ЭВОЛЮЦИЯ ПЛОТНОСТИ КОГНИТИВНОГО ПОЛЯ В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНЯТИЙ

Кучеренко М.Г., Кучеренко М.А.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

В данной работе показано, что свойства двух известных в биофизике и физике конденсированных сред эволюционных математических моделей, базирующихся на нелинейных дифференциальных уравнениях параболического типа, не утрачивают своего смысла и могут быть перенесены без сколь-нибудь существенного изменения их структуры в область методологии образовательных процессов путем замены первоначальных биологических или физических понятий, эквивалентными им понятиями теории познания.

В некоторых разделах биофизики и физики конденсированного состояния получили развитие так называемые эволюционные модели [1-5], применяемые для описания нетривиальных свойств систем потокового типа, причем самой различной природы. Такие эволюционные модели основываются на дифференциальных уравнениях с транспортным оператором диффузионного вида и локальным, либо нелокальным нелинейным членом [1-2]. В математической физике такие уравнения иногда называют уравнениями типа «реакция-диффузия» [5-6]

$$\frac{\partial}{\partial t} n(q,t) = D\nabla^2 n(q,t) + w(q,t \mid n(q,t)). \tag{1}$$

Объемный – реакционный член $w(q,t \mid n(q,t))$, в общем случае нелинейный по $n(q,t)$, определяет генерацию и распад плотности $n(q,t)$ некоторой величины в пространстве переменных $q = \{q_i\}$. Обозначим через $\alpha(q,t)$ - скорость генерации, а через $\beta[n(q,t)]$ - скорость распада плотности $n(q,t)$. Тогда

$$w(q,t \mid n(q,t)) = \alpha(q,t)n(q,t) - \beta[n(q,t)]n(q,t). \tag{2}$$

Скорость распада $\beta[n(q,t)]$ в модели биологической эволюции в пространстве фенотипов [1], например, представляет собой функционал от плотности $n(q,t)$

$$\beta[n(q,t)] = \int \alpha(q',t)K(q',q)n(q',t)dq' \Big/ \int n(q,t)dq. \tag{3}$$

Нормировочный множитель $\int n(q,t)dq = N$ в (3) принимается постоянным, как, например, в модели [1]. В зависимости от вида ядра $K(q',q)$ интегрального оператора (3) нелинейное слагаемое в (1) носит локальный характер, если $K(q',q) = \delta(q'-q)$, где $\delta(q)$ – дельта-функция Дирака, или нелокальный характер, при любом другом виде ядра $K(q',q)$. Так, в модели с нелокальной нелинейностью [1] $K(q',q) \sim 1$. В локальном случае $\beta[n(q,t)] = \alpha \cdot n(q,t)$, и при $\alpha(q,t) = \text{const}$ уравнение (1) совпадает с хорошо известным уравнением Колмогорова-Петровского-Пискунова [7], или уравнением Фишера [8], детально исследованном авторами [7]. Для последнего случая известны решения [6-7] в виде бегущих волн. В случае нелокального механизма конкуренции-распада (3) напрашивается естественная аппроксимация подинтегральной плотности $n(q,t)$ ее начальным значением $n_0(q)$. Эта замена $n(q,t) \to n_0(q)$, линеаризующая уравнение (1), может рассматриваться как первый шаг итерационной процедуры построения решения $n^{(i)}(q,t\,|\,n_0(q))$ [9]. Для нелокальной нелинейности линеаризующая аппроксимация выглядит даже более оправданной, нежели в локальном случае, поскольку интегрирование в (2) сглаживает особенности пространственных изменений плотности $n(q,t)$.

В эволюционной модели В.И. Сугакова [10], разработанной для объяснения образования неоднородных структур из чередующихся участков экситонной плотности в молекулярных кристаллах, в качестве транспортного оператора в уравнении (1) содержится не оператор свободной диффузии, а оператор Фоккера-Планка. В такой модели стохастически перемещающиеся в кристалле экситоны взаимодействуют друг с другом посредством самосогласованного силового поля $V(q)$. С ростом температуры T термостата, в контакте с которым находится экситонная подсистема, случайные блуждания квазичастиц- экситонов в силовом поле становятся более интенсивными. В рамках теории [10], ее автором была обнаружена неустойчивость однородного поля экситонной плотности, приводящая к образованию периодических пространственных скоплений квазичастиц – сверхрешеток их плотности, период которых существенно превышает постоянную кристаллической решетки, что по сути является примером появления диссипативной структуры – кинетическим фазовым переходом.

В отличие от автокатализа модели Эйгена [1] экситонный автокатализ Сугакова возникает не в связи с увеличением абсолютной численности экситонных состояний в кристалле, а в результате тенденции к ассоциированию квазичастиц, вызванному их взаимным силовым притяжением (мультипольное или Ван-дер-Ваальсово взаимодействие).

Примечательно, что в работе [11] уравнение (10) записано в дискретной по узлам кристаллической решетки форме, что дало возможность представить диффузионный оператор через скорости $W_{\mathbf{nm}}$ прыжков экситонов на соседние узлы решетки. При этом учитывалось, что скорости прямых и обратных прыжков между узлами с номерами **n** и **m** не равны между собой, а удовлетворяют принципу детального равновесия

$$W_{\mathbf{nm}} / W_{\mathbf{mn}} = \exp\left(-\frac{E_{\mathbf{n}} - E_{\mathbf{m}}}{k_B T} \right). \qquad (4)$$

Здесь, в (4), $E_{\mathbf{n}}$ – энергия взаимодействия между экситоном, находящимся в узле **n** решетки и всеми остальными экситонами кристалла, k_B - постоянная Больцмана. В дискретном варианте энергия $E_{\mathbf{n}}$ определяется выражением

$$E_{\mathbf{n}} = \sum_{\mathbf{m}} V(\mathbf{n},\mathbf{m}) n(\mathbf{m},t). \qquad (5)$$

Общим результатом анализа моделей (1-3), и модели авторов [10-11], несмотря на их очевидные различия, является появление эффекта локального концентрирования плотности поля: биологических особей – как в [1-5], или экситонов – как в [10-11]. Причем природа самого пространства, в котором возникает структурирование плотности поля несущественна – это может быть как пространство фенотипов, так и конфигурационное пространство, в которое помещена неравновесная система. По достижению некоторых критических – бифуркационных значений параметров, характерных для каждой из систем, распределение плотности приобретает островковый характер. Поскольку степень общности потоковых эволюционных моделей (1-3) и [10-11] является очень высокой (по сути дела и та, и другая модель отражают условия числового баланса многочастичной системы), можно предположить, что итоговый результат пространственного структурирования первоначально однородного поля, будет характерен и для систем иной природы, отличающейся от рассмотренных в [1-5], [7-8] и [10-11]. В качестве таковых могут выступать, например, информационные системы, или системы, типичные для образовательного процесса. В таком случае основная, возникающая при этом проблема – определение точных эквивалентов динамических переменных и параметров моделей (1-3) и [10-11]. Другой важный вопрос – существует ли для систем нефизической природы понятие, равнозначное термодинамически равновесному состоянию физико-химической системы. Последнее очень важно для появления диффузионных потоков, таких как фигурируют в (1) или в теории [10-11], или потоков более общего вида, а также связанных с этими потоками диссипативных процессов. Наконец, необходимо выяснить, какая из двух рассмотренных эволюционных моделей, (1-3) или [10-11] , более близка для исследования информационной, или схожей с ней по природе динамики [12].

Модель 1. Свободно-стохастическая вариабельность характеристик в пространстве понятий

В распределенной модели Эйгена [1] прямых указаний на действие термостата не наблюдается, поэтому ее применимость для когнитивных процессов и процессов обучения установить проще. Таблица эквивалентов между физическими (химическими, биологическими) характеристиками и величинами – с одной стороны и их когнитивными аналогами – с другой, может быть выбрана, например, следующим образом. Вместо пространства фенотипов $q = \{q_i\}$ может быть рассмотрено абстрактное «пространство понятий», причем координатами q_i точек этого пространства могут служить некоторые, достаточно однозначно определенные, характеристики понятий (например, степень восприятия, уровень сложности, уровень абстрактности и т.п.). В качестве замены биологически специфической пуляционной плотности $n(q,t)$ можно использовать «плотность компетентности» («компетентностная плотность»). В этом случае, очевидно, что сама компетентность в узкой области пространства понятий с дифференциально малым объемом $dq = dq_1 ... dq_N$, окружающим точку q, будет тогда определяться произведением $n(q,t)dq = n(q,t)dq_1 ... dq_N$. Общая компетентность индивидуума при таком подходе представляет собой интеграл по всему пространству понятий от плотности $n(q,t)$.

Реакционный член $w(q,t \mid n(q,t))$ уравнения (1) тогда будет представлять собой скорость «генерации-гибели» «компетентностной плотности». В качестве «потенциала» $U(q) = -\alpha(q)$ в поле понятий можно рассматривать «потенциал повышения компетентности» обучаемого. Наконец скорость $\beta[n(q,t)]$ из (2) может трактоваться как «скорость распада компетентности», в линейном варианте – самопроизвольного, спонтанного, а в более общем случае (нелинейном) – самоиндуцированного. Главный результат Модели 1 представлен выражением [2] – разложением по функциям $\varphi_j(q)$ базисного набора

$$n(q,t) = \sum_j C_j \exp(|\varepsilon_j| t) \varphi_j(q) \exp\left(-\int_0^t \beta(t') dt' \right). \qquad (6)$$

Постоянные C_j в (6) определяются начальным распределением $n_0(q)$, так как из (6) следует $n_0(q) = \sum_j C_j \varphi_j(q)$ и тогда $C_j = \int n_0(q) \varphi_j^*(q) dq$. Для локальных областей размножения $\alpha(q) > 0$ в пространстве фенотипов $q = \{q_i\}$ собственные значения $-\varepsilon_j$ линейного оператора $-L = D\nabla^2 - U(q)$, принадлежащие дискретному спектру, положительны [2]. Им соответствуют уровни отрицательной энергии ε_j, отвечающие связанным состояниям в «потенциальной яме» $U(q) = -\alpha(q)$.

Экспонента с интегральным показателем в (6) не позволяет плотности $n(q,t)$ неограниченно возрастать во времени. Рост популяции (6) будет происходить до тех пор, пока выполняется неравенство

$$|\varepsilon_j| > \int_0^t \beta(t')dt'$$

для всех чисел ε_j . При $t \to \infty$ наступает стационарный режим, и численность популяции стабилизируется. Наиболее глубокий «уровень энергии» ε_0 будет определять условие стабилизации

$$|\varepsilon_0| = \max|\varepsilon_j| > \int_0^\infty \beta(t)dt. \qquad (7)$$

Решению (7) может быть дана следующая интерпретация. Растущие со временем экспоненты $\exp(|\varepsilon_j|t)$ отражают взрывной характер генерации плотности популяции в тех областях пространства, которые характеризуются достаточно большой величиной скорости $\alpha(q)$, и при этом имеют достаточную пространственную протяженность, с тем, чтобы случайные блуждания с коэффициентом диффузии D не выводили систему из этих областей с высокой скоростью генерации населенности. Именно таким условиям отвечают наибольшие по модулю собственные значения ε_j [2]. Под блужданиями понимаются случайные вариации плотности биологической популяции по фенотипическим параметрам.

Точный вид «потенциала» $U(q) = -\alpha(q)$, как правило, неизвестен, и в случае пространства высокой размерности d рельеф $U(q)$ становится настолько сложным, что на практике имеет смысл рассматривать функцию $U(\{q_i\})$ как случайное поле аргументов q_i . Такой подход оказался плодотворным в квантовой электронной теории неупорядоченных сред [13] и эволюционной биологии [1]. Оказалось, что важнейшие результаты, касающиеся характера спектра и искомого поля плотности не чувствительны к изменениям реализаций стохастического потенциала $U(q)$. В качестве характеристик потенциала в этом случае часто используются первые моменты $\langle U(q)\rangle$ и $\langle U(q)U(q')\rangle$ случайного поля $U(q)$.

Примечательно, что при конверсии физико-биологической модели в гуманитарную область базовые функции $\varphi_j(q)$ могут быть отождествлены с самими компетенциями. Построение эквивалента для коэффициента диффузии D модели Эйгена не вызывает затруднений. В качестве такового может быть выбран «коэффициент вариабельности характеристик понятий» – как второй момент случайных смещений за время τ_0 изображающей точки в пространстве понятий $D = \langle \delta q\, \delta q' \rangle / \tau_0$. Если предложенная система эквивалентов для Модели 1 принимается как результат удачной трансляции, то главный вывод оригинальной теории должен оставаться в силе и для переведенного варианта. Тогда нетривиальным результатом процесса обучения может явиться взрывная неустойчивость, приводящая к резкому росту «компетентностной плотности» $n(q,t)$, в области оптимальных, околокритических значений характеристик некоторых ключевых понятий. Поиск этих ключевых для формирования компетентности понятий и их оптимальных характеристик представляет собой отдельную задачу образовательной деятельности. Важно подчеркнуть методологическую обусловленность наличия таких областей в пространстве понятий и их критическое влияние на процесс повышения компетентности и формирования компетенций.

Модель 2. Случайные изменения положений в пространстве понятий – как блуждания в области неэквивалентных состояний

В эволюционной модели В.И. Сугакова [10], фигурируют потенциал $V(q)$ силового поля, посредством которого осуществляется взаимодействие между элементами системы (экситонами) и температура T термостата, в контакте с которым находится эта система. Подобрать точные эквиваленты для двух этих величин представляется более затруднительным, чем для параметров Модели 1. Тем, не менее, в широком смысле, будем понимать под силовым потенциалом $V(q)$ изменение свойств пространства в точке q, в контексте возможного приобретения некоторой сносовой скорости у плотности $n(q,t)$. При таком подходе автоматически решается и проблема нахождения соответствующего эквивалента для температуры T. Действительно, сносовая скорость A это

$$A = \frac{D}{k_B T} \nabla_q V(q), \qquad (8)$$

поэтому температура термостата и характеристики силового поля входят в модель лишь в комбинации (8). Необходимо лишь прямое определение сносовой скорости A. Переход к узловому представлению (4)-(5) освобождает от вычислений градиентов, однако требует вычислений решеточных сумм. Поэтому реализация Модели 2, особенно в случае многомерного пространства понятий, потребует использования высокопроизводительной вычислительной техники.

В работах [3-4] отмечается, что появление сильной пространственной неоднородности эволюционирующих систем связано именно со стохастичностью потенциала $U(q)$. Причем если на промежуточной асимптотике в первоначально однородных системах типично появление ячеистых, или сеточных структур с преимущественным концентрированием субфазы в пределах ячеек или жгутов, то на далекой асимптотике, то есть при $t \to \infty$, характерно появление сравнительно редких малых областей, в которых преимущественно и сосредоточен весь конденсат. Авторы [3-4] предложили называть это явление перемежаемостью, подчеркнув, что возникновение структурирования обусловлено не нелинейностью эволюционных уравнений, а стохастическим характером поля $U(q)$ скоростей размножения.

В простейшем предельном случае, когда скорость размножения $\alpha(q) = -U_0$ постоянна, задача имеет смысл при рассмотрении цепной реакции в ограниченной области Ω пространства [4]. При этом спектр диффузионного оператора определяется размерами и формой области Ω.

Таким образом, в качестве важных особенностей, присущих рассмотренным эволюционным моделям, которые могут найти применение в теории познания и обучения, необходимо отметить следующие.

Наличие в эволюционном уравнении слагаемого, ответственного за автокатализ, приводит к возникновению взрывного режима роста плотности, имеющем критическую зависимость от параметров задачи (критическая масса, критический размер, критическое значение коэффициента диффузии).

1. Ограничение роста обеспечивают аннигиляционные слагаемые, со вторым порядком нелинейности по плотности, нелокальные (Модель 1), или локальные (Модель 2).
2. Причиной возникновения неоднородных пространственных структур (решеток, жгутов, островков плотности) могут явиться либо стохастические поля скорости размножения (соответствующий член уравнения может быть линейным по плотности), либо нелинейные члены в операторе, определяющем миграцию в пространстве с наложенным потенциальным силовым полем (Модель 2, несвободная миграция в потенциале $V(q)$).
3. При необходимости может быть сформулирована общая модель, объединяющая две рассмотренные. В такой модели за структурирование (перемежаемость) системы будут отвечать два механизма: автокаталитический и механизм образования нелинейного силового поля, влияющего на характер диффузионных перемещений изображающей точки в q-пространстве

Список литературы

1. *Эбелинг, В. Физика процессов эволюции. / В. Эбелинг, А. Энгель, Р. Файстель М.: Эдиториал УРСС. 2001. -328 с. Ebeling W., Feistel R. Physik der Selbst-Organisation und Evolution.— Berlin: Akademie-Verlag, 1982.*
2. *Михайлов, А.С. Критические явления в средах с размножением, распадом и диффузией / А.С. Михайлов, И.В. Упоров // Успехи физ. наук. 1984. Т. 144. – С. 79–112.*
3. *Зельдович, Я.Б. Перемежаемость пассивных полей в случайных средах / Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов // ЖЭТФ. 1985. -Т. 89. – С. 2061- 2072*
4. *Зельдович, Я.Б. Перемежаемость в случайной среде / Я.Б. Зельдович, С.А. Молчанов, А.А. Рузмайкин, Д.Д. Соколов // Успехи физ. наук. 1987. -Т. 152. – С. 3- 32.*
5. *Васильев, В А. Автоволновые процессы. / В А. Васильев, Ю. М. Романовский, В.Г. Яхно М.: Наука. Современные проблемы физики. 1987.*
6. *Мартинсон, Л.К. Дифференциальные уравнения математической физики. / Л.К. Мартинсон, Ю.И. Малов МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2002. – 368 с.*
7. *Колмогоров, А.Н. Исследование уравнения диффузии, соединенной с возрастанием количества вещества, и его применение к одной биологической*

проблеме / А.Н. Колмогоров, И.Г. Петровский, Н.С. Пискунов // Бюллетень МГУ. Серия Математика и механика. 1937. –Т. 1. –С. 1-26.

8. *Fisher, R.A. The wave of advance of advantageous genes / R.A. Fisher // Annals of Eugenics. 1937. - Vol.7. - P.355-369.*

9. *Кучеренко, М.Г. Кинетика статического нелинейного самотушения люминесценции в коллоидных системах / М.Г. Кучеренко // Коллоидный журнал. 1998. - Т.60. - №3. - С. 398-406. Kucherenko M.G. Kinetics of the static nonlinear self-quenching of luminescence in colloidal systems // Coll. J. 1998. - V.60. -№3. - P. 347-355.*

10. *Сугаков, В.И. Свехрешетки экситонной плотности / В.И. Сугаков // Физика твердого тела. 1986. –Т. 28. №8. –С. 411-415.*

11. *Извеков, С.В. Индуцированные светом диссипативные свехрешетки плотности экситонов и вектора поляризации в молекулярных кристаллах с примесями / С.В. Извеков, В.И. Сугаков // Физика твердого тела. 1992. Т. 34. №1. –С. 103-107.*

12. *Чернавский, А.С. Синергетика и информация. Динамическая теория информации. Серия синергетика: от прошлого к будущему / А.С. Чернавский // УРСС. М.: 2004. – 288 с.*

13. *Лифшиц, И. М. Введение в теорию неупорядоченных систем / И. М. Лифшиц, С. А. Гредескул, Л. А. Пастур М.: Наука, 1982.*