < y(x_Э)$ при $a < 0$, тогда $y(x_Э) = y_{max}$.

Определим приращение экстремальной функции Δy при увеличении управляющего сигнала x на величину h

$$y(x+h) = a(x+h-x_Э)^2 + y_Э = a\big((x-x_Э)^2 + 2h(x-x_Э) + h^2\big) + y_Э =$$
$$= a(x-x_Э)^2 + y_Э + 2ah(x-x_Э) + ah^2 .$$

Откуда $$\Delta y = y(x+h) - y(x) = 2ah(x + \frac{h}{2} - x_Э).$$

Знак приращения Δy зависит от знака коэффициента *a* и от текущего значения *x*. Так при *a < 0*, $x > x_Э$, *h* > 0, то $\Delta y < 0$, значит функция $y(x)$ находится на спадающей ветви и необходимо сделать шаг (-*h*). При *a < 0*, $x < x_Э$, $h > 0$, то $\Delta y > 0$, необходимо повторить шаг (+*h*). Схема СЭУ показана на рисунке 7.8.



ИУ – исполнительное устройство;

ОУ – объект управления;

ЗУ – запоминающее устройство;

СР – сигнум-реле, реагирует на знак поданного сигнала;

ИЭ – импульс элемента;

СУ – сравнивающее устройство.

Рисунок 7.8 - Схема управления СЭУ шагового типа

Величина приращения Δy зависит от величины шага h и от расстояния от x до $x_Э$. Для релейной системы абсолютная величина Δy не имеет существенного значения, т.к. сигнал с сигнум-реле всегда постоянен и отличается только знаком.

Алгоритм работы. Импульсный элемент ИЭ2 преобразует непрерывно изменяющийся показатель качества работы системы $y(x)$ в последовательность импульсов в дискретные моменты времени, когда ИЭ2 замыкается. Значение y в этот момент одновременно поступает на ЗУ (запоминающее устройство) и на СУ (сравнивающее устройство). Одновременно на СУ поступает предыдущее значение y_{n-1} с ЗУ. Их разность $\Delta y = y_n - y_{n-1}$ подается на сигнум-реле (СР). Если $\Delta y > 0$, то сигнал с СР на исполнительное устройство ИУ определяется $u = u_0 sign \Delta y$, где $sign \Delta y$-функция, принимающая значение +1, если $\Delta y > 0$ и значение минус 1, если $\Delta y < 0$. Если $\Delta y > 0$ значение $sign \Delta y = +1$ и $u = +u_0$. Если $\Delta y < 0$, то $sign \Delta y = -1$ и $u = -u_0$ и при этом осуществляется реверс (изменение направления движения) ИУ. Команда на новый шаг исполнительного устройства (ИУ) подается через второй импульсный элемент ИЭ1, который работает синхронно с ИЭ2. Таким образом, СЭУ двигается к своему экстремальному значению шагами и в каждом шаге снова определяется направление движения к экстремуму. Основное преимущество СЭУ шагового типа в высокой помехоустойчивости.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 7.2.2

1 Какой подается пробный сигнал в СЭУ шагового типа?

2 Как определяется направление изменения управляющего сигнала?

3 Как автоматически определяется направление изменения управляющего сигнала по схеме управления СЭУ шагового типа?

4 Чем отличается сигнум-реле от обыкновенного реле?

5 В чем основное преимущество СЭУ шагового типа?

7.2.3 СЭУ с дрейфующей экстремальной характеристикой

Экстремальные характеристики большинства объектов управления с течением времени не остаются неизменными. Эти изменения экстремальной характеристики могут превысить изменение Δy в СЭУ шагового типа после подачи сигнала *h*. Как в таком случае правильно определить направление движения к экстремуму?

Пусть экстремальная характеристика при $a < 0$ имеет вид

$$y(t,x) = a(t)(x - x_Э(t))^2 + y_Э(t),$$

где $a(t) = a_1 + \Delta a(\tau);$

$$x_Э(t) = x_{Э1} + \Delta x_Э(\tau);$$

$$y_Э(t) = y_{Э1} + \Delta y_Э(\tau).$$

$\Delta a(\tau),\ \Delta x_Э(\tau),\ \Delta y_Э(\tau)$ – изменение параметров экстремальной характеристики за время τ.

С учетом такого обозначения $a(t), x_Э(t), y_Э(t)$ определим приращение экстремальной функции Δy после подачи сигнала $+h$ с учетом дрейфа экстремальной характеристики за промежуток времени τ

$$\Delta y(x,h,\tau) = y(x+h,\tau) - y(x).$$

Это приращение экстремальной функции представим в виде

$$\Delta y(x,h,\tau) = \Delta y(x,h) \pm \Delta y(x,\tau),$$

где $\Delta y(x, h)$ - изменение величины $y(x)$ после подачи сигнала $+h$;

$\Delta y(x, \tau)$ - изменение величины $y(x)$ за счет дрейфа экстремальной характеристики.

На рисунке 7.9 показана дрейфующая экстремальная характеристика.

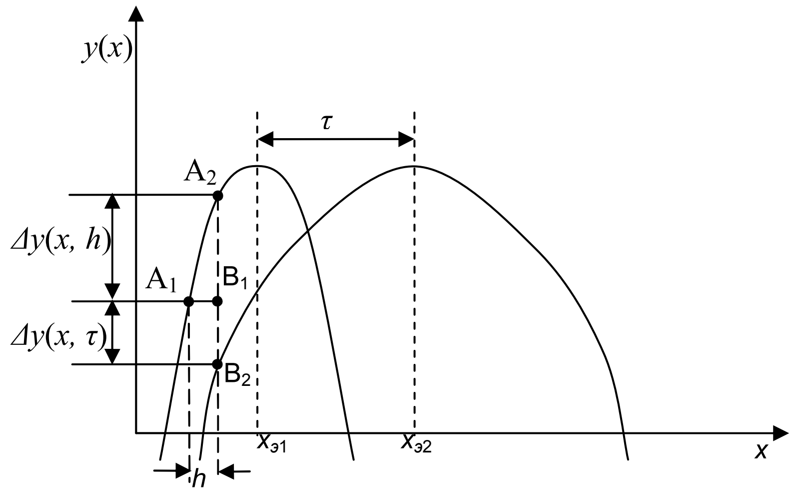


Рисунок 7.9 - Поиск экстремума при дрейфе экстремальной характеристики

Сравнивая эти два направления изменения ($\Delta y(x, h)$ и $\Delta y(x, \tau)$) можно сделать вывод, что правильное направление движения к экстремуму характеристики $y(x)$ можно точно определить, если $\Delta y(x, h) > \Delta y(x, \tau)$ или, если величина приращения от заданного шага h будет больше, чем дрейф характеристики за время τ, который может существенно изменить значение $x_Э$.

Рассмотрим три варианта поиска направления движения при дрейфе экстремальной характеристики.

1-й вариант. Дрейф характеристики отсутствует. Пусть исходное состояние системы соответствует точке A_1 на экстремальной характеристике и при шаге + h она переместится в т. A_2. Величина приращения $+\Delta y(x,h)$ соответствует подачи сигнала + h. При этом правильно определяется направление движения к экстремуму (x надо увеличивать).

2-й вариант. Величина дрейфа достаточно мала и за время τ характеристика незначительно изменится. При шаге h величина приращения Δy будет положительна $+\Delta y(x,h,\tau) = \Delta y(x,h) - \Delta y(x,\tau)$. Знак приращения $+\Delta y(x,h,\tau_1)$ однозначно определяет направление движения к экстремуму.

3-й вариант. Величина дрейфа значительна и характеристика $y(x, \tau)$ существенно изменяется значение $x_{Э1}$ переместится в $x_{Э2}$. Тогда за время τ величина приращения при шаге h будет отрицательна $-\Delta y(x,h,\tau) = \Delta y(x,h,) - \Delta y(x,\tau)$, что соответствует отрезку B_1B_2. При подачи управляющего сигнала h на возрастающую ветвь значение показателя качества $\Delta y(x,h,\tau)$ уменьшилось! Происходит реверсирование исполнительного устройства. В данном третьем варианте это неверное решение, (в действительности x надо увеличивать).

Для правильного определения направления движения к экстремуму в этом случае делается два шага. Один с сигналом $+h$, второй сигналом с минус h и берется разность полученных приращений

$$\text{1-ый шаг: } \Delta y(x,h,\tau) = +\Delta y(x,h) - \Delta y(x,\tau),$$

$$\text{2-ой шаг: } \Delta y(x,-h,\tau) = -\Delta y(x,h) - \Delta y(x,\tau).$$

Разность

$$\Delta y(x,h,\tau) - \Delta y(x,-h,\tau) = +\Delta y(x,h) - \Delta y(x,\tau) - (-\Delta y(x,h) - \Delta y(x,\tau)) = 2\Delta y(x,h).$$

При этом величины приращения экстремальной характеристики от дрейфа за время τ взаимно уничтожается, что позволяет правильно определить направление движения к экстремуму.

Вопросы для самоконтроля к подразделу 7.2.3

1 Что значит: «дрейфующая» экстремальная характеристика СЭУ? Какие коэффициенты характеристики СЭУ могут изменяться?

2 Под действием каких факторов происходит дрейф характеристики СЭУ?

3 В каких случаях дрейфующая характеристика СЭУ не оказывает существенного влияния на правильность определения изменения управляющего воздействия с поиском по приращению?

4 В каких случаях дрейфующая характеристика СЭУ может дать ложный сигнал с поиском по приращению?

5 Как определяются правильное направление управляющего сигнала при существенном дрейфе характеристики СЭУ?

6 Почему СЭУ с поиском по производной более устойчива к дрейфу экстремальной характеристики, чем СЭУ с поиском по приращению?

7 Можно ли при дрейфе экстремальной характеристики использовать сигнум-реле?

7.3 Адаптивны системы автоматического управления (АСАУ)

Термин «адаптации» заимствована из биологии, где им обозначают свойство организма приспособиться к изменениям внешней среды.

Вообще-то элементы приспособления существуют в любой автоматической системе, как в замкнутой, так и разомкнутой. При расчете систем автоматического управления (САУ) исходят из того, что характер внешнего воздействия известен, что параметры системы при работе не изменяются, что априорная (начальная) информация о динамических свойств САУ и о возможных возмущений достаточна для ее расчета. При таком объеме априорной информации и допущениях задачи анализа и синтеза в САУ решаются достаточно просто.

С развитием техники появились объекты управления, которые отличаются непредвиденным изменением своих внутренних характеристик (атомные реакторы, химические процессы, металлургическое производство и т.д.). Характер возмущающих воздействий, как внешних, так и внутренних происходит в условии большой неопределенности. Например, самолет на автопилоте летит через грозовую облачность. При полете изменяется его масса вследствие сгорания топлива, положения центра тяжести, трение плоскости об окружающую среду и т.д. Процесс управления происходит в условиях неопределенности. Задачи управления становятся достаточно сложные: компенсация случайных возмущений, стабилизация динамических характеристик, обеспечение оптимальных режимов работы по многим показателям. Все это должно быть обеспечено в условии недостающей информации, которая может автоматически пополняется самой системой в процессе ее нормальной эксплуатации.

Кроме этого, бурное развитие автоматизированного управления технологическими процессами приводит к тому, что оператору всё труднее управлять сложными технологическими процессами. Поэтому потребовалось разрабатывать такие системы управления, которые сами могут анализировать ход технологического процесса, сами обеспечивать оптимальное адаптивное управление.

Адаптивные системы характеризуются следующими свойствами:

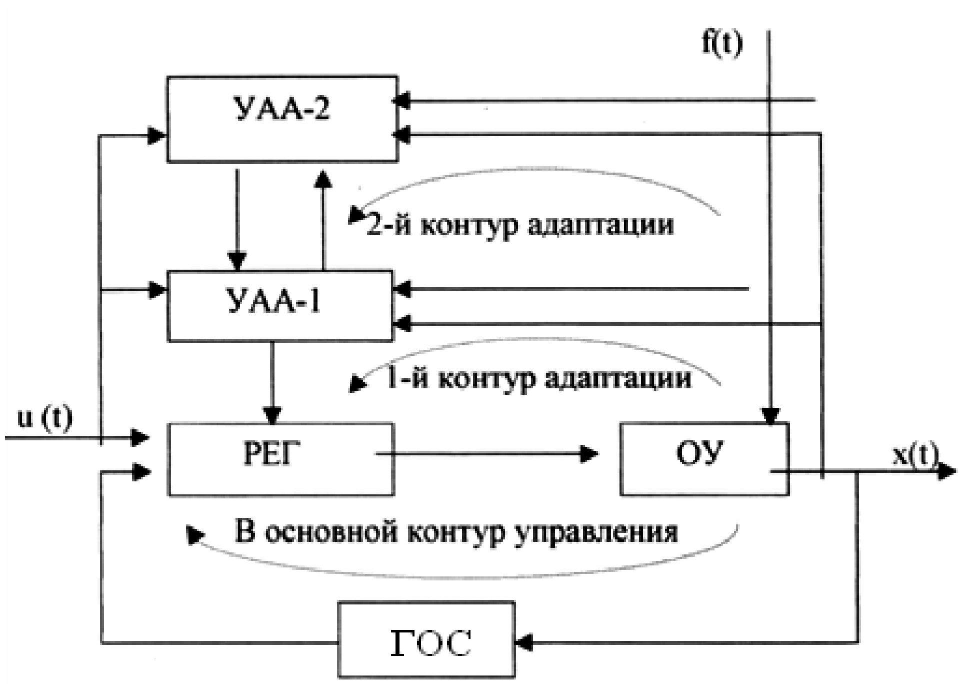
1) автоматически приспосабливаются к случайным изменениям условий работы;

2) автоматически корректируют внутренние параметры системы;

3) автоматически получают недостающую информацию в процессе работы и совершенствуют алгоритм управления.

Адаптивные САУ - автоматически приспосабливаются к изменению внешних условий и свойств объекта управления, обеспечивая при этом необходимое качество управления путем изменения параметров управляющего устройства, структуры системы, а так же путем совершенствования алгоритма управления.

Такие системы, обычно состоящие из двух частей (рисунок 7.10).



ОУ - объект управления;

РЕГ - автоматический регулятор;

ГОС - главная обратная связь (или датчик);

УАА - устройство автоматической адаптации;

$x(t)$ - регулируемый параметр;

$u(t)$ - управляющее воздействие.

Рисунок 7.10 - Обобщенная функциональная схема адаптивной системы управления

Основная часть системы управления - это объект управления (ОУ), регулятор (РЕГ), главная обратная связь (ГОС). В зависимости от назначения система решает определенную задачу управления (стабилизация регулируемого параметра, программное управление, следящая система и т.д.) Вторая часть - устройство автоматической адаптации (УАА), которое осуществляет настройку регулятора или изменяет его структуру с целью обеспечения необходимого качества процесса управления.

Если уход системы от расчетного режима вызван отклонением параметров системы (чаще всего это происходит с ОУ), то УАА-1 по величине входного, выходного и возмущающего воздействия анализирует качество управления и вырабатывает новое управляющее воздействия путем изменения параметров регулятора или другой части системы, чтобы значение критерия качество управления в АСАУ максимально соответствовало заданному критерию. Таким образом, контур адаптации является вторичным контуром управления, который *управляет качеством процесса управления* в основном контуре. Можно организовать и следующий, второй уровень адаптации УАА-2, который будет управлять качеством адаптации в УАА-1 согласно дополнительному требованию к АСАУ.

Возможно построение многоступенчатых иерархических адаптивных контуров, в котором каждый последующий контур может обеспечить более глубокий анализ алгоритма управления, имеет более широкие возможности маневрирования при возникновении нештатных ситуаций. Устройство автоматической адаптации может «запоминать» свои лучшие решения и использовать в дальнейшей работе, т.е. в процессе работы «набираться опытом».

Таким образом, УАА решает следующие задачи:

- получение информации о воздействиях и динамических свойствах объекта управления в процессе его работы. Получение этой текущей информации - это задача идентификации объекта управления *(опознания);*

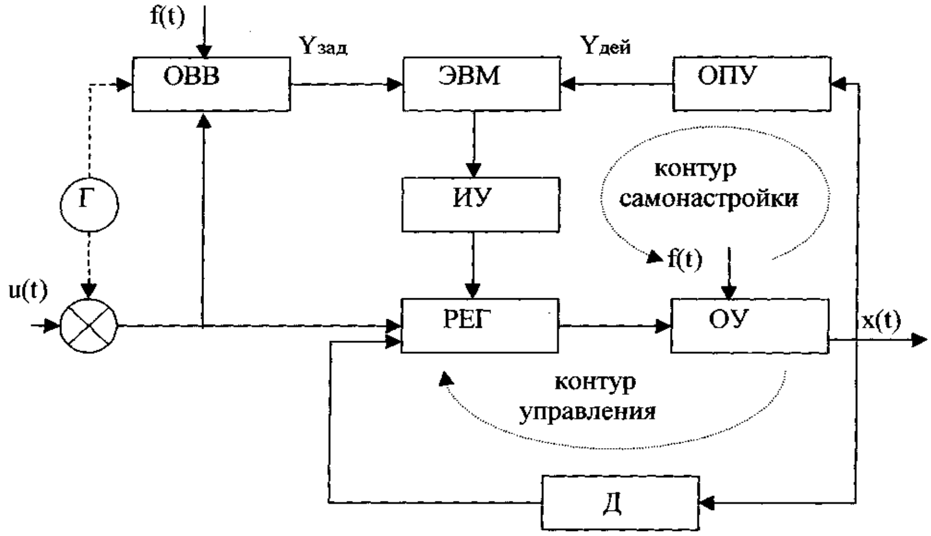
- формирование на основе полученной информации заданного критерия качества для каждого состояния системы (*алгоритмическая задача*).

- сравнение заданного критерия качества с получаемым в системе и определение соответствующего воздействия на систему *(решение алгоритмической задачи);*

- изменение параметров или структуры регулятора (системы) для обеспечения заданного критерия качества *(энергетическая задача*).

7.3.1 Самонастраивающиеся системы управления (СНС)

Такие системы применяются для стабилизации динамических характеристик системы путем изменения его настроенных параметров (рисунок 7.11). Вначале настойка производится вручную, а затем поддерживается контуром адаптации.



ОВВ - оценка внешних воздействий;

ОПУ - оценка процесса управления;

ЭВМ - электронная вычислительная машина;

ИУ - исполнительное устройство контура самонастройки;

Г - генератор пробных сигналов.

Рисунок 7.11 - Функциональная схема самонастраивающейся системы

Критерием качества поддержания динамических характеристик системы обычно является косвенные показатели качества (среднеквадратичное отклонение, интегральные показатели, частотные характеристики). На рис 7.11 показана функциональная схема самонастраивающейся системы (СНС) для стабилизации динамических свойств системы.

СНС имеет два контура: основной контур управления и контур адаптации или самонастройки. В регуляторе есть параметры, которые всегда постоянные; есть часть параметров, которые изменяются по сигналам УАА.

Работа системы. Входной сигнал *u(t)* подается в основной контур управлений (на регулятор) и на контур адаптации (на блок оценки внешних воздействий (ОВВ)). Одновременно на ОВВ поступают сигналы тех возмущающих воздействий, которые действуют на объект управления, и определяется оптимальной заданный критерий качества $У_{зад}$.

Выходной сигнал с основного контура *x(t)* подается на блок оценки процесса управления (ОПУ) и определяется действительный показатель качества $У_{дей}$. Эти два показателя качества регулирования поступающей на ЭВМ, которая анализирует полученные данные и дает команду в виде ±ΔУ на исполнительное устройство (ИУ), которое производит изменения параметров регулятора. Это исполнительное устройство (ИУ) обычно представляет собой звено интегрирующего типа. Оно изменяет настройку регулятора в направлении соответствующем знаку отклонения ΔУ. В качестве настроенных параметров регулятора, обычно используются коэффициенты усиления и постоянные времени корректирующих звеньев.

Работа контура адаптации еще более упрощается и качество её работы улучшается, если для анализа динамических характеристик регулятора применить специальные *пробные сигналы.* В качестве пробных сигналов применяются ступенчатые, импульсные, гармонические сигналы. Выбор пробного сигнала определяется видом критерии качества, то есть теми динамическим характеристикам, которые необходимо контролировать. Например, колебательность системы может быть оценена числом колебаний за время переходного процесса, или степенью затухания колебаний, или периодом колебаний.

Функциональная схема такой СНС принципиально остается такой же, как на рисунке 7.11. Отличие в том, что имеется генератор пробных сигналов (Г), который подает сигналы на ОВВ и на вход системы. Сигнал управления u(t) на ОВВ не подастся, так как заданный критерий качества $У_{зад}$ определяется в ОВВ по параметрам пробного сигнала. С выхода системы сигнал подаётся на ОПУ и определяется $У_{дей}$. Для этого в ОПУ имеется детектор для выделения из общего выходного сигнала составляющей пробного сигнала. Контур адаптации работает периодически и выдает сигналы на ИУ с определенной частотой следования. К контуру адаптации предъявляются следующие требования:

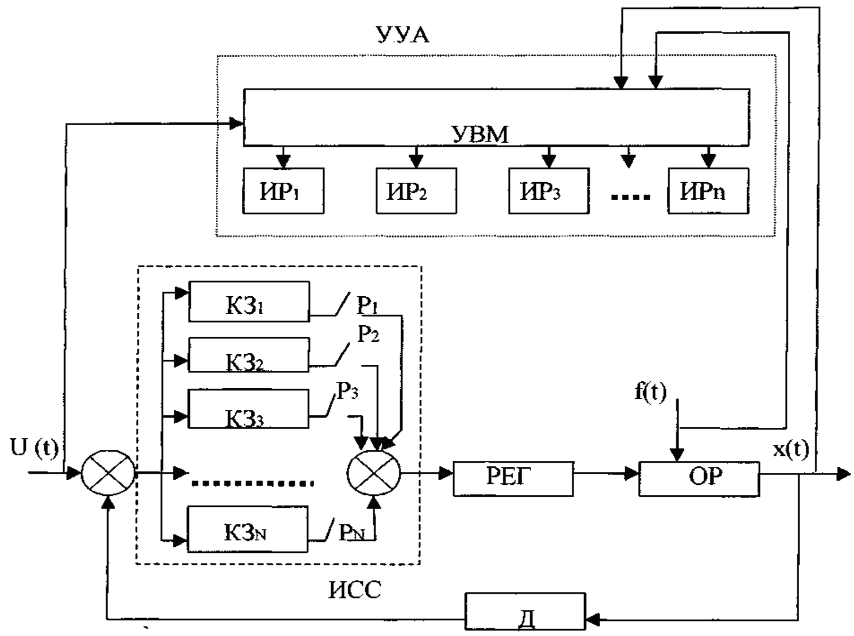
- быстродействие контура адаптации должно быть больше, чем контура управления;

- пробные сигналы должны быть достаточно малы, так как это фактически помеха для работы системы управления;

- регулятор имеет часть неизменяемых параметров, которые позволяют ему работать при выходе из строя контура адаптации.

7.3.2 Самоорганизующиеся системы (СОС)

Самоорганизующиеся АСАУ - это системы, в которых адаптация осуществляется путем изменения структурной схемы основного контура управления. Такое структурное изменение производится путем отключения некоторых корректирующих звеньев и включение других звеньев (рисунок 7.12).



УУА - управляющее устройство адаптации;

УВМ - управляющая вычислительная машина ;

$ИР_1 ... ИР_n$ - исполнительные реле для контактов $P_1 ... P_n$;

$КЗ_1 ... КЗ_n$- корректирующие звенья;

ИСС - изменяемая структурная схема основного контура управления АСАУ .

Рисунок 7.12 – Функциональная схема самоорганизующейся системы

Таким образом, в самоорганизующихся системах сигналы управления являются дискретными сигналами, и каждому значению дискретного сигнала соответствует определенная структура основного контура управления. Очевидно, что пределы изменения алгоритма управления в таких системах намного шире, чем в самонастраивающейся системе и для выбора каждого варианта структуры необходимо подходить более строго. В таких системах имеется управляющая вычислительная машина (УВМ) с анализатором качества управления, оптимизатор поиска структуры с банком данных, блок принятия решений, логическое устройство и др.

В общем, случаи возможно последовательное, параллельное и комплексное подключение корректирующих звеньев. Самая сильная коррекция происходит, если корректирующие звенья включены в главную обратную связь. Возможна следующая последовательность в работе самоорганизующейся системы, когда после выбора корректирующего звена происходит самонастройка параметров этого звена. Таким образом, адаптация системы к изменяющимся условиям работы происходит в два этапа:

- выбор корректирующего звена и место его подключения;
- самонастройка параметров в выбранном звене.

7.3.3 Самообучающиеся системы (СОбС)

Рассмотренные выше адаптивные системы имеют один общий недостаток - они не запоминают свои оптимальные решения и после нового вида управляющего воздействия или при изменении внешних условий все свои вычисления начинают, так сказать, «с чистого листа», заново. Хотя перед этим и был вариант оптимального решения по возникшей проблеме.

В самом общем случаи под самоорганизующейся системой понимают такую систему, в которой упорядоченность, организованность со временем возрастает. То есть, в исходном состоянии она представляет собой совокупность элементов слабо связанных между собой или даже связанных случайным образом. Затем в результате работы системы управления постепенно возникают стойкие связи между элементами, возникает определенная структура. Таким образом, важнейшим свойством самоорганизующейся системы является их способность к самообучению.

Самообучающиеся АСАУ - это высший тип адаптивных систем, приближающийся по своим принципиальным возможностям до «мыслительных» способностей человека. Но в начале систему надо научить работать! «Обучение» таких систем и дрессировка животных имеет много общего. Для дрессировки животных им многократно подают команду и показывают, что надо делать. В самообучающихся САУ вначале многократно показывают ситуации и дают правильные решения. В процессе нормальной работы система уже сама самостоятельно запоминает новые правильные решения. Таким образом, самообучающаяся АСАУ должна выполнять две функции.

Первая - определять правильные (лучше оптимальные) решения.

Вторая - запоминать эти решения.

Такая АСАУ должна иметь нескольких контуров адаптации (или самонастройки). Первый контур - анализирует ситуацию в основном контуре управления и принимает решения по качеству процесса управления. Второй контур - анализирует решение первого контура по заданному критерию качества управления и выбирает лучшее решение. Третий контур запоминает полученное решение. Поэтому третий контур адаптации должен обладать памятью. В работе такой системы устанавливается определенная временная последовательность. Вначале должен отработать первый контур самонастройки и принять решение по адаптации системы. Его работу анализирует второй контур и выдает рекомендации для более точной самонастройки. Поэтому второй контур адаптации должен обладать меньшим быстродействием, чем первый контур. Второму контуру надо дать время «подумать», чтобы потом окончательно принять решение по выбору оптимального управления. В общем случае система может иметь несколько контуров адаптации.

Применение такой многоконтурной системы адаптации не означает, что каждый контур должен иметь свою ЭВМ. Разделение по контурам - это условное разделение, чтобы лучше разобраться в алгоритме работы СОбС. Фактически имеется единая ЭВМ и одна программа с разветвлениями типа «если-то». По мере накопления материала она наполняется набором готовых решений и таким образом система «умнеет».

Во всех способах самообучения есть общая черта – постепенное выделение «области знаний» из всех совокупностей «области незнаний». Такая адаптивная система называется *автоматическая система распознавания образа* (или система классификации). Задачи распознавания образа встречаются не только в технических системах, но и в таких областях, как медицинская диагностика, прогнозирование погоды, геологическая разведка месторождений и т.д. Задача автоматического обучения распознаванию образов формируется следующим образом. Каждой возможной ситуации из множества рассматриваемых ставится в соответствии точка x_i . Необходимо выделить области расположения каждого вида точек x_i из большого числа областей их нахождения. Расположение границ между областями неизвестно. Цель обучения заключается в определение областей расположения этих точек, то есть в определении границ между ними.

Есть два подхода к созданию такой самообучающейся системы. *При обучении методом «поощрение-наказание»* автомату предъявляют ряд случайных точек из множества рассматриваемых с информацией о принадлежности каждой точки определённому классу. Требуется только определить границы области их расположения. *При обучении без поощрения* задача более сложная. Информация о принадлежности каждой точки отсутствует. Но автомату показывают образцы точек, а он должен найти их в заданном пространстве и определить границы их расположения. Такие самообучающиеся системы есть у роботов с искусственным интеллектом. На рисунке 7.13 показана общая схема работы робота с телевизионным визуальным очувствлением [1]. Назначение робота: найти и снять с движущейся конвейерной ленты произвольно ориентированную деталь и перенести её на заданное место.

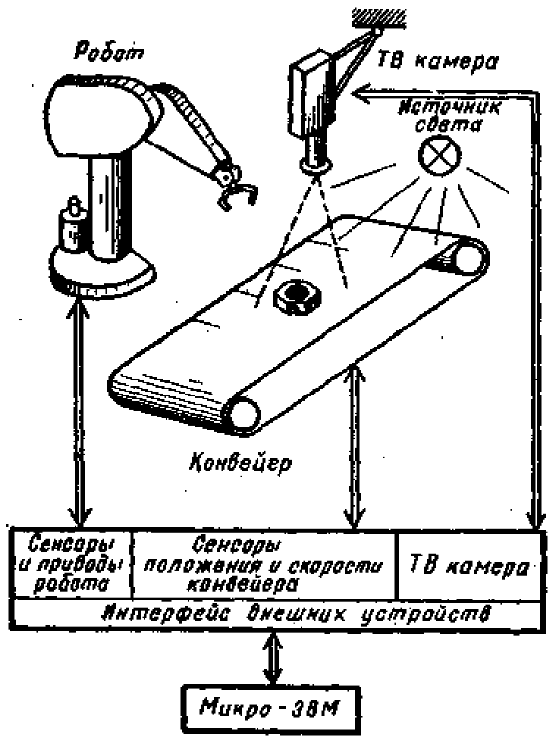


Рисунок 7.13 – Схема работы робота с телевизионным визуальным очувствлением

Для решения этой задачи необходимо:

- воспринять изображение детали телекамерой;
- разложить полученное изображение на информационные области;
- распознать деталь согласно описанию образа детали;
- интерпретировать полученный образ детали в необходимые команды управления;
- обеспечить управление движением руки робота.

Самообучающиеся системы при выполнении этих процедур имеет следующие устройства: средство очувствления робота, средство обработки полученной информации, устройство адаптивного движения работы робота.

Средство очувствления робота позволяют определить расположение внешних предметов. Датчики информации для этих целей называются сенсорными устройствами или сенсорами. Робот с помощью сенсоров получает информацию об окружающем пространстве, регистрирует его геометрические, физические, химические свойства, а так же своё перемещения по каждой степени свободы, необходимое ускорение или торможение звеньев манипулятора. Большинство сенсорных датчиков имеют телевизионное визуальное очувствление, которое преобразует световые сигналы отражения с исследуемого предмета в аналоговые электрические сигналы. При этом важно обеспечить диффузионное освещения, т.е. освещение рассеянным светом с различных сторон, чтобы не было бликов при отражении и затемнения отдельных поверхностей предметов.

Обработка информации позволяет преобразовать полученное изображение для ЭВМ. Это проводится в два этапа: вначале обрабатывается полученный аналоговый сигнал для выделения границ исследуемого предмета. Затем изображение дискретно сканируется специально формируемой маской. По разрывам изображения под маской вычисляется значение градиента, и в результате этого от изображения сохраняются только контурные кривые в местах резкого изменения интенсивности изображения. Это сокращает объём информации вводной в ЭВМ.

Устройство адаптивного движения – это окончательное распознавание образов и полученные образы преобразуются в команды согласно заданной программе работы робота. Это обеспечивает заданную форму его движения.

В настоящее время самообучающиеся системы находят применение в таких объектах, где ход регулирования технологического процесса может изменяться скачками, например, при производстве бурильных работ, в металлургическом производстве, в некоторых видах химического производства, в которых надо распознать изменение хода технологического процесса и обеспечить своевременное управления.

Список использованных источников

1 Александров, А.Г. Оптимальные и адаптивные системы / А.Г. Александров. – М.: Высшая шк. 1989. – 263 с.

2 Анхимюк, В.Л. Теория автоматического управления: учеб. пос. для вуза/ В. Л. Анхимюк. - Минск: Высш. шк., 1979. – 350 с.

3 Дорф, Р. Современные системы управления / Р. Дорф, Р. Бишоп: пер. с англ. – М.: Лаборатория базовых знаний, 2002. – 832 с.

4 Евсюков, В.Н. Оптимальные, экстремальные, адаптивные, кибернетические системы управления: учебн. пос. для вуза / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК ОГУ, 1999. – 111 с.

5 Евсюков, В.Н. Расчёт оптимальных системы управления методом стыковки: метод. указания / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК ОГУ, 1999. – 35 с.

6 Евсюков, В.Н. Основы теории автоматического управления: учебн. пос. для вуза / В.Н. Евсюков. – Оренбург: ИПК ОГУ, 2005. – 562 с.

7 Евсюков, В.Н. Предварительный анализ и синтез САУ по характеристическому уравнению / В.Н. Евсюков // Известие вузов. Электромеханика. – Новочеркасск: Новочеркасский политех. ин-т., 1984. - № 4. – С. 43-48

8 Евсюков, В.Н. Системность процесса управления: учебное пособие для студентов вузов / В.Н. Евсюков, А.М. Пищухин. – Оренбург: ИПК Оренбургского гос. ун-та., 2000. – 64 с.

9 Евсюков, В.Н. Методика работы над кандидатской диссертацией: учебное пособие для аспирантов технических специальностей / В.Н. Евсюков. - 2-е издание, перераб. и доп. – Оренбург: ИПК Оренбургского гос. ун-та., 2002. – 466 с.

10 Ерофеев, А.А. Теория автоматического управления: учебник для студентов вузов / А.А. Ерофеев. - 2-е изд. перераб. и доп. – СПб.: Политехника, 2002. – 301 с.

11 Словарь по кибернетике / под ред. В.С. Михалевича. – 2-е изд. перераб. и доп. – Киев: Гл. ред. Украин. Сов. энцикл. им. М.П. Бажана, 1989. – 751 с.

12 Зайцев, Г.Ф. Теория автоматического управления и регулирования: учебное пособие для студентов вузов / Г.Ф. Зайцев. - 2-е изд. перераб. и доп. – Киев: Выща шк., 1988. – 431 с.

13 Котов, К.И. Автоматическое регулирование и регуляторы: учебник для техникумов/ К.И. Котов, М.А. Шершевер. – М.: Металлургия, 1986. – 384 с.

14 Олейников, В.А. Основы оптимального и экстремального управления / В.А. Олейников, Н.С. Зотов, А.М. Пришвин – М.: Высшая шк.,1969. – 296 с.

15 Ротач, В.Я. Теория автоматического управления: учебник для вузов / В.Я. Ротач – М.: Изд. дом МЭИ, 2007. – 400 с.

16 Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления /под общ. ред. Е.А. Санковского. – Минск.: Вышэйш. шк, 1973. – 584 с.