Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

В. В. Пергунов

Математический анализ

**Экспресс-курс для подготовки
к государственному экзамену**

***Утверждено редакционно-издательским советом ОГТИ
в качестве учебного пособия***

Орск 2008

УДК 517.0
ББК 22.161
П 26

Рецензенты:

В. С. Монахов, *доктор физико-математических наук, профессор Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины, Беларусь*

О. В. Шашков, **кандидат физико-математических наук, доцент кафедры** *алгебры, геометрии, теории и методики обучения математике ОГТИ*

П26 **Пергунов В. В.**
Математический анализ: экспресс-курс для подготовки к государственным экзаменам: учебное пособие / В. В. Пергунов. – Орск : Издательство ОГТИ, 2008. – 175 с.

Учебное пособие представляет собой сжатое изложение курса математического анализа по специальности «Математика», содержит основные разделы Государственного образовательного стандарта высшего профессионального образования.

Данное учебное пособие может быть использовано как для ускоренной подготовки к государственному экзамену, так и для построения лекционного курса при изучении математического анализа.

Учебное пособие адресовано студентам физико-математических факультетов, учителям математики, а также всем интересующимся математикой.

ISBN 5-8424-0248-3

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Данное учебное пособие разработано в соответствии с программой государственного экзамена по математике для выпускных курсов педагогических специальностей 032100 – Математика и 032200 – Физика (с дополнительной специальностью «Математика»). Содержательной основой этого экспресс-курса служит материал спецсеминара «Избранные вопросы анализа» и обзорных лекций по математическому анализу, читаемых автором на выпускных курсах физико-математического факультета ОГТИ в течение многих лет.

Экспресс-курс включает в себя 9 разделов, отражающих содержание основной части государственного экзамена по математическому анализу в соответствии с учебной программой и Государственным образовательным стандартом высшего профессионального образования по специальности 032100 – Математика. Представленный материал несколько шире и глубже, чем это требуется для ответа на вопросы экзамена. Приводятся подробные доказательства фундаментальных положений математического анализа, примеры и контрпримеры, позволяющие глубже уяснить изучаемые понятия. В разделах, касающихся основных теорий: предела и непрерывности функций, дифференциального и интегрального исчислений, рядов, выдержан единый подход к построению доказательств, формулировок теорем и определений.

Ярко выражена логическая структура доказательства теорем, основанная на аксиомах множества действительных чисел, определений и теорем теории пределов, точных границ множеств. В большинстве случаев после словесной формулировки дается запись в кванторах математической логики, что позволяет достаточно компактно и четко строить доказательство теорем, использовать определения и т. д.

В конце каждого крупного раздела предлагаются вопросы и задания для самоконтроля. Большинство из них носят нестандартный характер. Их решение способствует более глубокому усвоению теории. Материал вопросов и заданий может служить основой для организации спецсеминара по подготовке к государственному экзамену. Завершает экспресс-курс перечень вопросов по математическому анализу из программы государственного экзамена по математике.

Учебное пособие способствует повторению, систематизации знаний студентов по наиболее важным, фундаментальным разделам математического анализа, раскрывает различные практические аспекты анализа. Может использоваться при изучении математического анализа на любых курсах.

РАЗДЕЛ 1. ВВЕДЕНИЕ В АНАЛИЗ

1.1. Множество действительных чисел и его свойства

Определение 1.1. *Множеством действительных чисел* R называется объединение множества рациональных чисел Q и множества иррациональных чисел J.

В курсе «Алгебры» доказывается, что всякое рациональное число можно представить в виде конечной или бесконечной, но периодической десятичной дроби, а иррациональное число – в виде бесконечной непериодической дроби. Таким образом, всякое действительное число можно изобразить в виде конечной или бесконечной десятичной дроби.

На множестве действительных чисел определены две бинарные алгебраические операции: сложение и умножение, – относительно которых множество R является полем.

Рассмотрим те свойства множества действительных чисел, которые не отражены в курсе «Алгебры», но необходимы для построения теорий математического анализа.

1. ***Свойство линейной упорядоченности***

Определение 1.2. Множество M называется *линейно упорядоченным*, если на нём определено отношение «меньше», обладающее следующими свойствами:

1) *иррефлексивностью* – никакой элемент множества M не может быть меньше самого себя:

$$\forall x \in M \left(\overline{x < x}\right);$$

2) *транзитивностью:*

$$\forall x, y, z \in M \mid (x < y) \wedge (y < z) \Rightarrow (x < z);$$

3) *трихотомией* – для любых двух элементов из M выполняется одно и только одно из соотношений:

$$\forall x, y \in M \mid (x = y) \vee (x < y) \vee (y < x).$$

В частности, отсюда следует, что если $x \le y$ и $y \le x$, то $x = y$.

Множество действительных чисел R линейно упорядочено.

2. ***Свойство плотности***

Между двумя различными действительными числами находится третье действительное число:

$$\left(\forall x, y \in R \mid x < y\right) \Rightarrow \left(\exists z \in R \mid x < z < y\right).$$

Можно доказать, что на любом интервале (a,b) существует, по крайней мере, одно рациональное число.

3. *Свойство непрерывности*

Существует два подхода к определению непрерывности множества действительных чисел: по Кантору и Дедекинду.

Аксиома Кантора: *Всякая последовательность вложенных сегментов* $[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset...\supset[a_n,b_n]\supset...$ *имеет хотя бы одну общую точку, принадлежащую всем сегментам этой последовательности.*

Назовём последовательность вложенных сегментов стягивающейся, если длина их стремится к нулю при $n\to\infty$. Из аксиомы следует теорема 1.1.

Теорема 1.1. (Г. Кантор). *Для всякой стягивающейся последовательности сегментов существует единственное число, принадлежащее всем сегментам.*

Другой подход связан с понятием сечения во множестве действительных чисел.

Определение 1.3. *Сечением множества M* называют пару множеств *(X, Y)*, если выполняются следующие три условия:

1) множества X и Y не пусты;

2) множества X и Y образуют разбиение множества M на классы, т. е. $X\cup Y=M$, $X\cap Y=\varnothing$;

3) если $x\in X$, $y\in Y$, то $x<y$.

Сечение обозначают $X\,|\,Y$, при этом X – нижний класс, а Y – верхний класс сечения.

Определение 1.4. Число α назовем *рубежом сечения* $X\,|\,Y$, если выполняются два условия:

1) всякое число, меньшее α, попадает в нижний класс, т. е.
$$x<\alpha\Rightarrow x\in X;$$
2) всякое число, большее α, лежит в верхнем классе, т. е.
$$y>\alpha\Rightarrow y\in Y.$$

Само число α может принадлежать как нижнему, так и верхнему классам. Если $\alpha\in X$, то во множестве X оно является наибольшим. Во множестве Y, если $\alpha\in Y$, оно наименьшее.

Принцип Дедекинда: *Всякое число определяет сечение множества действительных чисел, и всякое сечение множества действительных чисел имеет рубеж, который является либо наибольшим в нижнем классе, либо наименьшим в верхнем классе.*

Если основным принимается принцип Кантора, то принцип Дедекинда доказывается как теорема, и наоборот.

Заметим, что множество рациональных чисел обладает всеми предыдущими свойствами, кроме свойства непрерывности. Например, множества $X=\left\{x\in Q\,|\,x<\sqrt{2}\right\}$ и $Y=\left\{y\in Q\,|\,y>\sqrt{2}\right\}$ образуют сечение, но $\alpha=\sqrt{2}$ не рациональное число.

1.2. Понятие функции. Основные классы числовых функций. Суперпозиция функций. Обратные функции

Определение 1.5. Пусть даны два множества *A* и *B*. Соответствие между множествами *A* и *B*, при котором каждому элементу $x\in A$ поставлен в соответствие единственный элемент $y\in B$, называют *отображением* или *функцией*. Если множества *A* и *B* – числовые, то функция также называется *числовой*.

Обозначают: $f:A\to B$ или $y=f(x)$, при этом множество *A* называют *областью определения функции f*, а множество всех образов $f(A)$ элементов множества *A* во множестве *B*, называют *областью значений функции*.

Функцию $f:A\to B$ называют *сюрьективной*, если каждый элемент из *B* имеет прообраз во множестве *A*.

Функцию $f:A\to B$ называют *инъективной*, если различным элементам из множества *A* соответствуют различные элементы из множества *B*.

Функция $f:A\to B$ называется *биективной*, если она сюрьективная и инъективная.

Биективная функция устанавливает взаимно-однозначное соответствие между множествами *A* и *B*.

Определение 1.6. Пусть даны две функции $f:A\to B$ и $g:B\to C$. Функция $h:A\to C$ называется *композицией функций* (или *сложной функцией*), если $\forall x\in A\big(h(x)=g\left(f(x)\right)\big)$.

Определение 1.7. Функция $g:B\to A$ называется *обратной* для функции $f:A\to B$, если $\forall x\in A\forall y\in B\big(x=g(y)\Leftrightarrow y=f(x)\big)$.

Из определения непосредственно следует:

Для того, чтобы функция $f : A \to B$ имела обратную функцию $g : B \to A$, необходимо и достаточно, чтобы функция f была биективной.

Будем рассматривать функции, определённые на подмножествах множества R с областью значений также в R.

Выделяют четыре способа задания функций:

1. *Аналитический*

Функция называется *заданной аналитически*, если она записана в виде формулы, в которой участвуют знаки алгебраических действий и символы элементарных функций.

Если при этом область определения не указана, то под областью определения понимают множества значений независимой переменной, при которых формула имеет смысл.

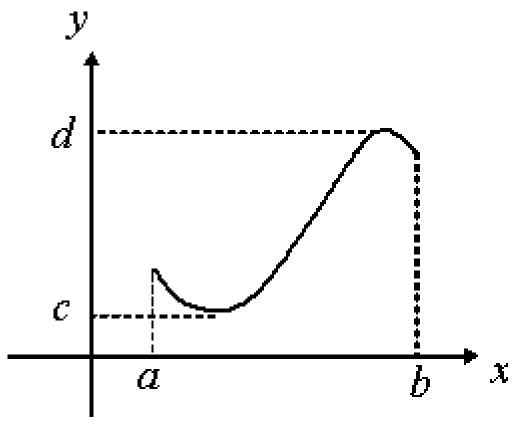
2. *Графический*

Множество точек плоскости (x, y) называют *графиком функции* $y = f(x)$, если при подстановке чисел (x, y) в это равенство, оно становится тождеством.

Отсюда следует, что кривая на плоскости является графиком некоторой функции, если любая вертикальная прямая пересекает её не более чем в одной точке.

Если функция задана графически, то областью определения служит проекция кривой на ось OX, а областью значений – проекция на ось OY.

Пример



$A = [a, b]$

$B = [c, d]$

Рисунок 1.1

3. *Табличный*

Табличный способ применяется широко во всех естественных науках, а также для построения (приближённого) графиков.

4. *Описательный или словесный*

Словесный способ применяется тогда, когда нельзя использовать ни один из выше перечисленных.

Например:

1) $f(x)=[x]$ – целая часть числа x.

Целой частью числа x называется наибольшее целое, не превосходящее x.

2) Функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, \text{ если } x \text{ - рациональное число}\\ 0, \text{ если } x \text{ - иррациональное число}\end{cases}.$$

Некоторые классы функций

1⁰. *Ограниченные функции*

Функция $y=f(x)$ называется *ограниченной* на множестве E, если существует число $k>0$ такое, что для всех $x\in E$ выполняется неравенство $\left|f(x)\right|\le k$.

2⁰. *Монотонные функции*

Функция $y=f(x)$ называется *неубывающей* на множестве E, если для любых двух чисел $x_1,\ x_2\in E$ из неравенства $x_1<x_2$ следует $f\left(x_1\right)\le f\left(x_2\right)$.

Частным случаем неубывающей функции является возрастающая функция.

$$\left\{f\left(x\right) \text{ возрастает на } E\right\}\Leftrightarrow\left\{\forall x_1,x_2\in E\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)<f\left(x_2\right)\right)\right\}.$$

Аналогично определяются невозрастающая и убывающая функции:

$$\left\{f\left(x\right) \text{ не возрастает на } E\right\}\Leftrightarrow\left\{\forall x_1,x_2\in E\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)\ge f\left(x_2\right)\right)\right\}$$

$$\left\{f\left(x\right) \text{ убывает на } E\right\}\Leftrightarrow\left\{\forall x_1,x_2\in E\left(x_1<x_2\Rightarrow f\left(x_1\right)>f\left(x_2\right)\right)\right\}.$$

Невозрастающая или неубывающая функция на множестве E называется *монотонной*.

Если функция одновременно неубывающая и невозрастающая на множестве E, то она постоянна на этом множестве.

3⁰. *Чётные и нечётные функции*

Функция $f(x)$ называется *чётной* на множестве E, если для всех $x\in E$ выполняется равенство $f(-x)=f(x)$, и *нечётной*, если $f(-x)=-f(x)$.

Из определения следует, что множество E должно быть симметрично относительно начала координат на числовой прямой. График чётной функции симметричен относительно оси OY, а нечётной – относительно начала координат.

4⁰. *Периодические функции*

Функция $f(x)$ называется *периодической* на множестве E, если существует число T, называемое *периодом функции*, такое, что для всех $x \in E,\ x + T \in E$ и выполняется равенство: $f(x+T) = f(x)$.

Из этого определения следует, что

1) E – неограниченное множество;

2) любое число, кратное периоду nT, также является периодом данной функции.

Пример.

1) $y = sinx,\ y = cosx$ – периодические функции на множестве R с периодом $T = 2\pi n,\ n \in Z$.

2) $y = tgx,\ y = ctgx$ – периодические функции с периодом $T = \pi n,\ n \in Z$.

3) $y = \{x\}$ – дробная часть числа, периодическая функция на R. Периодом является любое целое число.

4) Функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1,\ x \text{ - рациональное} \\ 0,\ x \text{ - иррациональное} \end{cases}$$

периодическая на R, периодом является любое рациональное число не равное нулю.

Действительно, пусть r – любое рациональное число, $r \neq 0$. Если $x \in Q$, то $x + r \in Q$. Тогда $f(x) = 1,\ f(x+r) = 1$, следовательно $f(x+r) = f(x)$.

Если $x \in J$, то $x + r \in J$. Тогда $f(x) = 0,\ f(x+r) = 0$ и снова $f(x+r) = f(x)$.

Итак: $\forall x \in R\big(f(x+r) = f(x)\big)$.

Рассмотрим теперь вопрос о существовании обратной функции.

Ранее было отмечено, что необходимым и достаточным условием существования обратной функции для функции $f : A \to B$ является условие биективности функции f или условие взаимно-однозначного отображения $A \leftrightarrow B$. Отметим достаточное условие существования обратной функции.

Теорема 1.2. *Пусть $y = f(x)$ – монотонная функция на множестве A, и B – множество её значений. Тогда существует обрат-*

ная функция $x = g(y)$ *с областью определения B и множеством значений A. Причём эта функция также монотонна.*

Доказательство: По условию отображение $f: A \to B$ сюрьективно. Покажем, что оно инъективно. Действительно, допустим $f(x)$ – возрастающая функция и $x_1 \neq x_2$ – любые числа из множества A, $y_1 = f(x_1)$, $y = f(x_2)$ – их образы во множестве B. Если $x_1 < x_2$, то $y_1 < y_2$, аналогично при $x_1 > x_2$, $y_1 > y_2$, т. е. $y_1 \neq y_2$. Таким образом, функция $f: A \to B$ устанавливает взаимно-однозначное отображение, а следовательно, существует обратная функция $g: B \to A$. Покажем, что $g(y)$ возрастает на множестве B.

Пусть $y_1 < y_2$ – любые числа из множества B. Обозначим через x_1 и x_2 их образы во множестве A.

$$x_1 = g(y_1) \Leftrightarrow y_1 = f(x_1)$$

$$x_2 = g(y_2) \Leftrightarrow y_2 = f(x_2)$$

Допустим, что неверно $x_1 < x_2$. Тогда либо $x_1 = x_2$, либо $x_1 > x_2$.

Если $x_1 = x_2$, то $f(x_1) = f(x_2)$, т. е. $y_1 = y_2$.

Если $x_1 > x_2$, то $f(x_1) > f(x_2)$, т. е. $y_1 > y_2$.

Получаем противоречие с условием $y_1 < y_2$.

Теорема доказана.

Замечание: 1) Условие монотонности является достаточным, но не необходимым для существования обратной функции. Легко привести пример взаимно-однозначного отображения, не являющегося монотонной функцией.

Пример.

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 1 - x, & 1 < x < 2 \end{cases}$$

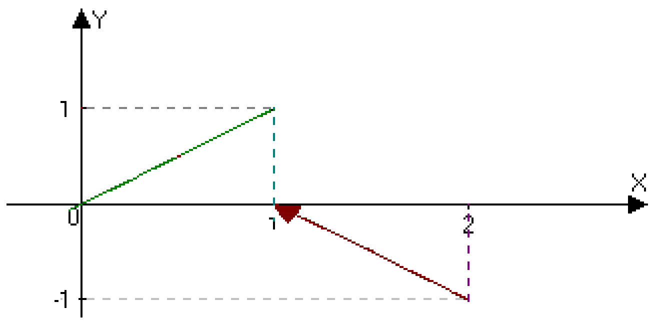


Рисунок 1.2

Функция $f(x)$ устанавливает биективное отображение отрезка $[0,\ 2]$ оси OX на $[-1,\ 1]$ оси OY, но не является монотонной на отрезке

[0, 2].

2) Обратная функция $x = g(y)$ к функции $y = f(x)$ имеет тот же самый график. Однако если заменить x на y, а y на x, то функция $y = g(x)$ имеет график симметричный относительно прямой $y = x$.

Пример.

Найти обратную функцию к функции $y = x^2$ на множестве а) $E = [0;+\infty)$; б) $E = (-\infty;0]$ и построить её график.

Решение: а) $x \in [0;+\infty)$, $y \in [0;+\infty)$. Извлечём из обеих частей квадратный корень $|x| = \sqrt{y}$, учитывая, что $x \geq 0$, получим $x = \sqrt{y}$. Меняя x на y, а y на x, запишем обратную функцию в виде $y = \sqrt{x}$:

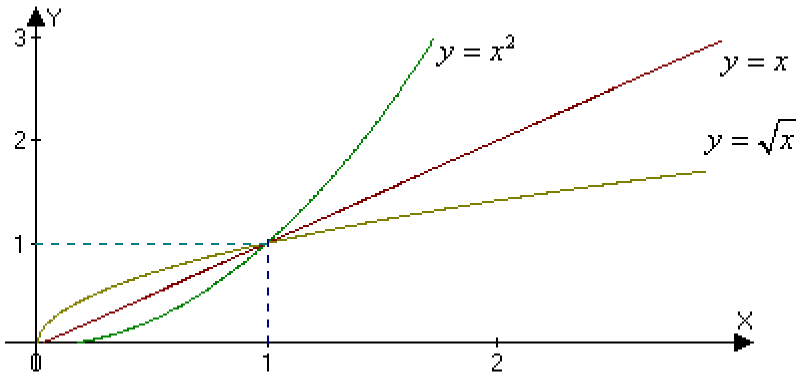


Рисунок 1.3

б) $x \in (-\infty;0]$, $y \in [0;+\infty)$. Тогда из равенства $|x| = \sqrt{y}$ следует $x = -\sqrt{y}$. Выполняя процедуру замены переменных, запишем обратную функцию в виде $x = -\sqrt{y}$:

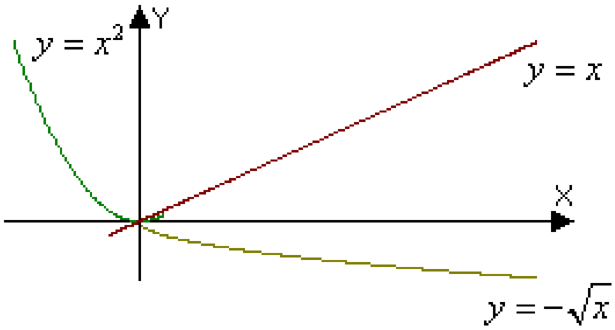


Рисунок 1.4

1.3. Определение и существование точных границ множества. Понятие предела числовой последовательности. Основные теоремы о пределах числовых последовательностей

Определение 1.8. Множество E называется *ограниченным сверху*, если существует число b, такое, что для всех $x \in E$ выполняется неравенство $x \le b$.

Определение 1.9. Множество E называется *ограниченным снизу*, если существует число a, такое, что для всех $x \in E,\ a \le x$.

Определение 1.10. Множество E называется *ограниченным*, если существуют два числа a и b, такие, что для всех $x \in E$, $a \le x \le b$.

Определение 1.11. Число M называется *точной верхней гранью* множества E (*Т.В.Г.*), если выполняются два условия:

1) $\forall x \in E(x \le M)$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in E\left(x' > M - \varepsilon\right)$.

Обозначают $M = SupE$.

Число M может принадлежать множеству E, а может и не принадлежать. Если оно лежит во множестве E, то является наибольшим его элементом.

Пример.

$$Sup[a,\ b] = b,\ b \in [a,\ b]$$

$$Sup(a,\ b) = b,\ b \notin (a,\ b)$$

Определение 1.12. Число m называется *точной нижней гранью* (*Т.Н.Г.*) множества E, если выполняются два условия:

1) $\forall x \in E(m \le x)$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists x' \in E(x' < m + \varepsilon)$.

Обозначают $m = \inf E$.

Если *Т.Н.Г.* принадлежит множеству E, то она является наименьшим элементом этого множества.

Теорема 1.3. *Если множество E ограничено сверху, то оно имеет Т.В.Г.*

Теорема 1.4. *Если множество E ограничено снизу, то оно имеет Т.Н.Г.*

Приведём доказательство теоремы 1 (теорема 2 доказывается аналогично).

Дано: множество E ограничено сверху, т. е. $\underset{b \in R}{\exists b} \underset{x \in E}{\forall x} (x \le b)$.

Доказать: Существует *Т.В.Г.* множества E, т. е. такое число M, что

1) $\forall x \in E(x \le M)$,

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists z \in E(z > M - \varepsilon)$.

Доказательство: Определим множество X следующим образом. Поместим во множество X каждый элемент множества E, а также такой элемент, правее которого найдется хотя бы один элемент множества *E*. Все остальные числа множества *R* отнесём к множеству *Y*.

Пара (X,Y) образует сечение во множестве действительных чисел, так как

1) $X \neq \varnothing$, т. к. $E \subset X$; $Y \neq \varnothing$, так как все числа, большие, чем число b, наверняка попадут в Y.

2) *X* и *Y* образуют, очевидно, разбиение *R*.

3) $\forall x \in X \, \forall y \in Y (x < y)$.

Так как множество *R* обладает свойством непрерывности, то всякое его сечение имеет рубеж. Обозначим рубеж сечения $X|Y$ через *M*. Покажем, что $M = SupE$.

Сначала проверим выполнение первого условия:

1) $\forall x \in E (x \leq M)$.

Пусть $X -$ произвольная точка множества *E*. Допустим противное, что $x > M$. Имеем:

$$x \in E \Rightarrow x \in X;\ M \text{ - рубеж } X|Y \Rightarrow x \in Y \text{ (т. к. } x > M),$$

но классы *X* и *Y* не пересекаются. Получили противоречие. Итак, для любого $x \in E,\ x \leq M$.

Докажем выполнение *второго условия*:

2) $\forall \varepsilon > 0 \exists z \in E (z > M - \varepsilon)$

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Тогда $M - \varepsilon < M$. В силу свойства плотности, найдется число $t \in R$, такое, что $M - \varepsilon < t < M$. Возможны два случая:

а) $t \in E$, но тогда принимаем $t = z$ и имеем неравенство $z > M - \varepsilon$.

б) $t \notin E$, так как $t < M$, а M - рубеж $X \mid Y$, то $t \in X$.

Итак:

$$\left.\begin{aligned} t \in X \\ t \notin E \end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{ правее } t \text{ имеется число } z \in E.$$

Следовательно: $M - \varepsilon < t < z$.

Доказано, что $M = SupE$.

Теорема 1.5. *Точная верхняя грань множества E наименьшая из всех верхних границ множества E.*

Доказательство: Пусть $M = SupE$ и b – одна из верхних граней множества *E*. Требуется доказать, что $M \leq b$.

Допустим противное, что $M > b$. Тогда $M - b > 0$. Обозначим $M - b = \varepsilon$ и применим п. 2 определения *Т.В.Г.*, согласно которому для выбранного $\varepsilon > 0$ найдется точка $z \in E$, такая, что $z > M - \varepsilon$, т. е. $z > b$. Но это не возможно, так как $\forall x \in E (x \le b)$. Получили противоречие.

Аналогично доказывается теорема 1.6.

Теорема 1.6. *Точная нижняя грань множества E наибольшая из всех нижних границ множества E.*

Последовательности

Определение 6. *Числовой последовательностью* называется функция натурального аргумента $f(n)$.

Последовательность записывают в виде перечисления значений функции $f(n)$ в порядке возрастания номеров n. Члены последовательности принято обозначать буквами латинского алфавита, снабжёнными индексами $\{a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...\}$.

Обычно последовательность задают формулой общего члена a_n и обозначают $\{a_n\}$.

Пример.

1) $a_n = \frac{1}{n}$, $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...\right\}$

2) $a_n = 2n$, $\{2, 4, 6, ..., 2n, ...\}$

3) $f(n) = \begin{cases} -1, \text{ если } n \text{ - нечётное} \\ 1, \text{ если } n \text{ - чётное} \end{cases}$

$a_n = (-1)^{n-1}$, $n = 1, 2, 3, ...$

$\{1, -1, 1, -1, ...\}$

Определение 1.14. Число a называют *пределом* числовой последовательности $\{a_n\}$, если для любого положительного числа ε, можно указать номер N, начиная с которого для всех членов $a_n, n \ge N$, выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$.

Обозначают $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$.

Используя символы математической логики, запишем:

$$\left\{a = \lim_{n \to \infty} a_n\right\} \Leftrightarrow \left\{\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \ \forall \underset{n \in N_0}{n} \left(n > N \to |a_n - a| < \varepsilon\right)\right\}.$$

Здесь N_0 – множество натуральных чисел.

Назовём интервал $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ – ε-окрестностью точки a. Тогда определению предела последовательности можно придать следующий геометрический смысл: *число* a называется *пределом числовой последовательности* $\{a_n\}$, если для любой ε- окрестности точки a, можно указать число N, так что все члены последовательности с номерами $n \geq N$ лежат в этой окрестности. Очевидно, за пределами $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ находится лишь конечное число точек последовательности.

Если последовательность имеет конечный предел, будем называть её *сходящейся*. В противном случае её называют *расходящейся*.

Пример.

1) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\} = \left\{1, \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{3}, \dots, \dfrac{1}{n}, \dots\right\}$ – сходится и её предел равен 0.

2) $\{2n\} = \{2, 4, 6, \dots, 2n, \dots\}$ – расходится $\lim\limits_{n\to\infty} 2n = +\infty$.

3) $\left\{(-1)^{n-1}\right\} = \left\{1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n-1}, \dots\right\}$ - расходится, так как не существует предела.

4) Пользуясь определением, доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Рассмотрим неравенство: $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon \Rightarrow \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon},\ n > \dfrac{1}{\varepsilon^2}$. Обозначим $\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right] + 1 = N$. Тогда для всех $n \geq N$ выполняется, очевидно, неравенство $n > \dfrac{1}{\varepsilon^2},\ \sqrt{n} > \dfrac{1}{\varepsilon}$, $\left|\dfrac{1}{\sqrt{n}} - 0\right| < \varepsilon$.

В дальнейшем при решении подобных задач достаточно по заданному $\varepsilon > 0$ построить N. Все остальные рассуждения будем считать очевидными.

Отметим теоремы, непосредственно следующие из определения предела.

Теорема 1.7. *Числовая последовательность не может иметь более одного предела.*

Теорема 1.8. *Всякая сходящаяся последовательность ограничена.*

Доказательство: Пусть $\{a_n\}$ сходится к некоторому числу a. Выберем $\varepsilon = 1$. Тогда, по определению, найдется номер, начиная с которого все члены последовательности лежат в интервале $(a-1,\ a+1)$. За этим интервалом находится лишь конечное число точек последовательности $\{a_n\}$. Обозначим через c наименьшее, а через d – наибольшее из чисел, не попавших в $(a-1,\ a+1)$. Тогда $\{a_n\}$ ограничена снизу либо числом c, либо $(a-1)$. Пусть $m = \max\{c,\ a-1\}$. Аналогично сверху $\{a_n\}$ ограничена либо d, либо $(a+1)$. Обозначим $M = \min\{d,\ a+1\}$. Тогда, наверное, все члены последовательности расположены на сегменте $[m, M]$. Таким образом, $\{a_n\}$ ограничена.

Теорема 1.9. *Если* $\{a_n\}$ *сходится к числу a и при этом для некоторого* b *выполняется неравенство* $a \le b$, *то, начиная с некоторого номера n, все* $a_n \le b$.

Теорема 1.20. *Пусть даны две сходящиеся последовательности* $\{a_n\}$ *и* $\{b_n\}$. *Если для достаточно больших n выполняется неравенство* $a_n \le b_n$, *то справедливо и неравенство* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \le \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

Теорема 1.21 (*теорема о среднем*). *Пусть даны три последовательности* $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$, *причём* $a_n \le b_n \le c_n$. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$, *то* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

Теоремы о монотонных последовательностях

Теорема 1.22. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *не убывает и ограничена сверху, то она имеет предел, равный* $Sup\{a_n\}$.

Доказательство:

Дано: $\{a_n\}$ не убывает, т. е. $\underset{n,m\in N}{\forall n \forall m}\left(n < m \Rightarrow a_n \le a_m\right)$, и $\{a_n\}$ ограничена сверху.

Доказать: $\{a_n\}$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = Sup\{a_n\}$.

Так как $\{a_n\}$ ограничена сверху, то она имеет *Т.В.Г.*, которую обозначим через *M*. Запишем этот факт по определению $\{M = Sup\{a_n\}\} \Leftrightarrow \left\{\underset{n\in N}{\forall n}\left(a_n \le M\right) \wedge \underset{\varepsilon>0}{\forall \varepsilon}\, \underset{m\in N}{\exists m}\left(a_m > M - \varepsilon\right)\right\}$. Покажем, что

$M=\lim\limits_{n\to\infty}a_n$. Для этого, пользуясь определением, достаточно показать, что $\underset{\varepsilon>0}{\forall}\varepsilon\,\exists m\underset{n\in N}{\forall}n\big(n>m\Rightarrow|a_n-M|<\varepsilon\big)$.

Пусть $\varepsilon>0$ произвольное число. Используя вторую часть определения *Т.В.Г.*, выберем $m\in N$ так, что $a_m>M-\varepsilon$. Но последовательность $\{a_n\}$ не убывает, поэтому для любого $n>m$ будет выполняться неравенство $M-\varepsilon<a_m\le a_n$. С другой стороны, $a_n\le M$ при всех $n\in N$, следовательно, $a_n<M+\varepsilon$. Таким образом, $M-\varepsilon<a_n<M+\varepsilon\Rightarrow|a_n-M|<\varepsilon$, что и требовалось доказать.

Аналогично доказывается теорема 2.

Теорема 1.23. *Если последовательность* $\{a_n\}$ *не возрастает и ограничена снизу, то она имеет предел, равный* $\inf\{a_n\}$.

Теорема 1.24 (Г. Кантор, о последовательности стягивающихся сегментов). *Существует одна и только одна точка, принадлежащая всем сегментам стягивающейся последовательности.*

Доказательство:

I. Существование

Из определения стягивающейся последовательности следует: $a_1\le a_2\le a_3\le\ldots\le a_n\le\ldots\le b_n\le\ldots\le b_2\le b_1$, $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ левых концов сегментов. Она не убывает и ограничена сверху любым числом $b_n(n=1,2,3,\ldots)$. Следовательно, $\{a_n\}$ сходится и её предел равен $Sup\{a_n\}$. Запишем $\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=Sup\{a_n\}$.

Докажем, что α – искомая точка.

Так как $\alpha=Sup\{a_n\}$, то для всех $n\in N$ $a_n\le\alpha$, причем $a_n<b_n$. Но, по свойству *Т.В.Г.*, α – наименьшая из всех верхних граней. Таким образом, $\alpha\le b_n$, $n\in N$. Доказано, что $\forall n\in N(a_n\le\alpha\le b_n)$.

II. Единственность

Докажем, что α – единственная точка, принадлежащая одновременно всем сегментам $[a_n,b_n]$, $n\in N$. Допустим, что существует $\beta\ne\alpha$, $\beta\in[a_n,b_n]$ для всех $n\in N$. Тогда, очевидно, $b_n-a_n\ge|\alpha-\beta|$. Обозначим $\varepsilon=|\alpha-\beta|>0$, тогда для всех $n\in N$ $(b_n-a_n)\ge\varepsilon$, что противоречит условию:

$$\left\{\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0\right\}\Leftrightarrow\left\{\underset{\varepsilon>0}{\forall}\varepsilon\,\exists M\,\forall n\ge M\,\big((b_n-a_n)<\varepsilon\big)\right\}.$$

Теорема доказана.

Замечание:

а) Из доказательства теоремы следует, что искомая точка $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Можно было показать, рассуждая аналогично, что $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

б) Если рассмотреть последовательность стягивающихся интервалов, полуинтервалов или полусегментов, то у них может и не быть общей точки.

Пример.

$\left\{\left(0,\dfrac{1}{n}\right)\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$, но число $0 \notin \left(0;\dfrac{1}{n}\right)$.

Определение 1.15. Пусть дана последовательность

$$\left\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots\right\}. \tag{1.1}$$

Всякая последовательность вида

$$\left\{a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_k}, \ldots\right\}, \tag{1.2}$$

где a_{n_i} – члены последовательности (1), причём $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots < n_k < \ldots$, называется её *подпоследовательностью.*

Заметим, что если $\{a_n\}$ сходится к некоторому числу *а*, то и всякая её подпоследовательность $\left\{a_{n_k}\right\}$ сходится к числу *а*.

Однако обратное утверждение не верно.

Например:

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, \text{ если } n \text{ - нечётное} \\ 2n, \text{ если } n \text{ - чётное} \end{cases}.$$

$\left\{1,\ 2,\ \dfrac{1}{3},\ 4,\ \dfrac{1}{5},\ 6,\ \dfrac{1}{7}, \ldots\right\}$ – расходящаяся последовательность, так как $\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ не существует. Но последовательность $\left\{a_{2n-1}\right\} = \left\{1,\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{5}, \ldots\right\}$ сходится к числу **0**.

Легко построить примеры последовательности, из которых нельзя выделить никакой сходящейся последовательности. В этой связи представляет интерес класс таких последовательностей, которые обязательно содержат сходящиеся подпоследовательности.

Теорема 1.25 (Больцано-Вейерштрасса). *Из всякой ограниченной последовательности можно извлечь сходящуюся подпоследовательность.*

Дано: $\{a_n\}$ ограничена, т. е. существует сегмент $[c,d]$ такой, что $\underset{n\in N}{\forall n}(c \le a_n \le d)$.

Доказать: существует сходящаяся подпоследовательность $\{a_{n_k}\}$.

Доказательство: Разделим $[c,d]$ пополам и обозначим $[c_1,d_1]$ ту половину, которая содержит бесконечное число членов данной последовательности $\{a_n\}$.

Разделим $[c_1,d_1]$ пополам и через $[c_2,d_2]$ обозначим ту половину, в которой находится бесконечное число членов $\{a_n\}$, и т. д. На k-том шаге построим $[c_k,d_k]$, обладающий тем свойством, что:

1) $[c_1,d_1]\supset[c_2,d_2]\supset\ldots\supset[c_k,d_k]$;

2) $d_k-c_k=\dfrac{d-c}{2^k}$;

3) $[c_k,d_k]$ содержит бесконечно много точек последовательности $\{a_n\}$.

Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность стягивающихся сегментов $[c_k,d_k]$, так как $\lim\limits_{k\to\infty}(d_k-c_k)=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{d-c}{2^k}=0$. Будем строить искомую подпоследовательность следующим образом: обозначим через a_{n_1} любой член $\{a_n\}$ из $[c_1,d_1]$, через a_{n_2} – любой член $\{a_n\}$ из $[c_2,d_2]$ с номером $n_2>n_1$ и т. д., a_{n_k} – произвольный член $\{a_n\}$ из $[c_k,d_k]$ с номером $n_k>n_{k-1}>\ldots>n_2>n_1$ и т. д. Получим a_{n_k} – подпоследовательность $\{a_n\}$. Докажем, что она сходится. По построению $c_k\le a_{n_k}\le d_k$

$$\lim_{k\to\infty}c_k=\lim_{k\to\infty}d_k=\alpha \qquad \text{(теорема Кантора)},$$

тогда по Теореме 5 (следствие из определения предела) $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=\alpha$.

Критерий Коши. *Для того чтобы последовательность* $\{a_n\}$ *сходилась, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\forall\varepsilon>0\exists M\ \underset{n,m\in N}{\forall n\forall m}(n>M\wedge m>M\Rightarrow|a_n-a_m|<\varepsilon) \qquad (*)$$

Определение 1.16. Последовательность, для которой выполняется условие (*), называется *фундаментальной*.

Тогда Критерий Коши можно сформулировать кратко следующим образом: *Для того чтобы последовательность сходилась, необходимо и достаточно, чтобы она была фундаментальной.*

1.4. Предел и непрерывность функции в точке. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Определение 1.17. Точка *a* называется *предельной точкой множества E*, если в любой окрестности точки а содержится бесконечно много точек из множества *E*.

Определение 1.18 (Коши). Пусть функция $f(x)$ определена на множестве *E* и *a* – предельная точка множества *E*. Число *A* называют *пределом функции* $f(x)$ *в точке a*, если $\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon}\underset{\delta>0}{\exists\delta}\underset{x\in E, x\neq a}{\forall x}\left(|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right)$. Обозначают $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Заметим, что

$$|x-a|<\delta \Leftrightarrow a-\delta<x<a+\delta \Leftrightarrow x\in(a-\delta,a+\delta)$$

$$|f(x)-A|<\varepsilon \Leftrightarrow A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon \Leftrightarrow f(x)\in(a-\varepsilon,A+\varepsilon).$$

Тогда *определению 2* можно придать следующий геометрический смысл: *число A* называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке a*, что для всех *x* из этой окрестности, отличных от числа *a*, значения функции лежат в ε – окрестности числа *A*.

Определение (Гейне) 1.19. Число *A* называется *пределом функции* $f(x)$ *в точке a* (как и раньше *a* – предельная точка множества *E* определения $f(x)$), если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек из множества *E*, $x_n \neq a$, сходящейся к числу *a*, последовательность соответствующих значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к *A*.

$$\left\{A=\lim_{x\to a} f(x)\right\} \Leftrightarrow \left\{\underset{x_n\in E, x_n\neq a}{\forall x}\left(\lim_{n\to\infty} x_n=a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f(x_n)=A\right)\right\}.$$

Теорема 1.26. *Определения предела функции по Коши и по Гейне равносильны.*

Доказательство:

I. Пусть $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ в смысле определения Коши, т. е.

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon}\underset{\delta>0}{\exists\delta}\underset{x\neq a}{\forall x\in E}\left(|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon\right) \tag{1.3}$$

Докажем, что $A=\lim\limits_{x\to a} f(x)$ в смысле определения Гейне, т. е.

$$\underset{x_n\in E,x_n\neq a}{\forall\{x_n\}}\left(\lim_{n\to\infty}x_n=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A\right) \tag{1.4}$$

Пусть $\{x_n\}$ произвольная последовательность, удовлетворяющая трём условиям:

1) $x_n\in E$;

2) $x_n\neq a$;

3) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a\Leftrightarrow\forall\varepsilon>0\underset{M>0}{\exists M}\underset{n\in N}{\forall n>M}\left(|x_n-a|<\varepsilon\right)$.

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число. По условию (1) для ε найдем число $\delta>0$, такое, что $\underset{x\neq a}{\forall x\in E}\left(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right)$.

Тогда, в силу свойства (3) последовательности $\{x_n\}$ для найденного $\delta>0$, существует число $M>0$, такое, что $\underset{n\in N}{\forall n>M}\left(|x_n-a|<\delta\right)$, но тогда по условию (1) $|f(x_n)-A|<\varepsilon$.

Таким образом, $\forall\varepsilon>0\exists M>0\underset{n\in M}{\forall n}\left(|f(x_n)-A|<\varepsilon\right)$, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$.

II. Пусть теперь $A=\lim\limits_{x\to a}f(x_n)$ по Гейне. Требуется доказать, что $A=\lim\limits_{x\to a}f(x)$ в смысле Коши, т. е.

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon}\underset{\delta>0}{\exists\delta}\underset{x\neq a}{\forall x\in E}\left(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon\right).$$

Применим метод доказательства от противного. Допустим, что определение Коши не выполняется, т. е.

$$\overline{\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon}\underset{\delta>0}{\exists\delta}\underset{x\neq a}{\forall x\in E}\left(|x-a|<\delta\right)\Rightarrow|f(x)-A|<\varepsilon}\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\underset{\varepsilon>0}{\exists\varepsilon}\underset{\delta>0}{\forall\delta}\underset{x\in E,x\neq a}{\exists x}\left(|x-a|<\delta\wedge|f(x)-A|\geq\varepsilon\right).$$

Тогда для найденного $\varepsilon>0$, для любого $\delta=\dfrac{1}{n}$, существует x_n, такое, что $x_n\neq a,\ x_n\in E$ и при этом $|x_n-a|<\dfrac{1}{n},\ |f(x_n)-A|\geq\varepsilon$.

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$, тогда по определению Гейне $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$, т. е. $|f(x_n)-A|<\varepsilon$. Но это не возможно в силу сделанного допущения.

Полученное противоречие доказывает теорему.

Односторонние пределы функции в точке

Определение 1.20. Пусть $f(x)$ определена на множестве E и точка a – предельная точка множества $E\bigcap(-\infty,a)$. Число B называют *левым односторонним пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если $\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon}\,\underset{\delta>0}{\exists\delta}\,\underset{x\in E}{\forall x}\Big(a-\delta<x<a\Rightarrow\big|f(x)-B\big|<\varepsilon\Big)$. Записывают: $B=\lim\limits_{x\to a-0}f(x)$. Часто число B обозначают $f_-(a)$.

Определение 1.21. Пусть $f(x)$ определена на множестве E и точка a – предельная точка множества $E\bigcap(a,+\infty)$. Число C называют *правым односторонним пределом функции* $f(x)$ *в точке* a, если

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon}\,\underset{\delta>0}{\exists\delta}\,\underset{x\in E}{\forall x}\Big(a<x<a+\delta\Rightarrow\big|f(x)-C\big|<\varepsilon\Big).$$

Обозначают: $C=f_+(a)=\lim\limits_{x\to a+0}f(x)$.

Имеет место утверждение.

Теорема 1.27. *Для того, чтобы в точке a существовал предел функции* $f(x)$*, необходимо и достаточно, чтобы существовали односторонние пределы и были равны между собой.*

Бесконечные пределы функции и пределы функции на бесконечности

Мы сформулировали определение предела функции $\lim\limits_{x\to a}f(x=A)$ для того случая, когда a и A – конечные действительные числа. Желая обобщить это определение для любого случая:

1) a – конечное; 2) $a=-\infty$; 3) $a=+\infty$; 4) $a=\infty$;

1) A – конечное; 2) $A=-\infty$; 3) $A=+\infty$; 4) $A=\infty$,

обобщим понятие окрестности точки на числовой прямой.

Определение 1.22. *Окрестностью конечной точки* назовём любой интервал с центром в этой точке.

Определение 1.23. *Окрестностью бесконечно удаленной точки* $\underline{+\infty}$ назовём любой интервал вида $(M;+\infty)$, $M>0$.

Определение 1.24. *Окрестностью точки* $-\infty$ назовём любой интервал вида $(-\infty;-M)$, $M>0$.

Определение 1.25. *Окрестностью точки* ∞ назовём любой интервал вида $(-\infty;-M)\cup(M;+\infty)$.

Определение 1.26. Точка A называется *пределом функции* $f(x)$ в точке a, если для любой окрестности точки A найдётся окрестность точки a, такая, что для всех x из области определения функции (

$x \neq a$), и попадающих в окрестность точки a, соответствующие значения функции $f(x)$ попадают в окрестность точки A.

Запишем некоторые определения в символической форме:

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall\limits_{x\in E} x\ (x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$;

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall\limits_{x\in E} x\ (x < -M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$;

3) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0\ \forall\limits_{x\in E} x\ (|x| > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall k > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\limits_{x\in E,\, x\neq a} x\ (|x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| > k)$;

5) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0\ \exists M > 0\ \forall\limits_{x\in E} x\ (x < -M \Rightarrow |f(x)| > k)$.

Некоторые теоремы о пределе функции

Теорема 1.28. *Функция* $f(x)$ *в точке a имеет не более одного предела.*

Теорема 1.29. *Если* $f(x)$ *имеет в точке a конечный предел, то она ограничена в некоторой окрестности точки a.*

Теорема 1.30. *Если функция* $f(x)$ *в точке a имеет пределом число A и A<B, то* $f(x)$*<B в некоторой окрестности точки a (кроме, быть может, самой точки a).*

Теорема 1.31. *Если* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$ и $f(x) < g(x)$ *в некоторой окрестности точки a, то A<B.*

Теорема 1.32. *Если в некоторой окрестности точки a (кроме, быть может, самой точки a) справедливы неравенства* $f(x) \le h(x) \le g(x)$ *и* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, *то* $\lim\limits_{x\to a} h(x) = A$.

Теорема 1.33. *Пусть* $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$. *Тогда*

1) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;

2) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = A\cdot B$;

3) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$, $(B \neq 0)$;

4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)} = A^B$, *(A>0).*

Определение 1.27. Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке *a,* если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$.

Определение 1.28. Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* в точке *a,* если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Теорема 1.34. *Сумма, разность и произведение функций бесконечно малых в точке a, есть функция бесконечно малая.*

Теорема 1.35. *Произведение функции, бесконечно малой в точке a на ограниченную функцию есть функция, бесконечно малая в точке a.*

Теорема 1.36. *Если* $f(x)$ *бесконечно малая в точке a и* $f(x)\neq 0$ *в некоторой окрестности точки a, то* $\dfrac{1}{f(x)}$ – *бесконечно большая в точке a функция.*

Теорема 1.37. *Если* $f(x)$ *бесконечно большая в точке a и* $f(x)\neq 0$ *в некоторой окрестности точки a, то* $\frac{1}{f(x)}$ – *бесконечно малая функция в точке a.*

Теорема 1.38. *Сумма функции бесконечно большой в точке a и ограниченной функции есть функция, бесконечно большая в точке a.*

Теорема 1.39. *Произведение двух бесконечно больших в точке a функций есть функция, бесконечно большая в точке a.*

Определение 1.29. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – две бесконечно малые (бесконечно большие) функции в точке *a.* Если $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$, то $f(x)$ и $g(x)$ называют *эквивалентными* в точке *a.* Обозначают $f(x)$ ~ $g(x)$ при $x\to a$.

Некоторые замечательные пределы

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, $\sin x \sim x$, при $x\to 0$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$, $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$, $\ln(1+x)\sim x$, при $x\to 0$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$, $e^x\sim 1+x$, при $x\to 0$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$, $(1+x)^\alpha\sim 1+\alpha x$, при $x\to 0$.

Непрерывные функции

Определение 1.30. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке *a,* если она определена в этой точке, причём $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Определение 1.31. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке *a,* если в этой точке левый и правый пределы существуют, равны между собой и равны значению функции в точке *a:*

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\lim_{x\to a+0} f(x)=f(a).$$

Определение 1.32 (по Коши). Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке *a,* если

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in E\ (|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon).$$

Определение 1.33. (по Гейне) Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке *a,* если для любой последовательности $\{x_n\}$ точек множества *E*, сходящейся к числу *a,* соответствующая последовательность функций сходится к $f(a)$*:*

$$\underset{x_n\in E}{\forall\{x_n\}}\ (\lim_{n\to\infty} x_n=a\Rightarrow\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)).$$

Определение 1.34. Функция $f(x)$ называется *непрерывной* в точке *a,* если бесконечно малому приращению аргумента Δx, соответствует бесконечно малое приращение функции Δy.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \text{где}\ \Delta x=x-a,\quad \Delta y=f(x)-f(a).$$

Рассмотрим схему равносильностей приведённых определений:

$$\begin{array}{ccccc} \text{Опр.}2 & \leftrightarrow & \text{Опр.}1 & \leftrightarrow & \text{Опр.}3\\ & & \updownarrow & & \updownarrow\\ & & \text{Опр.}5 & & \text{Опр.}4 \end{array}$$

Равносильность первых четырех определений следует из определений предела и их равносильностей. Остаётся показать равносильность пятого определения. Сравним его с определением 1.

I. Дано: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Доказать: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Доказательство:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))=\lim_{x\to a}f(x)-f(a)=f(a)-f(a)=0.$$

II. Дано: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$.

Доказать: $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$.

Доказательство:

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}\Big[\big(f(x)-f(a)\big)+f(a)\Big]=\lim_{x\to a}(f(x)-f(a))+f(a)=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y+f(a)=f(a).$$

Определение 1.35. Функция $f(x)$ называется *непрерывной на множестве E,* если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Точки разрыва функции и их классификация

Точка a называется *точкой разрыва* функции $f(x)$, если в этой точке $f(x)$ не является непрерывной.

1. Точка a называется *точкой устранимого разрыва,* если в ней односторонние пределы функции $f(x)$ существуют, равны между собой, но не равны значению функции в этой точке:

$$\lim_{x\to a-0}f(x)=\lim_{x\to a+0}f(x)\neq f(a).$$

Пример.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \textit{если} \quad x\in[0,1]\cup(1,2];\\ 3, & \textit{если} \quad x=1.\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0}f(x)=\lim_{x\to 1-0}x^2=1,$$
$$\lim_{x\to 1+0}f(x)=\lim_{x\to 1+0}x^2=1,$$

$f(1)=3$, $x=1$ – точка устранимого разрыва.

2. Точка a называется *точкой разрыва с конечным скачком*, если односторонние пределы функции $f(x)$ в этой точке существуют, но не равны между собой.

Пример.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \textit{если} \quad x\in[0,1];\\ 3-x, & \textit{если} \quad x\in(1,2].\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} x^2 = 1,$$
$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} (3-x) = 2,$$

$f_-(1) \neq f_+(1) \quad \Rightarrow \quad x = 1 -$ точка разрыва со скачком.

Точки устранимого разрыва и точки разрыва с конечным скачком называют *точками разрыва 1-го рода*.

3. Если хотя бы один из односторонних пределов функции $f(x)$ в точке a не существует или равен бесконечности, то точку a называют *точкой разрыва 2-го рода*.

Примеры:

1. $f(x) = \begin{cases} \cos x, & x \le 0; \\ \dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

$x = 0 -$ точка разрыва $2^{\text{го}}$ рода, так как $\lim\limits_{x\to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

2. $f(x) = \begin{cases} x, & x \le 0; \\ \sin\dfrac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$

Покажем, что $\sin\dfrac{1}{x}$ не имеет предела при $x \to 0$. Воспользуемся определением по Гейне. Рассмотрим различные последовательности точек $x_n \to 0$.

а) $x_n = \dfrac{1}{\pi n}, \quad n \to \infty \Rightarrow x_n \to 0.$

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin \pi n = 0.$$

б) $x_n = \dfrac{1}{\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n}, \quad n \to \infty \Rightarrow x_n \to 0.$

$$\sin\frac{1}{x_n} = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1.$$

Подобным образом можно задавать любые последовательности и каждый раз получать разные значения функции $\sin\dfrac{1}{x}$. Говорят, что при $x \to 0$, $\sin\dfrac{1}{x}$ может принимать любые значения из $[-1,1]$.

Таким образом, $x=0$ – точка разрыва функции $f\left(x\right)$ второго рода.

3. Функция Дирихле

$$f(x)=\begin{cases}1, & \textit{если} \quad x - \textit{рациональное};\\ 0, & \textit{если} \quad x - \textit{иррациональное},\end{cases}$$

разрывна в каждой точке числовой прямой.

Действительно, в любой окрестности любой точки на прямой в силу свойства плотности множества действительных чисел есть как рациональные, так и иррациональные точки, поэтому $f\left(x\right)$ не стремится к определенному пределу. Таким образом, в каждой точке $f\left(x\right)$ имеет разрыв 2-го рода.

Некоторые теоремы о непрерывных функциях

Теорема 1.40. *Если* $f\left(x\right)$ *непрерывна в точке a и* $f(a)<b \quad (f(a)>b)$, *то* $f(x)<b \quad (f(x)>b)$ *в некоторой окрестности точки a.*

Следствие. Непрерывная функция в точке *a* сохраняет свой знак и в некоторой окрестности точки *a.*

Пример. Показать, что функция

$$f(x)=\begin{cases}x, & \textit{если} \quad x - \textit{рациональное};\\ -x, & \textit{если} \quad x - \textit{иррациональное},\end{cases}$$

непрерывна в точке $x=0$ и разрывна во всех остальных точках.

1) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0, \quad f(0)=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0).$

2) Пусть $x\neq 0$. Если $x_0>0$, то $f(x_0)>0$ в рациональной точке, но в любой окрестности точки x_0 есть иррациональные точки, в которых $f(x_0)=-x_0<0$. Аналогично рассуждая в случае, когда x_0 – иррациональная точка ($x_0>0; x_0<0$), заключаем на основании следствия, что такие точки не могут быть точками непрерывности.

Теорема 1.41. *Если* $f\left(x\right)$ *и* $g(x)$ – *непрерывные в точке a функции, то*

$f\left(x\right)\pm g(x), \quad f(x)\cdot g(x)$ *и* $\dfrac{f(x)}{g(x)}$, *если* $g(a)\neq 0$, *будут также непрерывны в точке a.*

Теорема 1.42. *Если* $f(x)$ *и* $g(x)$ *непрерывны в точке a и* $f(a) > 0$, *то* $f(x)^{g(x)}$ *непрерывна в точке a.*

Свойства функций, непрерывных на сегменте

Теорема 1 (первая теорема Коши). *Если* $f(x)$ *непрерывная на* $[a,b]$ *и на концах этого сегмента принимает различные по знаку значения, то найдётся точка* $c \in [a,b]$, *такая, что* $f(c) = 0$.

Доказательство:

Пусть $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$ и для определённости $f(a) < 0$, $f(b) > 0$. Предположим противное, что $f(x)$ не обращается в нуль ни в одной точке $[a,b]$.

Разделим $[a,b]$ пополам и обозначим через $[a_1,b_1]$ ту половину, для которой $f(a_1) < 0$, $f(b_1) > 0$.

Сегмент $[a_1,b_1]$ делим пополам и обозначим $[a_2,b_2]$ ту половину, для которой $f(a_2) < 0$, $f(b_2) > 0$.

Продолжая рассуждать аналогично, получим $[a_k,b_k]$, $f(a_k) < 0$, $f(b_k) > 0$ и $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$.

Таким образом строится последовательность стягивающихся сегментов с тем свойством, что $\forall k \in N \quad (f(a_k) < 0, \quad f(b_k) > 0)$.

По теореме Кантора существует точка $\alpha = \lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, принадлежащая, очевидно, и $[a,b]$.

Из определения непрерывности по Гейне следует:

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \alpha \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(a_k) = f(\alpha),$$

$$\lim_{k\to\infty} b_k = \alpha \Rightarrow \lim_{k\to\infty} f(b_k) = f(\alpha),$$

но так как $f(a_k) < 0 \Rightarrow f(\alpha) \le 0$, $f(b_k) > 0 \Rightarrow f(\alpha) \ge 0$.

Данные неравенства выполнимы только в случае, когда $f(\alpha) = 0$.

Этот вывод противоречит нашему предположению, что и доказывает теорему.

Теорема 1.43 (Вторая теорема Коши). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и на концах этого сегмента принимает различные* *по величине значения* $f(a)=A,\quad f(b)=B,\quad A\neq B$*, то для любого числа* $C\in[A,B]$ *найдётся число* $c\in[a,b]$*, такое что* $f(c)=C$.

Доказательство:

Пусть для определенности $A<C<B$. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=f(x)-C$ и покажем, что для неё выполняются все условия теоремы 1.

Действительно: 1) $\varphi(x)$ непрерывна на $[a,b]$;

2) $\varphi(a)=f(a)-C=A-C<0,$

$\varphi(b)=f(b)-C=B-C>0.$

Следовательно, по теореме 1, существует точка $c\in[a,b]$, такая, что $\varphi(c)=0$, т.е. $f(c)-C=0\Rightarrow f(c)=C$.

Теорема 1.44 (Первая теорема Вейерштрасса). *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$*, то она на нём ограничена.*

Доказательство:

Требуется доказать, что $\exists k>0\quad \underset{x\in[a,b]}{\forall x}\quad \left(\left|f(x)\right|\leq k\right)$.

Допустим, что $f(x)$ не ограничена на $[a,b]$, т.е. $\forall k>0\quad \underset{x\in[a,b]}{\exists x}\quad \left(\left|f(x)\right|>k\right)$. Для $k=n,\ \ n=1,2,3,...,$ существует $x_n\in[a,b],\quad \left|f(x_n)\right|>n$.

Рассмотрим последовательность таких точек $\{x_n\}$. Очевидно, она ограничена, а значит, по теореме Больцано-Вейерштрасса из неё можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$. Обозначим $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=\alpha$. Из свойств предела числовых последовательностей следует, что $\alpha\in[a,b]$. Но поскольку $f(x)$ непрерывна в каждой точке $[a,b]$, то она непрерывна в точке $x=\alpha$.

Воспользуемся определением непрерывности по Гейне:

$$x_{n_k}\to\alpha\Rightarrow f(x_{n_k})\to f(\alpha)\ \text{при}\ k\to\infty.$$

Следовательно, $\{f(x_{n_k})\}$ сходится и значит ограничена. С другой стороны, $\left|f(x_{n_k})\right|>n_k$ при любых $k\in N$, т. е. $\{f(x_{n_k})\}$ не ограничена. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Замечание. Теорема 3 не верна, если $f(x)$ непрерывна лишь на интервале (полуинтервале).

Пример. $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad x\in(0,1]$.

Функция не ограничена при $x\to 0$, хотя и непрерывна во всех точках $(0,1]$.

Теорема 1.45 (Вторая теорема Вейерштрасса). *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$*, то она принимает на* $[a,b]$ *своё наибольшее и наименьшее значения.*

Уточним терминологию: говорят, что $f(x)$, определенная на $[a,b]$, принимает на нем наибольшее (наименьшее) значение, если существует точка $x_1\in[a,b]$ $(x_2\in[a,b])$, такая, что для всех $x\in[a,b]$, $f(x)\le f(x_1)$ $(f(x)\ge f(x_2))$.

Доказательство теоремы 4:

По условию $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, по теореме 3 она ограничена, следовательно, ограничена область её значений. Тогда существует *Т.В.Г.* и *Т.Н.Г.* множества значений функции $f(x)$ на $[a,b]$. Обозначим: $M=\sup\limits_{[a,b]}\{f(x)\},\quad m=\inf\limits_{[a,b]}\{f(x)\}$.

Для того, чтобы доказать, что $f(x)$ принимает на $[a,b]$ наименьшее значение, надо показать, что существует точка $x_1\in[a,b]$, такая, что $f(x_1)=m$. Аналогично для наибольшего значения: $\underset{x_2\in[a,b]}{\exists x_2}\quad (f(x_2)=M)$.

Докажем последнее утверждение.

Допустим, что нет точек $x_2\in[a,b]$, что $f(x_2)=M$. Тогда $\forall x\in[a,b]\quad (f(x)<M)$.

Рассмотрим вспомогательную функцию и отметим некоторые её свойства:

1) $\varphi(x)$ непрерывная на $[a,b]$, так как $M-f(x)>0$ и $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$;

2) $\varphi(x)$ на основании теоремы 3 ограничена на $[a,b]$.

Допустим, что $\varphi(x)$ ограничена сверху числом *B*, тогда

$$\forall x\in[a,b]\quad (\varphi(x)\le B)\Rightarrow \frac{1}{M-f(x)}\le B\Rightarrow B>0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{B}\le M-f(x)\Rightarrow f(x)\le M-\frac{1}{B}.$$

Таким образом, получим, что $f(x)$ ограничена сверху числом $M-\frac{1}{B}<M$. Но M – *Т.В.Г.* Получили противоречие с тем, что *Т.В.Г.* – наименьшая из всех верхних граней. Следовательно, наше предположение не верно.

Для наименьшего значения функции $f(x)$ доказательство аналогично.

Замечание. Теорема 4 перестаёт быть верной на интервале (полуинтервале).

Следующие теоремы приведём без доказательства.

Теорема 1.46. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и отлична от постоянной, то её областью значений также является сегмент.*

Определение 1.36. Функция $f(x)$ называется *равномерно непрерывной* на множестве *E*, если

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon}\ \underset{\delta>0}{\exists\delta}\ \underset{x_1,\,x_2\in E}{\forall x_1,\,x_2}\quad \left(\left|x_1-x_2\right|<\delta \Rightarrow \left|f(x_1)-f(x_2)<\varepsilon\right|\right).$$

Очевидно, что если функция равномерно непрерывна на множестве *E*, то она непрерывна на нём. Обратное утверждение не всегда выполнимо, однако имеет место теорема 1.47.

Теорема 1.47 (Г. Кантор). *Если* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то она на нём и равномерно непрерывна.*

Следующая теорема выражает условие непрерывности монотонной функции.

Теорема 7. *Если* $f(x)$ *монотонна на* $[a,b]$ *и её область значений так же сегмент, то* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$.

Теорема остаётся справедливой и для интервалов.

Отдельно отметим теоремы о непрерывности сложной и обратной функции.

Теорема 1.48. *Если функция* $y=f(x)$ *непрерывна в точке* x_0, *а* $z=g(y)$ *непрерывна в точке* y_0, *где* $y_0=f(x_0)$, *то их композиция* $z=g(f(x))$ *непрерывна в точке* x_0.

Теорема 1.49. *Если функция* $y=f(x)$ *возрастает (убывает) и непрерывна на* $[a,b]$, *то для неё существует обратная функция* $x=g(y)$, *которая также возрастает (убывает) и непрерывна на множестве значений функции* $f(x)$.

На основании этих теорем доказывается непрерывность всех элементарных функций в областях своего определения.

Вопросы и задания для самоконтроля по разделу «Введение в анализ»

1. Доказать эквивалентность принципа точной верхней грани и аксиомы полноты. Покажите, что в Q принцип точной верхней грани не имеет места.

2. Сформулируйте определения ограниченной числовой последовательности, точных граней последовательности.

3. Пользуясь определением предела доказать, что а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-1}{2n+1}=\frac{1}{2}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$ не существует.

4. Доказать, что если для монотонной последовательности $\{x_n\}$ существует сходящаяся подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, то последовательность $\{x_n\}$ сходится.

5. Используя теорему о пределе монотонной последовательности, исследуйте сходимость последовательности $\left\{\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \ldots, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}, \ldots\right\}$.

6. Пусть последовательности

а) $\{x_n\}$ – сходится, $\{y_n\}$ – расходится;

б) $\{x_n\}$ – расходится, $\{y_n\}$ – расходится.

Что можно в каждом случае сказать о сходимости $\{x_n+y_n\}$, $\{x_n\cdot y_n\}$?

7. Докажите, что если точка $x=a$ – предельная точка множества E, то существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n\in E$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

8. Докажите, что конечное множество не имеет предельных точек. Всякое ли бесконечное множество имеет предельную точку? Приведите примеры.

9. Пользуясь определением предела по Коши покажите, что $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x+1}{x+2}=\frac{2}{3}$. Изобразите график функции $y=\frac{x+1}{x+2}$ и покажите геометрически, как по заданному $\varepsilon>0$ выбирать подходящее $\delta>0$.

10. Сформулируйте на языке "$\varepsilon-\delta$" следующие утверждения:

а) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=A-0$; б) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=A+0$;

в) $\lim\limits_{x\to a-0}f(x)=+\infty$; г) $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=-\infty$.

Для каждого случая приведите пример или геометрическую иллюстрацию.

11. $f(x)=\dfrac{x}{|x-1|}$. Найдите пределы этой функции при $x\to+\infty$, $x\to-\infty$, $x\to 1$. Изобразите эскиз графика этой функции.

12. Постройте эскиз графиков следующих функций:

а) $f(x)=2^{\frac{1}{1-x}}$; б) $f(x)=\log_x 2$; в) $f(x)=arctg\,\dfrac{1}{x-1}$.

13. Используя замечательные пределы вывести формулы:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln a}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}=\ln a$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{shx}{x}=1$.

14. Доказать непрерывность основных элементарных функций в областях их определения:

$$a^x,\quad \log_a x,\quad \sin x,\quad \cos x,\quad tgx,\quad \arcsin x,\quad arctgx.$$

15. Используя определение непрерывности по Коши, доказать, что $y=\dfrac{x}{x+1}$ непрерывна в точке $x_0=1$.

16. Докажите, что если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на R и $f(x)=g(x)$ в точках множества Q, то $f(x)\equiv g(x)$ на множестве R.

17. Исследовать на непрерывность и построить график функции

$$f(x)=\begin{cases} x^2-|x|-2, & при \quad x\le 3;\\ \left|\dfrac{1}{\pi}\arccos(4-x)\right|, & при \quad 3<x\le 5;\\ \dfrac{x+1}{x-5}, & при \quad x>5.\end{cases}$$

18. Доказать:

а) функция $y=[x]$ разрывна в каждой целой точке $x=n$,

б) функция $y=[x]\sin\pi x$ непрерывна на множестве R.

19. Определить точки разрыва функции $y=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1+x^n}$, $(x\ge 0)$.

20. Пусть $f(x)$ и $g(x)$ разрывны в точке x_0. Обязательно ли произведение $f(x)\cdot g(x)$ терпит разрыв в точке x_0?

21. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0, $g(x)$ разрывна в точке x_0. В каком случае $f(x)\cdot g(x)$ будет непрерывна в точке x_0?

22. Доказать утверждение: если $f(x)$ непрерывна на множестве R и $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a \quad (a\in R)$, то $f(x)$ ограничена на R.

23. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$. Может область значений быть

а) $E=(0,1]$; б) $E=Q$?

24. Какие из следующих функций имеют непрерывные обратные? Найдите их и изобразите графики.

а) $y=|x|, \quad x\in R$;

б) $y=\sin x, \quad x\in\left[\dfrac{\pi}{2},\pi\right]$;

в) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x\in(-1,1)$;

г) $y=\dfrac{2x}{1+x^2}, \quad x\in(0,1)$.

25. Какие из следующих функций можно непрерывно продолжить в R?

а) $y=\dfrac{|x|}{x}$; б) $y=\dfrac{1-\cos x}{x^2}$; в) $y=arctg\dfrac{1}{x}$; г) $y=x\,arctg\dfrac{1}{x}$?

26. Пусть $f(x)=\operatorname{sgn}x, \quad \varphi(x)=1-x^2$. Исследовать на непрерывность $f[\varphi(x)]$ и $\varphi[f(x)]$.

27. Доказать, что если $f(x)$ непрерывна в точке $x=a$, то $|f(x)|$ также непрерывна в точке $x=a$. Верно ли обратное утверждение?

РАЗДЕЛ 2. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

2.1. Определение производной. Геометрический и механический смысл

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Рассмотрим приращение аргумента $\Delta x \neq 0$ так, чтобы $x_0 + \Delta x$ не выходила за пределы данной окрестности. Тогда приращение функции в точке x_0 равно $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Определение 2.1. *Производной функции* $f(x)$ в точке x_0 называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$.

Записывают

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2.1}$$

Процесс нахождения производной называют *дифференцированием.*

Если предел в формуле (1) существует и конечен, то функцию называют *дифференцируемой* в точке x_0.

Пример.

$f(x) = 3x^2 + 2x + 5$

$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = 3(x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 5 - 3x^2 - 2x - 5 =$

$= 6x\Delta x - 3\Delta x^2 + 2\Delta x,$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{6x\Delta x - 3\Delta x^2 + 2\Delta x}{\Delta x} = 6x + 2.$$

Геометрическая интерпретация производной

Рассмотрим задачу отыскания уравнения касательной к произвольной кривой на плоскости в данной точке x_0, которая исторически первой привела к понятию производной.

Известно, что уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через данную точку (x_0, y_0), имеет вид:

$$y - y_0 = k(x - x_0). \tag{2.2}$$

Требуется найти $k = tg\alpha$ так, чтобы прямая (2), касалась данной кривой $y = f(x)$ в точке x_0. Сначала определим само понятие касательной к данной кривой.

Пусть на графике функции $y = f(x)$ задана точка $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, и пусть $M_1(x\ , y\ )$ – произвольная точка кривой $y = f(x)$. Проведём секущую M_0M_1 и обозначим угол наклона её к оси OX через β.

Определение 2.2. *Касательной к графику функции* $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ назовём предельное положение секущей M_0M_1, когда точка M_1 вдоль кривой $y = f(x)$ стремится к точке M_0.

Определим угловой коэффициент касательной как предельное положение углового коэффициента секущей

$$tg\alpha = \lim_{M_1 \to M_0} tg\beta .$$

Обозначим $x_1 - x_0 = \Delta x$, $y_1 - y_0 = \Delta y$.

Тогда $tg\beta = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$, причём при $x_1 \to x_0$, т.е. $\Delta x \to 0$, $\quad M_1 \to M_0$.

Получим: $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{M_1 \to M_0} tg\beta = tg\alpha$.

Из определения 1 следует, что

$$tg\alpha = f'(x_0). \tag{2.3}$$

Таким образом, производная функции $f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной в точке x_0.

Из формул (2) и (3) получаем уравнение касательной в виде:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0). \tag{2.4}$$

По значению производной можно определить характер наклона касательной:

1) $f'(x_0) = 0$ – касательная горизонтальна;

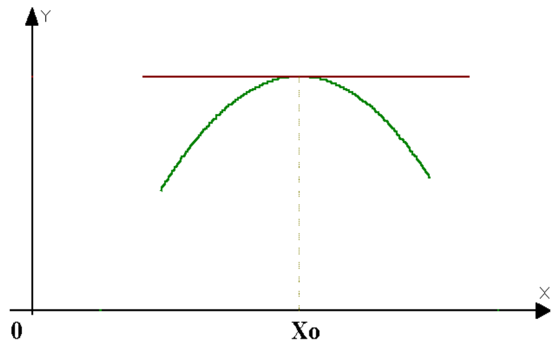


Рисунок 2.1

2) $f'(x_0) > 0$ – угол α острый;

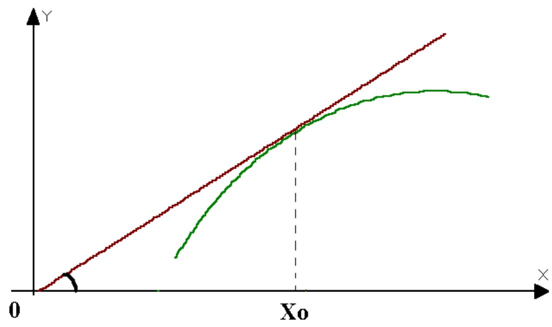


Рисунок 2.2

3) $f'(x_0) < 0$ – угол α тупой.

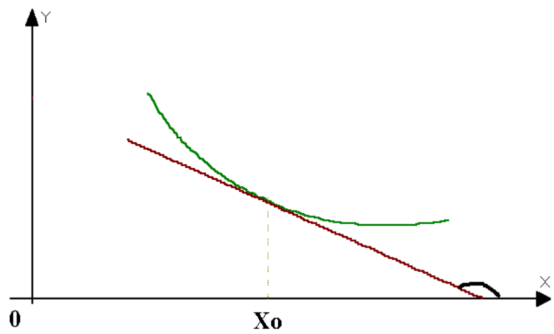
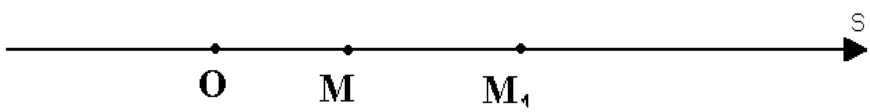


Рисунок 2.3

Механическая интерпретация производной

Пусть некоторая материальная точка движется вдоль одной прямой из некоторого положения O с переменной скоростью, так что путь, пройденный точкой, является функцией времени $S(t)$. Требуется определить скорость точки в некоторый момент времени t.

Допустим, в момент t точка находилась в положении M .



А в момент $t + \Delta t$ в положении M_1. Обозначим путь $OM = S(t)$, $OM_1 = S(t + \Delta t)$. Тогда за время Δt изменение положения точки $\Delta S = S(t + \Delta t) - S(t) = MM_1$.

Средняя скорость на отрезке MM_1 равна

$$V_{ср} = \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Мгновенную скорость в момент времени t найдём как предел при $\Delta t \to 0$ от $V_{ср}$:

$$V_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}.$$

Сравнивая полученное выражение с (1), заключаем, что

$$V_{мгн} = S'(t).$$

Таким образом, производная пути по времени равна мгновенной скорости точек.

Обобщая данный вывод, можно сказать, что если некоторая функциональная зависимость выражает некоторый процесс, то производная этой функции определяет скорость изменения процесса.

2.2. Односторонние и бесконечные производные

1. Односторонние производные

Может оказаться, что в точке x предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ не существует, однако, существуют односторонние пределы:

левый $\lim\limits_{\Delta x \to 0-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,

правый $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

В этой связи введём следующие понятия:

а) *Левой производной функции* $f(x)$ *в точке* x называется левый предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$. Обозначают:

$$f'_{-}(x) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

б) *Правой производной функции* $f(x)$ *в точке* x называется правый предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда $\Delta x \to 0$. Обозначают:

$$f'_{+}(x) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Теорема 2.1. *Для того, чтобы функция* $f(x)$ *имела производную в точке* x, *необходимо и достаточно, чтобы в этой точке функция была непрерывна и существовали односторонние производные* $f'_{-}(x)$ *и* $f'_{+}(x)$, *равные между собой.*

Пример.

$y = |\sin x|, \quad x_0 = 0.$

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = |\sin \Delta x| = \begin{cases} \sin \Delta x, & 0 < \Delta x < \pi; \\ -\sin \Delta x, & -\pi < \Delta x < 0. \end{cases}$$

$$f'_-(0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\sin \Delta x}{\Delta x} = -1,$$

$$f'_+(0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \Delta x}{\Delta x} = 1,$$

$f'_-(x) \neq f'_+(x) \Rightarrow$ производной $f'(0)$ не существует.

2. Бесконечные производные

Если $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \infty$, то говорят, что функция $f(x)$ имеет в точке x_0 бесконечную производную. Из геометрического смысла следует, что в этом случае касательная в точке x_0 вертикальная.

На рисунке показан характер графика в окрестности точки x_0.

а) $f'(x_0) = +\infty$

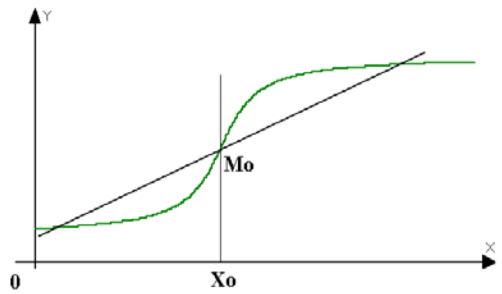


Рисунок 2.4

б) $f'(x_0) = -\infty$

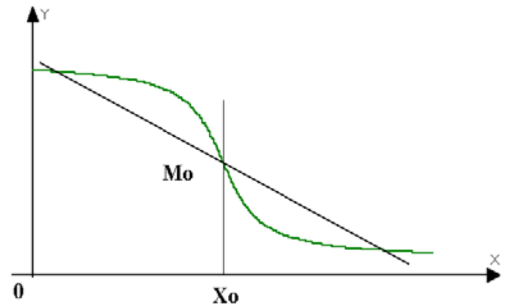


Рисунок 2.5

в) $f'(x_0) = \infty$, причем $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$

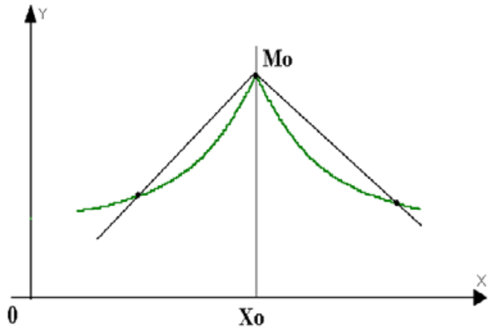


Рисунок 2.6

г) $f'(x_0)=\infty$, причем $f'_-(x_0)=-\infty$, $f'_+(x_0)=+\infty$

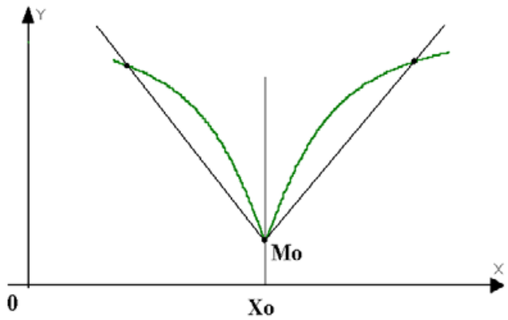


Рисунок 2.7

2.3. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции

Теорема 2.2. *Если функция дифференцируема в некоторой точке x, то она в ней и непрерывна.*

Доказательство:

Из определения дифференцируемости следует, что $f(x)$ имеет конечную производную

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Определим вспомогательную функцию $\alpha(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)$.

Тогда

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Найдём

$$\lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x)=f'(x)-f'(x)=0.$$

Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} f'(x)\Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x)\Delta x = 0.$$

По пятому определению непрерывности заключаем, что $f(x)$ непрерывна в данной точке x.

Обратное утверждение неверно, т.е. $f(x)$ может быть непрерывной в точке x_0, но не дифференцируемой (см. пример $y = |\sin x|, \quad x_0 = 0$).

Правила дифференцирования

1. Если $f(x) = C - const$, то $f'(x) = 0$, т.е. $C' = 0$.

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то $f(x) + g(x)$ также дифференцируема в точке x, при этом

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x).$$

3. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x, то $k \cdot f(x)$ также дифференцируема (k – некоторое число) и

$$(k \cdot f(x))' = k \cdot f'(x).$$

Следствие:

$$(f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x).$$

4. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x, то $f(x) \cdot g(x)$ дифференцируема в точке x, причём

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x).$$

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x и $g(x) \neq 0$, то $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ дифференцируема в точке x и

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

В качестве примера рассмотрим доказательство последнего свойства.

Пусть $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}, \quad g(x) \neq 0$.

$$\Delta y = h(x+\Delta x) - h(x) = \frac{f(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)} - \frac{f(x)}{g(x)} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} =$$

$$= \frac{f(x+\Delta x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x+\Delta x)}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)} =$$

$$= \frac{[f(x+\Delta x) - f(x)]\cdot g(x) - f(x)\cdot [g(x+\Delta x) - g(x)]}{g(x+\Delta x)\cdot g(x)}.$$

Обозначим: $u = f(x), \quad v = g(x)$.

$$\Delta u = f(x+\Delta x) - f(x), \quad \Delta v = g(x+\Delta x) - g(x).$$

Тогда

$$\Delta y = \frac{\Delta u \cdot v - u\cdot \Delta v}{v(x+\Delta x)\cdot v}.$$

$$h'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{\Delta u}{\Delta x}v - u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x+\Delta x)\cdot v}.$$

Так как функции u и v – непрерывны, то

$$h'(x) = \frac{u'\cdot v - u\cdot v'}{v^2}.$$

Производная композиции двух функций

Теорема 2.3. *Если* $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0*, а* $z = g(y)$ *дифференцируема в точке* y_0*, где* $y_0 = f(x_0)$*, то их композиция* $h(x) = g(f(x))$ *будет дифференцируема в точке* x_0*, причём её производная вычисляется по формуле:*

$$h'(x_0) = f'(x_0)\cdot g'(y_0).$$

Производная обратной функции

Теорема 2.4. *Пусть*

1) $y = f(x)$ *дифференцируема в точке* x_0*, причём её производная* $f'(x_0) \neq 0$*;*

2) $x = g(y)$ *– обратная функция определена в некоторой окрестности точки* y_0*, где* $y_0 = f(x_0)$*;*

3) *обратная функция* $x = g(y)$ *непрерывна в точке* y_0.

Тогда $x = g(y)$ *дифференцируема в точке* y_0 *и её производная вычисляется по формуле*

$$g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Таблица основных производных элементарных функций

1. $(a^x)' = a^x \ln a, \quad (e^x)' = e^x, \quad -\infty < x < +\infty$.

2. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad (\ln x)' = \dfrac{1}{x}, \quad x > 0$.

3. $\left(x^\alpha\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad x > 0$.

4. $\left(\sin x\right)' = \cos x, \quad -\infty < x < +\infty$.

5. $(cosx)' = -\sin x, \quad -\infty < x < +\infty$.

6. $\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$.

7. $\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x} = -\cos ec^2 x, \quad x \neq \pi n,\ n \in Z$.

8. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$

9. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad -1 < x < 1.$

10. $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$.

11. $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < +\infty$.

2.4. Дифференциал и дифференцируемость

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Дифференциалом функции в точке x_0 называется произведение производной функции $f(x)$ в точке x_0 на приращение аргумента в этой точке. Записывают

$$dy = f'(x_0)\Delta x.$$

Геометрическая интерпретация дифференциала

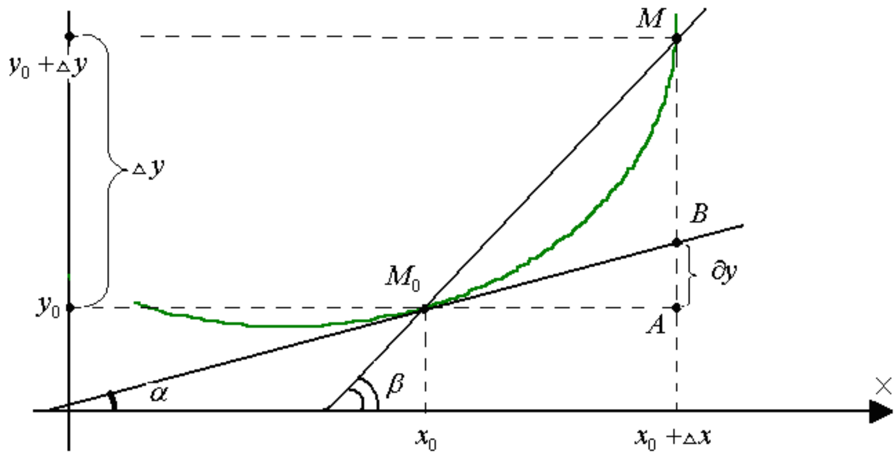


Рисунок 2.8

Через точку $M_0(x_0, y_0)$ на графике функции $y = f(x)$ проведём секущую M_0M и касательную M_0B. Обозначим приращение функции в точке M_0 через $\Delta y = AM$. Покажем, что приращение ординаты касательной при переходе от точки M_0 к точке M равно значению дифференциала dy в точке x_0.

Рассмотрим ΔAM_0B:

$AB = M_0A \cdot tg\alpha$, где α – угол наклона касательной. Учитывая, что $tg\alpha = f'(x_0)$, получим $AB = f'(x_0) \cdot \Delta x = dy$.

Таким образом, *дифференциал функции в точке x_0 численно равен приращению ординаты касательной, когда функция получает приращение Δy при изменении аргумента на Δx.*

Необходимое и достаточное условие дифференцируемости функции

Теорема 2.5. *Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была дифференцируема в точке x_0, необходимо и достаточно, чтобы её приращение Δy можно было представить в следующем виде:*

$$\Delta y = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{2.5}$$

где A *– число, не зависящее от* Δx,

$\alpha(\Delta x)$ *– бесконечно малая величина при* $\Delta x \to 0$.

Доказательство:

I. Необходимость

Пусть $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, тогда существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Обозначим $\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$, тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$ - искомое представление.

II. Достаточность

Пусть Δy представимо в виде (2.5). Покажем, что существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Разделим обе части равенства (2.5) на $\Delta x \neq 0$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x).$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = A + \lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = A$ – конечное число.

Замечание 1. Из доказательства теоремы следует, что число $A = f'(x_0)$, тогда по определению дифференциала можно дать другой смысл, а именно: назовём дифференциалом функции $f(x)$ в точке x_0 линейную часть $f'(x_0) \cdot \Delta x$ приращения Δy.

Тогда

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \tag{2.6}$$

Следствие 1. Если $f(x)$ дифференцируемая в точке x_0 функция и $f'(x_0) \neq 0$, то Δy и dy являются эквивалентными бесконечно малыми функциями при $\Delta x \to 0$.

Доказательство:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x_0)} = 1 + \frac{1}{f'(x_0)} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 1$$

,

$$\Delta y \sim dy.$$

Следствие 2. Если $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то разность $\Delta y - dy$ есть величина бесконечно малая, более высокого порядка по сравнению с Δx.

Доказательство:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y - dy}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x) = 0.$$

Замечание 2. При дальнейшем развитии дифференциального исчисления на функции многих переменных, возможность представления приращения функции в виде суммы линейной части относительно приращений аргументов функции и некоторой бесконечно малой величины принимают за определение дифференцируемости.

Из доказанных следствий легко получить формулу приближенных вычислений. Действительно, при Δx, достаточно малом, можно пренебречь составляющей $\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x$, тогда $\Delta y \approx dy$.

Отсюда:

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x. \qquad (2.7)$$

Инвариантная форма дифференциала

Пусть дана дифференцируемая функция $y = f(x)$. Тогда её дифференциал равен:

$$dy = f'(x)\cdot\Delta x. \qquad (2.8)$$

Допустим, что аргумент x является, в свою очередь, некоторой дифференцируемой функцией переменной t. Обозначим через $\Phi(t)$ композицию функций $y = f(x)$ и $x = \varphi(t)$:

$$y = \Phi(t) = f(\varphi(t)).$$

Тогда функция $\Phi(t)$ дифференцируема и

$$\Phi'(t) = f'(x)\cdot\varphi'(t),$$

$$dy = \Phi'(t)\cdot\Delta t = f'(x)\cdot\left[\varphi'(t)\cdot\Delta t\right].$$

Используя определение дифференциала для функции $x = \varphi(t)$, $dx = \varphi'(t)\cdot\Delta t$, получим

$$dy = f'(x)\cdot dx. \qquad (2.9)$$

Примем следующее соглашение: если переменная x независима, то рассматривать в формуле (2.9) $dx = \Delta x$ как приращение аргумента. Тогда будем называть формулу (2.9) инвариантной формой первого дифференциала.

2.5. Основные теоремы дифференциального исчисления

Ввиду исключительной важности ниже следующих свойств дифференцируемых функций, они получили название основных теорем дифференциального исчисления. Во всех теоремах используется одно и то же требование непрерывности функции на сегменте $[a,b]$ и дифференцируемости на интервале (a,b). Возникает вопрос: поскольку дифференцируемая функция необходимо непрерывна, то не проще ли оставить одно требование дифференцируемости на $[a,b]$? Особое внимание к точкам a и b никак не связано с доказательством теорем, а лишь вызвано стремлением расширить класс допустимых функций и в том случае, когда на концах сегмента $[a,b]$ график функции имеет вертикальные касательные, например, как у полуокружности.

Теорема 2.6 (Роля). *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *дифференцируема в* (a,b) *и на концах сегмента принимает одинаковые значения* $f(a)=f(b)$. *Тогда существует точка* $c\in(a,b)$, *такая, что* $f'(c)=0$.

Дадим геометрическую интерпретацию этой теоремы:

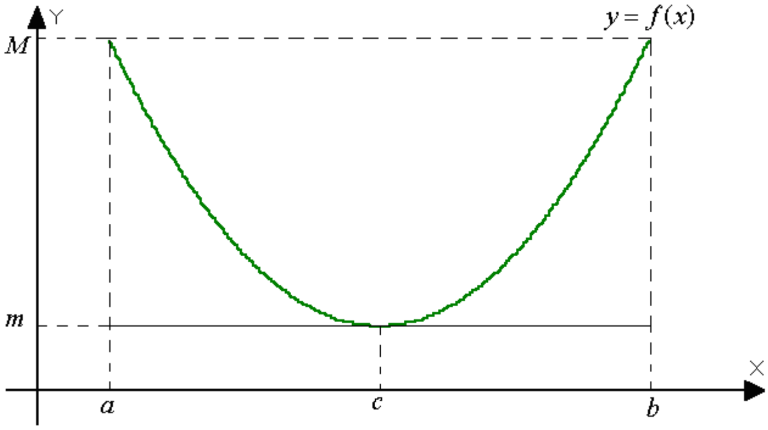


Рисунок 2.9

Теорема утверждает, что существует точка на графике $y=f(x)$, в которой касательная параллельна оси OX.

Доказательство теоремы:

Так как функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она достигает на нём свои наименьшее (m) и наибольшее (M) значения. Рассмотрим два случая:

1) $m=M$.

В этом случае очевидно, что функция $f(x)=const$ и $f'(x)=0$ для всех точек (a,b).

2) $m\neq M$.

Так как по условию $f(a)=f(b)$, то функция принимает наименьшее или наибольшее значение только во внутренних точках

(a,b). Пусть в точке $c \in (a,b)$ $f(c) = m$. Поскольку $f(x)$ дифференцируема на (a,b), то она имеет конечную производную в точке c. Но тогда существуют левая и правая производные в этой точке, равные между собой и значению $f'(c)$.

$$f'_+(c) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(c+\Delta x) - m}{\Delta x},$$

$$f(c+\Delta x) \geq m \Rightarrow f(c+\Delta x) - m \geq 0, \quad \Delta x > 0,$$

следовательно,

$$\frac{f(c+\Delta x) - m}{\Delta x} \geq 0.$$

Из свойств пределов следует, что $f'_+(c) \geq 0$. Рассуждая аналогично, делаем вывод, что $f'_-(c) \leq 0$. Но $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c)$. С другой стороны, $f'_-(c) \leq 0$, $f'_+(c) \geq 0$, т.е. имеем одновременно $f'(c) \leq 0$, $f'(c) \geq 0$. Отсюда следует, что $f'(c) = 0$.

В случае, когда $f(c) = M$, доказательство аналогично.

Теорема доказана.

Теорема 2.7 (Лагранжа). *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема в* (a,b), *то найдётся точка* $c \in (a,b)$ *в которой*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}. \qquad (2.10)$$

Дадим геометрическую интерпретацию теоремы:

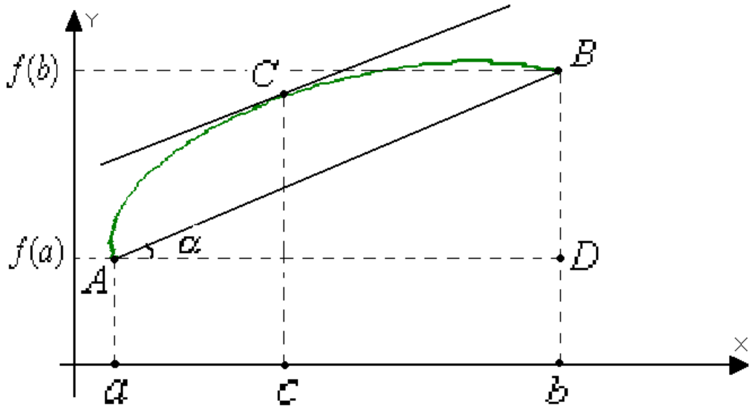


Рисунок 2.10

Рассмотрим ΔABD: $AD = b - a, \quad BD = f(b) - f(a)$,

$$tg\alpha = \frac{BD}{AD} = \frac{f(b) - f(a)}{b-a}.$$

Теорема Лагранжа утверждает, что на графике функции $y = f(x)$ найдётся точка C, такая, что касательная в ней имеет угловой коэффициент

$$f'(c) = tg\alpha = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

и будет параллельна секущей AB.

Доказательство теоремы:

Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

Проверим для этой функции выполнимость условий теоремы Ролля:

1) $\varphi(x)$ непрерывна как разность непрерывных функций на $[a,b]$;

2) $\varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, т. е. $\varphi(x)$ дифференцируема на (a,b);

3) $\varphi(a) = 0 = \varphi(b)$.

Тогда существует точка $c \in (a,b)$, такая, что $\varphi'(c) = 0$.

Но $\varphi'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$, тогда

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Что и требовалось доказать.

Часто формулу (2.10) используют в виде

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a). \qquad (2.11)$$

Формула (2.11) носит название формулы конечных приращений, а теорему Лагранжа называют теоремой о среднем. Очевидно, теорема Ролля является частным случаем теоремы Лагранжа. Обобщением теоремы Лагранжа служит следующая теорема.

Теорема 2.8 (Коши). *Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$ и дифференцируемы в (a,b), причём $g'(x) \neq 0$ в интервале (a,b), то существует точка $c \in (a,b)$, такая, что*

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Теорема доказывается аналогично теореме Лагранжа. Для этого достаточно рассмотреть вспомогательную функцию

$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a))$$

и затем повторить алгоритм предыдущей теоремы.

2.6. Применение производной к исследованию функций на экстремум, монотонность, выпуклость

Теорема 2.9 (Условие постоянства функции). *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема в* (a,b). *Функция* $f(x)$ *постоянна на* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* $f'(x) = 0$ *для всех* $x \in (a,b)$.

Доказательство:

Необходимость легко следует из того, что если $f(x) = C - const$, то $f'(x) = 0$.

Докажем достаточность равенства $f'(x) = 0$.

Пусть x – произвольная точка из $(a,b]$. Рассмотрим $f(x)$ на $[a,x]$. Для неё выполняются все условия теоремы Лагранжа:

1) $f(x)$ непрерывна на $[a,x]$;

2) $f(x)$ дифференцируема в (a,x).

Тогда существует точка $c \in (a,x)$, такая, что

$$f'(c) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \Rightarrow f(x) - f(a) = f'(c)(x - a) = 0,$$

т.е. $f(x) = f(a)$, следовательно, $f(x)$ постоянна.

Теорема 2.10 (Необходимое и достаточное условие монотонности). *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема в* (a,b). $f(x)$ *не убывает на* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* $f'(x) \geq 0$ *на* (a,b).

Доказательство:

I. Необходимость

Дано: $f(x)$ не убывает на

$[a,b] \Leftrightarrow \underset{x_1,\, x_2 \in [a,b]}{\forall\, x_1,\, x_2} \quad (x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2))$.

Доказать: $\underset{x \in (a,b)}{\forall x} \,(f'(x) \geq 0)$.

Так как $f(x)$ дифференцируема в (a,b), то существует конечная производная

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

а) Пусть $\Delta x>0$, тогда

$$x<x+\Delta x\Rightarrow f(x)\le f(x+\Delta x)\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\ge 0.$$

б) Пусть $\Delta x<0$, тогда

$$x+\Delta x<x\Rightarrow f(x)\ge f(x+\Delta x)\Rightarrow f(x+\Delta x)-f(x)\le 0.$$

В обоих случаях

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\ge 0\Rightarrow f'(x)\ge 0.$$

II. Достаточность

Дано: $\underset{x\in(a,b)}{\forall x}\ (f'(x)\ge 0)$.

Доказать: $f(x)$ не убывает, т. е. $\underset{x_1,\,x_2\in[a,b]}{\forall\ x_1<x_2}\quad (f(x_1)\le f(x_2))$.

Пусть $x_1,\,x_2\in[a,b]$ и $x_1<x_2$. Рассмотрим $f(x)$ на $[x_1,x_2]\subset[a,b]$. Очевидно, что $f(x)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(x)$ непрерывна на $[x_1,x_2]$;

2) $f(x)$ дифференцируема в любой точке (x_1,x_2).

По теореме Лагранжа, найдётся точка $c\in(x_1,x_2)$, такая, что

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(c)(x_2-x_1),$$

$f'(c)\ge 0,\quad x_2-x_1>0$, тогда $f(x_2)-f(x_1)\ge 0\Rightarrow f(x_1)\le f(x_2)$.

Теорема доказана.

Теорема 2.11. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема на* (a,b). $f(x)$ *не возрастает на* $[a,b]$ *тогда и только тогда, когда* $f'(x)\le 0$ *для всех* $x\in(a,b)$.

Достаточные условия монотонности

Теорема 2.12. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема в* (a,b). *Если* $f'(x)>0$ *для всех* $x\in(a,b)$, *то* $f(x)$ *возрастает на* $[a,b]$.

Теорема 2.13. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *и дифференцируема в* (a,b). *Если* $f'(x)<0$ *для всех* $x\in(a,b)$, *то* $f(x)$ *убывает на* $[a,b]$.

Замечание. Утверждения обратные теоремам 4 и 5 неверны.

Пример. $f(x)=x^3,\quad x\in[-1,1]$.

1) $f(x)$ непрерывна на $[-1,1]$;

2) $f(x)$ дифференцируема в $(-1,1)$, $f'(x)=3x^2$;

3) $f(x)=x^3$ возрастает на всём $[-1,1]$, но $f'(0)=0$.

Экстремумы функции

Пусть функция $f(x)$ определена на некотором множестве E.

Определение 2.3. Точка $x_0 \in E$ называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0 в которой справедливо неравенство $f(x) \le f(x_0)$.

$$\{x_0 - \textit{точка максимума } f(x)\} \Leftrightarrow \underset{\delta>0}{\exists\delta}\ \underset{x\in E}{\forall x}\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \le f(x_0)).$$

Определение 2.4. Точка $x_0 \in E$ называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если существует окрестность точки x_0, в которой справедливо неравенство $f(x_0) \le f(x)$.

$$\{x_0 - \textit{точка минимума } f(x)\} \Leftrightarrow \underset{\delta>0}{\exists\delta}\ \underset{x\in E}{\forall x}\ (|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) \ge f(x_0)).$$

Определение 2.5. Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*, а в точке минимума – *минимумом функции*. Обозначают: $f_{\max}$, $f_{\min}$ или $y_{\max}$, $y_{\min}$.

Максимум и минимум функции называют её *экстремумами*.

Необходимые условия экстремума

Определение 2.6. Точка x_0 называется *критической точкой* функции $f(x)$, если в этой точке производная равна нулю, или конечной производной не существует.

(Часто точку, в которой производная только равна нулю, называют *стационарной*).

Теорема 2.14. *Если* x_0 *– точка экстремума функции* $f(x)$*, то* x_0 *– критическая точка функции* $f(x)$.

Доказательство:

Пусть x_0 – точка минимума функции $f(x)$. Если $f'(x_0)$ не существует или бесконечна, то теорема очевидна. Допустим $f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда существуют односторонние конечные производные

$$f'_-(x_0) = f'_+(x_0) = f'(x_0).$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad \Delta x > 0,$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0 \quad (x_0 - \textit{точка}\ \min).$$

Следовательно, $f'_+(x_0) \le 0$. Очевидно,

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0.$$

Таким образом, $f'(x_0) \le 0$ и $f'(x_0) \ge 0$. Такое возможно только в случае $f'(x_0) = 0$. Подобным образом доказывается и случай, когда x_0 – точка максимума.

Формулировка теоремы 1 несколько отличается от так называемой теоремы Ферма: *Пусть функция* $f(x)$ *определена в некоторой окрестности точки* x_0 *и дифференцируема в этой точке. Тогда, если функция* $f(x)$ *имеет в точке* x_0 *локальный экстремум, то* $f'(x_0) = 0$.

Графически это означает, что касательная в точке x_0 горизонтальна. В этой теореме речь идёт о гладком экстремуме. Если производная не существует или равна ∞, то возможен экстремум, который называют острым.

Примеры приведены на рисунках 2.11-2.14.

1. $f'(x_0) = 0$, x_0 – точка гладкого минимума.

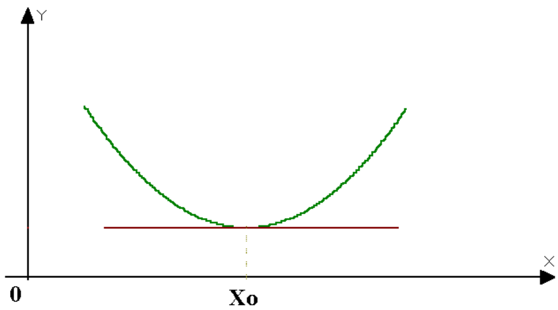


Рисунок 2.11

2. $f'(x_0) = 0$, x_0 - точка гладкого максимума.

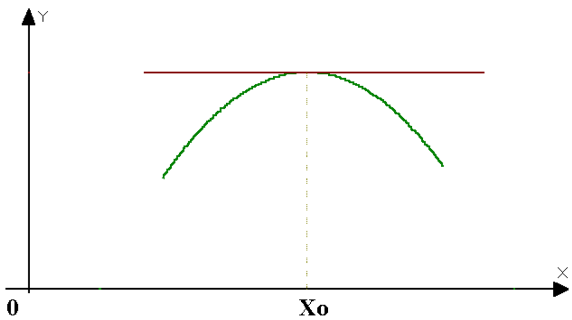


Рисунок 2.12

3. $f'(x_0)$ – не существует, x_0 – точка острого минимума.

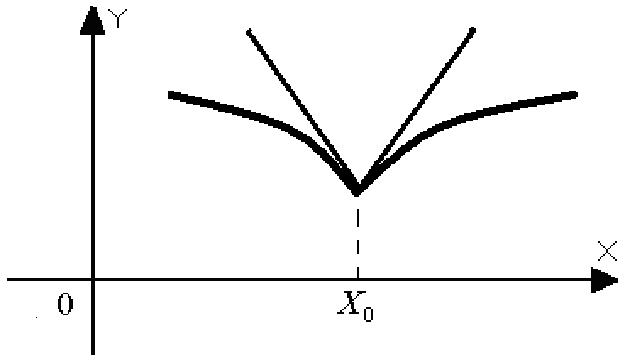


Рисунок 2.13

4. $f'(x_0)=\infty$, x_0 – точка острого максимума.

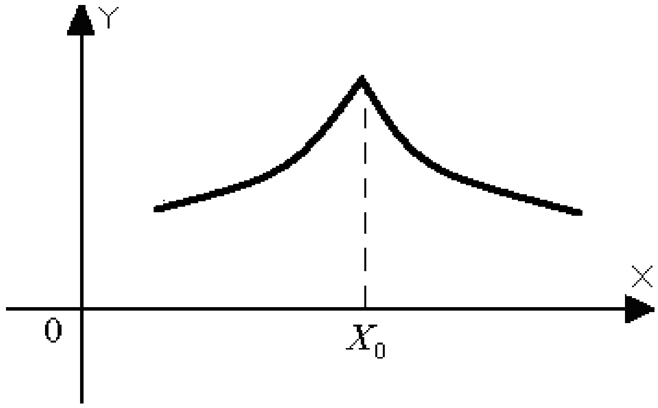


Рисунок 2.14

Замечание: утверждение, обратное теореме 1, неверно.

Пример.

1. $f(x)=x^3$,

$f'(x)=3x^2$,

$f'(x)=0$, $x_0=0$ – критическая точка, но не является точкой экстремума.

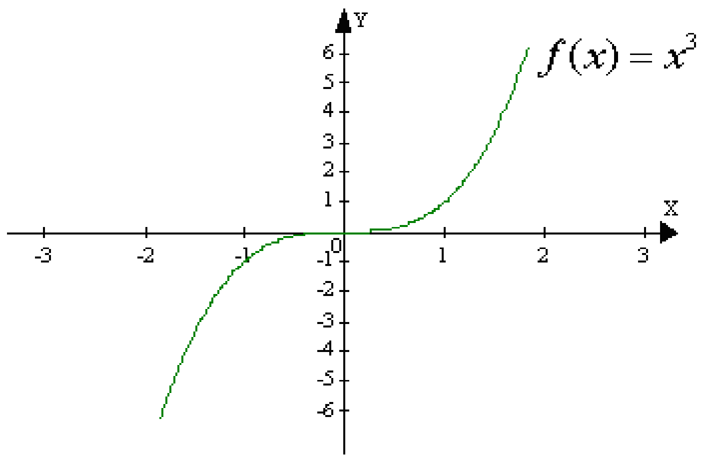


Рисунок 2.15

2. $f(x)=\sqrt[3]{x}$,

$f'(x)=\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$, $f'(0)=+\infty$, $x_0=0$ – критическая точка, но не точка экстремума.

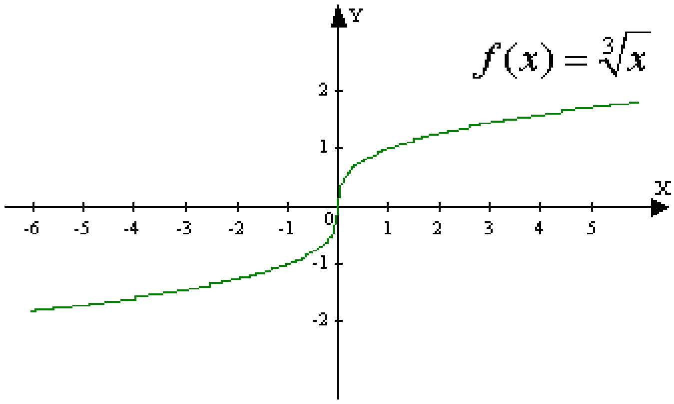
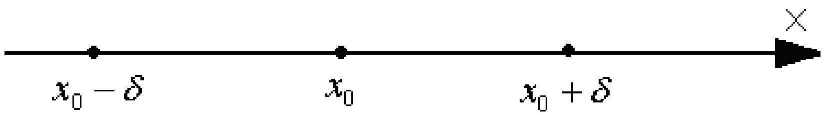


Рисунок 2.16

Достаточные условия экстремума

Теорема 2.15. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, *дифференцируема в интервале* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *и точка* x_0 *критическая. Если* $f'(x)>0$ *в интервале* $(x_0-\delta, x_0)$ *и* $f'(x)<0$ *в* $(x_0, x_0+\delta)$, *то* x_0 *– точка максимума функции* $f(x)$.

Доказательство:



Из условия монотонности функции и того, что $f'(x)>0$ в интервале $(x_0-\delta, x_0)$, следует, что $f(x)$ возрастает в $(x_0-\delta, x_0)$. Аналогично заключаем, что $f(x)$ убывает в $(x_0, x_0+\delta)$. Требуется доказать, что в точке x_0 функция имеет максимум, т.е. $\underset{x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)}{\forall x}\ (f(x)\le f(x_0))$.

Пусть $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Возможны три случая:

а) $x\in(x_0-\delta, x_0)\Rightarrow x<x_0\Rightarrow f(x)<f(x_0)$;

б) $x\in(x_0, x_0+\delta)\Rightarrow x_0<x\Rightarrow f(x)<f(x_0)$;

в) $x=x_0\Rightarrow f(x)=f(x_0)$.

Что и требовалось доказать.

Теорема 2.16. *Пусть* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[x_0-\delta, x_0+\delta]$, *дифференцируема на* $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ *и* x_0 *– критическая точка. Тогда, если* $f'(x)<0$ *в интервале* $(x_0-\delta, x_0)$ *и* $f'(x)>0$ *в* $(x_0, x_0+\delta)$, *то* x_0 *– точка минимума функции* $f(x)$.

Доказательство аналогично теореме 2.

Правило. Чтобы найти точки экстремума функции $f(x)$, надо найти все её критические точки. Если при переходе через критическую точку производная меняет знак с "+" на "-", то это точка максимума, если с "-" на "+", то точка минимума функции $f(x)$. Если знак производной не меняется, то критическая точка не является точкой экстремума.

Пример.

$f(x)=\sqrt[3]{(x-3)(x-6)^2}$.

Требуется исследовать функцию на экстремум и построить эскиз графика.

$$f'(x)=\frac{x-4}{\sqrt[3]{(x-3)^2(x-6)}}.$$

Видно, что $x=3,\quad x=4,\quad x=6$ – критические точки. Применим описанное выше правило. С этой целью, результаты исследований приведём в таблице.

Таблица 2.1

x	$(-\infty;3)$	3	$(3;4)$	4	$(4;6)$	6	$(6;+\infty)$
y'	+	$+\infty$	+	0	-	∞	+
y	возраст.	0	возраст.	$\sqrt[3]{4}$	убыв.	0	возраст.
		нет экстр.		гладкий максимум		острый минимум	

$f'_-(6)=-\infty,\quad f'_+(6)=+\infty \Rightarrow\ x=6$ – точка острого минимума.

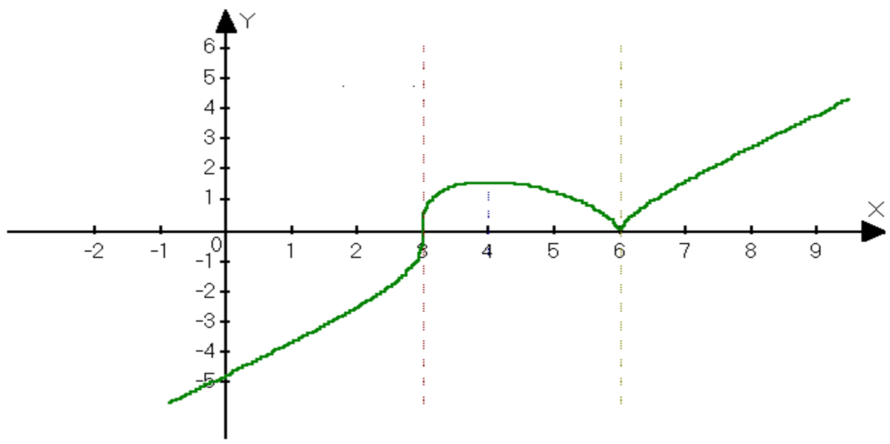


Рисунок 2.17

Исследование на экстремум можно проводить и с помощью второй производной и вообще с помощью производной любого порядка.

Теорема 2.17. *Пусть* $f(x)$ *имеет непрерывную вторую производную* $f''(x)$ *в некоторой окрестности точки* x_0. *Если* $f'(x_0)=0$, *но*

$f''(x_0) \neq 0$*, то точка* x_0 *– точка экстремума, причём если* $f''(x_0) > 0$*, то точка минимума, если* $f''(x_0) < 0$*, то точка максимума.*

Пример.

$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 60$,

$f'(x) = 12x^3 - 12x^2 - 72x = 12x(x^2 - x - 6)$,

критические точки: $x = -2, \quad x = 0, \quad x = 3$.

$f''(x) = 12(3x^2 - 2x - 6)$,

$f''(0) = -72 < 0 \Rightarrow x = 0$ – точка максимума,

$f''(-2) = 120 > 0 \Rightarrow x = -2$ – точка минимума,

$f''(3) = 180 > 0 \Rightarrow x = 3$ – точка минимума.

Теорема 2.18. *Пусть* $f(x)$ *имеет непрерывные производные до* n*-го порядка включительно. Если* $f'(x_0) = f''(x_0) = \ldots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$*, а* $f^{(n)}(x_0) \neq 0$*, то тогда:*

а) если n *– нечётное число, то* x_0 *не является точкой экстремума;*

б) если n *– чётное, то* x_0 *– точка экстремума, причём если* $f^{(n)}(x_0) > 0$*, то точка минимума, если* $f^{(n)}(x_0) < 0$*, то точка максимума.*

Проиллюстрируем графически утверждение теоремы 4 для случая $n = 3$ и $n = 4$.

1) $n = 3, \quad f'(x_0) = f''(x_0) = 0, \quad f'''(x_0) > 0$.

$f'''(x) > 0 \Rightarrow f''(x)$ возрастает, $f''(x_0) = 0$.

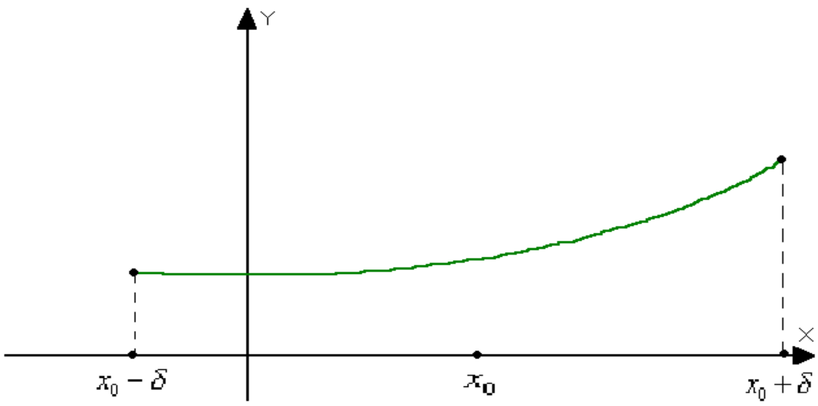


Рисунок 2.18

$f''(x) < 0$ в $(x_0 - \delta, x_0)$, $f''(x) > 0$ в $(x_0, x_0 + \delta)$, $f''(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ – точка минимума $f'(x)$. Но $f'(x_0) = 0$, следовательно, $f'(x) > 0$ в $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, а значит, $f(x)$ не имеет экстремума.

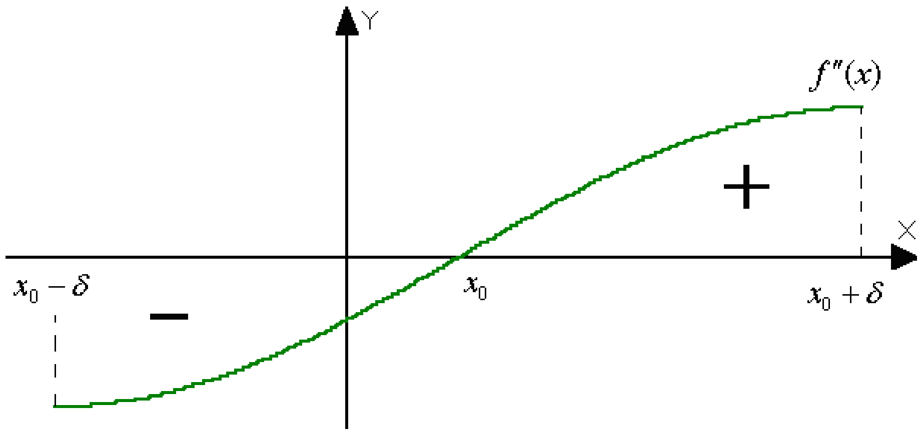


Рисунок 2.19

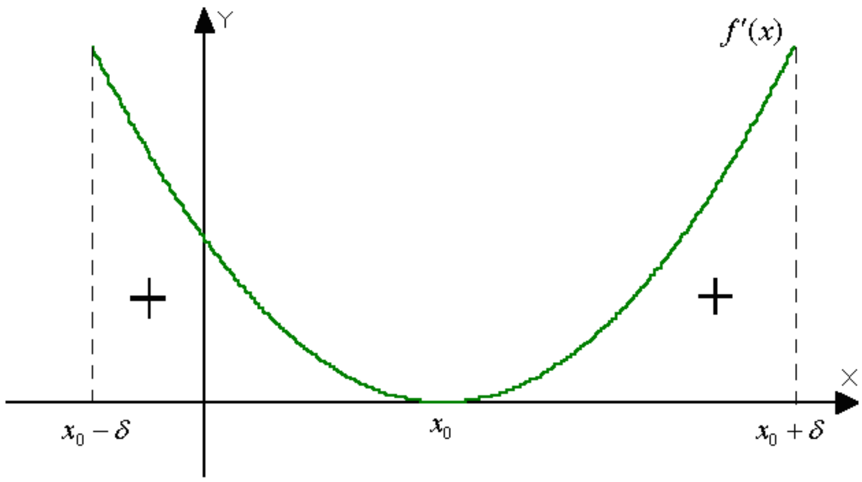


Рисунок 2.20

$f(x)$, x_0 не точка экстремума.

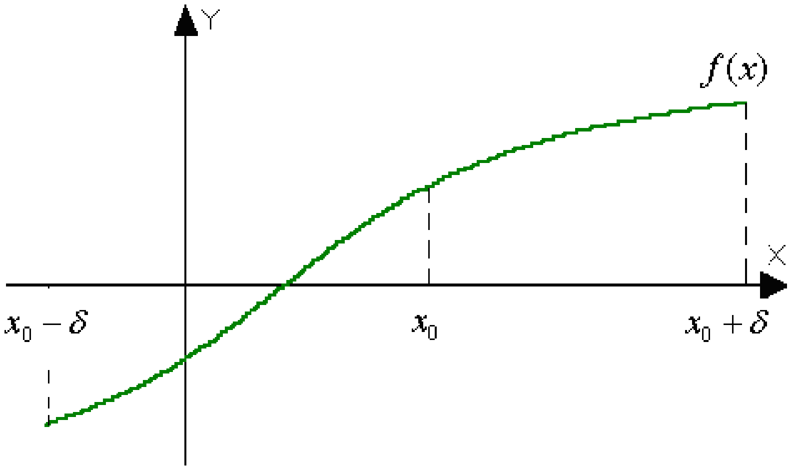


Рисунок 2.21

2) $n=4$, $\quad f'(x_0)=f''(x_0)=f'''(x_0)=0$, $\quad f^{(4)}(x_0)<0$.

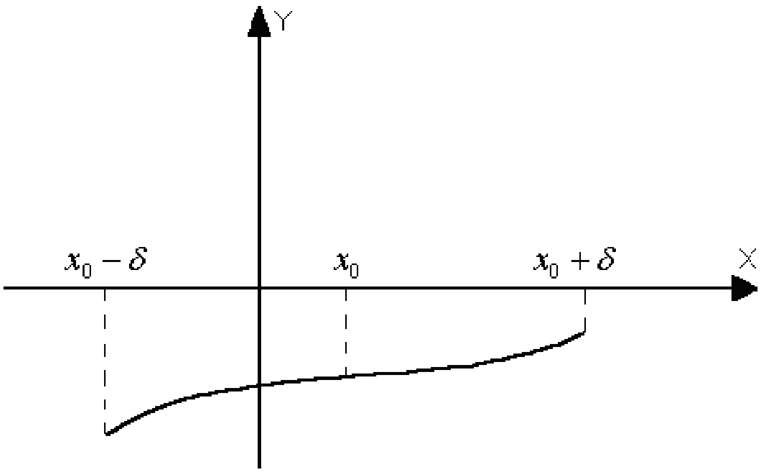


Рисунок 2.21

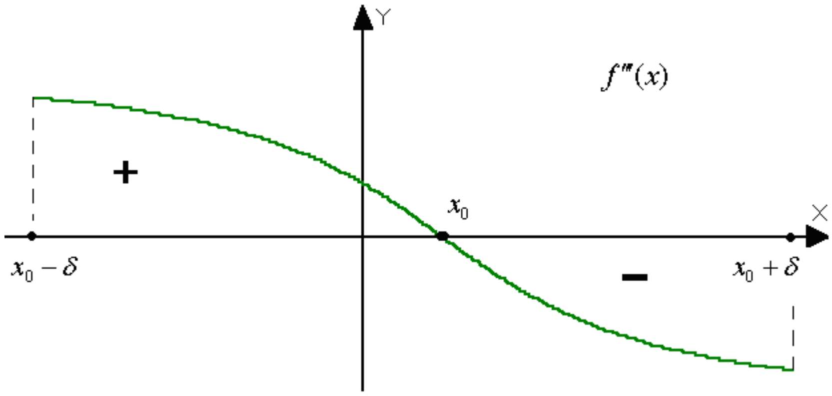


Рисунок 2.22

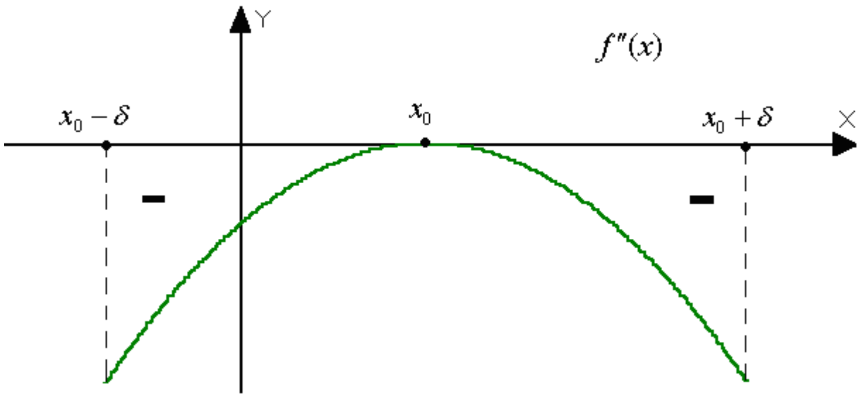


Рисунок 2.23

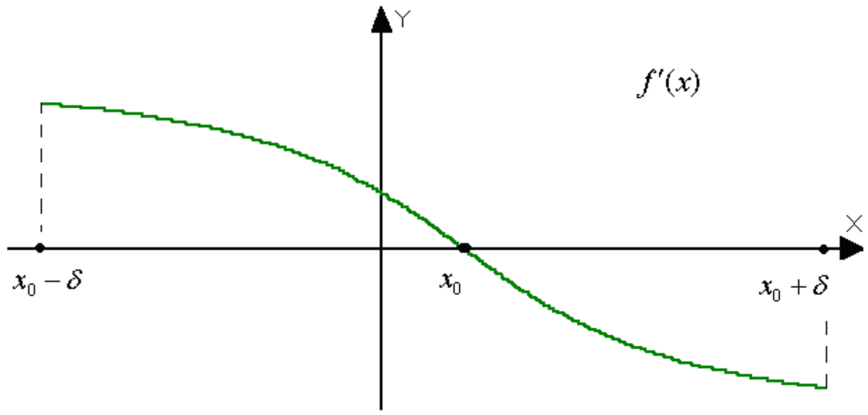


Рисунок 2.24

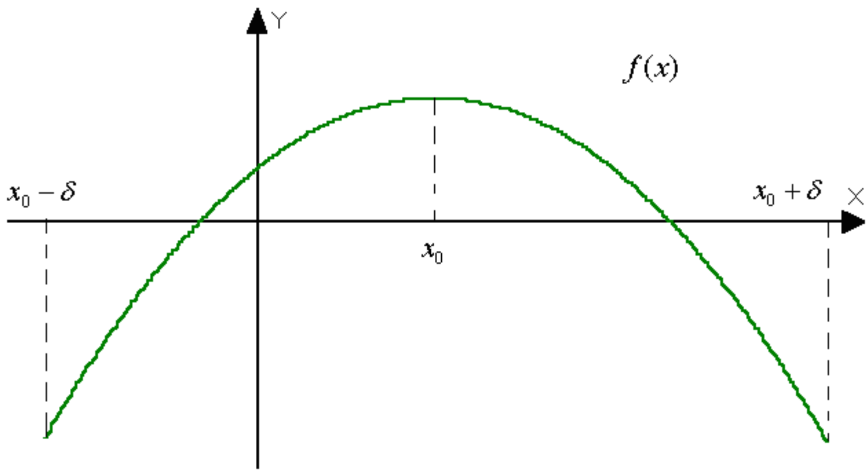


Рисунок 2.25

$f(x)$, x_0 – точка максимума.

Задачи на нахождение наибольшего и наименьшего значения функции

Пусть $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, тогда $f(x)$ принимает на $[a,b]$ наибольшее и наименьшее значения. При этом наибольшее значение принимается либо в точке максимума функции $f(x)$, либо на концах сегмента $[a,b]$. Наименьшее значение может приниматься либо в точке минимума функции $f(x)$, либо также на концах сегмента. По необходимому условию каждая точка экстремума является критической. Отсюда *способ нахождения наибольшего и наименьшего значения функции на сегменте*: находят все критические точки функции, лежащие внутри $[a,b]$, вычисляют в них значения функции и сравнивают их со значениями на концах сегмента.

Если $f(x)$ непрерывна на (a,b), то она может и не иметь на нём наибольшего и наименьшего значения. Однако если функция имеет наибольшее или наименьшее значение в (a,b), то их можно найти, сравнивая значения функции в критических точках и пределы функции на концах интервала.

Выпуклость и вогнутость функции

Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на графике функции $y = f(x)$.

Определение 2.7. Говорят, что $f(x)$ в точке x_0 *выпукла (выпукла вверх)*, если график функции в точке M_0 имеет касательную и в некоторой окрестности точки x_0 график функции лежит ниже касательной.

Определение 2.8. Говорят, что $f(x)$ в точке x_0 *вогнута (выпукла вниз)*, если в точке M_0 есть касательная к графику функции $f(x)$ и в некоторой окрестности точки x_0 график лежит выше касательной.

Определение 2.9. Функция называется *выпуклой (вогнутой)* на интервале, если она выпукла (вогнута) в каждой точке этого интервала.

Условия выпуклости определяются следующими теоремами.

Теорема 5. *Если $f''(x) > 0$ в некоторой окрестности точки x_0, то функция $f(x)$ вогнута в точке x_0.*

Теорема 6. *Если $f''(x) < 0$ в некоторой окрестности точки x_0, то функция $f(x)$ выпукла в точке x_0.*

Определение 2.10. Если $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и точка x_0 отделяет интервал выпуклости от интервала вогнутости функции $f(x)$, то точка x_0 называется *точкой перегиба* графика функции $f(x)$.

Определение 2.11. Точка x_0 называется *критический на перегиб*, если $f''(x_0) = 0$ или в этой точке второй непрерывной производной не существует.

Теорема 2.19 (Необходимое условие для точек перегиба). *Если x_0 точка перегиба функции $f(x)$, то она критическая на перегиб.*

Правило нахождения точек перегиба. Чтобы найти точки перегиба функции $f(x)$, надо найти все точки, критические на перегиб. Затем проверить, меняет ли свой знак вторая производная при переходе через критическую точку. Если знак $f''(x)$ меняется, то данная точка есть точка перегиба. Если знак $f''(x)$ остаётся неизменным, то перегиба нет.

Общая схема исследования функции и построения графика

1. Находим область определения функции и исследуем поведение функции на границе области определения.

2. Исследуем функцию на непрерывность, чётность, нечётность, периодичность. Если функция чётная, то её график симметричен относительно оси ординат. Если функция нечётная, то её график симметричен относительно начала координат. В этом случае достаточно исследовать функцию при $x \geq 0$. Если $f(x)$ периодическая, то достаточно провести исследование на отрезке $[0,T]$, где T – период функции.

3. Находим вертикальные и невертикальные асимптоты.

4. Находим точки пересечения графика с осями координат и интервалы знакопостоянства функции.

5. С помощью первой производной исследуем функцию на монотонность и экстремум.

6. Исследуем функцию на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.

7. Построение эскиза графика.

Пример.

$$f(x) = \frac{x^3}{2(x+1)^2}.$$

1) $D(f) = (-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$.

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x^3}{2x^2(1+\frac{1}{x})^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = +\infty,$$

$$\lim_{x\to-1-0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty,$$

$$\lim_{x\to-1+0} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty.$$

2) Функция имеет разрыв в точке $x = -1$ второго рода. Поскольку $f(-x) = \dfrac{-x^3}{2(-x+1)^2}$, то $f(x)$ не обладает свойством чётности или нечётности. Очевидно, $f(x)$ не периодическая.

3) Функция не имеет горизонтальных асимптот, но имеет вертикальную асимптоту $x = -1$.

Найдём наклонную асимптоту в виде $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{2x(x+1)^2} = \frac{1}{2},$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right] = \lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{x}{2}\right] = -1.$$

Таким образом, $y = \frac{1}{2}x - 1$ – наклонная асимптота.

4) Точка $O(0,0)$ – единственная точка пересечения графика с осями координат. Промежутки знакопостоянства запишем в виде таблицы 2.2.

Таблица 2.2

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y	-	-	0	+

5) $f'(x) = \dfrac{3x^2(x+1) - 2x^3}{2(x+1)^3} = \dfrac{x^2(x+3)}{2(x+1)^3}$,

$x = 0,\quad x = -3$ – критические точки, $x = -1 \notin D(f)$.

Исследуем знак производной и результаты занесём в таблицу 2.3.

Таблица 2.3

x	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	+	0	-	+	0	+
y	возрастает	$-3\frac{3}{8}$	убывает	возрастает	0	возрастает
		max			нет экстремума	

6) $f''(x) = \dfrac{(3x^2 + 6x)(x+1)^3 - (x^3 + 3x^2)\cdot 3\cdot(x+1)^2}{2(x+1)^6} = \dfrac{3x}{(x+1)^4}$.

$x = 0$ – критическая точка на перегиб, $x = -1 \notin D(f)$.

Таблица 2.4

x	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	-	-	0	+
y	выпуклая	выпуклая	0	вогнутая
			точка перегиба	

7) Используя свойства функции и характерные точки, строим эскиз графика.

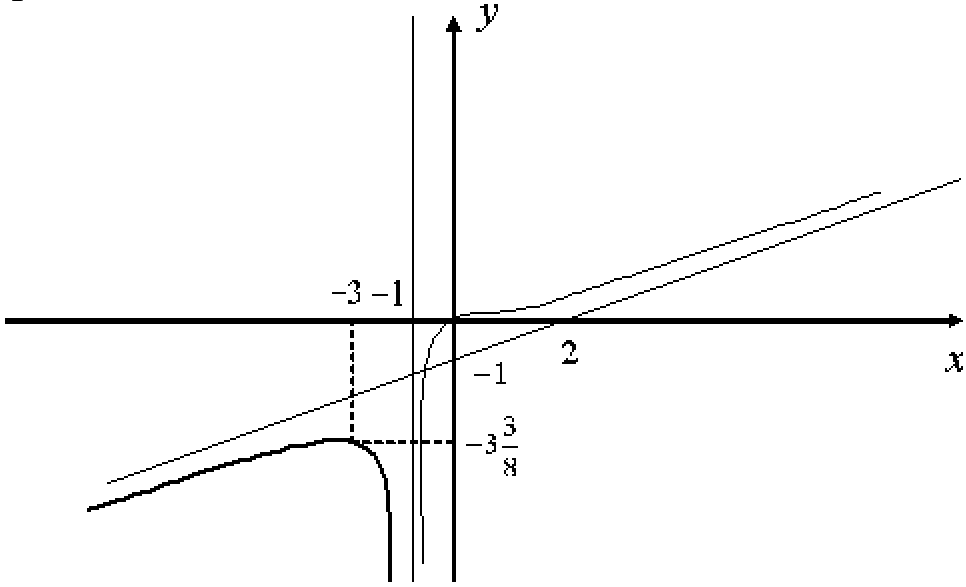


Рисунок 2.27

Вопросы и задания для самоконтроля по разделу «Дифференциальное исчисление»

1. Используя определение производной функции в точке x_0, найдите производные функций:

а) $f(x)=\sqrt[3]{x}$; б) $f(x)=\dfrac{1}{x^2+2}$; в) $f(x)=arctgx$, г) $f(x)=\sin x$.

2. Докажите, что функция $f(x)$ имеет производную в точке $x_0=0$.

а) $f(x)=\begin{cases} x^3, & x<0; \\ x^2, & x\ge 0. \end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x\ne 0; \\ 0, & x=0. \end{cases}$

в) $f(x)=\begin{cases} x^2, & x - \textit{рациональное};\\ -x^2, & x - \textit{иррациональное}.\end{cases}$

3. Определите значения α и β, при которых функция

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta, & \textit{если} \quad x<0;\\ \alpha\cos x+\beta\sin x, & \textit{если} \quad x\ge 0,\end{cases}$$

дифференцируема в любой точке области определения.

4. Постройте две функции f и g, каждая из которых не имеет производной в точке x_0, а их сумма $f+g$ имеет производную в этой точке.

5. Постройте две функции f и g, каждая из которых имеет производную в точке x_0, а частное f/g не имеет производной в этой точке.

6. Опровергните утверждение: «Если функции f и g не имеют производной в точке x_0, то их частное f/g не имеет производной в этой точке».

7. Верно ли утверждение: «Если $f(x)$ не имеет производной в точке x_0, то $f^3(x)$ также не имеет производной в этой точке»?

8. Пусть $f(x)$ дифференцируема на некотором промежутке X. Что можно сказать о дифференцируемости функции $\sqrt{f^2}$ на этом промежутке?

9. Докажите, что если: а) $f(x)=f(-x)$ и $f(x)$ дифференцируема, то $f'(x)=-f'(x)$; б) $f(x)=-f(-x)$ и $f(x)$ дифференцируема, то $f'(x)=f'(-x)$; в) $f(x+T)=f(x)$ и $f(x)$ дифференцируема, то $f'(x+T)=f'(x)$.

10. Какое из соотношений может выполняться для чётной, всюду дифференцируемой, функции: а) $f'(0)>0$; б) $f'(0)<0$; в) $f'(0)=0$?

11. Постройте дифференцируемую на (a,b) функцию f, обладающую свойством $f(a)=f(b)$ и не имеющую стационарной точки в интервале (a,b).

12. Пусть f и g непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы в (a,b), $f(a)=g(a)$ и $f'(x)>g'(x)$. Доказать, что $f(x)>g(x)$ для любого $x\in(a,b)$.

13. Пусть $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$. Докажите, что корни производной $f'(x)$ действительные, простые и лежат в интервалах $(0;1)$, $(1;2)$, $(2;3)$, $(3;4)$. Докажите общее утверждение о том, что между двумя действительными корнями многочлена с действительными коэффициентами имеется корень его производной.

14. а) Докажите, что уравнение $3x^4-20x^3+12x^2-96x-69=0$ не имеет кратных корней.

б) Сколько действительных корней имеет уравнение

$$12x^4-14x^3-3x^2-\frac{1}{64}=0?$$

в) Какова общая идея в решении задач а) и б)? Какие рекомендации были бы полезны, на Ваш взгляд, для учащихся, которые не видят этой цели?

15. Решите неравенство: $2x^9-x^5+x>2$.

16. Доказать тождество:

а) $2arctgx+\arcsin\dfrac{2x}{1+x^2}=\pi,\quad x\ge 1,$

б) $1-(\sin^6 x+\cos^6 x)=3\sin^2 x\cdot\cos^2 x.$

Предположим, что учащиеся не могут самостоятельно найти метод доказательства тождеств а) и б). Сформулируйте вопросы, которые, по Вашему мнению, помогли бы учащимся выйти из затруднительной ситуации.

17. Можно ли утверждать, что если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет максимум, то в некоторой достаточно малой окрестности этой точки слева от точки x_0 функция $f(x)$ возрастает, а справа от неё убывает? Указание: рассмотрите пример функции

$$f(x)=\begin{cases}2-x^2(2+\sin\frac{1}{x}), & x\ne 0;\\ 2, & x=0.\end{cases}$$

18. Докажите, что кривая $y=x^4+3x^2+2x$ не пересекается с прямой $y=2x-1$ и найдите расстояние между их ближайшими точками.

19. При каких действительных значениях a и b все экстремумы функции $f(x)=a^2x^3-0{,}5ax^2-2x-b$ положительны и минимум находится в точке $x_0=\dfrac{1}{3}$?

20. В зависимости от p укажите те значения a, для которых уравнение $x^3 + 2px + p = a$ имеет три различных действительных корня.

21. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$f(x) = \left|x^2 - 3x + 2\right| \text{ на сегменте } [-10,10].$$

22. Постройте графики функций:

а) $f(x) = x + \dfrac{\ln x}{x}$;

б) $f(x) = \dfrac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}$;

в) $f(x) = \dfrac{x^2}{2} - \ln x$.

РАЗДЕЛ 3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Первообразная и неопределённый интеграл

Определение 3.1. Функция $F(x)$ называется *первообразной* для функции $f(x)$, если $f(x)$ является производной функции $F(x)$, т. е.

$$F'(x) = f(x).$$

Операция нахождения первообразной называется *интегрированием* и является обратной по отношению к дифференцированию. Интегрирование неоднозначно определяет первообразную.

Теорема 3.1. *Пусть* $F(x)$ *первообразная для* $f(x)$ *и* $\Phi(x) = F(x) + C$. *Тогда* $\Phi(x)$ *также первообразная для* $f(x)$.

Теорема 3.2. *Пусть* $F(x)$ *первообразная для* $f(x)$, *тогда любая другая первообразная* $\Phi(x)$ *функции* $f(x)$ *имеет вид:* $\Phi(x) = F(x) + C$.

Доказательство:

По условию $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = f(x)$. Тогда

$$(\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0.$$

Из определения первообразной следует, что $F(x)$ и $\Phi(x)$ непрерывны, а тогда из условия постоянства функции следует, что

$$\Phi(x) - F(x) = C \text{ или } \Phi(x) = F(x) + C.$$

Определение 3.2. Семейство всех первообразных функции $f(x)$ называется её *неопределённым интегралом* и обозначается

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Отметим очевидные **свойства неопределённого интеграла**:

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$.

2. $\int f'(x)dx = f(x) + C$.

Геометрическая интерпретация первообразной

Пусть на сегменте $[a,b]$ определена положительная непрерывная функция $y = f(x)$.

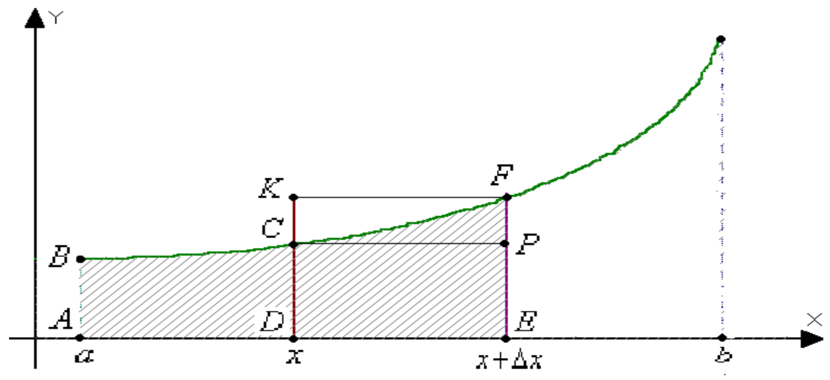


Рисунок 3.1

Пусть x – произвольная точка на $(a;b)$. Рассмотрим криволинейную трапецию $ABCD$. Площадь этой трапеции зависит от x, обозначим её $S(x)$. Покажем, что $S(x)$ – первообразная для $f(x)$, т.е. $S'(x) = f(x)$.

$$S(x+\Delta x) = S_{ABFE};\ \Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) = S_{DCFE}.$$

Обозначим через $m(\Delta x)$ наименьшее значение $f(x)$ на $[x, x+\Delta x]$, $M(\Delta x)$ – наибольшее значение $f(x)$ на $[x, x+\Delta x]$.

Тогда:

$$S_{DCPE} = m(\Delta x)\cdot \Delta x,$$
$$S_{DKPE} = M(\Delta x)\cdot \Delta x,$$
$$S_{DCPE} \le S_{DCFE} \le S_{DKPF},$$
$$m(\Delta x)\cdot \Delta x \le \Delta S \le M(\Delta x)\cdot \Delta x,$$
$$m(\Delta x) \le \frac{\Delta S}{\Delta x} \le M(\Delta x), \quad \Delta x > 0.$$

Так как $f(x)$ непрерывна, то при $\Delta x \to 0$ $m(\Delta x) \to f(x)$ и $M(\Delta x) \to f(x)$. Тогда $S'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta x} = f(x)$.

Простейшие приёмы интегрирования

1. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$.

2. $\int\left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$.

3. Формула интегрирования по частям.

Пусть даны две дифференцируемые функции $u = u(x), \quad v = v(x)$. Тогда справедлива формула

$$\int udv = uv - \int vdu.$$

4. Замена переменной в неопределённом интеграле.

Если $x = \varphi(t)$ дифференцируемая функция, то

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)dt.$$

Пример.

1.

$$\int \ln x dx = \begin{vmatrix} u = \ln x, & du = \dfrac{dx}{x} \\ dv = dx, & v = x \end{vmatrix} = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C.$$

2. $\int x\sqrt{x-2}dx = \left| t = \sqrt{x-2}, \quad x = t^2 + 2, \quad dx = 2tdt \right| = \int (t^2+2)\cdot t\cdot 2tdt =$

$$= 2\int (t^4 + 2t^2)dt = \frac{2}{5}t^5 + \frac{4}{3}t^3 + C = \frac{2}{5}\sqrt{(x-5)^5} + \frac{4}{3}\sqrt{(x-2)^3} + C.$$

Техника интегрирования включает в себя:

1) интегрирование рациональных выражений;
2) интегрирование иррациональных выражений;
3) интегрирование биномиальных дифференциалов;
4) интегрирование тригонометрических функций;
5) метод тригонометрических подстановок.

Этот раздел математического анализа служит средством реализации теории интегрального исчисления, поэтому оставим его без внимания.

3.2. Определенный интеграл

К понятию определенного интеграла привели две задачи: об отыскании закона движения материальной точки вдоль прямой по известной скорости; о вычислении площади, заключенной между графиком функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и осью абсцисс. Можно указать ряд других задач, которые приводят к понятию интеграла (например, о вычислении работы, произведённой силой за промежуток времени $a \le t \le b$).

Понятие определенного интеграла вводится либо как предел интегральных сумм, либо в случае, когда заданная функция $f(x)$, определённая на некотором отрезке $[a,b]$, имеет первообразную $F(x)$ как разность её значений на концах отрезка $F(b) - F(a)$.

Определение интеграла как предела интегральных сумм было сформулировано О. Коши в 1823 г. для непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций. Случай произвольных функций был изучен Б. Риманом (1853 г.). Г. Дарбу (1879 г.) ввёл в рассмотрение, наряду с интегральными суммами, верхнюю и нижнюю суммы. Это позволило ему сформулировать необходимое и достаточное условия интегрируемости функции по Риману и существенно продвинуло теорию определённого интеграла.

Понятие определенного интеграла по Риману

Пусть на $[a,b]$ определена некоторая функция $f(x)$. Разобьём сегмент $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ на конечное число частичных сегментов $[x_{k-1}, x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$. Обозначим через Δx_k длину сегмента $[x_{k-1}, x_k]$, т.е. $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$.

Назовём число $\lambda = \max\limits_{k=1,\dots,n} \Delta x_k$ рангом разбиения. На каждом частичном сегменте произвольно выберем точку c_k и вычислим в ней значение функции. Затем составим сумму $S = \sum\limits_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$, которую называют интегральной суммой. Значение этой суммы зависит:

1) от способа разбиения сегмента $[a,b]$ на частичные сегменты;

2) от выбора точек c_k на каждом частичном сегменте.

Число I называется пределом интегральных сумм S, при условии, что ранг разбиения $\lambda \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$, найдётся положительное число $\delta > 0$, такое, что при всяком способе разбиения с рангом $\lambda < \delta$ и при любом выборе точек c_k в частичных сегментах, интегральная сумма удовлетворяет неравенству $|S - I| < \varepsilon$.

$$\left\{ I = \lim_{\lambda \to 0} S \right\} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 \, \forall \lambda < \delta \, (|S - I| < \varepsilon).$$

Если существует конечный предел интегральных сумм при $\lambda \to 0$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на $[a,b]$, а значение предела I называется её *определённым интегралом*. Обозначают:

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Если $a = b$, то по определению считают

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Если $a > b$, то по определению полагают

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Необходимым условием интегрируемости функции на $[a,b]$ является её ограниченность. Однако это условие не достаточно. Например, функция Дирихле

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \textit{если} \quad x - \textit{рациональное}; \\ 0, & \textit{если}\ x - \textit{иррациональное}, \end{cases}$$

ограничена на $[0,1]$. Однако она неинтегрируема в смысле данного определения, поскольку на любом частичном сегменте отрезка $[0,1]$ всегда найдутся как рациональные, так и иррациональные точки, в которых функция $f(c_k)$ принимает значение либо 1, либо 0. Тогда при c_k рациональном

$$S = \sum_{k=1}^{n} 1 \cdot \Delta x_k = 1,$$

если c_k иррациональное, то $f(c_k)=0$ и $S = 0$.

Следовательно, значение предела интегральных сумм существенно зависит от выбора точек c_k и не существует.

Именно этот факт подвинул немецкого математика А. Лебега к пересмотру самого подхода к построению определенного интеграла. Созданная им теория меры позволила получить дальнейшее обобщение определенного интеграла.

Введём понятие сумм Дарбу.

Пусть функция $f(x)$ ограничена на $[a,b]$. Разобьём сегмент $[a,b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.

Так как $f(x)$ ограничена на $[a,b]$, то она ограничена на каждом частичном сегменте $[x_{k-1}, x_k]$.

Обозначим:

$$m_k = \inf_{[x_{k-1}, x_k]} f(x),$$

$$M_k = \sup_{[x_{k-1}, x_k]} f(x).$$

Рассмотрим суммы следующего вида:

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k \text{ – нижняя сумма Дарбу,}$$

$$S_D = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k \text{ – верхняя сумма Дарбу.}$$

Значение построенных сумм Дарбу, в отличие от интегральных сумм, зависит только от способа разбиения сегмента $[a,b]$ на частичные сегменты.

Отметим связь сумм Дарбу с интегральными суммами:

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то s_D и S_D являются частными случаями интегральных сумм. Это утверждение следует из того, что функция непрерывная на сегменте, принимает на нём своё наименьшее и наибольшее значения. То есть существуют точки $u_k \in [x_{k-1}, x_k]$ и $v_k \in [x_{k-1}, x_k]$ такие, что $f(u_k) = m_k$, $f(v_k) = M_k$. Тогда

$$s_D = \sum_{k=1}^{n} m_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(u_k)\Delta x_k \,,$$

$$S_D = \sum_{k=1}^{n} M_k \cdot \Delta x_k = \sum_{k=1}^{n} f(v_k)\Delta x_k \,.$$

Свойства сумм Дарбу:

1. При фиксированном способе разбиения $[a,b]$ на частичные сегменты нижняя сумма Дарбу s_D является точной нижней гранью множества интегральных сумм, а верхняя сумма S_D – точной верхней гранью интегральных сумм.

2. При добавлении новой точки дробления нижняя сумма Дарбу не уменьшается, а верхняя не увеличивается.

3. Никакая нижняя сумма Дарбу не превосходит никакой верхней суммы Дарбу, даже если они отвечают разным способам дробления.

Нижний и верхний интегралы Дарбу

Из свойства (3) следует, что множество нижних сумм Дарбу $\{s_D\}$ ограничено сверху любой суммой S_D, т.е. $s_D \le S_D$. Тогда существует точная верхняя грань множества $\{s_D\}$, которую обозначим:

$$I_* = \sup\{s_D\}$$

и назовём нижним интегралом Дарбу. Заметим, что S_D – *В.Г.* $\{s_D\}$.

$$I_* - \text{Т.В.Г. } \{s_D\} \Rightarrow \text{(по определению Т.В.Г.) } I_* \le S_D .$$

В силу единственности *Т.В.Г.*, полученное неравенство справедливо для любой верхней суммы Дарбу. Следовательно, множество $\{S_D\}$ ограничено снизу и тогда существует *Т.Н.Г.* $\{S_D\}$, которую обозначим:

$$I^* = \inf\{S_D\}$$

и назовём верхним интегралом Дарбу. Заметим:

I_* – *Н.Г.* $\{S_D\}$,

I^* – *Т.Н.Г.* $\{S_D\} \Rightarrow I_* \le I^*$.

Итак, имеем неравенства:

$$s_D \le I_* \le I^* \le S_D .$$

Нетрудно видеть, что если разность сумм Дарбу $S_D - s_D \to 0$ при $\lambda \to 0$, то $I_* = I^*$.

В этой связи Дарбу сформулировал следующее определение: Если нижний и верхний интегралы совпадают, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на сегменте $[a,b]$, а их общее значение называют *определённым интегралом*.

Следующая теорема устанавливает не только критерий интегрируемости по Риману, но и тот факт, что ранее определённое значение интеграла совпадает с интегралом Дарбу.

Теорема 3.3 (Критерий интегрируемости). *Ограниченная функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ тогда и только тогда, когда разность сумм Дарбу стремится к нулю при условии, что ранг разбиения λ сегмента $[a,b]$ стремится к нулю.*

Доказательство:

I. Необходимость.

Дано: $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

Доказать:

$\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_D - s_D) = 0$, т.е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\lambda\ (\lambda < \delta \Rightarrow S_D - s_D < \varepsilon)$.

Пусть $\varepsilon > 0$ – произвольное число. Определим $0 < \varepsilon_1 < \dfrac{\varepsilon_1}{2}$. По условию, $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, тогда существует предел I её интегральных сумм S при $\lambda \to 0$. Следовательно, для $\varepsilon_1 > 0$ найдётся $\delta > 0$, такое, что при условии $\lambda < \delta$ выполняется неравенство $|S - I| < \varepsilon_1$ или

$$I - \varepsilon_1 < s < I + \varepsilon_1.$$

Число $I + \varepsilon_1$ – верхняя граница $\{s_D\}$, $I - \varepsilon_1$ – нижняя граница $\{s\}$. В то же время $S_D = \sup\{s\}$, $s_D = \inf\{s\}$. Тогда: $S_D \le I + \varepsilon_1$, $s_D \ge I - \varepsilon_1$,

$$S_D - s_D \le 2\varepsilon_1 < 2\cdot\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Итак: $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\lambda\ (\lambda < \delta \Rightarrow S_D - s_D < \varepsilon)$, т. е. $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_D - s_D) = 0$.

II. Достаточность

Дано:

$\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_D - s_D) = 0$, т. е. $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ \forall\lambda\ (\lambda < \delta \Rightarrow S_D - s_D < \varepsilon)$.

Доказать: $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$.

По условию $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_D - s_D) = 0$ и при этом выполняется неравенство $s_D \le I_* \le I^* \le S_D$. Покажем, что $I_* = I^*$. Допустим противное, что $I_* < I^*$. Тогда $I^* - I_* = \varepsilon > 0$, $S_D - s_D \ge I^* - I_* = \varepsilon$ при любом λ. Это противоречит определению предела $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_D - s_D) = 0$. Таким образом, $I_* = I^* = I$. Покажем, что $I = \lim\limits_{\lambda\to 0} S$, где S – интегральная сумма для функции $f(x)$ на $[a,b]$. Действительно, из свойств (1) сумм Дарбу следует неравенство:

$$s_D \le S \le S_D.$$

Кроме того, из только что доказанного:

$$s_D \le I \le S_D.$$

Тогда $|S - I| \le S_D - s_D$. Однако $\lim\limits_{\lambda\to 0}(S_D - s_D) = 0$, т.е. $\forall \varepsilon > 0\, \exists \delta > 0\, \forall \lambda\, (\lambda < \delta \Rightarrow S_D - s_D < \varepsilon)$, а значит и $|S - I| < \varepsilon$, т.е. $\lim\limits_{\lambda\to 0} S = I$. Что и требовалось доказать.

Без доказательства отметим теорему, которую можно рассматривать как достаточное условие интегрируемости.

Теорема 3.4. *Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то она интегрируема на этом сегменте.*

3.3. Свойства определённого интеграла. Формула Ньютона – Лейбница

1. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, и k – некоторое число, то $k \cdot f(x)$ также интегрируема на $[a,b]$, причём

$$\int_a^b kf(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx.$$

2. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$, то их разность и сумма также интегрируемы на $[a,b]$, причём

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

3. **(Свойство аддитивности).** Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и точка $c \in (a,b)$, то $f(x)$ интегрируема на каждом из сегментов $[a,c]$ и $[c,b]$, при этом

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

4. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $f(x) \geq 0$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

5. Если $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a,b]$ и $f(x) \geq g(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

6. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$, то $|f(x)|$ также интегрируема на $[a,b]$, причём

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

7. Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $m \leq f(x) \leq M$ для всех $x \in [a,b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Доказательство:

Составим интегральную сумму $S = \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k$. По условию:

$$m \leq f(c_k) \leq M,$$
$$m\Delta x_k \leq f(c_k)\Delta x_k \leq M \cdot \Delta x_k, \quad (\Delta x_k > 0),$$
$$\sum_{k=1}^{n} m \cdot \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(c_k)\Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M \cdot \Delta x_k,$$
$$m(b-a) \leq S \leq M(b-a).$$

Переходя в неравенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получим:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \qquad (*)$$

8. **(Теорема 3.4 – о среднем).** Если $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и $m \leq f(x) \leq M$, то найдётся число *M,* $m \leq \mu \leq M$, такое, что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Доказательство:

Разделим обе части неравенства (*) на $(b-a)$:

$$m \le \frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} \le M .$$

Обозначим

$$\frac{\int_a^b f(x)dx}{(b-a)} = \mu, \quad m \le \mu \le M ,$$

тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

9. **(Теорема3.5 – о среднем для непрерывной функции)**. Пусть $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$. Тогда найдётся точка $c \in (a,b)$, такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Доказательство:

Функция $f(x)$ непрерывная на $[a,b]$, следовательно, принимает на нём своё наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно, *M* и *m*. Пусть $f(x_1) = m, \quad f(x_2) = M, \quad x_1, x_2 \in [a,b]$

$$m \le f(x) \le M .$$

Тогда, по свойству (8) найдётся число μ, $m \le \mu \le M$, такое что

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a).$$

Применим к $[x_1, x_2]$ теорему Коши 2:

1) $f(x)$ непрерывная на $[x_1, x_2]$;

2) на концах сегмента принимает разные по величине значения *m* и *M*, и $m \le \mu \le M$. Тогда на сегменте $[x_1, x_2]$, а значит и на $[a,b]$, найдётся точка *c*, в которой $f(c) = \mu$. Таким образом, имеем

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a).$$

Определённый интеграл с переменным верхним пределом

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a,b]$ и точка x – произвольная точка сегмента $[a,b]$. Тогда функция $f(x)$ интегрируема на $[a,x]$. Рассмотрим интеграл

$$\int_a^x f(t)dt = \Phi(x).$$

Такой интеграл является функцией от x и называется интегралом с переменным верхним пределом.

Теорема 3.6. *Если функция* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$, *то* $\Phi(x)$ *является первообразной для* $f(x)$.

Доказательство:

Покажем, что $\Phi'(x) = f(x)$.

$$\Delta y = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt -$$

$$-\int_a^x f(t)dt = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

Функция $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, следовательно, она непрерывна и на $[x, x+\Delta x]$. По свойству (9), найдётся точка $c \in [x, x+\Delta x]$, такая, что

$$\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\cdot\Delta x.$$

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(c)\cdot\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} f(c) = \lim_{c\to x} f(c) = f(x).$$

Доказанная теорема устанавливает связь между неопределённым интегралом и определённым, а именно

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C.$$

Формула Ньютона – Лейбница

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$, то справедлива формула

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Доказательство:

Пусть $F(x)$ некоторая первообразная функции $f(x)$. По доказанной теореме, интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

также первообразная. По свойству первообразных:

$$\Phi(x) = F(x) + C$$

или

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

При $x = a$

$$0 = \int_a^a f(t)dt = F(a) + C,$$

$$C = -F(a),$$

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

Тогда

$$\int_a^x f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b.$$

Формула Ньютона – Лейбница даёт возможность вычисления определённого интеграла через его первообразную. При этом следует учесть некоторые особенности применения формул интегрирования.

1. Интегрирование по частям

Теорема 3.7. *Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные $u'(x)$ и $v'(x)$ на $[a,b]$, то справедлива формула*

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu.$$

2. Замена переменной в определённом интеграле

Теорема 3.8. *Пусть*

1) $x = \varphi(t)$ имеет непрерывную производную $\varphi'(t)$ на сегменте $[\alpha, \beta]$;

2) $\varphi(\alpha) = a, \quad \varphi(\beta) = b$;

3) $y = f(x)$ непрерывна на множестве $[A, B]$ – значений функции $x = \varphi(t)$.

Тогда

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt.$$

Примеры.

1. $\int\limits_0^1 \frac{(arctg\, x)^2}{1+x^2}dx = \int\limits_0^{\pi/4} u^2 du = \left.\frac{u^3}{3}\right|_0^{\pi/4} = \frac{\pi^3}{192}$**.**

$u = arctg\, x \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}$;

x	0	1
u	0	$\pi/4$

2.

$$\int\limits_0^a \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t dt = a^2\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{a^2}{2}\left[\int\limits_0^{\pi/2}dt + \int\limits_0^{\pi/2}\cos 2t dt\right] =$$

$$= \frac{a^2}{2}\left[\left.t\right|_0^{\pi/2} + \left.\frac{\sin 2t}{2}\right|_0^{\pi/2}\right] = \frac{a^2}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right) = \frac{\pi a^2}{4}.$$

$x = a\cdot\sin t,\quad dx = a\cdot\cos t dt,\quad \sqrt{a^2-x^2} = a\cdot\cos t$,

x	0	a
t	0	$\pi/2$

3.4. Геометрические приложения определённого интеграла

Существуют различные подходы к введению понятия квадрируемости плоской фигуры. Рассмотрим изложение вопроса в той форме, которую удобнее всего использовать на первом курсе без привлечения дополнительных понятий. При этом сохраняется общая логика построения теории.

Понятие квадрируемости и площади плоской фигуры

Пусть на плоскости дана фигура *F*, ограниченная простой замкнутой кривой.

Кривая называется *простой*, если она не имеет точек самопересечения.

Кривая называется *замкнутой*, если её начальная и конечная точки совпадают.

Обозначим через *P* произвольный многоугольник, содержащийся в фигуре *F*, а через *Q* – произвольный многоугольник, содержащий фигуру *F*. Записывают: $P \subseteq F,\quad Q \supseteq F$.

Из элементарной математики известно, как найти площадь многоугольника. Обозначим

S(P) – площадь многоугольника *P*;
S(Q) – площадь многоугольника *Q*.

Очевидно:

$$S(P) \le S(Q).$$

Зафиксируем какой-нибудь многоугольник *Q* и будем рассматривать множество $\{S(P)\}$ площадей всех многоугольников, содержащихся в фигуре *F*. Тогда $\{S(P)\}$ ограничено сверху и назовём

$$S_* = \sup_{P \subseteq F} \{S(P)\}$$

внутренней площадью фигуры *F*. Очевидно:

$$S(P) \le S_*.$$

Заметим, что

$$S(Q) - \text{В.Г. } \{S(P)\},$$

$$S_* - \text{Т.В.Г. } \{S(P)\},$$

тогда выполняется неравенство: $S_* \le S(Q)$ для любых $Q \supseteq F$. Следовательно, множество площадей многоугольников $\{S(Q)\}$, содержащих фигуру *F*, ограничено снизу.

Назовём $S^* = \inf_{Q \supseteq F} \{S(Q)\}$ внешней площадью фигуры *F*. Отметим, что

$$S^* \le S(Q)$$

$$S_* - \text{Н.Г. } \{S(Q)\},$$

$$S^* - \text{Т.Н.Г. } \{S(Q)\} \Rightarrow S_* \le S^*.$$

Из доказанного следует неравенство:

$$S(P) \le S_* \le S^* \le S(Q).$$

Определение 3.3. Если внутренняя и внешняя площади фигуры *F* совпадают, т.е. $S_* = S^*$, то фигура *F* называется *квадрируемой*, а их общее значение S называют *площадью* фигуры *F*.

Критерий квадрируемости

Теорема 3.9. *Фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого положительного числа* $\varepsilon > 0$ *найдутся два многоугольника* $P \subseteq F$ *и* $Q \supseteq F$, *такие, что* $S(Q) - S(P) < \varepsilon$.

Доказательство:

I. Необходимость

Дано: *F* квадрируема, т. е. $S_* = S^*$.

Доказать: $\forall\varepsilon>0\ \underset{P\subseteq F}{\exists P}\ \underset{Q\supseteq F}{\exists Q}\left(S(Q)-S(P)<\varepsilon\right)$.

Пусть $\varepsilon>0$ – произвольное число и рассмотрим $\varepsilon_1=\dfrac{\varepsilon}{2}>0$.

$S_*=\sup\limits_{P\subseteq F}\left\{S(P)\right\}$, по определению *Т.В.Г.* для $\varepsilon_1>0$ найдётся $P\subseteq F$, такое, что

$$S(P)>S_*-\varepsilon_1. \tag{3.2}$$

Аналогично: $S^*=\inf\limits_{Q\supseteq F}\left\{S(Q)\right\}$, тогда для $\varepsilon_1>0$ найдётся многоугольник $Q\supseteq F$, такой, что

$$S(Q)<S^*+\varepsilon_1 \tag{3.3}$$

Вычтем из неравенства (3.3 неравенство (3.2), получим

$$S(Q)-S(P)<S^*-S_*+2\varepsilon_1.$$

Учитывая, что $S_*=S^*$ и $2\varepsilon_1=\varepsilon$, приходим к утверждению:

$$\forall\varepsilon>0\ \underset{P\subseteq F}{\exists P}\ \underset{Q\supseteq F}{\exists Q}\left(S(Q)-S(P)<\varepsilon\right).$$

II. Достаточность

Дано: $\forall\varepsilon>0\ \underset{P\subseteq F}{\exists P}\ \underset{Q\supseteq F}{\exists Q}\left(S(Q)-S(P)<\varepsilon\right)$.

Доказать: F квадрируема, т. е. $S_*=S^*$.

Допустим, что $S_*<S^*$. Обозначим $\varepsilon=S^*-S_*>0$. Из неравенства $S(P)\le S_*\le S^*\le S(Q)$ следует:

$$S(Q)-S(P)\ge S^*-S_*=\varepsilon.$$

Это противоречит условию. Таким образом, остаётся: $S_*=S^*$.

Теорема 3.10. *Фигура F квадрируема тогда и только тогда, когда для любого положительного числа $\varepsilon>0$ найдутся две квадрируемые фигуры $A\subseteq F$ и $B\supseteq F$, такие, что $S(B)-S(A)<\varepsilon$.*

Площадь криволинейной трапеции

Теорема 3.11. *Пусть $f(x)$ непрерывна и положительна на $[a,b]$. Фигура F представляет собой криволинейную трапецию, ограниченную сверху графиком функции $y=f(x)$, снизу отрезком $[a,b]$ оси OX и с боков прямыми $x=a$, $x=b$. Тогда фигура F квадрируема и её площадь вычисляется по формуле:*

$$S(F)=\int_a^b f(x)dx.$$

Доказательство:

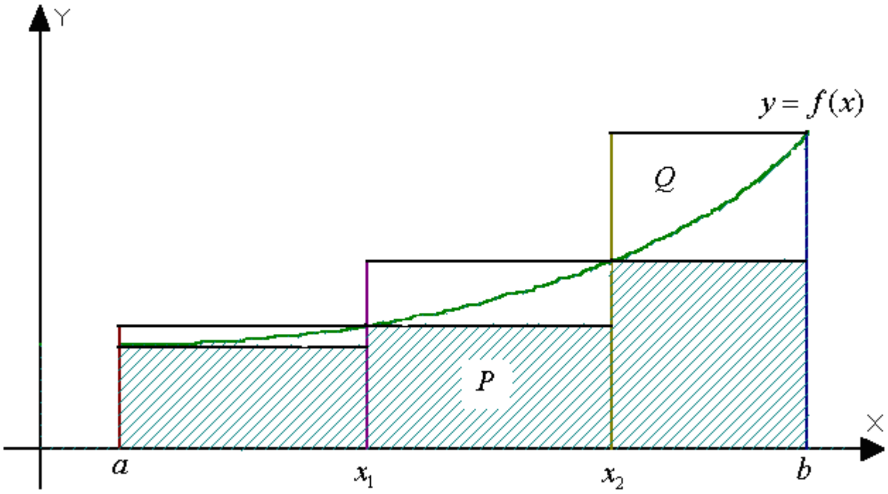


Рисунок 3.1

1) Разобьём сегмент $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ на конечное число частичных сегментов $[x_{k-1},x_k]$, обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ и $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$, $m_k=\inf\limits_{[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}$, $M_k=\sup\limits_{[x_{k-1},x_k]}\{f(x)\}$.

Тогда нижнюю сумму Дарбу можно рассматривать как площадь многоугольника, содержащегося в фигуре *F*, а верхнюю сумму Дарбу – как площадь многоугольника содержащего фигуру *F*. Обозначим

$$\begin{aligned} s_D&=\sum_{k=1}^{n}m_k\Delta x_k=S(P),\quad P\subseteq F\\ S_D&=\sum_{k=1}^{n}M_k\Delta x_k=S(Q),\quad Q\supseteq F \end{aligned}\tag{3.4}$$

По условию $f(x)$ непрерывна на сегменте $[a,b]$, следовательно, интегрируема. По критерию интегрируемости $S_D-s_D\to 0$ при $\lambda\to 0$, т. е. $\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall\lambda<\delta\ (S_D-s_D<\varepsilon)$.

Учитывая равенства (3.4), можно сделать вывод, что нашлись два многоугольника $P\subseteq F$ и $Q\supseteq F$, такие, что

$$S(Q)-S(P)<\varepsilon.$$

Тогда, согласно первому критерию квадрируемости (теорема 1), фигура *F* квадрируема.

2) Найдём площадь фигуры *F*.

Так как $S(P)\le S(F)\le S(Q)\Leftrightarrow s_D\le S(F)\le S_D$.

Поскольку $f(x)$ непрерывна на $\left[a,b\right]$, то её сумма Дарбу является частным случаем интегральных сумм. По определению интегрируемости их предел стремится к числу.

$$I=\int_a^b f(x)dx\,.$$

Итак, $\lim\limits_{\lambda\to 0} s_D=\lim\limits_{\lambda\to 0} S_D=I$. По свойству пределов заключаем, что

$$I\le S(F)\le I\text{, т. е.}$$

$$S(F)=I=\int_a^b f(x)dx\,.$$

Замечание 1. Теорема доказана в предположении, что $f(x)>0$. Если $f(x)<0$, то рассмотрим функцию $-f(x)$, которая симметрична $f(x)$ относительно оси *OX* и будет положительна. Тогда

$$S(F)=-\int_a^b f(x)dx\,.$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y=\cos x,\quad 0\le x\le\dfrac{5\pi}{6}$ и осью *OX*.

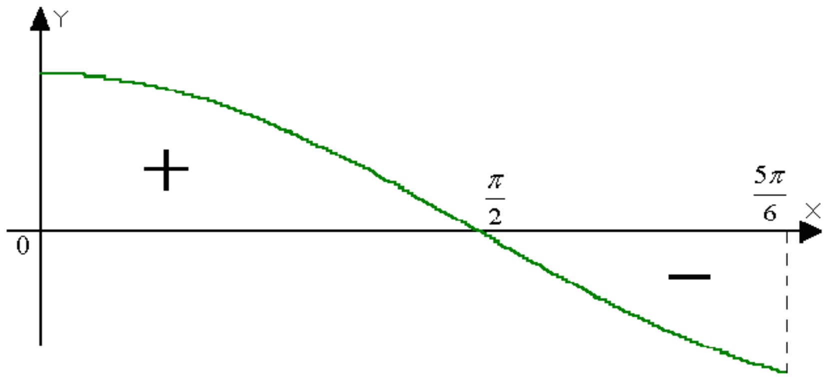


Рисунок 3.2

$$S=\int_0^{\pi/2}\cos xdx-\int_{\pi/2}^{5\pi/6}\cos xdx=\sin x\Big|_0^{\pi/2}-\sin x\Big|_{\pi/2}^{5\pi/6}=1-(\frac{1}{2}-1)=1\frac{1}{2}.$$

Замечание 2. Если фигура F ограничена на $\left[a,b\right]$ графиками двух непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, причём $f(x)>g(x)$, тогда

$$S(F)=\int_a^b\left[\,f(x)-g(x)\right]dx\,.$$

Пример.

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$.

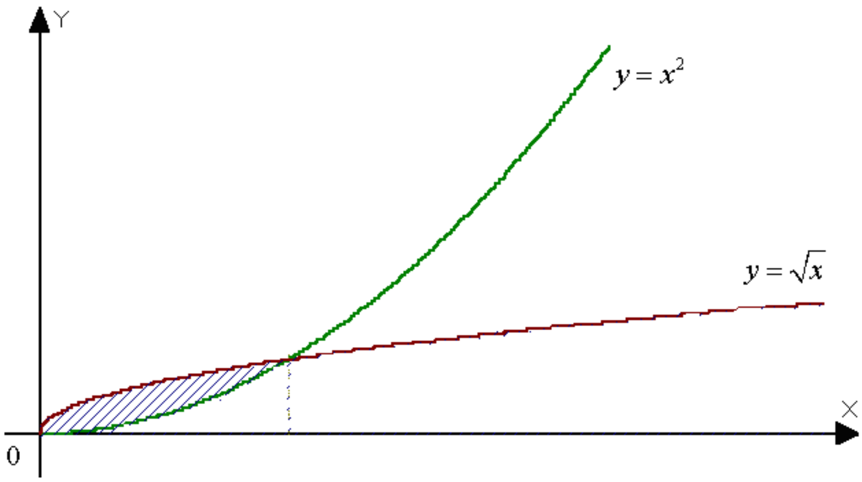


Рисунок 3.3

Найдём точки пересечения графиков функций:

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x_1 = 0, \quad x_2 = 1.$$

$$S = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2)dx = \int_0^1 \sqrt{x}dx - \int_0^1 x^2 dx = \left.\frac{2\sqrt{x^3}}{3}\right|_0^1 - \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Площадь криволинейного сектора

Теорема 3.12. *Пусть на плоскости задана полярная система координат* (ρ, φ) *и функция* $\rho = f(\varphi)$ *непрерывна и положительна на сегменте* $\alpha \le \varphi \le \beta$. *Рассмотрим фигуру F, представляющую собой криволинейный сектор, ограниченный лучами* $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$ *и кривой* $\rho = f(\varphi)$. *Тогда фигура F квадрируема и её площадь вычисляют по формуле:*

$$S(F) = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta f^2(\varphi)d\varphi.$$

Пример.

Найдите площадь фигуры, ограниченной лемнискатой $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi} \quad (a > 0)$.

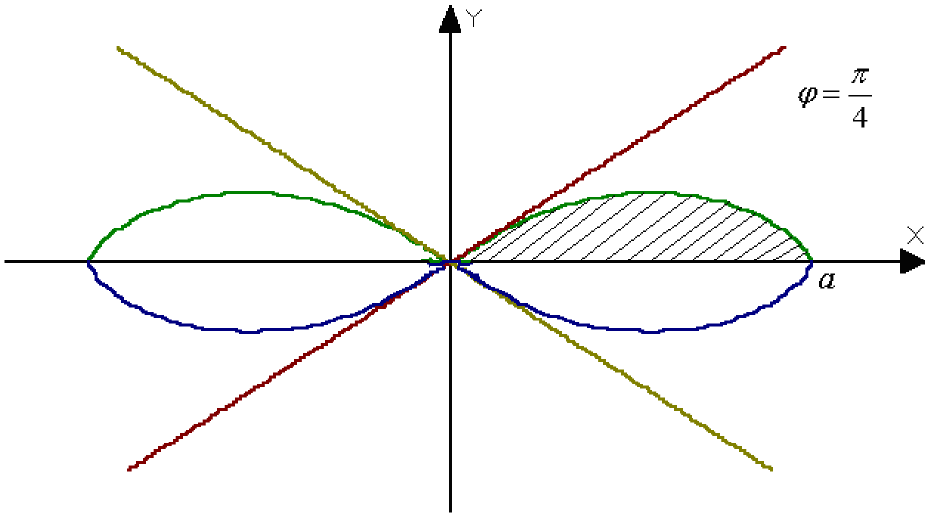


Рисунок 3.4

Очевидно, фигура F симметрична относительно осей координат, поэтому достаточно найти площадь её четверти:

$$S=4S_1=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\pi/4}\rho^2d\varphi=2\int_0^{\pi/4}a^2\cos 2\varphi d\varphi=a^2 \sin 2\varphi\Big|_0^{\pi/4}=a^2.$$

Спрямляемость дуги. Длина дуги гладкой кривой

Пусть дана на плоскости незамкнутая, простая дуга AB. Разобьём её точками $A=M_0, M_1, ..., M_n=B$ на конечное число частичных дуг $\left[M_{k-1}, M_k\right]$, $k=1, 2, ..., n$. Соединим соседние точки деления отрезками. Получим ломаную, вписанную в дугу AB. Обозначим через l_k длину звена ломаной $\left|M_{k-1}, M_k\right|$, а через $l=\max\limits_{1\le k\le n} l_k$.

Периметром ломаной назовём сумму длин всех её звеньев:

$$P=\sum_{k=1}^{n} l_k .$$

Периметр ломаной даёт приблизительное представление о длине дуги. Чем меньше длина наибольшего из звеньев ломаной, тем точнее периметр приближает длину дуги. Естественно ввести следующее **определение (3.4):**

Дуга AB называется *спрямляемой*, если существует конечный предел периметров ломаных, вписанных в дугу AB, при условии, что длина наибольшего из звеньев ломаной стремится к нулю. При этом значение предела называют *длиной дуги* AB:

$$L=\lim_{l\to 0} P .$$

Записанный предел будем понимать следующим образом:

Пусть λ – какое-нибудь разбиение дуги *AB*. Тогда

$$\left\{L=\lim_{l\to 0}P\right\}\Leftrightarrow\left\{\forall\varepsilon>0\,\exists\delta>0\,\forall\lambda\,(l<\delta\Rightarrow\left|P-L\right|<\varepsilon)\right\}.$$

Длина дуги, заданной в декартовых координатах

Теорема 3.13. *Пусть дуга AB задана уравнением* $y=f(x)$, *где* $f(x)$ *непрерывна на* $[a,b]$ *функция и имеет на этом сегменте непрерывную производную* $f'(x)$. *Тогда дуга AB спрямляема и её длина вычисляется по формуле*

$$L=\int_a^b\sqrt{1+\left[f'(x)\right]^2}\,dx. \tag{3.5}$$

Доказательство:

Разобьём сегмент $[a,b]$ точками $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$ на конечное число сегментов $[x_{k-1},x_k]$, $k=1,2,...,n$. Обозначим $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$ и $\lambda=\max\limits_{1\le k\le n}\Delta x_k$.

Вычислим $y_k=f(x_k)$. Точки $M_k(x_k,y_k)$ лежат на дуге *AB*. Соединим соседние точки, получим ломаную, вписанную в дугу *AB*. Длину частичного звена ломаной обозначим l_k.

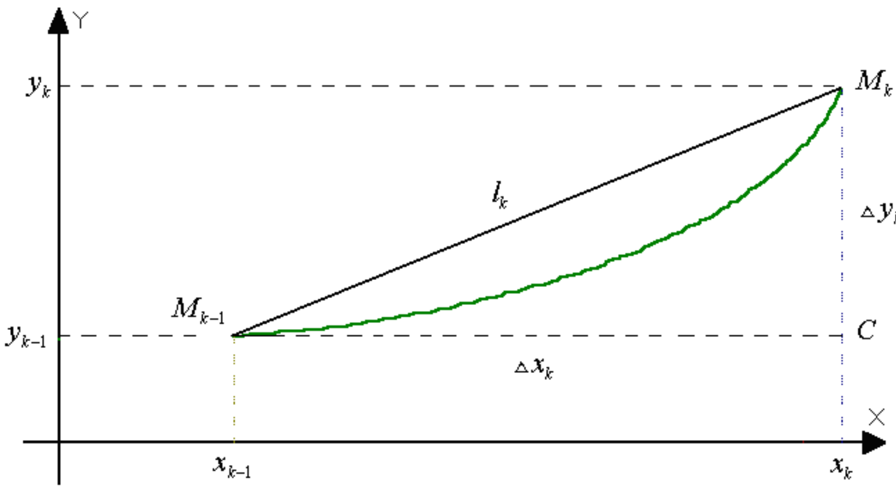


Рисунок 3.5

$$l_k=\sqrt{\Delta x_k^2+\Delta y_k^2}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на $[x_{k-1},x_k]$ и дифференцируема в (x_{k-1},x_k). Тогда, по теореме Лагранжа, существует точка $c_k\in(x_{k-1},x_k)$ такая, что

$$f(x_k)-f(x_{k-1})=f'(c_k)(x_k-x_{k-1})$$

или

$$\Delta y_k=f'(c_k)\Delta x_k.$$

Тогда

$$l_k = \sqrt{1 + \left[f'(c_k) \right]^2} \cdot \Delta x_k .$$

Периметр ломаной равен

$$P = \sum_{k=1}^{n} l_k = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(c_k) \right]^2} \cdot \Delta x_k .$$

Он представляет собой интегральную сумму для функции $\sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2}$ на $\left[a, b \right]$. Эта функция, очевидно, непрерывна, следовательно, интегрируема. Тогда

$$\lim_{\lambda \to 0} P = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{1 + \left[f'(c_k) \right]^2} \cdot \Delta x_k = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx .$$

Так как $\Delta x_k \le l_k$, то $\lambda = \max \Delta x_k \le \max l_k = l$, и

$$L = \lim_{l \to 0} P = \lim_{\lambda \to 0} P = \int_a^b \sqrt{1 + \left[f'(x) \right]^2} dx .$$

Что и требовалось доказать.

Пример.

Вычислить длину дуги $y = \frac{1}{3}\sqrt{x^3}$ от точки (0,0) до точки (12,8 $\sqrt{3}$).

Решение:

$$y' = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot x^{1/2} = \frac{1}{2}\sqrt{x} .$$

$$L = \int_0^{12} \sqrt{1 + \frac{x}{4}} dx = \int_0^{12} \left(1 + \frac{x}{4} \right)^{1/2} dx = \left. \frac{8\left(1 + \frac{x}{4} \right)^{3/2}}{3} \right|_0^{12} = \frac{64}{3} .$$

Теорема 3.14. *Пусть дуга AB задана параметрически уравнениями* $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, *где* $\varphi(t)$, $\psi(t)$ *– непрерывные на* $\left[T_1, T_2 \right]$ *функции и имеют непрерывные производные на этом сегменте. Тогда дуга AB спрямляема и её длина вычисляется по формуле:*

$$L = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{\left[\varphi'(t) \right]^2 + \left[\psi'(t) \right]^2} dt . \qquad (3.6)$$

Замечание. Формула (3.6) в отличии от формулы (1), применима и в тех случаях, когда кривая замкнута, или имеет точки самопересечения.

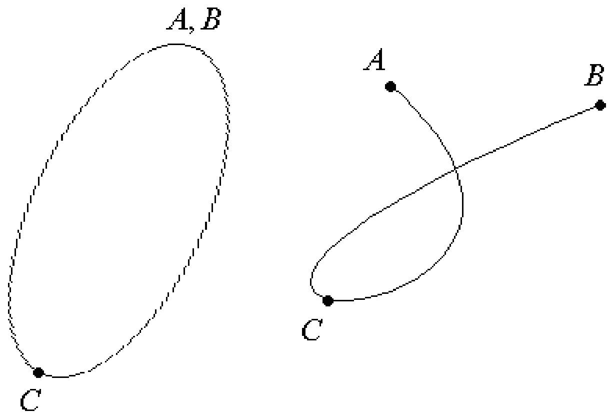


Рисунок 3.6

Выберем на дуге AB точку C так, чтобы каждая из дуг AC и CB были простыми незамкнутыми. Пусть точкам

A соответствует $t = T_1$;

B соответствует $t = T_2$;

C соответствует $t = T$.

Тогда $L(A\breve{B}) = L(A\breve{C}) + L(C\breve{B}) =$

$$= \int_{T_1}^{T} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt + \int_{T}^{T_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt = \int_{T_1}^{T_2} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt$$

Пример.

Вычислить длину дуги одной арки циклоиды

$$\begin{cases} x = R(t - \sin t), \\ y = R(1 - \cos t), \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi].$$

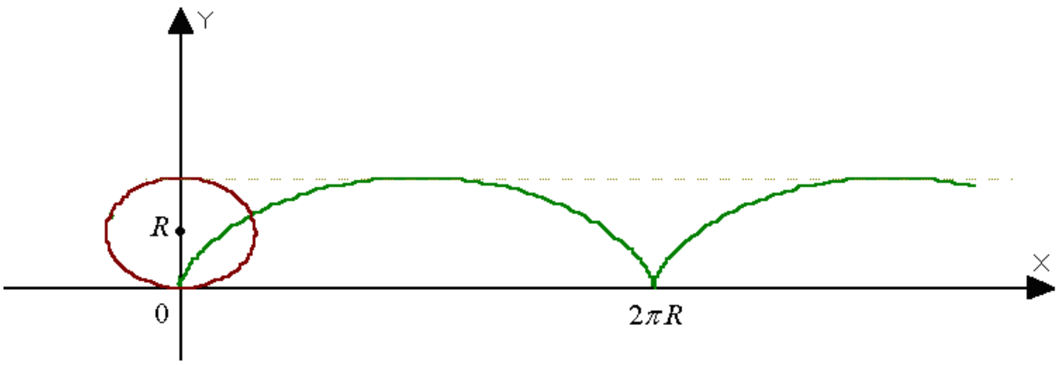


Рисунок 3.7

Решение.

$$\varphi(t) = R(t - \sin t),$$

$$\psi(t) = R(1-\cos t),$$
$$\varphi'(t) = R(1-\cos t),$$
$$\psi'(t) = R\cdot\sin t.$$

$$\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2 = 2R^2(1-\cos t) = 4R^2\sin^2\frac{t}{2}.$$

$$L = \int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\left[\varphi'(t)\right]^2 + \left[\psi'(t)\right]^2}\,dt = 2R\int\limits_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}dt = -4R\cos\frac{t}{2}\Bigg|_0^{2\pi} = 8R.$$

Теорема 3.15. *Пусть дуга АВ задана в полярных координатах* (ρ,φ) *уравнением* $\rho = f(\varphi)$, *где* $f(\varphi)$ *непрерывна на* $[\alpha,\beta]$ *и имеет непрерывную производную* $f'(\varphi)$. *Тогда дуга АВ спрямляема и её длина вычисляется по формуле:*

$$L = \int\limits_\alpha^\beta\sqrt{f^2(\varphi) + \left[f'(\varphi)\right]^2}\,d\varphi. \tag{3.7}$$

Пример.

Вычислить длину дуги кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

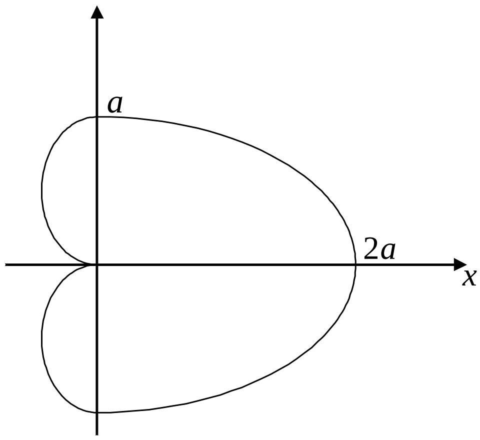


Рисунок 3.8

Решение

Поскольку кривая симметрична относительно оси ОХ, то вычислим длину по формуле (3.7) половины всей дуги.

$$L = 2\int\limits_0^\pi\sqrt{\rho^2 + (\rho')^2}\,d\varphi = 2\int\limits_0^\pi a\sqrt{1+\cos\varphi}\,d\varphi = 2a\int\limits_0^\pi\sqrt{2\cos^2\frac{\varphi}{2}}\,d\varphi =$$

$$= 4a\int\limits_0^\pi\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi = 8a.$$

Вопросы и задания для самоконтроля по разделу «Интегральное исчисление функции одной переменной»

1. Найти $\int f(x)dx$, где

$$f(x)=\begin{cases} 1, & \text{если} \quad -\infty < x < 0; \\ x+1, & \text{если} \quad 0 \le x \le 1; \\ 2x, & \text{если} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

Решение

Интегрируя на различных участках, находим

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x+C_1, & \text{если} \quad -\infty < x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C_2, & \text{если} \quad 0 \le x \le 1; \\ x^2+C_3, & \text{если} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

По непрерывности первообразной полагаем $C = C_1 = C_2 = C_3 - \dfrac{1}{2}$.

Итак,

$$\int f(x)dx=\begin{cases} x+C, & \text{если} \quad -\infty < x < 0; \\ \dfrac{x^2}{2}+x+C, & \text{если} \quad 0 \le x \le 1; \\ x^2+\dfrac{1}{2}+C, & \text{если} \quad 1 < x < +\infty. \end{cases}$$

2. Пусть $f(x)$ – монотонная непрерывная функция и $f^{-1}(x)$ – её обратная функция. Доказать, что если

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

то

$$\int f^{-1}(x)dx = xf^{-1}(x) - F(f^{-1}(x)) + C.$$

Доказательство:

В силу условия теоремы справедливо равенство:

$$x = f(f^{-1}(x)) = F'(f^{-1}(x)).$$

Интегрируя это тождество по $f^{-1}(x)$, получаем:

$$\int xd(f^{-1}(x)) = xf^{-1}(x) - \int f^{-1}(x)dx = F(f^{-1}(x)) + C.$$

(Среднее значение в этом равенстве получено после применения формулы интегрирования по частям).

Рассмотрите примеры:

а) $f(x)=x^n\ (n>0)$; б) $f(x)=\arcsin x$; в) $f(x)=e^x$.

3. Пользуясь свойством инвариантности формул интегрирования, найти интегралы:

1) $\int \frac{\ln(1+x)-\ln x}{x(1+x)}dx$; 2) $\int \frac{x^3dx}{(x^2+1)^3\sqrt{x^2+1}}$.

4. Найти интегралы:

1) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{(\sqrt{x+1}-1)^3}dx$; 2) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; 3) $\int x^2\sqrt{4-x^2}dx$;

4) $\int \frac{\ln(\sin x)}{\sin^2 x}dx$.

5. Доказать, что если

$$\int f(x)dx = F(x)+C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C \quad (a\neq 0).$$

6. Найти интегралы

$$I_1=\int \sin(\ln x)dx; \quad I_2=\int \cos(\ln x)dx,\ x>0.$$

8. Рассмотрим решение примера:

$$I=\int \frac{dx}{\sin x+2\cos x+3}$$

$$I(x)=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+4\cos^2\frac{x}{2}+1}=\int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+5\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}=$$

$$=2\int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{\left(tg^2\frac{x}{2}+2tg\frac{x}{2}+1\right)+4}=2\int \frac{d\left(tg\frac{x}{2}\right)}{\left(tg\frac{x}{2}+1\right)^2+4}=\operatorname{arc}tg\frac{tg\frac{x}{2}+1}{2}+C_{n,}$$

$$2\pi n-\pi<x<\pi+2\pi n.$$

Первообразная функция в области определения $f(x)$ должна быть непрерывной. Тогда

$$I(\pi + 2\pi n - 0) = I(\pi + 2\pi n + 0), \quad (n = 0; \pm 1; \pm 2, ...)$$

$$\frac{\pi}{2} + C_n = -\frac{\pi}{2} + C_{n+1}, \quad C_{n+1} = \pi + C_n,$$

$$n = 0 \quad C_1 = \pi + C_0,$$

$$n = 2 \quad C_2 = \pi + C_1 = 2\pi + C_0$$

....

$$n = k \quad C_{k+1} = (k+1)\pi + C_0.$$

Таким образом, $\forall n \in Z$

$$C_n = \pi n + C, \quad C = C_0 \text{ – произвольное число.}$$

Поскольку

$$2\pi n - \pi < x < \pi + 2\pi n, \text{ т.е.}$$

$$n < \frac{x+\pi}{2\pi} < n+1, \text{ то } n = \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right].$$

Таким образом,

$$I(x) = arctg \frac{tg \frac{x}{2} + 1}{2} + \pi \left[\frac{x+\pi}{2\pi} \right] + C, \quad (x \neq \pi + 2\pi n)$$

$$I(\pi + 2\pi n) = \lim_{x \to \pi + 2\pi n} I(x) = \frac{2n+1}{2}, \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, ...).$$

8. Доказать, что если

$$I_n = \int \frac{dx}{(a \sin x + b \cos x)^n},$$

то справедливо рекуррентное соотношение

$$I_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)} \left[(n-2) I_{n-2} + \frac{b \sin x - a \cos x}{(a \sin x + b \cos x)^{n-1}} \right].$$

9. Найти интегральную сумму S_n для функции $f(x) = 1 + x$ на сегменте $[-1, 4]$, разбивая его на n равных промежутков и выбирая значения C_k $(k = 0, 1, ..., n-1)$ в серединах этих промежутков.

10. Используя определение, вычислить интегралы:

$$\text{а) } \int_{-1}^{2} x^2 dx; \quad \text{б) } \int_{0}^{1} a^x dx \quad (a > 0).$$

11. Проведите доказательство свойства (6) определённого интеграла:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx.$$

12. Пусть $f(x)$ абсолютно интегрируема на сегменте $[a,b]$, т.е. существует $\int_a^b |f(x)|dx$. Интегрируема ли эта функция на $[a,b]$?

13. Пусть функция $f(x)$ (не обязательно непрерывная) интегрируема на сегменте $[a,b]$. Докажите, что равенство

$$\int_a^b f^2(x)dx = 0$$

имеет место тогда и только тогда, когда $f(x)=0$ во всех точках непрерывности $f(x)$ на $[a,b]$.

14. Докажите, что если непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция $y=f(x)$ в симметричных относительно прямой $x=\dfrac{a+b}{2}$ точках принимает равные значения, то

$$\int_a^b f(x)dx = 2\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx.$$

15. Показать, что

$$\int \operatorname{sgn} x dx = |x| + C.$$

16. В каком отношении парабола $y^2 = 2x$ делит площадь круга $x^2 + y^2 = 8$?

17. Вычислите длины дуг следующих кривых:

а) $x = \dfrac{1}{4}y^2 - \dfrac{1}{2}\ln y \quad (1 \le y \le l)$;

б) $x = a(\cos t + t\sin t); \quad y = a(\sin t - t\cos t), \quad 0 \le t \le 2\pi$ (развертка окружности);

в) $\rho = a\sin^3\dfrac{\varphi}{3}$.

18. Докажите, что длина дуги эллипса $x = a\cos t, \quad y = b\sin t$ равна длине одной волны синусоиды $y = c\sin\dfrac{x}{b}$, где $c = \sqrt{a^2 - b^2}$.

РАЗДЕЛ 4. РЯДЫ

4.1. Понятие числового ряда и его суммы

В математической литературе приняты различные определения числового ряда по своей форме, но, в принципе, равносильные по сути и, в частности, в определении его суммы. Поэтому примем в данном пособии в качестве основного следующее определение.

Определение 4.1. Пусть задана некоторая числовая последовательность $\{a_n\}$. Образуем следующее выражение

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (4.1)$$

Это выражение называется *бесконечным рядом* (или просто рядом), а члены последовательности $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ называются членами ряда. При этом a_n принято называть *общим членом ряда* и часто используют следующее обозначение ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (4.2)$$

Наряду с последовательностью $\{a_n\}$ будем рассматривать последовательность частичных сумм ряда (4.1):

$$\begin{aligned} &S_1 = a_1 \\ &S_2 = a_1 + a_2 \\ &S_3 = a_1 + a_2 + a_3 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \qquad (4.3)$$

Если $\{S_n\}$ последовательность частичных сумм ряда (4.1) имеет конечный предел, то говорят, что ряд (4.1) сходится, а значение предела называют его *суммой*:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n \qquad (4.4)$$

Если конечного предела в формуле (4.4) нет, то числовой ряд называют *расходящимся*.

Для обозначения суммы используют тот же знак, что и для ряда (4.2), т. е. $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

*) В математической энциклопедии дается такое определение числового ряда: Пара последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$ таких, что

$$S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad \text{n=1,2,...} \qquad (4.1^*)$$

называется *числовым* (однократным) рядом и обозначается

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (4.2^*)$$

Элементы последовательности $\{a_n\}$ называются *членами ряда*, а последовательности $\{S_n\}$ его *частичными суммами*.

Ряд (4.2*) называется *сходящимся*, если последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ имеет конечный предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$, который называют суммой ряда (4.2*).

Ряд (4.1) однозначно определяется каждой из двух последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$. Члены последовательности $\{S_n\}$ получаются по формулам (4.3), а последовательность $\{a_n\}$ восстанавливается по последовательности $\{S_n\}$ согласно формулам

$$a_1 = S,\ a_{n+1} = S_{n+1} - S_n,\ \text{n=1,2,...}$$

В этом смысле изучение ряда равносильно изучению последовательностей. И для каждого утверждения о ряде можно сформулировать равносильное утверждение о последовательностях.

Отсюда становится понятным равносильность различных определений ряда. Отметим еще один подход (см.: Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. – Т. I).

Вводя два вида последовательностей $\{a_n\}$ и $\{S_n\}$, ряд определяется как последовательность $\{S_n\}$ и обозначается

$$a_1 + a_2 + ... + a_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

Примером сходящегося ряда служит геометрический ряд (прогрессия):

$$a \ + ag + ag^2 + ... + ag^n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} ag^{n-1}, \text{ где } |g| < 1.$$

Действительно, рассмотрим последовательность частичных сумм $S_1 = a,\ S_2 = a + ag,\ S_3 = a + ag + ag^3, ...$

$$S_n = a + ag + ... + ag^{n-1} = \frac{a(1-g^n)}{1-g},$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a(1-g^n)}{1-g} = \frac{a}{1-g} = S.$$

Рассмотрим еще два **примера:**

1) Ряд $1-1+1-1+...+(-1)^{n-1}+...$

Этот ряд расходящийся, так как

$$S_n = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ 1, & n = 2k-1 \end{cases}$$

$\{S_n\}$ не имеет предела.

2) Ряд 1 + 2 + 3 + … + n + … расходится, так как

$$S_n = 1+2+3+...+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n(n+1)}{2} = \infty.$$

Определение 4.2. Ряд $a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+k} + ...,$ (4.5)

членами которого являются все члены ряда (4.1), начиная с (n+1)-го, взятые в том же порядке, называется n-м *остатком ряда* (4.1).

Теорема 4.1. *Если ряд (4.1) сходится, то сходится и любой его остаток. Если какой-либо остаток ряда (4.1) сходится, то сходится и сам ряд (4.1).*

Эта теорема позволяет сделать вывод, что отбрасывание или добавление конечного числа слагаемых не меняет сходимость ряда.

Основным критерием сходимости числового ряда принимают критерий Коши для числовых последовательностей.

Теорема 4.2 (Критерий Коши). *Для того, чтобы числовой ряд (1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы при любом $\varepsilon > 0$ можно было найти такое число N, что при $n > N$ и при любом целом $P > 0$ выполнялось неравенство*

$$\left| S_{n+p} - S_n \right| < \varepsilon,$$

где $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм.

Или иначе: $\left| a_{n+1} + a_{n+2} + ... + a_{n+p} \right| < \varepsilon$.

Теорема 4.3 (необходимый признак). *Если ряд (4.1) сходится, то его общий член стремится к нулю при $n \to \infty$*, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \qquad (4.6)$$

(Доказательство легко следует из определения предела и критерия Коши при $p = 1$).

Условие (4.6) не является достаточным для сходимости ряда (4.1). Рассмотрим гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots \qquad (4.7)$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$$

Покажем, что ряд расходится. Оценим разность частичных сумм:

$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

Таким образом, для $0<\varepsilon\le\frac{1}{2}$ при любом значении n не будет выполняться неравенство $\left|S_{2n}-S_n\right|<\varepsilon$, т. е. не выполняется критерий Коши, следовательно, ряд расходится.

4.2. Основные признаки сходимости знакоположительных рядов

Определение 4.3. Числовой ряд

$$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n+\ldots \qquad (4.8)$$

называется *знакоположительным*, если все его члены неотрицательные числа.

Теорема 4.4 (необходимое и достаточное условие сходимости знакоположительных рядов). *Для того, чтобы знакоположительный ряд (4.1) сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм* $\{S_n\}$ *была ограничена сверху.*

Доказательство легко следует из теоремы о пределе монотонной последовательности.

Теорема 4.5 (Принцип сравнения рядов). *Пусть даны два знакоположительных ряда*

$$u_1+u_2+u_3+\ldots+u_n+\ldots \qquad (4.9)$$

$$v_1+v_2+v_3+\ldots+v_n+\ldots, \qquad (4.10)$$

причем существует число $c>0$, *такое, что* $u_n\le v_n$ *для всех* n, *начиная с некоторого* n_0. *Тогда*

1) Если ряд (4.10) сходится, то сходится и ряд (4.9);

2) Если ряд (4.9) расходится, то расходится и ряд (4.10).

Доказательство теоремы легко следует из теоремы 1.

Следствие. Пусть $v_n \neq 0, \quad n = 1, 2, \ldots$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = k$, тогда:

1) Если ряд (4.10) сходится и $0 \le k < +\infty$, то и ряд (4.9) сходится.

2) Если ряд (4.10) расходится и $0 < k \le +\infty$, то и ряд (4.9) расходится.

В частности, если $u_n \sim v_n$, то ряды (4.9) и (4.10) одновременно сходятся или расходятся.

Теорема 4.6 (Признак Даламбера). *Если для ряда (1) существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = p,$$

то при $0 \le p < 1$ *ряд (4.8) сходится, если* $p > 1$, *то ряд расходится.*

Доказательство:

I. Пусть $0 \le p < 1$, тогда, в силу свойства плотности действительных чисел, найдется число g, такое, что $p < g < 1$. Из свойств пределов числовых последовательностей следует, что, начиная с некоторого $n \ge m$, где $m \in N$, будет выполняться неравенство $\frac{a_{n+1}}{a_n} < g$.

Отсюда вытекает, что

$$a_{m+1} < a_m g$$

$$a_{m+2} < a_{m+1} g < a_m g^2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$a_{m+k} < a_m g^k$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

ряд

$$a_{m+1} + a_{m+2} + \ldots + a_{m+k} + \ldots \qquad (*)$$

сравним с геометрической прогрессией

$$a_m g + a_m g^2 + \ldots + a_m g^k + \ldots$$

которая сходится, так как $0 < g < 1$, значит сходится и ряд (*). Но ряд (*) является m-м остатком ряда (4.8), следовательно, сходится и ряд (4.8).

II. Пусть теперь $p > 1$, тогда начиная с некоторого номера n выполняется неравенство:

$$a_{n+1} \ge a_n,$$

т. е. $\{a_n\}$ – возрастающая, за исключением конечного числа членов, последовательность. Общий член такой последовательности не стремится к нулю и, значит, не выполняется необходимый признак сходимости. То есть ряд расходится.

Замечание. Если предел, указанный в теореме, не существует или $p = 1$, то признак Даламбера не применим.

Теорема 4.7 (Признак Коши). *Если для ряда (4.8) существует предел*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = p,$$

то при $p < 1$ *ряд (4.8) сходится, при* $p > 1$ *расходится.*

Теорема 4.8 (Обобщенный признак Даламбера). *Для того чтобы ряд (4.8) сходился, достаточно, чтобы, начиная с некоторого* N *для всех* $n \geq N$, *отношение* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *было меньше некоторого числа* $g < 1$. *Если* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$, *начиная с некоторого номера* n, *то ряд (4.8) расходится.*

Аналогично формулируется обобщенный признак Коши.

Сравнение признаков Даламбера и Коши

Поставим вопрос: может ли один из этих признаков быть применимым, а другой нет, т. е. может ли случиться, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, а $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = g < 1$, и наоборот?

В теории пределов есть теорема о том, что если существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = g$, то существует и предел $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, также равный g.

Обратное утверждение неверно. Рассмотрим примеры:

Примеры.

1. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = g^3 + g^2 + g^5 + g^4 + g^7 + g^6 + \ldots$$

здесь $0 < g < 1$

$$a_n = \begin{cases} g^n, & \textit{если } n - \textit{четное} \\ g^{n+2}, & \textit{если } n - \textit{нечетное} \end{cases}$$

тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} g^3, & \text{если } n - \text{четное} \\ \dfrac{1}{g}, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, более того, при нечетном n, $\frac{a_{n+1}}{a} > 1$.

Исследуем признак Коши: для четного n имеем $\sqrt[n]{a_n} = g$. Если n – нечетное, то $\sqrt[n]{a_n} = g\sqrt[n]{g^2} = g \cdot g^{\frac{2}{n}}$. Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} g \cdot g^{\frac{2}{n}} = g$. Таким образом при любом стремлении $n \to \infty$, $\sqrt[n]{a_{\text{n}}} \to g < 1$. Ряд сходится.

Рассмотрим пример, когда оба признака в предельной форме не применимы.

2. Дан ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{2^5} + \ldots$$

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{2^n,} & \text{если } n - \text{нечетное} \\ \dfrac{1}{3^n,} & \text{если } n - \text{четное} \end{cases},$$

тогда

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}(\dfrac{3}{2})^n, & \text{если } n - \text{четное} \\ \dfrac{1}{3}(\dfrac{2}{3})^n, & \text{если } n - \text{нечетное} \end{cases}$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ не существует, более того, не существует и числа $g < 1$, такого, чтобы $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le g$.

Таким образом, признак Даламбера ни в какой форме не применим.

Найдем $\sqrt[n]{a_n} = \begin{cases} \dfrac{1}{2}, & \text{если } n - \text{нечетное} \\ \dfrac{1}{3}, & \text{если } n - \text{четное} \end{cases}$

Очевидно, здесь тоже нет $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$, однако при любом n выполняется неравенство $\sqrt[n]{a_n} \le \frac{1}{2} < 1$.

Применим обобщенный признак Коши. Ряд сходится.

Приведенные примеры показывают, что в некотором смысле признак Коши оказывается «сильнее». По-крайней мере, если признак Коши неприменим, то не стоит исследовать ряд по признаку Даламбера.

Теорема 4.9 (Интегральный признак Коши – Маклорена). *Если функция* $f(x)$, *определенная при всех* $x \ge a$ $(a - \text{натуральное число})$, *неотрицательная и монотонно убывает, то ряд* $f(a) + f(a+1) + f(a+2) + ... + f(a+n-1) + ...$ *сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл*

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)dx.$$

3. Исследовать сходимость обобщенного гармонического ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, где α – любое действительное число $\ne 1$ (случай $\alpha = 1$ уже исследован ранее).

Решение: Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, при $x \ge 1$. Ясно, что во всех натуральных числах $x = n$ она совпадает с членами ряда. Далее эта функция неотрицательная и убывает при $x \ge 1$.

Вычислим интеграл

$$\int\limits_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_1^b x^{-\alpha}dx = \lim_{b\to+\infty}\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\bigg|_1^b = \lim_{b\to+\infty}\frac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha} = \begin{cases} +\infty, & \alpha < 1 \\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & \alpha > 1 \end{cases}$$

Таким образом, на основании теоремы 6 делаем вывод: ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ сходится при $\alpha > 1$и расходится, если $\alpha \ge 1$.

Данный ряд часто используют для сравнения с другими рядами.

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2+2n}$

$$a_n = \frac{1}{n^2+2n} < \frac{1}{n^2}$$

Ряд с общим членом $b_n = \frac{1}{n^2}$ сходится, как обобщенный, гармонический, с показателем $\alpha = 2 > 1$.

По признаку сравнения сходится и данный ряд.

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$

Часто допускается ошибка в использовании признака сравнения:

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}} < \frac{1}{\sqrt{n^2}} = \frac{1}{n}$$

Из этого неравенства делают вывод о том, что данный ряд расходится. Ответ верный, однако он никак не следует из приведенного неравенства. В данном примере надо использовать следствие из признака сравнения или, как говорят, признак сравнения в предельной форме.

Рассмотрим ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, он расходится.

Найдем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n(n+2)}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}}{\cancel{n}\sqrt{1+\frac{2}{n}}} = 1.$$

Таким образом $a_n \sim b_n$, следовательно, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)}}$ – расходится.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\ln\ n}{\sqrt[4]{n^5}}$

$$a_n = \frac{\ln\ n}{n^{\frac{5}{4}}} = \frac{\ln\ n}{n^{\varepsilon}} \cdot \frac{1}{n^{\frac{5}{4}-\varepsilon}}, \qquad \varepsilon > 0$$

Рассмотрим $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\varepsilon}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x \cdot \varepsilon \cdot x^{\varepsilon-1}} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x^{\varepsilon}} = 0$, тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} = 0 \Rightarrow \exists N \forall n \geq N \left(\frac{\ln n}{n^{\varepsilon}} < 1 \right).$$

Таким образом, начиная с некоторого номера n выполняется неравенство $a_n < \dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}-\varepsilon}}$

Подберем ε так, чтобы $\dfrac{5}{4}-\varepsilon > 1$, т.е. $0<\varepsilon<\dfrac{1}{4}$.

Из признака сравнения и того, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{5}{4}-\varepsilon}}$ сходится, следует сходимость данного ряда.

4.3. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Рассмотрим ряд, у которого знак его членов может меняться с изменением номера. Такие ряды называют знакопеременными. Остановимся на частном случае, когда знаки членов ряда меняются поочередно: то положительный, то отрицательный. Запишем его в виде

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n-1}u_n + \ldots,\ (u_k > 0) \qquad (4.11)$$

Назовем этот ряд знакочередующимся.

Теорема 4.10 (Лейбница). *Если члены ряда (4.11) убывают по абсолютной величине, т. е.* $u_n \ge u_{n+1}$, *и общий член ряда стремится к нулю* $\lim\limits_{n\to\infty}u_n = 0$, *то ряд (4.11) сходится.*

Доказательство: Рассмотрим последовательность частичных сумм с четными номерами $\{S_{2n}\}$.

$$S_{2n} = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + u_{2n-1} - u_{2n} \qquad (4.12)$$

Покажем, что $\{S_{2n}\}$ не убывает и ограничена сверху. Для этого запишем равенство (4.12) следующим образом:

$$S_{2n} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \ldots + (u_{2n-1} - u_{2n}) \qquad (4.13)$$

$$S_{2n} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \ldots - (u_{2n-2} - u_{2n-1}) - u_{2n} \qquad (4.14)$$

Из (4.13) следует, что $\{S_{2n}\}$ положительна и потому возрастает, т. е. $S_{2n} \le S_{2n+1}$. Из выражения (4.14) и того, что числа в круглых скобках положительны, следует, что $S_{2n} \le u_1$.

Из приведенного доказательства следует, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n} = S$, причем $S = \sup\{S_{2n}\}$.

Далее,

$$S_{2n+1} = S_{2n} + u_{2n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2n} + \lim_{n\to\infty} u_{2n+1} = S$$

Таким образом, при любом стремлении $n \to \infty$, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, т.е. ряд сходится.

Замечание. Если чередование знаков в ряде (4.11) и условие монотонности начинается лишь с некоторого номера n_0, то при выполнении условия $u_n \to 0$ при $n \to \infty$, ряд будет сходится, так как отбрасывание конечного числа членов ряда не меняет его сходимости.

Следствие 1. Если ряд (4.11) сходится и его сумма равна S, то $0 \le S \le u_1$.

Действительно, из доказательства следует, что $S_{2k} \le S$. С другой стороны,

$$S_{2k+1} = S_{2k-1} - (u_{2k} - u_{2k+1}) \le S_{2k-1}$$

т. е. $\{S_{2k-1}\}$ не возрастает, и так как S – предел $\{S_{2k-1}\}$, то $S = \inf\{S_{2k-1}\}$. Тогда $S \le S_{2k-1}$.

Итак, имеем: $S_{2k} \le S \le S_{2k-1}, \quad k = 1, 2, ...$

В частности, при $k = 1$

$$S_2 \le S \le S_1$$

или

$$0 \le u_1 - u_2 \le S \le u_1.$$

***Лемма 1* (Об оценке остатка знакочередующегося ряда).** *Любая частичная сумма S_n ряда (4.11) отличается от его суммы S на величину, меньшую следующего члена u_{n+1}, иначе говоря, абсолютная величина остатка знакочередующегося ряда (4.11) не превосходит модуля первого из отбрасываемых членов ряда (4.11), т. е.*

$$|r_n| = |S - S_n| \le u_{n+1}$$

Действительно, рассмотрим остаток ряда (4.11) с четным номером

$$r_{2k} = u_{2k+1} - u_{2k+2} + u_{2k+3} - u_{2k+4} + ...$$

Мы имеем знакочередующийся ряд, удовлетворяющий теореме Лейбница (см. замечание).

Тогда, по лемме 1, $r_{2k} \le u_{2k+1}$.

Остаток ряда с нечетным номером имеет вид:

$$r_{2k-1} = -u_{2k} + u_{2k+1} - u_{2k+2} + u_{2k+3} - \ldots$$

$$\left| r_{2k-1} \right| = u_{2k} - u_{2k+1} + u_{2k+2} - u_{2k+3} + \ldots$$

Снова имеем знакочередующийся ряд Лейбница, тогда

$$\left| r_{2k-1} \right| \le u_{2k}.$$

Итак, для любого n имеем:

$$\left| r_n \right| \le u_{n+1}.$$

Пусть теперь задан произвольный знакопеременный ряд:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n. \qquad (4.15)$$

Наряду с этим рядом составим ряд n модулей членов ряда (4.15),

$$\left| u_1 \right| + \left| u_2 \right| + \ldots + \left| u_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \right|. \qquad (4.16)$$

Имеет место **теорема 4.11:** *Если ряд (4.16), составленный из абсолютных величин членов ряда (4.15) сходится, то сходится и ряд (4.15).*

Доказательство: Если ряд (3) сходится, то, по критерию Коши,

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N \forall n \ge N (\left| u_n \right| + \left| u_{n+1} \right| + \ldots + \left| u_{n+p} \right| < \varepsilon$$

при любом целом $p \ge 0$.

Очевидно неравенство:

$$\left| u_n + u_{n+1} + \ldots + u_{n+p} \right| \le \left| u_n \right| + \left| u_{n+1} \right| + \ldots + \left| u_{n+p} \right| < \varepsilon.$$

Тогда, по критерию Коши, ряд (4.15) сходится.

Утверждение, обратное указанной теореме, вообще говоря, неверно. Например, рассмотрим ряд:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \qquad (4.17)$$

Для него выполняются все условия теоремы Лейбница, следовательно, он сходится, однако ряд из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$$

гармонический и расходится.

В связи с отмеченными рассуждениями естественно различать характер сходимости произвольного, знакопеременного ряда.

Определение 4.4. Ряд (4.15) называется абсолютно сходящимся, если ряд (4.16) $\sum_{n=1}^{\infty} \left| u_n \right|$ сходится.

Определение 4.5. Если ряд (4.15) сходится, а ряд (4.16) расходится, то говорят, что ряд (4.15) сходится неабсолютно, или условно.

Поскольку ряд (4.16) является знакоположительным, то для установления абсолютной сходимости можно использовать все достаточные признаки (сравнения, Даламбера, Коши).

Переместительное свойство абсолютно сходящихся рядов

Пусть дан числовой ряд:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{4.18}$$

Составим из членов этого ряда новый ряд:

$$b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \tag{4.19}$$

в который входят все члены ряда (4.18) но только в каком-либо другом порядке.

Теорема 4.12. *Если ряд (4.18) абсолютно сходится и имеет сумму S, то ряд (4.19) тоже абсолютно сходится и имеет сумму S. Другими словами, для абсолютно сходящегося ряда его сумма не зависит от порядка следования его членов.*

Доказательство: Рассмотрим ряд

$$|b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| + \ldots \tag{4.20}$$

Его частичную сумму обозначим σ_n:

$$\sigma_n = |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n|.$$

Поскольку ряд (4.18) абсолютно сходится, то обозначим

$$|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = S^* \text{ – конечное число.} \tag{4.21}$$

Члены частичной суммы σ_n содержатся среди слагаемых ряда (4.21), тогда очевидно

$$\sigma_n = |b_1| + |b_2| + \ldots + |b_n| \le |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots = S^*.$$

То есть последовательность частичных сумм σ_n ограничена сверху, а значит ряд (4.20) сходится. Отсюда следует по определению абсолютная сходимость ряда (4.12).

Докажем, что суммы рядов (4.18) и (4.19) одинаковы. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$ и зафиксируем n_0 настолько большим, чтобы неравенство

$$|a_{n_0+1}| + \ldots + |a_{n_0+p}| < \varepsilon \tag{4.22}$$

выполнялось для любого целого $p \ge 0$. (Это возможно в силу критерия Коши и сходимости ряда (4.21)). Оставшиеся числа ряда (4.18) $a_1, a_2, \ldots a_{n_0}$ занимают определенные места в ряде (4.19). Пусть

$N\left(N \geq n_0\right)$ – наибольший из номеров этих мест. Тогда при $n > N$ в разности

$$\delta_n = \left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) - \left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right)$$

члены $a_1, a_2, \ldots, a_{n_0}$ уничтожатся и останутся некоторые члены ряда (4.18), имеющие номера больше, чем n_0. Тогда в силу (4.22) будем иметь:

$$\left|\delta_n\right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad n > N.$$

Отсюда следует, что $\lim\limits_{n\to\infty} \delta_n = 0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\left(a_1 + a_2 + \ldots + a_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(b_1 + b_2 + \ldots + b_n\right) = S,$$

что и требовалось доказать.

Отметим одно интересное свойство знакопеременных рядов.

Лемма 2. *Если ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ абсолютно сходится, то ряды, составленные из его положительных членов $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$ и отрицательных членов $v_1 + v_2 + \ldots + v_n + \ldots$ одновременно сходятся.*

Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится условно, то ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ одновременно расходятся.

Переместительное свойство, справедливое для абсолютно сходящихся рядов, не имеет места для рядов сходящихся условно. Рассмотрим пример:

Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \ldots \qquad (*)$$

условно сходится.

Переставим члены ряда (*) так, чтобы за каждым его положительным членом следовало два отрицательных:

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{4n-2} - \frac{1}{4n} + \ldots \qquad (**)$$

Покажем, что сумма ряда (**) в два раза меньше, чем у ряда (*).

Обозначим сумму ряда (*) через S.

Частичные суммы соответственно S_n и S_n'.

Запишем частичную сумму ряда (**) с номером, кратным трем, и преобразуем ее:

$$S'_{3n}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{1}{2}S_{2n}$$

S_{2n} – частичная сумма ряда (*) с четным номером. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n}=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}S_{2n}=\frac{1}{2}S\,.$$

Последовательности с номерами, не делящимися на три, также сходятся к сумме $\frac{1}{2}S$. Действительно,

$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(S'_{3n}+\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{1}{2}S$$
$$\lim_{n\to\infty}S'_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(S'_{3n}+\frac{1}{2n+1}-\frac{1}{4n+2}\right)=\frac{1}{2}S$$

Итак, при любом n $\lim\limits_{n\to\infty}S'_{n}=\frac{1}{2}S$.

Для условно сходящихся рядов справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.13 (Римана). *В любом неабсолютно сходящемся ряде можно так переставить его члены, чтобы вновь полученный ряд имел наперед заданную сумму. Более того, можно так переставить члены такого ряда, чтобы новый ряд вообще расходился.*

В заключение отметим свойства абсолютно сходящихся рядов.

Теорема 4.14. *Если ряд (4.18) абсолютно сходится и c – какое-либо число, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ca_n$ также абсолютно сходится.*

Теорема 4.15. *Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ абсолютно сходятся, то и их сумма $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(u_n+v_n)$ является абсолютно сходящимся рядом.*

Определение 4.6. Пусть даны два ряда

$$u_1+u_2+\ldots+u_n+\ldots \tag{4.23}$$
$$v_1+v_2+\ldots+v_n+\ldots \tag{4.24}$$

Ряд, составленный из всевозможных попарных произведений $u_n \cdot v_m$ членов этих рядов, называется их *произведением*. Обозначим его

$$W_1 + W_2 + \ldots + W_n + \ldots \tag{4.25}$$

Теорема 4.16. *Если ряды (4.23) и (4.24) абсолютно сходятся и имеют суммы* u и v *соответственно, то ряд (4.25) также абсолютно сходится и его сумма* $W = u \cdot v$.

На практике удобно произведение рядов (4.23) и (4.24) строить по правилу «постоянной суммы индексов»:

$$W = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \cdot \sum_{n=1}^{\infty} v_n = u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + \ldots$$

$$+(u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \ldots + u_{n-1} v_2 + u_n v_1) + \ldots$$

Для условно сходящихся рядов теорема 3 не выполняется. Например, ряд

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} + \ldots.$$

сходится условно, а ряд, представляющий произведение этого ряда на себя, расходится. (Проверьте самостоятельно).

Таким образом, абсолютно сходящиеся ряды обладают всеми основными свойствами конечных сумм, тогда как условно сходящиеся ряды некоторыми из этих важных свойств не обладают. В связи с этим практическое применение этих рядов сильно ограничено.

4.4. Функциональные последовательности и ряды. *Равномерная сходимость*

Рассмотрим некоторую последовательность функций $\{ f_n(x) \}, n = 1, 2, 3, \ldots$

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots \tag{4.26}$$

заданных на множестве E. При каждом $x_0 \in E$ последовательность значений функций

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots, f_n(x_0) \tag{4.27}$$

является числовой и относительно нее можно ставить вопрос сходимости. Если последовательность (4.27) сходится, то точку x_0 называют точкой сходимости функциональной последовательности (4.26), а множество точек сходимости $D \subset E$, называют областью сходимости.

Пусть $x_0 \in D$, тогда числу x_0 соответствует единственное число $y_0 = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x_0)$. Этим самым на множестве D определяется некоторая функция $f(x)$, которую назовем предельной функцией последовательности $\{f_n(x)\}$ и будем записывать

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x), \quad x \in D.$$

Примеры.

1. $f_n(x) = \dfrac{1}{x^2+n}$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^2+n} = 0$$

Таким образом, $\left\{\dfrac{1}{x^2+n}\right\}$ сходится для всех $x \in (-\infty;+\infty)$ к функции $f(x)=0$.

$$y = \frac{1}{x^2+n}, \quad n = 1,2,3,\ldots$$

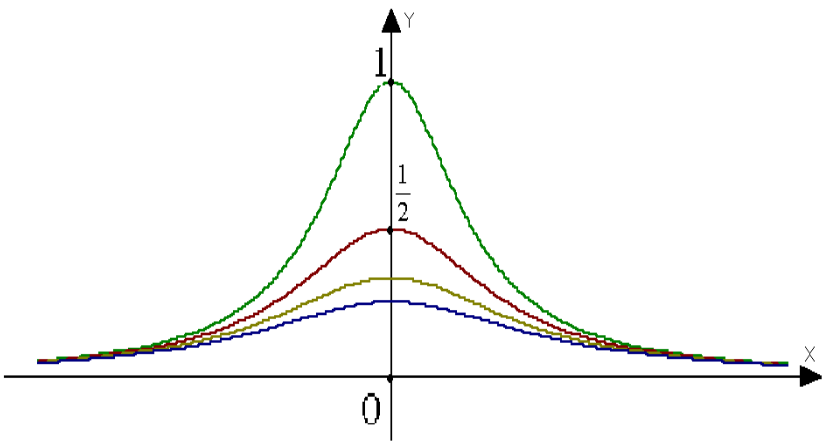


Рисунок 4.1

2. $f_n(x) = \dfrac{n^2x^2+1}{nx^2+n^2}$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2x^2+1}{nx^2+n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n}^2\left(x^2+\dfrac{1}{n^2}\right)}{\cancel{n}^2\left(\dfrac{x^2}{n}+1\right)} = x^2$$

Область сходимости $(-\infty;+\infty)$, $\quad f(x) = x^2$.

3. $f_n(x) = nx$

Эта последовательность сходится только в одной точке $x = 0$.

4. $f_n(x) = x^n$

Если $|x| > 1,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = \infty,$

Если $|x| > 1,$ то $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = 0,$ при $x = -1$ $\{(-1)^n\}$ – расходится, при $x = 1, \{x^n\}$ - сходится к числу 1.

Таким образом, областью сходимости $\{x^n\}$ является полуинтервал $(-1, 1]$, предельная функция

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

$$y = x^n, n = 1, 2, 3, 4, \ldots$$

$$x \in [0, 1]$$

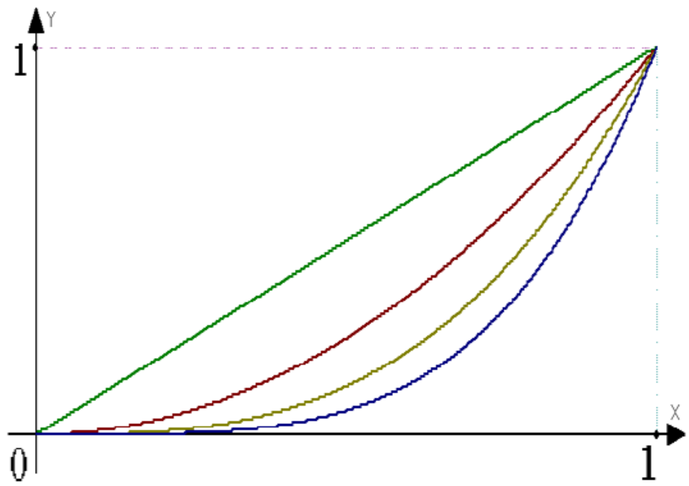


Рисунок 4.2

Определенное выше понятие сходимости $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ называют часто *поточечной сходимостью*, т.е. при каждом $x_0 \in D$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall\varepsilon} \exists N(\varepsilon, x_0) \ \ \forall n \geq N\left(\left|f_n(x_0) - f(x_0)\right| < \varepsilon\right).$$

При переходе к другой точке $x \in D,$ для данного $\varepsilon > 0$ возможен другой номер $N,$ начиная с которого выполняется неравенство

$$\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon. \qquad (*)$$

И если точек во множестве D бесконечно много, то и номеров N также может быть бесконечно много. Возникает вопрос: существует ли последовательности $\left\{ f_n(x) \right\}$, такие, чтобы по произвольно заданному $\varepsilon > 0$ можно было указать натуральное число N, одно и то же для всех $x \in D$, такое, чтобы при $n > N$ выполнялось неравенство (*) одновременно для всех $x \in D$?

Ответ на этот вопрос положительный. Например, последовательность $\left\{ \dfrac{1}{x^2 + n} \right\}$ имеет предельную функцию $f(x) = 0$. Тогда

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| = \left| \frac{1}{x^2 + n} \right| \le \frac{1}{n},$$

для любого $\varepsilon > 0$, решая неравенство $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$, находим натуральное число $N = \left[\dfrac{1}{\varepsilon} \right]$.

Очевидно, при $n > N$

$$\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon$$

для всех $x \in (-\infty; +\infty)$.

Определение 4.7. Пусть заданы последовательность функций $\left\{ f_n(x) \right\}$ и функция $f(x)$ на некотором множестве E. Будем говорить, что указанная последовательность сходится к функции f равномерно на множестве E, если условие

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall \varepsilon} \quad \exists N(\varepsilon) \forall n > N(\varepsilon) \quad \left(\left| f_n(x) - f(x) \right| < \varepsilon \right) \tag{4.28}$$

выполняется одновременно для всех $x \in E$.

Последовательность $f_n(x)$ называется равномерно сходящейся на множестве E, если на этом множестве существует функция $f(x)$, к которой $\left\{ f_n(x) \right\}$ сходится равномерно. Обозначают: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, для обычной сходимости используют обозначение: $f_n(x) \to f(x)$.

Легко видеть, что если $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, то и $f_n(x) \to f(x)$.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию равномерной сходимости. Пусть на некотором промежутке $[a, b]$ функциональная последовательность $\left\{ f_n(x) \right\}$ сходится равномерно к $f(x)$. Тогда по любому $\varepsilon > 0$ найдется $N = N(\varepsilon)$, такое, что при $n > N$ выполняется неравенство $f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$. Геометрически это означает, что начиная с некоторого номера графики всех функций $f_n(x)$ на $[a,b]$ не выходят за пределы полоски с границами $f(x)-\varepsilon,\ f(x)+\varepsilon$.

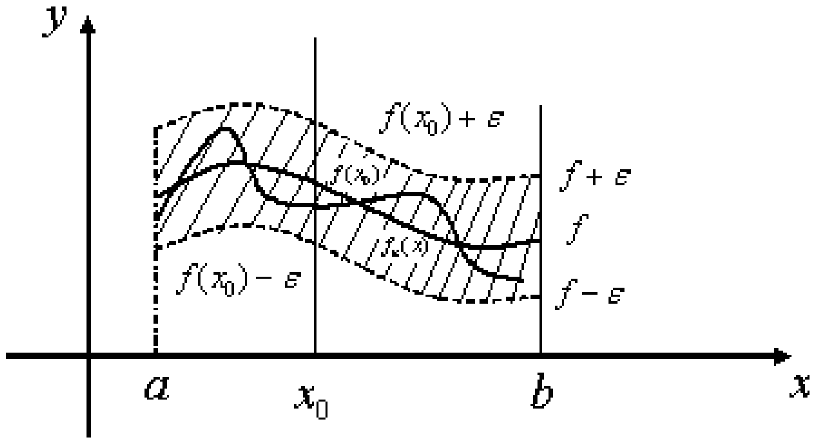


Рисунок 4.3

Пример. Рассмотрим последовательность $\{x^n\}$ $x\in[0,1]$. Эта последовательность сходится к функции

$$f(x)=\begin{cases}0, & 0\le x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$$

1. Докажем, что эта сходимость неравномерная. Допустим противное. Положим, что по каждому $\varepsilon>0$, например $0<\varepsilon<\frac{1}{2}$, можно найти $N=N(\varepsilon)$, что при всех $n>N$ будет выполняться $\left|f_n(x)-f(x)\right|<\varepsilon$, т. е. $\left|x^n-f(x)\right|<\varepsilon$ для всех $x\in[0,1]$ одновременно. Зафиксируем одно из таких n. Точка $x_0=\sqrt[n]{2\varepsilon}$ принадлежит $[0,1]$.

Действительно, так как $\varepsilon<\frac{1}{2}$, то $2\varepsilon<1$ и $0<\sqrt[n]{2\varepsilon}<1$.

Тогда должно быть: $\left|f(x_0)-x_0^n\right|<\varepsilon$, однако $\left|0-x_0^n\right|=2\varepsilon>\varepsilon$. Получили противоречие.

2. Рассмотрим теперь $\{x^n\}$ на $[0,g]$, $g<1$.

Покажем, что в этом случае $x^n \rightrightarrows 0$.

Действительно, предельной функцией очевидно является $f(x)=0$ и

$$\left|f_n(x)-f(x)\right|=x^n\le g^n \quad (0<g<1).$$

Подберем $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln g}$, тогда $g^n<\varepsilon$ для любых $x\in[0,g]$.

При этом

$$N = \left[\frac{\ln \varepsilon}{\ln g} \right], \quad \text{если } \frac{\ln \varepsilon}{\ln g} \geq 1 \quad \text{и}$$

$$N = 1, \quad \text{если } \frac{\ln \varepsilon}{\ln g} < 1.$$

Читателю полезно геометрически проанализировать причину неравномерной сходимости $\{x^n\}$ на $[0,1]$.

Составим теперь символ

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x), \tag{4.29}$$

где $\{u_n(x)\}$ – некоторая функциональная последовательность, заданная на множестве E.

Будем называть этот символ функциональным рядом, а члены последовательности $u_n(x)$ – членами ряда.

Суммы $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x), n = 2,3,\ldots,$ а также функцию $S_1(x) = u_1(x)$ называют частичными суммами ряда (4.29).

Определение 4.8. Если последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм сходится на некотором множестве D к функции $S(x) = \lim_{n \to \infty} S_n(x)$, то ряд (4.29) называется *сходящимся* на множестве D, а функция $S(x)$ называется его суммой. При этом множество D называют *областью сходимости ряда* (4.29).

Для каждой функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ существует ряд, для которого она является последовательностью его частичных сумм. Члены этого ряда определяются однозначно:

$$u_1(x) = f_1(x), \quad u_n(x) = f_n(x) - f_{n-1}(x), \quad n = 2,3,\ldots$$

$$S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \ldots + u_n(x) = f_1(x) + f_2(x) - f_1(x) +$$
$$+ f_3(x) - f_2(x) + \ldots + f_n(x) - f_{n-1}(x) = f_n(x)$$

Это обстоятельство дает возможность всякую теорему, доказанную для функционального ряда, перефразировать для функциональной последовательности, и наоборот.

Далее, поскольку в каждой точке x_0 области сходимости ряд (4.29) представляет собой сходящийся числовой ряд, то легко понять справедливость следующих свойств:

1. Если все члены ряда (4.29) умножить на отличное от нуля

число или на одну и ту же величину, не принимающую в области сходимости ряда значения, равного нулю, то новый ряд будет иметь ту же область сходимости.

2. Отбрасывание и приписывание в ряде (4.29) нескольких членов не меняют области сходимости этого ряда.

Определение 4.9. Функциональный ряд (4.29) называют *абсолютно сходящимся в точке* $x_0 \in D$, если сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\left|u_n\left(x_0\right)\right|$

Ряд (4.29) называют абсолютно сходящимся на множестве D, если он абсолютно сходится в каждой точке множества D.

Для установления абсолютной сходимости часто используют признаки Даламбера и Коши.

Примеры.

1. Пусть дан ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Общий член ряда $u_n(x)=\dfrac{x^n}{n!}$.

Применяя признак Даламбера, получили:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|u_{n+1}(x)\right|}{\left|u_n(x)\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1}=0.$$

Таким образом, ряд сходится абсолютно на всей числовой прямой. В дальнейшем будет показано, что сумма этого ряда равна e^x.

2. Рассмотрим ряд

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2}+\ldots+\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}+\ldots$$

Он представляет для каждого $x\neq 0$ сумму геометрической прогрессии со знаменателем

$$g=\frac{1}{1+x^2},\quad 0<g<1$$

и в этом случае сумма ряда легко вычисляется:

$$S(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2}}=1+x^2,\quad x\neq 0.$$

Если $x=0$, то все члены ряда нули и $S(0)=0$.

Таким образом, на всей числовой прямой ряд сходится к функции

$$S(x)=\begin{cases}0, & \text{для } x=0\\ 1+x^2, & \text{для } x\neq 0\end{cases}$$

Обратим внимание на то, что члены ряда – непрерывные функции, в то время как сумма его является разрывной в точке $x=0$, т.е. $\lim\limits_{x\to 0}S(x)\neq S(0)$.

Таким образом, для функционального ряда может оказаться не выполнимо свойство

$$\lim_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to x_0}u_n(x),$$

справедливое для конечного числа слагаемых.

Так же, как и для числовых рядов, определим остаток ряда (4.29) как ряд вида

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}u_k(x)=u_{n+1}(x)+u_{n+2}(x)+\ldots+u_{n+m}(x)+\ldots$$

Он сходится тогда и только тогда на множестве D, если на этом множестве сходится данный ряд (4.29). Если в этом случае его сумму обозначить $r_n(x)$, то

$$S(x)=S_n(x)+r_n(x).$$

Отсюда следует, что

$$\lim_{n\to\infty}r_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left[S(x)-S_n(x)\right]=0$$

Определение 4.10. Пусть на некотором множестве ***D*** функциональный ряд

$$U_1(x)+U_2(x)+\ldots+U_n(x)+\ldots \tag{4.30}$$

сходится и имеет сумму $S(x)$. Ряд (4.30) называют *равномерно сходящимся к функции* $S(x)$ *на множестве D*, если на этом множестве равномерно сходится к $S(x)$ последовательность его частичных сумм $\{S(x)\}$,

$$S_n(x)\rightrightarrows S(x),\ x\in D. \tag{4.31}$$

Используя остаток ряда $r_n(x)=S(x)-S_n(x)$, условие (4.31) можно переписать в виде $r_n(x)\rightrightarrows 0,\ x\in D$.

Отсюда следует, что для того чтобы функциональный ряд (4.30) равномерно сходился на множестве D, необходимо и достаточно, чтобы условие $\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon)\left(\left|r_n(x)\right| < \varepsilon\right)$ выполнялось для всех $x \in D$ одновременно.

Другим критерием равномерной сходимости ряда (4.30) может служить критерий Коши.

Теорема 4.7. *Эля того, чтобы ряд* $U_1(x) + U_2(x) + \ldots + U_n(x) + \ldots$ равномерно сходился на множестве *D*, необходимо и достаточно, чтобы условие

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N\left(\left|U_n(x) + U_{n+1}(x) + \ldots + U_{n+p}(x)\right| < \varepsilon\right) \tag{4.32}$$

выполнялось одновременно для всех $x \in D$.

В этой теореме предикат можно заменить неравенством $\left|S_{n+p}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$.

Из теоремы 1 легко выводится необходимое условие равномерной сходимости:

Если ряд (4.29) равномерно сходится на множестве D, то

$$U_n(x) \Rightarrow 0, \text{ на } D. \tag{4.33}$$

Сформулируем и докажем достаточный признак равномерной сходимости.

Теорема 4.8 (Признак Вейерштрасса). *Пусть даны два ряда: функциональный (4.29), членами которого являются функции* $U_n(x)$, определённые на множестве *D*, и числовой

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \ a_n \geq 0, \ n = 1, \ 2, \ldots \tag{4.34}$$

Если ряд (4.34) сходится и

$$\left|U_n(x)\right| \leq a_n, \ n = 1, \ 2, \ldots, \tag{4.35}$$

то ряд (4.30) абсолютно и равномерно сходится.

Иногда ряд (4.34) называют *мажорантным*, а при выполнении условия (4.35), функциональный ряд (4.30) называют *мажорируемым*. Тогда краткое содержание *теоремы 2* можно выразить фразой: *если функциональный ряд (4.30) мажорируем на множестве* ***D****, то он сходится на этом множестве абсолютно и равномерно.*

Доказательство теоремы: Абсолютная сходимость, в случае сходимости ряда (4.34), сразу следует из принципа сравнения. Докажем равномерную сходимость ряда (4.30).

Если ряд (4.34) сходится, то в силу критерия Коши $\forall\varepsilon>0\exists N(\varepsilon)\forall n\ge N(\varepsilon)\left(\sum_{k=n}^{n+p}a_k<\varepsilon\right)$ при любом целом $p\ge 0$. Отсюда следует, что

$$\left|\sum_{k=n}^{n+p}U_k(x)\right|\le\sum_{k=n}^{n+p}\left|U_k(x)\right|\le\sum_{k=n}^{n+p}a_n<\varepsilon$$

для всех $n\ge N(\varepsilon)$, $p\ge 0$ и всех $x\in D$. Поэтому в силу *Критерия Коши* (теорема 1) ряд (4.30) сходится равномерно на множестве D.

Пример. Рассмотрим снова ряд

$$1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+...+\frac{x^n}{n!}+... \tag{4.36}$$

Этот ряд сходится равномерно на любом сегменте $[-h,\ h]$. Действительно, $\forall x\in[-h,\ h]\left(\left|\frac{x^n}{n!}\right|\le\frac{h^n}{n!}\right)$, $h>0$. С помощью *признака Даламбера* легко установить сходимость положительного числового ряда $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{h^n}{n!}$. Поэтому из *признака Вейерштрасса* следует равномерная сходимость при $|x|\le h$.

Покажем, что на всей числовой прямой ряд не сходится равномерно. При любом фиксированном $n=n_0$

$$\lim_{|x|\to+\infty}\left|\frac{x^{n_0}}{n_0!}\right|=+\infty.$$

Поэтому, если задано $\varepsilon>0$, то, каково бы ни было $n>n_0$, можно подобрать x_0 так, чтобы $\left|\frac{x_0^{\ n_0}}{n_0!}\right|>\varepsilon$. Это противоречит необходимому условию равномерной сходимости ряда.

Отметим важнейшие свойства равномерно сходящихся функциональных рядов и последовательностей.

Теорема 4.9 (О непрерывности суммы ряда). *Если функции $U_n(x)$ непрерывны на множестве D и ряд $\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ равномерно сходится на D, то его сумма $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}U_n(x)$ также непрерывна на множестве D.*

Теорема 4.10 (О непрерывности предельной функции). *Если функции* $f_n(x),\ n=1,\ 2,...$ *непрерывны на множестве D и* $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ *на D, то* $f(x)$ *– непрерывная функция на множестве D.*

Теорема 4.11 (О почленном интегрировании ряда). *Пусть функции* $U_n(x),\ n=1,\ 2,...$ *непрерывны на* $[a,\ b]$ *и ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *равномерно сходится на* $[a,\ b]$ *к функции* $S(x)$. *Тогда для любой точки* $C \in [a,\ b]$ *ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} \int_C^x U_n(t)dt$ *также равномерно сходится на* $[a,\ b]$ *и*

$$\int_C^x S(t)dt = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(t)dt \tag{4.37}$$

Равенство (4.36) можно записать иначе:

$$\int_C^x \left[\sum_{n=1}^{\infty} U_n(t) \right] dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C^x U_n(t)dt \tag{4.38}$$

Теорема 4.12. *Если* $\{ f_n(x) \}$ *непрерывных на* $[a,\ b]$ *функций равномерно сходится на этом сегменте к* $f(x)$, *то, какова бы ни была точка* $C \in [a,\ b]$,

$$\int_C^x f_n(t)dt \rightrightarrows \int_C^x f(t)dt$$

в частности,

$$\lim_{n\to\infty} \int_C^x f_n(t)dt = \int_C^x \left[\lim_{n\to\infty} f_n(t) \right] dt.$$

Теорема 4.13. *Пусть функции* $U_n(x),\ n=1,\ 2,...$ *непрерывно дифференцируемы на* $[a,\ b]$ *и ряд, составленный из их производных* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$, *равномерно сходится на отрезке* $[a,\ b]$. *Тогда, если ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *сходится хотя бы в одной точке* $C \in [a,\ b]$, *то он сходится равномерно на всём сегменте* $[a,\ b]$, *его сумма* $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n(x)$ *непрерывно дифференцируема и* $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n'(x)$.

Теорема 4.14. *Пусть последовательность непрерывно дифференцируемых функций* $f_n(x)$, $n=1, 2,\ldots$ *сходится хотя бы в одной точке* $C\in[a, b]$, *а последовательность их производных* $f_n'(x)$ *равномерно сходится на* $[a, b]$. *Тогда* $\{f_n(x)\}$ *равномерно сходится на* $[a, b]$, *её предел является непрерывно дифференцируемой функцией на* $[a, b]$ *и*

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x)=\left[\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right]', \ a\le x\le b.$$

4.5. Разложение функций в степенной ряд Тейлора. Критерий разложимости. Достаточное условие разложимости. Ряды Тейлора показательной и тригонометрических функций. Биномиальный ряд

Определение 4.11. Говорят, что *функция* $f(x)$ *разлагается на данном промежутке* L *в степенной ряд*, если существует такой степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$, который на промежутке L сходится к функции $f(x)$, т. е.

$$f(x)=a_0+a_1(x-a)+a_2(x-a)^2+\ldots+a_n(x-a)^n+\ldots \quad (4.39)$$

Теорема 4.15. *Если в некоторой окрестности точки a,* $(a-r, a+r)$, *функция* $f(x)$ *имеет разложение в степенной ряд (4.39), то это разложение единственно, при этом* $a_0=f(a),\ a_n=\dfrac{f^n(a)}{n!},\ n=1,2,\ldots.$

Доказательство: Поскольку в $(a-r, a+r)$ ряд (4.39) сходится в $f(x)$, то его можно дифференцировать сколь угодно раз, при этом интервал сходимости не меняется. Значит, и функция $f(x)$ является бесконечно дифференцируемой в данном интервале. Поэтому имеем

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-a)+3a_3(x-a)^2+\ldots+na_n(x-a)^{n-1}+\ldots$$

$$f''(x)=1\cdot 2\cdot a_2+2\cdot 3\cdot a_3(x-a)+3\cdot 4a_4(x-a)^2+\ldots+n(n-1)a_n(x-a)^{n-2}+\ldots$$

…………………………………………………………………

$$f^{(n)}(x)=n(n-1)\ldots 2\cdot 1\cdot a_n+(n+1)n(n-1)\ldots 2a_{n+1}(x-a)+\ldots$$

…………………………………………………………………..

Полагая $x = a$, получим:

$$f(a) = a_0$$
$$f'(a) = 1 \cdot a$$
$$f''(a) = 1 \cdot 2 \cdot a_2 = 2!a_2$$
$$f'''(a) = 1 \cdot 2 \cdot 3a_3 = 3!a_3$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$f^{(n)}(a) = n!a_n$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Отсюда

$$a_0 f(a),\ a_1 = \frac{f'(a)}{1!},\ a_2 = \frac{f''(a)}{2!}, \ldots,\ a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}, \ldots$$

Таким образом, коэффициенты ряда (4.39) однозначно определяются значениями производных функций $f(x)$ в точке ***a***, отсюда и следует утверждение теоремы.

Определение 4.12. Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки $x = a$ и имеет в этой точке производные всех порядков. Тогда ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \tag{4.40}$$

называется *рядом Тейлора функции* $f(x)$ *в точке* $x = a$. Будем записывать

$$f(x) \sim f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \ldots$$

В частности, при $a = 0$

$$f(x) \sim f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots \tag{4.41}$$

Этот ряд часто называют рядом Маклорена функции $f(x)$.

Теорему 1 можно теперь перефразировать следующим образом: если функция $f(x)$ разлагается в окрестности точки a в степенной ряд, то он непременно будет её рядом Тейлора. Однако не для всякой функции её ряд Тейлора сходится к этой же функции. Рассмотрим классический пример:

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}},\ x \neq 0 \\ 0,\ x = 0 \end{cases}$$

При $x \neq 0$ эта функция имеет производные всех порядков, которые легко вычисляются:

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}},$$

$$f''(x) = -\frac{6}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{4}{x^6} e^{-\frac{1}{x^2}} = P_6\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$$

и вообще $f^{(n)}(x) = P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}}$, где $P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right)$ – многочлен степени $3n$ относительно $\frac{1}{x}$. Таким образом, $f^{(n)}(x)$ есть линейная комбинация слагаемых вида $\frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}}$, $m = 0,\ 1,\ 2, \ldots$.

Покажем, что $f(x)$ бесконечно дифференцируема и в точке $x = 0$, и вычислим в этой точке все её производные.

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} \right| = \lim_{t \to +\infty} \frac{t^{m/2}}{e^t} = 0$$

Здесь $t = \frac{1}{x^2}$, а предел вычислен по правилу Лопиталя. Тогда для всякого многочлена $P_k\left(\frac{1}{x}\right) = a_0 + a_1 \frac{1}{x} + \ldots + a_k \frac{1}{x^k}$

$$\lim_{x \to 0} \left[P\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right] = \sum_{m=0}^{k} \lim_{x \to 0} \left[a_m \frac{1}{x^m} e^{-\frac{1}{x^2}} \right] = 0.$$

Пользуясь определением производной, найдем

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x^2}} \right) = 0.$$

Допустим, что $f^{(n)}(0) = 0$, тогда

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{n}(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \left[P_{3n}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x^2}} \right] = 0.$$

Из теоремы индукции следует, что все производные функции f в точке $x = 0$ существуют и равны нулю, т. е. ряд Тейлора сходится на $(-\infty; +\infty)$ к нулю, в то время как $f(x) \neq 0$.

Из этого примера следует, что две различные функции могут иметь один и тот же ряд Тейлора на одном и том же промежутке.

Например, если некоторая функция разлагается в ряд Тейлора $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-a)^n$, то тот же ряд в точке a имеет и функция $\varphi(x) - f(x)$, где $f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{(x-a)^2}}, \ x \neq a \\ 0, \ x = a \end{cases}$.

Далее, функция $\phi(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, например, бесконечно дифференцируема на $(-\infty;+\infty)$, а её ряд Тейлора в окрестности точки $x=0$ есть $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$. Но этот ряд сходится к $\dfrac{1}{1+x^2}$ только в интервале (-1, 1). Здесь значение функции и суммы её ряда Тейлора совпадают только на части области, в которой $\phi(x)$ бесконечно дифференцируема.

Возникает вопрос об условиях сходимости ряда Тейлора к функции $f(x)$ на некотором интервале. Чтобы ответить на этот вопрос, запишем формулу Тейлора для функции $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k!}^{n} \frac{f^{(n)}(a)}{k!}(x-a)^k + r_n(x) \tag{4.42}$$

где $r_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора. Если $S_n(x) = \sum_{k!}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ частичная сумма ряда (4.40), то

$$f(x) = S_n(x) + r_n(x) \tag{4.43}$$

Теорема 4.16. *Для того, чтобы ряд Тейлора (4.40) функции* $f(x)$ *сходился к ней в некотором интервале* $(a-r,\ a+r)$, *необходимо и достаточно, чтобы остаточный член* $r_n(x)$ *формулы Тейлора (4.42) стремился к нулю при всех* $x \in (a-r,\ a+r)$, *когда* $n \to \infty$.

Доказательство легко следует из формулы (4.43).

Отметим без доказательства теорему об остаточном члене формулы Тейлора.

Теорема 4.17. *Пусть функция* $f(x)$ *определена и непрерывна вместе со всеми своими производными до* $(n+1)$*-го порядка включительно на интервале* $(a-h,\ a+h)$, $h>0$. *Тогда остаточный член* $r_n(x)$ *её формулы Тейлора (4.42) для всех* $x \in (a-h,\ a+h)$ *можно записать в следующих трёх видах:*

1) интегральная форма:

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_a^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t)dt\,; \qquad (4.44)$$

2) форма Лагранжа:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1},\ \text{где } |\xi-a|<|x-a|; \qquad (4.45)$$

3) форма Коши:

$$r_n(x)=\frac{f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]}{n!}(1-\theta)^n(x-a)^{n+1} \qquad (4.46)$$

Теорема 4.18. *Пусть функция* $f(x)$ *и все её производные ограничены в совокупности на интервале* $(a-h,\ a+h)$*, т. е. существует такая постоянная* $M>0$*, что для всех* $x\in(a-h,\ a+h)$ *и всех* $n=0,1,2,...$ *выполняется неравенство* $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$. *Тогда на интервале* $(a-h,\ a+h)$ *функция* f *раскладывается в ряд Тейлора, т. е.*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,\ \ |x-a|<h. \qquad (4.47)$$

Доказательство: Заметим, что для любого числа b,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b^n}{n!}=0 \qquad (*)$$

Действительно, по признаку Даламбера легко доказать, что ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{b^n}{n!}$ сходится, тогда из необходимого признака следует (*).

Теперь, используя форму Лагранжа (4.45), оценим остаточный член формулы Тейлора (4.42):

$$|r_n(x)|=\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\right|\le M\cdot\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}<M\cdot\frac{h^{n+1}}{(n+1)!},$$

но $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{h^{n+1}}{(n+1)!}=0$. Тогда и $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$.

На основании теоремы 2 делаем вывод о разложимости функции f в ряд Тейлора (4.47).

Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора

1. $f(x)=e^x$

Так как $f^{(n)}(x)=e^x$, то для любого фиксированного $h>0$ при всех $x\in(-h,h)$ и всех $n=0,1,2,...$

$$0 < f^{(n)}(x) < e^h.$$

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4, поэтому e^x разлагается в ряд по степеням x, который имеет вид:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + ... + \frac{x^n}{n!} + ... = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Это разложение справедливо на любом конечном интервале, а значит и на всей числовой прямой.

2. $f(x) = Sinx$; $f(x) = Cosx$

Заметим, что

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin(x + \pi)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right)$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin(x + 2\pi)$$

…………………………………

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right), n = 0,1,2,...$$

Поэтому $\left|f^{(n)}(x)\right| = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}n\right)\right| \le 1$ для всех $x \in (-\infty; +\infty)$. Тогда по теореме 4 функция $Sinx$ разлагается в ряд Тейлора в окрестности $x = 0$. Заметим, что

$$f(0) = 0,\ f'(0) = 1,\ f''(0) = 0,\ f'''(0) = -1,\ f^{IV}(0 = 0), \text{ и т. д.,}$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, n = 2k, k = 0,1,2,... \\ (-1)^{k+1}, n = 2k-1, k = 1,2,... \end{cases}$$

Таким образом, $Sinx = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + ... + \frac{(-1)^n \cdot x^{2n+1}}{(2n+1)!} + ...$

Рассуждая совершенно аналогично, получим формулу разложения функции $Cosx$:

$$Cosx = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + ... + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + ...$$

3. Биномиальный ряд

Функцию вида $(1+x)^\alpha$ называют *биномом* или *биномиальной*.

Нетрудно получить

$$f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n},\ \alpha\in R,\ n=1,2,3,...$$

Тогда формула Тейлора в точке $x=0$ имеет вид:

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+r_n(x) \quad (4.48)$$

А соответствующий ряд Тейлора

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n, \quad (4.49)$$

называют *биноминальным рядом* с показателем α.

Если α – целое неотрицательное число, $\alpha=m$, то ряд (11) содержит лишь конечное число слагаемых:

$$(1+x)^m=1+mx+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+...+\frac{m(m-1)...(m-k+1)}{k!}x^k+...+x^m,$$

следовательно, сходится при всех x. Рассмотрим случай, когда α не является целым неотрицательным числом. В этом случае при $x\neq 0$ все члены ряда отличны от нуля.

Применим к ряду (4.49) признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}}{U_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)\cdot n!\cdot x^{n+1}}{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)\cdot(n+1)!\cdot x^n}\right|=|x|\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|=|x|$$

Получаем, что ряд абсолютно сходится при $|x|<1$ и расходится при $|x|>1$. Для того, чтобы доказать, что сходится он именно к $(1+x)^{\alpha}$, надо показать, что $r_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$ в формуле (4.48).

Запишем остаточный член $r_n(x)$ в формуле Коши:

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1}}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1},\ 0<\theta<1$$

Покажем

$$A_n(x)=\frac{(\alpha-1)...\left[(\alpha-1)-(n-1)\right]}{n!}x^n$$

$$B_n(x)=\alpha x(1+\theta x)^{\alpha-1},\ C_n(x)=\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n.$$

Тогда $r_n(x)=A_n(x)\cdot B_n(x)\cdot C_n(x)$.

$A_n(x)$ – общий член биноминального ряда с показателем $(\alpha-1)$. Поскольку ряд (4.49) сходится при $|x|<1$, то $A_n(x)\to 0$ при $n\to\infty$. Далее, очевидно неравенство: $1-|x|<1+\theta x<1+|x|$. Тогда

$$\left|\alpha x(1-|x|)\right|^{\alpha-1} < \left|B_n(x)\right| < \left|\alpha x(1+|x|)\right|^{\alpha-1},$$

т. е. $\left|B_n(x)\right|$ ограничено при любом n.

Наконец,

$$\left|C_n\left(x\right)\right| = \left|\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right|^n \le \left|\frac{1-\theta}{1-\theta|x|}\right|^n < 1$$

также ограниченная функция для любого n на $(-1;1)$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{x\to\infty} r_n\left(x\right) = 0$. Таким образом, справедливо равенство: $\left(1+x\right)^{\alpha} = 1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)...\left(\alpha-n+1\right)}{n!}x^n, |x| < 1.$

Упражнения. Докажите, что

1) при $x = 1, \alpha > -1$, ряд (4.49) сходится, а при $\alpha \le -1$ – расходится;

2) при $x = -1$, а при $\alpha \ge 0$ – ряд (4.49) абсолютно сходится, а при $\alpha < 0$ – расходится.

При этом каждый раз, когда он сходится, его суммой будет $\left(1+x\right)^{\alpha}$.

4.6. Степенные ряды в комплексной области. Теорема Абеля. Круг сходимости

Определение 4.13. Функциональные ряды вида

$$a_0 + a_1\left(z - z_0\right) + a_2\left(z - z_0\right)^2 + ... + a_n\left(z - z_0\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(z - z_0\right)^n,$$

где a_n, $n = 0, 1, 2, ..., z_0$ – заданные комплексные числа, а z – комплексная переменная, называются *степенными рядами*. Числа $a_n, n = 0, 1, 2, ...$ называются *коэффициентами ряда*.

Не нарушая общности, в дальнейшем будем рассматривать ряды вида:

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + ... + a_n z^n + ... = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \qquad (4.50)$$

Теорема 4.19 (Абеля). *Если степенной ряд (4.50) сходится в точке* $z = z_0 \ne 0$*, то он сходится, и притом, абсолютно при любом* z*, для которого* $|z| < |z_0|$.

Доказательство: Пусть ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n$, сходится, тогда общий член $a_n z_0^n$ стремится к нулю при $n \to \infty$, поэтому $\{a_n z_0^n\}$ ограничена, то есть существует число М >0, такое, что $|a_n z_0^n| \le M$, $n = 0,1,2,...$.

Оценим модуль общего члена ряда (4.50)

$$|a_n z^n| = |a_n z^n| \cdot \left|\frac{z}{z_0}\right|^n \le M \left|\frac{z}{z_0}\right|^n.$$

Если $|z| < |z_0|$, то ряд $\sum_{n=0}^{\infty} \left|\frac{z}{z}\right|^n$ - является суммой геометрической прогрессии со знаменателем: $q = \left|\frac{z}{z_0}\right| < 1$, следовательно, он сходится. По признаку сравнения (он применим здесь, так как рассматриваются модули комплексных чисел, а они являются положительными действительными числами) сходится и ряд:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n z^n|.$$

А это и означает абсолютную сходимость ряда (4.50) при $|z| < |z_0|$.

Следствие 1. *Если степенной ряд (4.50) расходится при* $z = z_1$, *то он расходится при всяком z, у которого* $|z| > |z_1|$.

Теорема 4.20. *Для всякого степенного ряда (4.50) существует положительное число* $R > 0$*, такое, что в круге* $|z| < R$ *ряд сходится и причем абсолютно, а вне этого круга расходится.*

Число R называется *радиусом сходимости*, а круг $|z| < R$ – *кругом сходимости* ряда (1).

Доказательство: степенной ряд (4.50) всегда сходится в точке $z = 0$.

Если других точек сходимости нет, будем считать $R = 0$. Если ряд (4.50) сходится в любой точке плоскости, то будем говорить, что радиус сходимости $R = +\infty$.

Пусть ряд (4.50) сходится не только в одной точке, но и не всюду.

Разобьём множество всех действительных чисел на два класса: к классу ***A*** отнесём все неположительные числа и те из положительных

$x > 0$, для которых ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится (такие числа могут вообще-то отсутствовать), а к классу В отнесём все остальные, то есть положительные числа, в которых ряд (4.50) расходится.

Если В пусто, то $R = +\infty$. Пусть В не пусто, тогда пара (A, B) определяет во множестве действительных чисел сечение. Действительно, класс ***A*** не пуст, так как он содержит все отрицательные числа. Каждое действительное число принадлежит только одному классу: ***A*** или ***B***. Далее, если $x \in A, y \in B,$ то либо $x < 0$, тогда $x < y$, либо $x > 0$ и ряд сходится в точке ***x***, но расходится в точке ***y***, и по теореме Абеля $x < y$.

Но всякое сечение во множестве действительных чисел имеет рубеж. Обозначим его *R*. Ясно, что $R > 0$,так как по условию ряд (4.50) сходится.

Пусть зафиксировано некоторое число z, у которого $|z| < R$. Возьмём действительное x_0, такое, что $|z| < x_0 < R$, тогда $x_0 \in A$, $x_0 > 0$ и ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ сходится.

Тогда ряд сходится по теореме Абеля и в точке ***z***, притом абсолютно. Если $|z| > R$, то выберем вещественное число x_1, так что $R < x_1 < |z|$, тогда $x_1 \in B$, ряд в этой точке расходится, по следствию из теоремы Абеля, он будет расходиться и в точке *z*.

Следствие 2. *Если $0 < r < R$, то степенной ряд (4.50) сходится в замкнутом круге $|z| \le r$ равномерно.*

Действительно, при $z = r,$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$ сходится. А так как для любой точки *z* круга $|z| \le r$, $|a_n z^4| \le |a_n| r^4, n = 0,1,2.....,$ то, согласно признаку Вейерштрасса, на этом круге ряд (4.50) сходится равномерно.

Следствие 3. *Сумма ряда (4.50) в круге $|z| \le r$, $0 < r < R$, является непрерывной функцией. Степенной ряд непрерывен в каждой точке своего круга сходимости $|z| < R$.*

Замечание. Если рубеж *R* сечения *(A, B)* принадлежит нижнему классу *A*, то он является наибольшим в этом классе, положительным, а следовательно, ряд при $z = R$ сходится.

Если $R \in B,$ то ряд (4.50) расходится. Таким образом, на границе круга сходимости поведение ряда не однозначно. Иногда радиус сходимости R находят из признака Даламбера. Справедливо следующее утверждение: если существует предел (конечный или бесконечный),

$$l = \lim_{x\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,\ R = \frac{1}{e}.$$

В общем же случае радиус сходимости R находится с помощью формулы Коши – Адамара.

Теорема 4.21. *Пусть R – радиус сходимости ряда*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z^n,$$

тогда

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{x\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$[1].

Примечание. Из теоремы Больцано – Вейерштрасса следует, что у всякой ограниченной последовательности существует хотя бы одна предельная точка. В этом случае говорят, что последовательность имеет частичные пределы.

Определение 4.14. *Верхним пределом последовательности* $\{x_n\}$ называется наибольший её, частичный предел и обозначают его: $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Наименьший частичный предел называют *нижним пределом*, обозначают: $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$.

Если последовательность $\{x_n\}$ не ограничена, то $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = +\infty$, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n = -\infty$.

Вопросы и задания для самоконтроля по разделу «Ряды»

1. Найти сумму ряда, пользуясь определением:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1}\left(2 + \frac{1}{n}\right).$$

[1] Здесь чертой обозначен верхний предел.

2. Докажите, что если общий член ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ представим в форме $a_n = b_{n+1} - b_n$, то сумма ряда вычисляется по формуле:

$$S = \lim_{x\to\infty} b_n - b_1.$$

Вычислите суммы следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3}{\sqrt{n+3}-\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}}\right]$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc}tq\frac{1}{n^2+n+1}$.

Указание к б). Выясните соотношения между γ, α, β, при котором $\operatorname{arc}tq\gamma = \operatorname{arc}tq\alpha - \operatorname{arc}tq\beta$, и подберите α и β, если $\gamma = \frac{1}{n^2+n+1}$.

3. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость ряда:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(n+1)2^n}.$$

4. Составить разность расходящихся рядов и исследовать её сходимость:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$ и $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

Сделайте вывод о сходимости разности (суммы) расходящихся рядов. Что можно сказать о сходимости разности (суммы) сходящихся рядов?

5. Докажите расходимость произведения ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ самого на себя.

Указание. Составить произведения рядов по правилу «постоянной суммы индексов» и показать невыполнимость необходимого признака сходимости.

6. Используя признак сравнения, установить сходимость следующих рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{(3_n+1)^n\sqrt{n}}$;

б) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{lnn}{\sqrt{n^3+2}}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\sqrt[3]{\frac{2n+1}{2n-1}}-1\right]$.

7. Пользуясь признаками Даламбера, Коши, Коши – Маклорена, исследовать сходимость рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{e^{-n}}$;

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1.4.7....(3n-2)}{(2n-1)!!}$;

в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4\left[\sqrt{5}+(-1)^n\right]}{4^n}$.

8*. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(n!)\cdot\left(\frac{e}{n}\right)^n$.

9*. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)c^n$, где 0<C<1, $\tau(n)$ – число делителей натурального числа n.

10. Выяснить сходимость знакочередующегося ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}+\ldots$$

$$a_{2k-1}=\frac{1}{2k-1},\ a_{2k}=-\frac{1}{2(2k-1)}$$

Почему здесь не применена теорема Лейбница? Всегда ли не выполнимость условия теоремы Лейбница означает расходимость знакочередующегося ряда. Рассмотрите пример:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{7^2}+\frac{1}{5^3}-\frac{1}{7^3}+\ldots$$

$$a_{2k-1}=\frac{1}{5^k},\ a_{2k}=\frac{1}{7^k}$$

Каков характер сходимости этого ряда?

11. Найти области сходимости следующих функциональных рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}ln^n x$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^4}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-3)^4}{n^n}$; г) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^4}{1+x^{2n}}$.

12. Исследуйте ряд: $1+x+x^2+....+x^{n-1}+....=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}$, на равномерную сходимость в интервале (0,1).

13. Докажите с помощью признака Вейерштрасса равномерную сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^4}{n^2}$ в области его сходимости.

14. Выясните характер сходимости (поточечная, равномерная) функциональной последовательности $\{\varphi_n(x)\}$

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}4n^2x, & 0\le x\le\frac{1}{2n}\\ -4n^2\left(x-\frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n}<x\le\frac{1}{n}\\ 0, & \frac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$$

Докажите, что для данной последовательности не возможен предельный переход под знаком интеграла.

Указание. Для определения предельной функции $\varphi(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\varphi_n(x)$, целесообразно графически изображать $\varphi_n(x)$ при $n=1,2,3,...$; при вычислении интеграла $\int_0^1\varphi_n(x)dx$ используйте геометрический смысл определенного интеграла.

Покажите, что предельная функция $\varphi(x)$ дифференцируема на сегменте$[0,1]$. Возможен ли предельный переход под знаком производной для данной функциональной последовательности?

15. Показать, что ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(x+n)(x+n+1)}$$

сходится равномерно к $\frac{1}{x}$ в интервале $0<x<\infty$. При каком n(и любом $x>0$) $|R_n(x)|<0{,}1$?

16. Дан ряд, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$, где функции $f_n(x)$ определены на отрезке $[0,1]$ равенствами:

$$f(x)=\begin{cases}2nx,\ 0\le x\le\dfrac{1}{2n}\\ 2(1-nx),\ \dfrac{1}{2n}<x\le\dfrac{1}{n}\\ 0,\ \dfrac{1}{n}<x\le 1\end{cases}$$

Доказать сходимость ряда на $[0,1]$. Показать, что на этом отрезке ряд сходится неравномерно.

17. Найти сумму степенного ряда, используя дифференцирование или интегрирование:

а) $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^4$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$; в) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!}$

18. Показать, что ряд $x^2+\sum_{n=2}^{\infty}\left(x^{2n}-x^{2n-2}\right)$ сходится на $[-1,1]$ неравномерно. Тем не менее, его можно почленно интегрировать на этом отрезке.

19. Разложить в ряд Тейлора в окрестности указанной точки следующие функции:

а) $f(x)=2^x,\ x_0=0$ б) $f(x)=\sin(x^2/3),\ x_0=0$

в) $f(x)=arctgx,\ x_0=0$ г) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2},\ x_0=0$

д) $f(x)=\sqrt[3]{x},\ x_0=1$ е) $f(x)=\dfrac{1}{4+3x},\ x_0=-2$

20. Разложить в ряд Маклорена интегральный синус

$$Six=\int_0^x\frac{\sin t}{t}dt.$$

21. Показать, что функция $s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}$ непрерывна и имеет непрерывную производную на всей числовой оси. Найти $S'(x)$.

22. Показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin 2^n\pi x}{2^n}$ сходится равномерно на всей числовой оси, но почленное дифференцирование ряда не возможно.

23. Пользуясь разложением функции $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ в ряд Маклорена, вычислить $f^{(7)}(0)$.

РАЗДЕЛ 5. ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

5.1. Производная функции комплексного переменного. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости. Понятие аналитической функции

Определение 5.1. *Областью на комплексной плоскости* называют открытое связное множество точек, т. е. множество D – область, если

1) каждая точка принадлежит множеству D вместе с некоторой своей окрестностью;
2) любые две точки множества D можно соединить непрерывной линией, целиком лежащей в D.

Определение 5.2. *Граничной точкой области* D называют такую точку, которая сама не принадлежит D, но в любой окрестности которой есть точки из области D. *Совокупность граничных точек области* D называется её границей. Область D с присоединённой к ней границей называется *замкнутой областью*.

Граница может состоять из конечного числа замкнутых линий, разрезов (двойных линий) и точек. В случае ограниченной области D число связных частей, на которые разбивается её граница, называется *порядком связности*. Так, если граница состоит из одной связной части, то область называют *односвязной*, если из двух, то *двусвязной* и т. д.

Иногда приходится разрезать область. Разрезать область вдоль некоторой линии – значит, отнять от области точки, принадлежащие этой линии, отнеся их к границе. С помощью разрезов любую многосвязную область можно превратить в односвязную.

Определение 5.3. Говорят, что на множестве P точек плоскости Z задана функция

$$W = f(z),$$

если по определённому закону каждой точке $z \in P$ ставится в соответствие определённая точка или совокупность точек W. В первом случае $f(z)$ называют *однозначной функцией*, во втором – *многозначной*. Множество P называют *областью определения*, а множество Q точек W называют *множеством значений*.

В дальнейшем будем считать P областью, а $f(z)$ такой, что Q также область. Удобно откладывать значения Z на одной плоскости, а W – на другой. Тогда геометрически функцию $W = f(z)$ можно представлять как отображение множества P плоскости Z на множество Q плоскости W.

Определение 5.4. Если $W = f(z)$ однозначная функция и различным точкам области P соответствуют различные точки множества Q, то данное отображение называется *взаимно-однозначным или однолистным в области P*.

Определение 5.5. Комплексное число W_0 называют пределом функции $W = f(z)$ в точке $z = z_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall z \in P\ (0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |f(z) - W_0| < \varepsilon).$$

Записывают: $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = W_0$.

Из этого определения следует, что $f(z) \to W_0$ независимо от способа стремления $z \to z_0$.

Пусть $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$, $W = u(x, y) + iv(x, y)$, $W_0 = u_0 + iv_0$. Тогда справедливо утверждение:

Теорема 5.1. *Для того, чтобы $\lim\limits_{z \to z_o} f(z) = W_0$ необходимо и достаточно, чтобы существовали пределы*

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0,$$

т. е. действительная часть $f(z)$ сходилась к действительной части комплексного числа W_0, а мнимая часть – к мнимой части W_0.

Этим самым определение предела сводится к обычному определению предела действительной функции двух действительных переменных. Таким образом, основные свойства пределов можно перенести на комплексные функции. В частности:

$$\lim_{z \to z_0} (f \pm g) = \lim_{z \to z_0} f \pm \lim_{z \to z_0} g,$$

$$\lim_{z \to z_0} (f \cdot g) = \lim_{z \to z_0} f \cdot \lim_{z \to z_0} g,$$

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f}{g} = \frac{\lim\limits_{z \to z_0} f}{\lim\limits_{z \to z_0} g}, \quad \lim_{z \to z_0} g \neq 0.$$

Определение 5.6. Функция $W = f(z)$ называется *непрерывной в точке* z_0, если

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0).$$

Очевидно, что для непрерывности функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, необходимо и достаточно непрерывности функций $u(x,y)$ и $v(x,y)$ в точке (x_0, y_0).

Определение 5.7. Пусть в области *G* комплексной плоскости *Z* задана функция *f(z)*. Если для точки $z_0 \in G$ существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = f'(z_0), \tag{5.1}$$

то функция *f(z)* называется *дифференцируемой* в точке z_0, а значение предела $f'(z_0)$ называют её *производной по комплексной переменной* *z* в точке z_0.

Требование дифференцируемости функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, накладывает определённые условия на поведение действительной и мнимой частей функции в окрестности точки (x_0, y_0).

Теорема 5.2. (Необходимое условие дифференцируемости). *Если функция* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *дифференцируема в точке* $z_0 = x_0 + iy_0$, *то в точке* (x_0, y_0) *существуют частные производные функций* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$, *связанные соотношением Коши – Римана:*

$$\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} = \frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}; \quad \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial x}. \tag{5.2}$$

Доказательство:

Из определения производной функции *f(z)* в точке z_0, следует существование предела (5.1), не зависящего от способа стремления $\Delta z \to 0 \quad (\Delta z = \Delta x + i\Delta y)$.

1) Положим $\Delta y = 0, \quad \Delta z = \Delta x \to 0$, тогда

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(x_0 + \Delta x, y_0) - u(x_0, y_0)}{\Delta x} + i \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x_0 + \Delta x, y_0) - v(x_0, y_0)}{\Delta x}.$$

Поскольку предел (5.1) существует, то существует и каждый из пределов для действительной и мнимой части. Но эти пределы представляют собой определение частной производной по переменной *x*. Таким образом

$$f'(z_0) = \frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial x} + i\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y} \tag{5.3}$$

2) Пусть теперь $\Delta x = 0, \quad \Delta z = i\Delta y, \quad \Delta y \to 0$, тогда

$$f'(z_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(x_0,y_0+\Delta y)-u(x_0,y_0)}{i\Delta y}+i\lim_{\Delta y\to 0}\frac{v(x_0,y_0+\Delta y)-v(x_0,y_0)}{i\Delta y}=$$
$$=-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}+\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}=\frac{\partial v(x_0,y_0)}{\partial y}-i\frac{\partial u(x_0,y_0)}{\partial y}. \qquad (5.4)$$

Сравнивая формулы (5.3) и (5.4), получаем искомые равенства (5.2).

Следующую теорему примем без доказательства.

Теорема 5.3 (Достаточное условие дифференцируемости). *Если в точке* (x_0,y_0) *функции* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$ *дифференцируемы, а их частные производные удовлетворяют условию Коши – Римана (5.2), то функция* $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ *является дифференцируемой в точке* $z_0=x_0+iy_0$.

Основные теоремы о дифференцировании функций комплексного переменного формулируются и доказываются так же, как и в вещественном анализе. Приведём формулировки некоторых из них.

1. Если $W_1=f_1(z)$ и $W_2=f_2(z)$ дифференцируемы в точке $z=z_0$, то в ней дифференцируемы их сумма, произведение и частное, причём:

$$\left(W_1+W_2\right)'=W_1'+W_2', \quad \left(W_1W_2\right)'=W_1'W_2+W_1W_2',$$

$$\left(\frac{W_1}{W_2}\right)'=\frac{W_1'W_2-W_1W_2'}{W_2^2}, \quad W_2\neq 0.$$

2. Если $\omega=F(z)$ имеет в точке z_0 производную $F'(z_0)$, а функция $W=\varphi(\omega)$ имеет в точке $\omega=\omega_0=F(z_0)$ производную $\varphi'(\omega_0)$, то сложная функция $W=f(z)=\varphi\left[F(z)\right]$ имеет в точке $z=z_0$ производную, которая вычисляется по формуле:

$$W'=f'(z_0)=\varphi'(\omega_0)\cdot F'(z_0)=\varphi'(\omega_0)\cdot\omega'(z_0).$$

3. Если $W=f(z)$ имеет в точке $z=z_0$ производную $f'(z_0)\neq 0$, то:

1) она осуществляет взаимно-однозначное (однолистное) отображение некоторой окрестности точки z_0 на некоторую окрестность точки $W_0=f(z_0)$;

2) существует в окрестности W_0 функция $z=\varphi(W)$, обратная для $W=f(z)$, которая имеет в точке W_0 производную $\varphi'(W_0)$, причём

$$\varphi'(W_0)=\frac{1}{f'(z_0)}.$$

Определение 5.8. Функция, дифференцируемая в каждой точке некоторой области G, называется *аналитической в этой области*.

Определение 5.9. Функция называется *аналитической в точке,* если она аналитическая в некоторой окрестности этой точки.

Очевидно, функция, аналитическая в точке, будет дифференцируема в ней. Обратное может не иметь места.

Пример.

Функция $W = z\,\mathrm{Re}(z)$ дифференцируема в точке $z = 0$, но неаналитична в ней.

Решение. Для $z = 0$ имеем

$$\frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{\Delta z\,\mathrm{Re}(\Delta z)}{\Delta z} = \mathrm{Re}(\Delta z) = \Delta x.$$

Поэтому $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta z} = \lim\limits_{\Delta z\to 0}\Delta x = 0$.

Если $z \neq 0$, то для неё

$$\frac{\Delta W}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)\mathrm{Re}(z+\Delta z) - z\,\mathrm{Re}(z)}{\Delta z} = \frac{(z+\Delta z)(x+\Delta x) - z\cdot x}{\Delta z} =$$

$$= \frac{z\cdot\Delta x + \Delta z(x+\Delta x)}{\Delta z} = z\cdot\frac{\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} + x + \Delta x.$$

Рассмотрим стремление $\Delta z \to 0$ вдоль осей координат:

Если $\Delta z = 0 + i\Delta y,\quad \Delta y \to 0,$ то $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\dfrac{\Delta W}{\Delta z} = x$, если $\Delta z = \Delta x \to 0$, то

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta W}{\Delta z} = z + x.$$

Таким образом, предела не существует и функция дифференцируема только в точке $z = 0$, следовательно, не является аналитической в ней.

Поскольку аналитичность функции в области и её дифференцируемость в этой области означают одно и то же, то из теорем 5.2 и 5.3, легко следует.

Теорема 5.4. *Для того, чтобы функция* $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ *была аналитичной в области G, необходимо и достаточно, чтобы в этой области существовали непрерывные частные производные функций* $u(x,y)$ *и* $v(x,y)$, *связанные соотношением Коши – Римана*

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{5.5}$$

Если комплексная переменная записана в показательной форме $z=\rho e^{i\varphi}$, то $f(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi)$ и соотношение (5.5) принимает вид:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \qquad \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=-\frac{\partial v}{\partial \rho}. \tag{5.6}$$

Если в показательной форме записана сама функция $f(z)=R(x,y)e^{i\Phi(x,y)}$, то соотношение (5.5) имеет вид:

$$\frac{\partial R}{\partial x}=R\frac{\partial \Phi}{\partial y}; \qquad \frac{\partial R}{\partial y}=-R\frac{\partial \Phi}{\partial x}. \tag{5.7}$$

Запишем также различные формулы производной функции $f'(z)$, если выполняются условия (5.2)

$$f'(z)=u_x+iv_x=v_y+iv_x=u_x-iu_y=v_y-iu_y. \tag{5.8}$$

Свойства аналитических функций

1. *Принцип сохранения области.* Если функция $W=f(z)$, аналитическая в области *D*, но не является постоянной, то множество *D₁*, на которое она отображает область *D*, также является областью.

2. Если функция *f(z)* является аналитической в области *D*, то она непрерывна в этой области.

3. Если функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$, аналитические в области *D*, то аналитическими будут f_1+f_2, $f_1\cdot f_2$, $\frac{f_1}{f_2}$, при $f_2\neq 0$.

4. Композиция двух аналитических функций есть функция аналитическая.

5. Если функция $W=f(z)$, аналитическая в области *D*, причём $\left|f'(z)\right|\neq 0$ в некоторой окрестности точки $z_0\in D$, то в окрестности точки $W_0=f(z_0)$ в области D_1 значений функции $f(z)$ определена обратная функция $z=\varphi(W)$, которая также является аналитической, и при этом выполняется равенство:

$$f'(z_0)=\frac{1}{\varphi'(W_0)}.$$

6. Пусть функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ имеют непрерывные вторые производные и являются действительной и мнимой частями аналитической функции, $W=u+iv$. Тогда $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Действительно, например, для функции $u(x,y)$ имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-\frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y}.$$

В силу теоремы о равенстве смешанных производных, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0.$$

Аналогично доказывается и для $v(x,y)$.

Всякое решение уравнения Лапласа называют *гармоническими функциями*. Две гармонические функции, связанные условием Коши – Римана, называют *сопряжёнными гармоническими функциями*. Таким образом, функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ – сопряжённые гармонические функции.

7. Свойство 6 позволяет по действительной части аналитической функции восстановить её мнимую часть с точностью до постоянного слагаемого. Пусть, например, в области D задана функция $u(x,y)$. Используя условия Коши – Римана, найдём

$$du=\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy=\frac{\partial v}{\partial y}dx-\frac{\partial v}{\partial x}dy.$$

Правая часть этого равенства есть полный дифференциал, так как $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)$ в силу равенства $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$. Зная полный дифференциал легко восстановить функцию.

5.2. Геометрический смысл производной

Пусть $W = f(z)$ аналитическая в некоторой области D, $z_0\in D$ – произвольная точка, проведём через неё произвольную гладкую кривую γ_1, целиком лежащую в области D. Функция $f(z)$ производит отображение области D, комплексной плоскости Z, на некоторую область G, комплексной плоскости W.

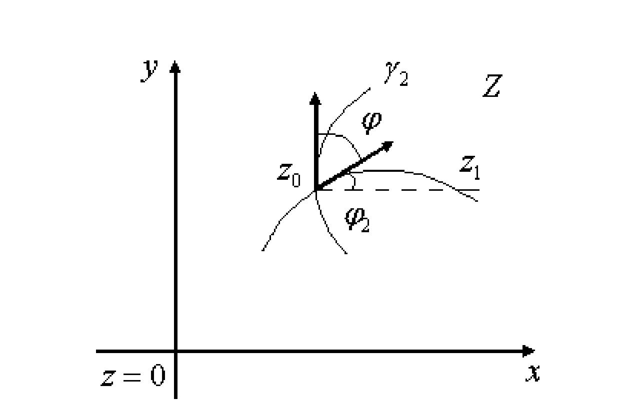


Рисунок 5.1

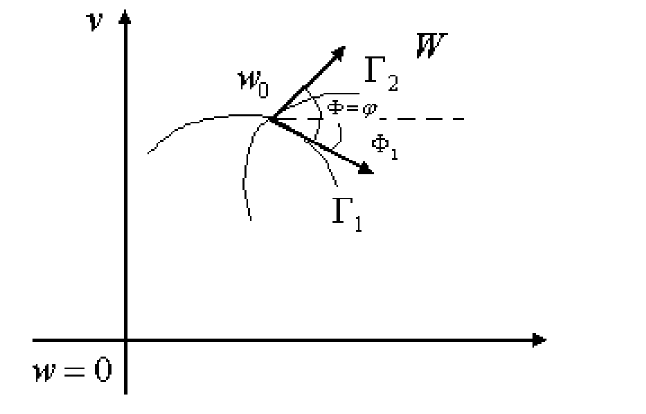


Рисунок 5.2

Пусть Z_0 переходит в точку W_0, кривая γ_1 переходит в Γ_1. По условию существует $f'(z)$ в точке z_0. Предположим $f'(z_0) \neq 0$ и представим $f'(z_0)$ в показательной форме:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta W}{\Delta z} = k \cdot e^{i\alpha}.$$

Пусть точка $z_0 + \Delta z$ стремится к z_0 по кривой γ_1 при $\Delta z \to 0$. Образ точки $W_0 + \Delta W$ стремится к W_0 по кривой Γ_1. При этом Δz и ΔW изображаются векторами секущих к кривым γ_1 и Γ_1. Тогда $\arg \Delta z$ и $\arg \Delta W$ – углы наклона этих векторов к положительному направлению оси *OX*, $|\Delta z|$ и $|\Delta W|$ – длины векторов. При $\Delta z \to 0$ векторы секущих преобразуются в векторы касательных к кривым γ_1 и Γ_1 в соответствующих точках z_0 и W_0. Тогда

$$\alpha = \arg f'(z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \frac{\Delta W}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta W - \lim_{\Delta z \to 0} \arg \Delta z = \Phi_1 - \varphi_1,$$

т. е. аргумент производной в точке z_0 равен разности углов наклона касательных в точках z_0 и W_0. Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от вида кривой γ_1, то разность $\Phi_1 - \varphi_1$, также не зависит от γ_1. Если рассмотреть другую кривую γ_2, проходящую через точку z_0, то получим

$$\alpha = \Phi_2 - \varphi_2.$$

Отсюда находим $\Phi_1 - \varphi_1 = \Phi_2 - \varphi_2$, или

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \varphi_2 - \varphi_1.$$

Вывод: аналитическая функция *f(z)* осуществляет отображение, при котором сохраняются углы между кривыми. Это свойство часто называют *свойством консервативности углов*. Заметим, что сохраняется не только абсолютная величина угла, но и его направление.

Для модуля производной справедливо равенство:

$$k = \left| f'(z_0) \right| = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left|\Delta W\right|}{\left|\Delta z\right|},$$

т. е. с точностью до величины, бесконечно малой более высокого порядка, чем Δz, выполняется равенство:

$$\left|\Delta W\right| = k \cdot \left|\Delta z\right|.$$

Это соотношение также не зависит от выбора кривой γ_1. Смысл этого соотношения состоит в том, что аналитическая функция при условии $f'(z_0) \neq 0$ бесконечно малые линейные элементы преобразует подобным образом, причём коэффициент подобия равен $\left| f'(z) \right|$. Полученное свойство носит название *свойства постоянства растяжения*.

Отображение окрестности точки z_0 на окрестность точки W_0, осуществляемое аналитической функцией $W = f(z)$ и обладающее в точке z_0 свойством консервативности углов и постоянством растяжения, называется конформным отображением.

РАЗДЕЛ 6. ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ В КОМПЛЕКСНОЙ ОБЛАСТИ

Существуют различные подходы к определению элементарных функций (показательной и тригонометрических). Наиболее естественным представляется подход, основанный на единственности аналитического продолжения аналитической функции. А именно, в теории функций комплексного переменного доказана теорема (6.1) о том, что если в некоторой области G дана кривая L, то существует лишь единственная в этой области аналитическая функция, принимающая заданные значения на L.

Из этой теоремы следует, что если на $[a,b]$ задана непрерывная функция $f(x)$, тогда в некоторой области G комплексной плоскости, содержащей отрезок $[a,b]$ действительной оси, может существовать лишь единственная аналитическая функция $f(z)$, принимающая значения $f(x)$ на $[a,b]$. Назовём $f(z)$ аналитическим продолжением $f(x)$ с отрезка $[a,b]$ в комплексную область G.

Рассмотрим ряды Тейлора:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \tag{6.1}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{6.2}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}. \tag{6.3}$$

Рассмотрим на комплексной плоскости ряды:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \tag{6.4}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \tag{6.5}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}. \tag{6.6}$$

Суммы этих рядов являются аналитическими функциями во всей комплексной плоскости, причём при $z = x$ эти ряды совпадают соответственно с рядами (6.1), (6.2), (6.3). Таким образом, ряды (6.4), (6.5), (6.6) можно рассматривать как аналитические продолжения функции e^x, $\sin x$, $\cos x$ с действительной оси в комплексную плоскость. Сохраняя название функций, будем считать по определению

$$e^{z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^{n}}{n!},\qquad(6.7)$$

$$\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},\qquad(6.8)$$

$$\cos z=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.\qquad(6.9)$$

Установим связь между этими функциями

$$e^{iz}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(iz)^{n}}{n!}.$$

При n – чётном, получим группу слагаемых

$$1-\frac{z^{2}}{2!}+\frac{z^{4}}{4!}-\frac{z^{6}}{6!}+\ldots+(-1)^{k}\frac{z^{2k}}{(2k)!}+\ldots=\cos z\cdot$$

При n – нечётном, учитывая, что $i^{2k+1}=(-1)^{k}\cdot i$, получим

$$i\left(z-\frac{z^{3}}{3!}+\frac{z^{5}}{5!}-\ldots+(-1)^{k}\frac{z^{(2k+1)}}{(2k+1)!}+\ldots\right)=i\sin z\cdot$$

Тогда

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z.\qquad(6.10)$$

Формула (6.10) носит название *формулы Эйлера*. Из этой формулы можно получить соотношения:

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\qquad(6.11)$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}.\qquad(6.12)$$

Используя формулу Эйлера (6.10), легко получить при $z=x+iy$

$$e^{z}=e^{x}(\cos y+i\sin y).\qquad(6.13)$$

Отсюда видно, что функция e^{z} периодическая с периодом $T=2\pi ki$. Действительно,

$$e^{z+2\pi ki}=e^{x+i(y+2\pi k)}=e^{x}(\cos(y+2\pi k)+i\sin(y+2\pi k))=$$

$$=e^{x}(\cos y+i\sin y)=e^{z}.$$

Нетрудно проверить, что

$$e^{z_1+z_2}=e^{z_1}\cdot e^{z_2},$$

$$\sin^{2}z+\cos^{2}z=1,$$

$$\sin(z_1+z_2)=\sin z_1\cdot\cos z_2+\sin z_2\cdot\cos z_1,$$

$$\cos(z_1+z_2)=\cos z_1\cdot\cos z_2-\sin z_1\cdot\sin z_2.$$

Функции $\sin z$, $\cos z$ периодические, с действительным периодом $2\pi k$. *В отличие от действительных функций,* $\sin z$, $\cos z$ *могут иметь модуль больше единицы.*

Пример. $\cos i = \dfrac{e + e^{-1}}{2} = \dfrac{1 + e^2}{2e} \approx 1{,}5431$.

Такое утверждение вытекает и из **теоремы Лиувилля (6.2)**: *Если функция f(z) является аналитической на всей комплексной плоскости, а её модуль равномерно ограничен, т.е. существует число M, такое, что для всех z*

$$\left| f(z) \right| \le M\,,$$

то f(z) тождественно равна постоянной.

С помощью функции e^z, определяются гиперболические функции shz и chz:

$$shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}; \quad chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

Очевидна связь круговых тригонометрических функций с гиперболическими:

$$\sin iz = ishz, \quad \cos iz = chz,$$

$$tgiz = ithz, \quad ctgiz = -icthz.$$

Рассмотрим функцию, обратную показательной функции $W = e^z$. Обозначим новые аргумент и функцию через z и W, тогда $z = e^W$. Функцию W называют натуральным логарифмом и обозначают $W = Lnz$.

Пусть $W = u + iv, \quad z = \rho \cdot e^{i\varphi}$.

Тогда $\quad \rho e^{i\varphi} = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}; \quad \rho = e^u, \quad v = \varphi + 2\pi k$

$$u = \ln \rho, \quad W = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

Функция $Lnz = \ln \rho + i(\varphi + 2\pi k)$ бесконечнозначная. Будем считать $\varphi = \arg z$, т. е. $-\pi < \varphi \le \pi$. Тогда при $k = 0$ получим *главную* ветвь логарифма, которую обозначим

$$\ln z = \ln \rho + i\varphi.$$

При $k = \pm 1, \pm 2, \ldots$ получим другие ветви: $W_1, W_{-1}, W_2, W_{-2}, \ldots$ Их будет бесконечно много. Точка $z = 0$ (а на полной комплексной плоскости $z = \infty$) будет точкой разветвления бесконечного порядка, или логарифмической точкой разветвления. Один обход в положительном направлении переводит главную ветвь в W_1, следующий в W_2 и т. д.

Возврат к исходному значению невозможен. Каждая ветвь логарифма однозначна и непрерывна на всей плоскости с разрезом от $z = 0$ до $z = \infty$ в направлении отрицательной действительной оси.

Функция $W = Lnz$ определена, однозначна и непрерывна во всех точках некоторой бесконечнолистной поверхности Римана, за исключением точек $z = 0$ до $z = \infty$.

Главная ветвь $\ln z = \ln\rho + i\varphi$ для положительных действительных чисел $(\varphi = 0)$, даёт обычный логарифм $\ln z = \ln\rho$. Следовательно, логарифмическая функция в вещественном анализе является частным случаем функции $\ln z$. Ряд свойств логарифмов справедлив и для $\ln z$. Например,

$$e^{\ln z} = z, \quad \ln(z_1 \cdot z_2) = \ln z_1 + \ln z_2,$$

однако из того, что $e^{Lnz} = z$ следует

$$Lne^z = z + 2k\pi i.$$

Логарифмическая функция и показательная позволяют дать обобщённое определение степени, с произвольным показателем. А именно: $W = z^s = e^{sLnz}$.

Пусть $z = \rho e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi \le \pi$. Тогда

$$W = e^{s[\ln\rho + i(\varphi + 2k\pi)]} = e^{s(\ln\rho + i\rho)} \cdot e^{2k\pi i s},$$

где k – целое число. Рассмотрим различные s:

а) s – целое число. Тогда z^s однозначна и непрерывна для всех конечных z (кроме $z = 0$ и $s < 0$).

б) $s = \dfrac{m}{n}$ – рациональная дробь. Тогда для $z \ne 0$ функция z^s имеет только n различных значений. Модули их будут одинаковы и равны $e^{\frac{m}{n}\ln\rho}$, а аргументы образуют арифметическую прогрессию $s\varphi;\ s\varphi + \dfrac{2\pi m}{n};\ s\varphi + \dfrac{4\pi m}{n}, \ldots, s\varphi + \dfrac{2(n-1)\pi m}{n}$.

Никакая пара этих чисел не даёт одинаковую величину для $e^{\frac{2\pi k m i}{n}}$, и никакая пара не различается на $2\pi k$. Таким образом, z^s – n – значная функция.

в) s – действительное иррациональное число. Тогда $e^{2ks\pi i}$ при различных k имеет разные значения, и их бесконечное множество. Следовательно, z^s – бесконечнозначная функция.

г) $s = \alpha + i\beta, \quad \beta \ne 0$, тогда

$$W = e^{sLz} = e^{i(\alpha\varphi + \beta\ln\rho)} \cdot e^{2\pi k i\alpha} \cdot e^{\alpha\ln\rho - \beta\varphi} \cdot e^{-2k\pi\beta}.$$

При разных k множитель $e^{-2k\pi\beta}$ будет иметь разные значения. Следовательно, z^s – бесконечнозначная функция. В отличие от действительного показателя, когда при обходе точки $z = 0$ изменяется лишь аргумент, при s – комплексном, меняется и модуль.

РАЗДЕЛ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

7.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение 7.1. Уравнение относительно некоторой неизвестной функции, которое непременно содержит хотя бы одну из производных этой функции, называется *дифференциальным уравнением*. Записывается

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0. \qquad (7.1)$$

Наивысший порядок производной, входящей в уравнение (7.1) называют порядком дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальное уравнение первого порядка

$$F(x, y, y') = 0. \qquad (7.2)$$

Если это уравнение разрешено относительно производной y', то оно примет вид

$$y' = f(x, y) \qquad (7.3)$$

или

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \qquad (7.4)$$

Уравнение в *симметричной* форме имеет вид

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0. \qquad (7.5)$$

Очевидно из уравнения (7.4) можно получить уравнение (7.5), и наоборот.

Определение 7.2. Функцию $y = \varphi(x)$, определённую вместе со своей производной в некоторой области D изменения аргумента x, называют *решением дифференциального уравнения* (7.3), если при подстановке в это уравнение она обращает его в тождество

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f[x, \varphi(x)].$$

Теорема 7.1 (Коши). (Существования и единственности решения). *Пусть дано дифференциальное уравнение (7.3)*

$$y' = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ определена в некоторой замкнутой ограниченной области D и (x_0, y_0) – какая-нибудь внутренняя точка этой области. И пусть выполняются следующие условия:

1) существуют числа $a > 0$ и $b > o$ такие, что функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике

$$R: \quad x_0 - a \le x \le x_0 + a; \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b, \quad R \subset D;$$

2) существует такое число $N > 0$, что для любых двух точек $(x, \bar{y})$ и $(x, \bar{\bar{y}})$ из области R, выполняется условие Липшица

$$\left| f(x,\bar{y}) - f(x,\bar{\bar{y}}) \right| \le N \left| \bar{y} - \bar{\bar{y}} \right|.$$

Тогда уравнение (7.3) имеет решение $y = \varphi(x)$, *определённое в некоторой окрестности точки* x_0 *и удовлетворяющее начальным условиям*

$$y = y_0 \text{ при } x = x_0 \text{ (так, что } y_0 = \varphi(x_0)),$$

причём это решение единственное.

Замечание. Часто условие Липшица заменяют более сильным условием ограниченности производной $f_y'(x,y)$ в области *R*.

Введём понятие общего решения.

Пусть выполняются условия теоремы. Тогда через точку (x_0, y_0) проходит одна и только одна интегральная кривая. Если не задаваться конкретными начальными условиями, то уравнение (7.3) имеет бесчисленное множество решений. Действительно, возьмём в качестве начальных данных числа x_0 и y_1. Число $y_1 \ne y_0$, при этом точка (x_0, y_0) является внутренней точкой области *R*. По теореме Коши, эти начальные условия определяют некоторое решение $y = \varphi_1(x)$. Так как функция $y = \varphi(x)$ не может принимать при $x = x_0$ два различных значения, то $y = \varphi_1(x)$ отличается от функции $y = \varphi(x)$, определяемой начальными данными (x_0, y_0).

Геометрически это означает, что через точку (x_0, y_1) пройдёт кривая, которая не совпадает с кривой, проходящей через точку (x_0, y_0). Аналогично условия (x_0, y_2) определяют новое решение $y = \varphi_2(x)$ и т. д.

Переход от начальной абсциссы x_0 к $x_1, x_2, \ldots$ не приведёт к получению нового решения, так как любая точка прямой $x = x_i$, $i = 1,2,\ldots$ лежит на одной из интегральных кривых, проходящих через точку с абсциссой x_0. Тогда, если в начальных условиях при постоянном x_0 рассматривать изменение *y*, будем получать целое семейство, причём бесконечное, решений уравнения (7.3). Обозначим его через

$$y = \varphi(x, c). \qquad (7.6)$$

Определение 7.3. *Общим решением дифференциального уравнения* $y' = f(x,y)$ в области R называется такая функция $y = \varphi(x,c)$, определённая как функция двух переменных в некоторой области D, которая удовлетворяет условиям:

1) уравнение $y=\varphi(x,c)$ разрешимо для каждой точки $(x,y)\in R$ относительно c, т.е. для любой точки $(x_0,y_0)\in R$ существует c_o, для которого $(x_0,c_0)\in D$ и $\varphi(x_0,c_0)=y_0$;

2) при всех значениях произвольной постоянной C, указанных в п.1, функция $y=\varphi(x,c)$ является решением данного уравнения.

Если $C=C_0$, то функция $y=\varphi(x,C_0)$ называется *частным решением*. Задача отыскания частного решения, удовлетворяющего начальным данным

$$y=y_0 \text{ при } x=x_0 \qquad (7.7)$$

называется *начальной задачей Коши*, а условие (7.7) – *данными Коши*.

Замечание. Если в результате интегрирования дифференциального уравнения получается уравнение не разрешённое относительно неизвестной функции, то говорят не об общем решении, а об общем интеграле.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию дифференциального уравнения $y'=f(x,y)$ и его решения.

Пусть $f(x,y)$ определена на некотором множестве D и $y=\varphi(x)$ – какое-либо решение уравнения (7.3). На плоскости уравнение $y=\varphi(x)$ определяет некоторую кривую, которую называют *интегральной кривой*.

В каждой точке $(x,y)\in D$ можно вычислить значение функции $f(x,y)$; если это значение равно y', то оно определяет угловой коэффициент касательной к интегральной кривой, проходящей через эту точку. Таким образом, заданием уравнения (7.3) любой точке области D сопоставляется некоторое направление $tg\alpha=f(x,y)$. В этом смысле говорят, что уравнение (7.3) задаёт поле направлений.

Задача отыскания какого-либо решения уравнения (7.3) геометрически состоит в нахождении такой кривой, чтобы касательная в любой её точке $(x,y)\in D$ имела направление поля, заданного этим уравнением.

Отметим некоторые виды уравнений первого порядка, разрешаемые в квадратурах.

1. Уравнения с разделяющимися переменными

Общий вид уравнений

$$y'=\varphi(x)\cdot\psi(y) \qquad (7.8)$$

или

$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy. \qquad (7.9)$$

Метод решения: Если $\psi(y) \neq 0$, то, записывая $y' = \dfrac{dy}{dx}$, придём к уравнению

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)dx. \qquad (7.10)$$

Если $\varphi(x)$, $\psi(y)$ непрерывны в соответствующих промежутках, при условии $\psi(y) \neq 0$ функция $\dfrac{1}{\psi(y)}$ также непрерывна. Тогда эти функции имеют первообразные $\Phi(y) = \int \dfrac{dy}{\psi(y)}$ и $F(x) = \int \varphi(x)dx$. Если $y = y(x)$ решение уравнения (7.10), то после подстановки имеем тождество. Тогда

$$\Phi'(y)dy = F'(x)dx,$$

$$d\Phi(y) = dF(x),$$

$$\Phi(y) = F(x) + C,$$

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C. \qquad (7.11)$$

Мы получим, в зависимости от того, разрешимо или нет уравнение (7.11) относительно функции $y = y(x)$, общее решение или общий интеграл.

Пример. Найти решение уравнения

$$y' \sin x = y \ln y,$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

Решение

Имеем

$$\frac{dy}{dx} \sin x = y \ln y.$$

Разделяем переменные

$$\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}, \quad y \neq 1, x \neq \pi n, n \in Z$$

$$\int \frac{dy}{y\ln y} = \int \frac{dx}{\sin x} + \ln C, \quad C > 0$$

$$\ln\left|\ln y\right| = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + \ln C$$

$$\left|\ln y\right| = \left|C \cdot tg\frac{x}{2}\right|$$

$$\ln y = C \cdot tg\frac{x}{2}.$$

В последнем равенстве считаем $C \in R$. Отсюда записываем общее решение в виде

$$y = e^{Ctg\frac{x}{2}}.$$

Положим теперь $x = \frac{\pi}{2}$, $y = e$, тогда $e = e^{Ctg\frac{\pi}{4}}$. Откуда $C = 1$. Итак, $y = e^{tg\frac{x}{2}}$.

Замечание. Если стоит задача отыскания общего решения, то необходимо проверить ограничения, налагаемые на функции при разделении переменных.

Пример. Решить уравнение

$$xydx + (x+1)dy = 0.$$

Разделяем переменные

$$(x+1)dy = -xydx,$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{xdx}{x+1}, \quad y \neq 0, \quad x+1 \neq 0,$$

$$\ln\left|y\right| = -x + \ln\left|x+1\right| + \ln C,$$

$$y = C(x+1)e^{-x} \text{ – общее решение.}$$

Легко видеть, что $y = 0$ – решение уравнения, однако при $c = 0$ оно содержится в общем решении. $x = -1$ также решение уравнения, но ни при каком C его нельзя получить из общего решения. Таким образом, в ответе записываем: $y = C(x+1)e^{-x}$, $x = -1$.

2. Однородные уравнения

Функция $f(x, y)$ называется *однородной степени однородности* α, если выполняется равенство:

$$f(tx, ty) = t^{\alpha} f(x, y).$$

Определение 7.4. Уравнение

$$y' = f(x, y) \qquad (7.12)$$

называется *однородным*, если $f(x, y)$ – однородная функция нулевой степени однородности, т. е. $f(tx, ty) = f(x, y)$.

Из определения следует в частности, что при $t = \dfrac{1}{x}$, $f(x, y) = f\left(1, \dfrac{y}{x}\right) = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Тогда уравнение (7.12) можно записать в виде:

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \qquad (7.13)$$

Выполним замену $y = x \cdot z, \quad y' = x \cdot z' + z$, тогда уравнение (7.13) примет вид уравнения с разделяющимися переменными

$$xz' + z = \varphi(z).$$

Если уравнение записано в симметричной форме:

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy, \qquad (7.14)$$

то оно является однородным, если $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – однородные функции одной степени однородности. Решается той же заменой $y = x \cdot z, \quad dy = zdx + xdz$.

Пример. $\left(y^2 - 2xy\right)dx + x^2 dy = 0$.

$$M(x, y) = y^2 - 2xy, \quad N(x, y) = x^2.$$

Обе функции имеют степень однородности $\alpha = 2$, следовательно, уравнение однородное. Выполним подстановку $y = x \cdot z, \quad dy = zdx + xdz$ $y = x \cdot z, \quad dy = zdx + xdz$:

$$\left(z^2 x^2 - 2x^2 z\right)dx + x^2(zdx + xdz) = 0,$$

$$x^2 z(z - 2)dx + x^2 zdx + x^3 dz = 0.$$

Очевидно, $x = 0$ – решение исходного уравнения. Пусть $x \neq 0$, тогда поделив на x^2, получим

$$z(z - 1)dx + xdz = 0.$$

Разделим переменные:

$$\frac{dz}{z(z-1)} = -\frac{dx}{x}, \quad z \neq 0, \quad z \neq 1.$$

Интегрируем и получим общий интеграл:

$$\ln\left|\frac{z-1}{z}\right| = \ln\frac{C}{|x|},$$

$$\frac{z-1}{z}=\frac{C}{x},$$

$$\frac{y-x}{y}=\frac{C}{x};\quad 1-\frac{x}{y}=\frac{C}{x};\quad \frac{x}{y}=\frac{x-c}{x},$$

$$y=\frac{x^2}{x-C}\text{ – общее решение.}$$

Рассмотрим ограничения: $z=0\Rightarrow y=0;\quad z=1\Rightarrow y=x$. Очевидно, $y=0$ является решением исходного уравнения, не входящим в состав общего, ни при каком C. Решение $y=x$ содержится в общем решении при $C=0$. Итак, в ответе запишем:

$$y=\frac{x^2}{x-C},\ x=0,\ y=0.$$

Рассмотрим один часто встречающийся случай уравнения:

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right). \tag{7.15}$$

Это уравнение с помощью переноса системы координат в точку пересечения прямых $ax+by+c=0$ и $a_1x+b_1y+c_1=0$ приводится после замены $x=\xi+\alpha,\quad y=\eta+\beta$, где α и β находятся из системы

$$\begin{cases} a\alpha+b\beta+c=0,\\ a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0,\end{cases}$$

к однородному уравнению.

Если $a_1x+b_1y=k(ax+by)$, т. е. прямые не пересекаются, то заменой $z=ax+by$ уравнение (7.15) приводится к уравнению с разделяющимися переменными.

Пример.

$$(x+4y)y'=2x+3y-5.$$

Решим систему:

$$\begin{cases} \alpha+4\beta=0,\\ 2\alpha+3\beta-5=0.\end{cases}$$

$$\alpha=4,\quad \beta=-1.$$

Заменим переменные по формулам: $x=\xi+4,\quad y=\eta-1$

$$\left(\xi+4+4\eta-4\right)\frac{d\eta}{d\xi}=(2\xi+8+3\eta-3-5),$$

$$(\xi+4\eta)\frac{d\eta}{d\xi}=(2\xi+3\eta).$$

Пусть $\eta=z\cdot\xi$, тогда $\dfrac{d\eta}{d\xi}=z+\xi\cdot\dfrac{dz}{d\xi}$,

$$\xi(1+4z)\left(z+\xi\frac{dz}{d\xi}\right)=(2+3z)\xi,$$

$$z(1+4z)+\xi(1+4z)z'=2+3z,$$

$$\xi(1+4z)z'=-2(2z^2-z-1),$$

$$\frac{(1+4z)dz}{2z^2-z-1}=-2\frac{d\xi}{\xi}.$$

Интегрируя уравнение и выполняя обратные замены, получим общий интеграл:

$$(y-x+5)^5(x+2y-2)=c.$$

3. Линейные уравнения

Уравнение вида $y'+p(x)y=q(x)$ называется *линейным*. (Искомая функция и её производная входят в уравнения в первой степени).

Существуют два основных метода решения:

- метод вариации произвольной постоянной;
- метод Бернулли.

а) Метод вариации произвольной постоянной

Пример. $xy'-2y=2x^4$. (*)

Перепишем уравнение в виде

$$y'-\frac{2}{x}y=2x^3$$

(хотя этого делать необязательно).

Рассмотрим однородное линейное уравнение:

$$y'-\frac{2}{x}y=0.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x},$$

$$\frac{dy}{y}=\frac{2dx}{x},$$

$$y=cx^2.$$

Будем искать общее решение неоднородного уравнения в виде:

$$y(x) = c(x) \cdot x^2 .$$

Тогда: $y' = c'(x) \cdot x^2 + 2c(x) \cdot x$, подставляя в уравнение(*), получим

$$c'(x) \cdot x^2 + 2c(x) \cdot x - 2c(x) \cdot x = x^3,$$

$$c'(x) = x, \quad c(x) = \frac{x^2}{2} + c .$$

Решение уравнения находим в виде:

$$y = x^2 \left(\frac{x^2}{2} + c \right).$$

б) Метод Бернулли

Будем решать то же уравнение. Решение ищут в виде произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$:

$$y = u \cdot v, \quad y' = u'v + uv' .$$

Получим после подстановки:

$$u'v + uv' - \frac{2uv}{x} = x^3.$$

Выделим слагаемые, содержащие множителем функцию $u(x)$:

$$u'v + u\left[v' - \frac{2v}{x} \right] = x^3 \qquad (**)$$

и решим однородное уравнение:

$$v' - \frac{2v}{x} = 0,$$

$$v(x) = x^2 .$$

После подстановки в уравнение (**) найдём:

$$u'x^2 = x^3, \quad u(x) = \frac{x^2}{2} + C .$$

Тогда общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$y(x) = x^2 \left(\frac{x^2}{2} + C \right).$$

4. Уравнение в полных дифференциалах

Уравнение вида

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0 \qquad (7.16)$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если выражение $Pdx + Qdy = du$ – полный дифференциал некоторой функции $u(x,y)$. Необходимым и достаточным условием полного дифференциала является существование непрерывных частных производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$, связанных равенством Коши: $\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}$. Тогда уравнение (7.16) примет вид $du=0$, откуда $u(x,y)=C$ – общий интеграл.

Функция $U(x,y)$ восстанавливается по известной из теории криволинейных интегралов формуле:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy.$$

Тогда общий интеграл имеет вид:

$$\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y)dy=C. \qquad (7.17)$$

Пример. Решить уравнение $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$.

$$P(x,y)=2x+3x^2y,\quad Q(x,y)=x^3-3y^2$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=3x^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial x}=3x^2,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x} \text{ для всех } x\in R.$$

Общий интеграл запишем по формуле (7.17):

$$\int_{0}^{x}P(x,0)dx+\int_{0}^{y}Q(x,y)dy=C$$

$$x^2+\int_{0}^{y}(x^3-3y^2)dy=C$$

$$x^2+x^3y-y^3=C.$$

РАЗДЕЛ 8. ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

8.1. Однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Рассмотрим уравнения вида:

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=g(x). \qquad (7.18)$$

Такое уравнение, при условии, что $a(x)\neq 0$ называется *линейным*, относительно искомой функции $y=y(x)$ – дифференциальным уравнением второго порядка. Если $g(x)\neq 0$, то уравнение называют *неоднородным*. Иначе оно называется *однородным* и имеет вид:

$$a(x)y''+b(x)y'+c(x)y=0. \qquad (7.19)$$

Отметим некоторые свойства решений уравнения (7.19):

а) Если $y=y_1(x)$ и $y=y_2(x)$ – два решения уравнения (7.19), то любая их линейная комбинация $y=c_1y_1+c_2y_2$, также решение уравнения (7.19).

б) Если решения $y_1(x), y_2(x)$ однородного линейного уравнения линейно независимы, то общее решение уравнения (7.19) записывается в виде:

$$y=c_1y_1+c_2y_2$$

Необходимым и достаточным условием линейной зависимости функций $y_i=\varphi_i(x)\,(i=1,2,...,n)$ на данном интервале(α,β), является равенство нулю определителя Вронского:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y' & y_2' & \cdots & y_n' \\ - & - & - & - \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}\equiv 0.$$

Тогда: система функций $y_i=\varphi_i(x)$ линейно независима, если хотя бы в одной точке интервала (α,β) вронскиниан $W\neq 0$.

Если каким-либо образом найдено частное решение $V(x)$ неоднородного уравнения (7.18), то его общее решение равно сумме общего решения однородного уравнения (7.19) и частного решения:

$$y=c_1y_1+c_2y_2+...+c_ny_n+V(x).$$

Рассмотрим теперь уравнение (7.18), в котором $a(x)=a,\ b(x)=b, c(x)=c$ – постоянные. Учитывая, что $a\neq 0$, запишем уравнение (7.18) в виде:

$$y''+py'+qy=f(x). \qquad (7.20)$$

Соответствующее однородное уравнение имеет вид:

$$y''+py'+qy=0. \qquad (7.21)$$

Для уравнения (7.21) будем рассматривать квадратное уравнение:

$$k^2+pk+q=0, \qquad (7.22)$$

называемое характеристическим.

Легко проверить, что если k – корень уравнения (7.22), то $y=e^{kx}$ – решение уравнения (7.21).

Возможна следующая классификация общих решений однородного уравнения:

1) $D=p^2-4q>0$, тогда имеет два различных корня уравнения (5) $k_1 \neq k_2$. Тогда $y_1=e^{k_1x}$ и $y_2=e^{k_2x}$ образуют линейно независимую (фундаментальную) систему функций:

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} e^{k_1x} & e^{k_2x} \\ k_1e^{k_1x} & k_2e^{k_2x} \end{vmatrix}=e^{(k_1+k_2)x}\left(k_2-k_1\right)\neq 0.$$

Общее решение имеет вид:

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}.$$

2) $D=p^2-4q=0$, тогда уравнение (7.22) имеет одно решение $k=-\dfrac{p}{2}$. Рассмотрим функции $y_1=e^{kx}$ и $y_2=xe^{kx}$.Составим определитель Вронского:

$$W=\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & (kx+1)e^{kx} \end{vmatrix}=e^{kx}\neq 0.$$

Следовательно, система функций $\{y_1, y_2\}$ фундаментальна и общее решение записывают в виде:

$$y=e^{kx}\left(c_1+xc_2\right).$$

3) $\mathrm{D}<0$, тогда $k_{1,2}=\alpha \pm i\beta$ – комплексно сопряженные корни уравнения (7.22).

Общее решение, также, как и в п.1, ищем в виде:

$$y=c_1e^{k_1x}+c_2e^{k_2x}=e^{\alpha x}\left(c_1e^{i\beta x}+c_2e^{-i\beta x}\right).$$

Воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{iz}=\cos z+i\sin z,$$

тогда:

$$y=e^{\alpha x}\left[c_1\left(\cos\beta x+i\sin\beta x\right)+c_2\left(\cos\beta x-i\sin\beta x\right)\right]=$$
$$=e^{\alpha x}\left[\left(c_1+c_2\right)\cos\beta x+\left(c_1-c_2\right)i\sin\beta x\right].$$

Введем обозначение $\overline{c_1}=c_1+c_2, \overline{c_2}=i\left(c_1-c_2\right)$, тогда

$$y(x)=e^{\alpha x}\left(\overline{c_1}\cos\beta x+\overline{c_2}\sin\beta x\right).$$

8.2. Неоднородные линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Для построения общего решения неоднородного уравнения (3) необходимо найти какое-нибудь частное решение. Общего метода отыскания частного решения нет. Однако в ряде случаев в зависимости от вида функции $f(x)$ можно указать методы построения частных решений. Без доказательства приведём примеры построений таких частных решений:

1) Пусть $f(x)=e^{\alpha x}P_n(x)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, α – некоторое число. Частное решение ищут в виде: $V(x)=x^r e^{\alpha x}Q_n(x)$, где $Q_n(x)$ – многочлен n-ой степени с неизвестными коэффициентами, $r=0;1$ – число корней характеристического уравнения, совпадающих с α.

2) Если $f(x)=e^{\alpha x}\left[P_n(x)\cos\beta x+Q_m(x)\sin\beta x\right]$, то частное решение ищут в виде:

$$V(x)=x^r e^{\alpha x}\left[R_s(x)\cos\beta x+T_s(x)\sin\beta x\right],$$

где n,m,s – степени соответствующих многочленов, причем

$$S=\max(n,m), r=0,$$

если $\alpha+\beta i$ не корень характеристического многочлена, и r – кратность корня $\alpha+\beta i$ в противном случае.

Замечание. Если правая часть уравнения представляет собой сумму функций вида $e^{\alpha x}P_n(x)$ и $e^{\alpha x}P_n(x)\cos\beta x$, или $e^{\alpha x}Q_m\sin\beta x$, то частное решение уравнения со сложной правой частью $f_1(x)+f_2(x)+...+f_k(x)$ можно найти как сумму частных решений уравнений с правой частью $f_1(x), f_2(x),..., f_k(x)$, т. е.

$$V(x)=V_1(x)+V_2(x)+...+V_k(x).$$

Пример: Найти общее решение уравнения:

$$y''+6y'+10y=3xe^{-3x}-2e^{3x}\cos x.$$

Решение: Составим сначала однородное уравнение:

$$y''+6y'+10y=0.$$

Его характеристическое уравнение

$$k^2+6k+10=0$$

имеет комплексно-сопряженные корни:

$$k_{1/2}=-3\pm i,\quad \alpha=-3,\quad \beta=1.$$

Общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y(x)=e^{-3x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)$$

Найдем отдельно частные решения уравнений:

$$y''+6y'+10y=3xe^{-3x} \qquad (*)$$

$$y''+6y'+10y=-2e^{3x}\cos x. \qquad (**)$$

Для уравнения $(*)$частное решение ищем в виде:

$$V_1=e^{-3x}\left(ax+b\right)$$

методом неопределенных коэффициентов:

$$V_1'(x)=-3e^{-3x}\left(ax+b\right)+ae^{-3x}$$

$$V_1''(x)=9e^{-3x}\left(ax+b\right)-6e^{-3x}\cdot a$$

$$V_1''(x)+6V_1'+10V_1(x)=e^{-3x}\left(ax+b\right).$$

Сравнивая с правой частью $(*)$, находим $a=3,\ b=0$, то есть

$$V_1(x)=3xe^{-3x}.$$

Для уравнения $(**)$ составим частное решение в виде:

$$V_2(x)=x^r e^{3x}\left(a\cos x+b\sin x\right).$$

Число $3+i$ не совпадает с $-3+i$ – корнем характеристического уравнения, таким образом, $r=0$ и

$$V_2(x)=x^r e^{3x}\left(a\cos x+b\sin x\right).$$

Подставим $V_2(x)$ в уравнение $(**)$:

$$V_2''(x)+6V_2'(x)+10V_2(x)=\left[(36a+12b)\cos x+(36b-12a)\sin x\right]e^{3x}$$

.

Сравнивая с правой частью уравнения $(**)$, придем к системе

$$\begin{cases}36a+12b=-2\\ 36b-12a=0\end{cases} \qquad \begin{cases}a=3b\\ b=-\dfrac{1}{60}\end{cases}\Rightarrow a=-\frac{1}{20},\ b=-\frac{1}{60}.$$

Таким образом,

$$V_2(x)=-\frac{1}{60}e^{3x}\left(3\cos x+\sin x\right)$$

$$V(x)=V_1(x)+V_2(x)=3xe^{-3x}-\frac{1}{60}e^{3x}\left(3\cos x+\sin x\right).$$

Общее решения исходного уравнения равно:

$$y(x)=e^{-3x}\left(c_1\cos x+c_2\sin x\right)+3xe^{-3x}-\frac{1}{60}e^{3x}\left(3\cos x+\sin x\right).$$

РАЗДЕЛ 9. МЕТРИЧЕСКИЕ ПРОСТРАНСТВА

9.1. Метрическое пространство. Определение. Примеры.

Желание распространить понятие предела на произвольные функциональные пространства привело к необходимости определения расстояния в самом обще виде.

Определение 8.1. Множество X называется *метрическим пространством*, если каждой паре его элементов x и y поставлено в соответствие неотрицательное действительное число $\rho(x,y)$, удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам расстояния):

1) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ (аксиома тождества);

2) $\rho(x,y)=\rho(y,x)$ (аксиома симметрии);

3) $\rho(x,y)+\rho(y,z)\ge\rho(x,z)$ (аксиома треугольника).

Элементы x,y удобно называть точками пространства X, а $\rho(x,y)$ назовем *расстоянием между точками x и y*, или *метрикой пространства X*.

Примеры:

1. Пусть $X=R$ множество всех действительных чисел. Расстояние между точками x и y определяется формулой:

$$\rho(x,y)=|x-y|.$$

2. Евклидово пространство R^n. Его точки:

$$x=(x_1,x_2,...,x_n),\quad y=(y_1,y_2,...,y_n)$$

$$\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

Проверим, удовлетворяет ли $\rho(x,y)$, всем аксиомам метрики. Первые два свойства очевидны. Докажем свойства треугольника:

$$\rho(x,y)+\rho(y,z)\ge\rho(x,z)$$

или:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}.$$

Воспользуемся неравенством Коши:

$$\left|\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right|\le\sqrt{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}\cdot\sqrt{\sum_{k=1}^{n}b_k^2}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-z_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(x_i-y_i\right)+\left(y_i-z_i\right)\right]^2\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2+2\left|\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)\left(y_i-z_i\right)\right|+\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-z_i\right)^2\le$$

$$\le\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2+2\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-z_i\right)^2}+\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-z_i\right)^2=$$

$$=\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-y_i\right)^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-z_i\right)^2}\right)^2$$

Отсюда легко следует:

$$\rho\left(x,z\right)\le\rho\left(x,y\right)+\rho\left(y,z\right)$$

3. Пространство непрерывных функций $C_{[0,1]}$.

Пусть X – множество всех непрерывных функций на $\left[0,1\right]$.

Введем метрику, полагая:

$$\rho\left(x,y\right)=\max_{t\in[0,1]}\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|,$$

которую называют *Чебышевской метрикой*. Проверим выполнение аксиом метрики. Первые два свойства очевидны, докажем свойства треугольника:

$$\rho\left(x,z\right)\le\rho\left(x,y\right)+\rho\left(y,z\right).$$

Для любого $t\in\left[0,1\right]$ имеем неравенство:

$$\left|x\left(t\right)-z\left(t\right)\right|\le\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|+\left|y\left(t\right)-z\left(t\right)\right|\le\max_{t\in[0,1]}\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|+$$

$$+\max_{t\in[0,1]}\left|y\left(t\right)-z\left(t\right)\right| \qquad (*)$$

Но функции $x\left(t\right)$ и $z\left(t\right)$ непрерывны, следовательно, непрерывна и функция $f(t)=\left|x\left(t\right)-z\left(t\right)\right|$.

Функция, непрерывная на сегменте, принимает на нём наибольшее и наименьшее значения. В частности, существует точка $t_0\in[0,1]$, такая, что $f(t_0)=\max\limits_{[0,1]}f(t)$. Поскольку неравенство $\left(*\right)$ выполняется для любого $t\in\left[0,1\right]$, то и для t_0. Тогда:

$$\max_{[0,1]}\left|x\left(t\right)-z\left(t\right)\right|\le\max_{[0,1]}\left|x\left(t\right)-y\left(t\right)\right|+\max_{[0,1]}\left|y\left(t\right)-z\left(t\right)\right|$$

или

$$\rho\left(x,z\right)\le\rho\left(x,y\right)+\rho\left(y,z\right).$$

9.2. Сходимость в метрических пространствах. Полные метрические пространства.

Пусть X – метрическое пространство и функция $\rho(x,y)$ определяет расстояние между точками x и y этого пространства.

Определение 8.2. Элемент $x \in X$ называется *пределом последовательности элементов* $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ из X, если $\rho(x_n, x) \to 0$, то есть

$$\lim_{x\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

или

$$\forall \varepsilon > 0 \exists M > 0 \forall n > M \left(\rho(x_n, x) < \varepsilon\right).$$

Имеет место ряд общих высказываний относительно сходящихся последовательностей точек метрического пространства:

Теорема 8.1. *Последовательность* $\{x_n\}$ *метрического пространства может сходится не более чем к одному пределу.*

Теорема 8.2. *Если последовательность* $\{x_n\}$ *сходится к x, то любая подпоследовательность* $\{x_{n_k}\}$ *также сходится к x.*

Определение 8.3. Назовем *шаром* с центром в точке a и *радиусом* r совокупность всех точек x метрического пространства X, удовлетворяющих неравенству $\rho(x,a) < r$ (открытый шар) или $\rho(x,a) \le r$ (замкнутый шар).

Определение 8.4. *Окрестностью* точки $x \in X$ называют любой шар с центром в точке x.

Пусть $x_k = \left(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, ..., x_n^{(k)}\right)$, $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – точки метрического пространства R^n, $k = 1, 2, ...$

$$\rho(x_k, x) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \left(x_i^{(k)} - x_i\right)^2} \to 0 \quad \text{при } k \to \infty,$$

тогда и только тогда, когда $x_i^{(k)} \to x_i$, $i = 1, 2, ..., n$ при $k \to \infty$. Таким образом, сходимость в R^n есть сходимость по координатам.

Рассмотрим характер сходимости в метрическом пространстве $C_{[0,1]}$.

Пусть дана последовательность $\{x_n(t)\}$, $x_n(t) \in C_{[0,1]}$, сходящаяся к $x(t)$ при $n \to \infty$. Это значит, что

$$\rho(x_n, x) = \max_{[0,1]} |x_n(t) - x(t)| \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

то есть

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n \geq N(\varepsilon) \left(\max_{[0,1]} |x_n(t) - x(t)| < \varepsilon \right).$$

Но тогда выполняется и неравенство:

$$|x_n(t) - x(t)| < \varepsilon$$

одновременно для всех $t \in [0,1]$. Это значит, что $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно к $x(t)$. Легко видеть и обратное: если $\{x_n(t)\}$ сходится равномерно к $x(t)$, то $\rho(x_n, x) \to 0$. Таким образом сходимость в $C_{[0,1]}$ есть равномерная сходимость на отрезке $[0,1]$.

Определение 8.5. Последовательность $\{x_n\}, x_n \in X$, называется *сходящейся в себе* или *фундаментальной,* если:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists N(\varepsilon) \forall n, m \geq N(\varepsilon) \left(\rho(x_n, x_m) < \varepsilon \right).$$

Нетрудно проверить, что если $\{x_n\}$ сходится к $x_0 \in X$, то она фундаментальна. Действительно, пусть $\lim\limits_{x \to \infty} x_n = x_0$, тогда, если $\varepsilon > 0$, определим $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{2} > 0$. Для ε_1 найдется номер $N(\varepsilon_1)$, такой, что для $n \geq N(\varepsilon)$ и $m \geq N(\varepsilon)$ выполняются неравенства:

$$\rho(x_n, x_0) < \varepsilon_1 \text{ и } \rho(x_m, x_0) < \varepsilon_1,$$

тогда:

$$\rho(x_n, x_m) \leq \rho(x_n, x_0) + \rho(x_m, x_0) < 2\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Обратное утверждение неверно, то есть существуют метрические пространства, в которых имеются фундаментальные последовательности, не сходящиеся в этом пространстве.

Например: множество Q – рациональных чисел с расстоянием:

$$\rho(r_1, r_2) = |r_1 - r_2| \text{ –}$$

является метрическим пространством.

Возьмем последовательность:

$$r_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Эта последовательность сходится в себе, но:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e, \quad e \notin Q.$$

Определение 8.6. Метрическое пространство X называется *полным*, если каждая фундаментальная последовательность этого пространства сходится к пределу, являющемуся элементом этого пространства.

Пример. Евклидово n-мерное пространство R^n полное.

Это утверждение следует из характера сходимости в R^n и критерия Коши сходимости числовых последовательностей.

Пример. Пространство $C_{[0,1]}$ полное.

Пусть дана последовательность $\{x_n(t)\}$,

$$x_n(t) \in C_{[0,1]},\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

и пусть $\rho(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$ то есть:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N(\varepsilon) \forall m, n \geq N(\varepsilon) \left(\max_{[0,1]} \left| x_n(t) - x_m(t) \right| < \varepsilon \right)$$

Значит,

$$\left| x_n(t) - x_m(t) \right| < \varepsilon .$$

Одновременно для всех $t \in [0,1]$. Тогда по критерию Коши $\{x_n(t)\}$ равномерно сходится на $[0,1]$. Пусть $x_0(t) = \lim_{x \to \infty} x_n(t)$, но тогда $x_0(t)$ непрерывна, то есть $x_0(t) \in C_{[0,1]}$.

ВОПРОСЫ К ГОСУДАРСТВЕННОМУ ЭКЗАМЕНУ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ (специальность 032100 – Математика)

1. Множество действительных чисел, его свойства. Отображение множеств (функции). Числовые функции. Основные классы числовых функций. Обратные функции (доказать теорему существования).

2. Определение и существование точных границ множества (без доказательства). Теоремы о пределе монотонной последовательности и теорема Кантора о последовательности вложенных отрезков (одну из них доказать).

3. Предел числовой последовательности. Критерий Коши сходимости последовательностей (без доказательства). Теорема об ограниченности сходящейся последовательности. Теорема Больцано – Вейерштрасса о выделении сходящейся подпоследовательности из ограниченной последовательности (доказать).

4. Предел и непрерывность функции в точке. Различные определения. Классификация точек разрыва. Свойства функций, непрерывных на отрезке (одну из них доказать).

5. Определение, геометрический и механический смысл производной. Дифференциал функции. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью. Правила дифференцирования. Таблица основных производных (без доказательства).

6. Условия постоянства и монотонности функций на сегменте. Теоремы о среднем (Теорему Лагранжа доказать).

7. Определение экстремума функции. Необходимые, достаточные условия экстремума. Правило исследования функции на экстремум с помощью первой производной, производных высших порядков.

8. Первообразная и неопределенный интеграл. Определенный интеграл: определение через интегральную сумму, необходимое условие интегрируемости, суммы Дарбу, критерий интегрируемости (без доказательства). Интеграл с переменным верхним пределом. Теорема существования первообразной для непрерывной функции. Формула Ньютона – Лейбница.

9. Понятие квадрируемости плоской фигуры. Критерии квадрируемости. Площадь криволинейной трапеции (с доказательством). Площадь криволинейного сектора (без доказательства).

10. Спрямляемость дуги. Длина дуги гладкой кривой (для случая явного задания в декартовых координатах с доказательством).

11. Числовые ряды. Основные признаки сходимости знакоположительных рядов (Теорему Даламбера доказать).

12. Абсолютно и условно сходящиеся ряды и их свойства. Теорема Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов и ее следствия.

13. Функциональные последовательности и ряды. Равномерная сходимость. Теорема Вейерштрасса о равномерной сходимости функциональных рядов. Свойства равномерно сходящихся рядов (без доказательства).

14. Ряд Тейлора. Критерий разложимости в ряд Тейлора. Достаточный признак разложимости в ряд Тейлора (с доказательством). Разложение показательной и тригонометрических функций в степенной ряд Тейлора.

15. Степенные ряды в комплексной плоскости. Теорема Абеля. Круг сходимости. Показательная и тригонометрические функции в комплексной области. Формула Эйлера.

16. Логарифмическая функция и ее свойства. Логарифмическая функция в комплексной области. Степень в комплексной области.

17. Производная функции комплексного переменного. Необходимое и достаточное условие дифференцируемости (необходимость с доказательством). Понятие аналитической функции. Свойства отображений, осуществляемых аналитической функцией.

18. Метрические пространства. Примеры: $C[a,b]$, R^n. Сходимость в метрическом пространстве. Полные метрические пространства. Доказать полноту пространств $C[a,b]$ и R^n.

19. Обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. Теорема существования и единственности (без доказательства). Общее решение и общий интеграл. Некоторые типы уравнений первого порядка и их решение.

20. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами: решение однородных и неоднородных уравнений.

21. Пространство элементарных событий. Классическое определение вероятности. Свойства вероятностей. Аксиоматическое определение вероятностей. Теоремы умножения для зависимых и независимых событий. Формула полной вероятности.

22. Случайные величины. Функция распределения и ее свойства. Числовые характеристики случайных дискретных и непрерывных величин. Математическое ожидание и дисперсия случайной биномиальной величины. Нормальное распределение случайной непрерывной величины.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

Основная литература

1. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ: Соч. в 2 т. Учебник для вузов. – изд. 2, перераб. – М.: Высшая школа, 1973.
2. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973 г. – 736 с.
3. Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1964. – 272 с.
4. Сидоров Ю. В., Федорюк М. В., Шабунин М. И. Лекции по теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1976. – 408 с.
5. Уваренков И. М., Маллер М. З. Курс математического анализа: Учеб. пособие для физ.-мат. фак. пед. ин-тов: Соч. в 2 т. – М.: Просвещение, 1976. – 479 с.
6. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления: Соч. в 2 т. – М.: Наука, 1966.

Дополнительная литература

1. Гелбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе: Пер. с англ. / Под ред. П. Л. Ульянова. – М.: Издательство «Мир», 1967.
2. Ляшко И. И. и др. Математический анализ в примерах и задачах. – Ч. 1. Введение в анализ, производная, интеграл. – Киев: Вища школа, 1975. – 680 с.
3. Марон И. А. Дифференциальное и интегральное исчисление в примерах и задачах (Функции одной переменной): Учеб. пос. – М.: Наука, 1970.

Учебное издание

Владимир Владимирович Пергунов

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ
Экспресс-курс для подготовки к государственному экзамену

Учебное пособие

Редактор
Е. В. Кондаева

Технический редактор
Г. А. Чумак

Подписано в печать _____________
Формат 60x84 1/16. Усл. печ. л. ________
Тираж_______экз. Заказ______.

**Издательство Орского гуманитарно-технологического института (филиала) государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»
462403, г. Орск Оренбургской обл., пр. Мира, 15 А**