МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

В.Н. КОСТИН, А.Н. КАЛИНИН

МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2008

УДК 519.872(075.8)
ББК 22.18 Я 73
К 72

Рецензент
доктор технических наук, профессор А.М. Пищухин

Костин, В.Н.
К 72 Методы оптимизации в примерах и задачах: учебное пособие / В.Н. Костин, А.Н. Калинин. – Оренбург: ОГУ, 2008. – 153 с.

ISBN 978-5-7410-0826-3

Учебное пособие предназначено для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по специальности 230105.65, при изучении дисциплины «Методы оптимизации».

ББК 22.18 Я 73

К $\frac{1602110000}{6Л9-08}$

ISBN 978-5-7410-0826-3

Содержание

Введение

Научно-техническая революция, результаты которой особенно заметны в последние десятилетия, привела к созданию сложных высокопроизводительных систем и комплексов в различных сферах деятельности человека.

Ключевой проблемой решения этих сложных задач напрямую связано с решением задач оптимизации. Решение этой проблемы требует разработки и практического применения методов оптимизации, основанных на использовании ПК.

Под оптимизацией понимают выбор наилучшего решения. Методы оптимизации – поиска экстремума функции (в практических задачах, чаще всего, поиска экстремума критериев оптимальности) при наличии ограничений или без ограничений широко используются на практике. Явно или неявно с оптимизацией мы встречаемся в любой сфере человеческой деятельности от сугубо личного до самого высокого общегосударственного уровня. Экономическое планирование, управление, распределение ограниченных ресурсов, анализ производственных процессов, проектирование сложных объектов всегда должно быть направлено на поиск наилучшего варианта с точки зрения намеченной цели.

Данное учебное пособие посвящено изложению основных методов решения оптимизационных задач. Рассмотрены вопросы практического решения оптимизационных задач, которые позволяют составить алгоритм и автоматизировать процесс решения с помощью ПК.

Учебное пособие целесообразно изучать совместно с изданием ОГУ «Математическое программирование» под редакцией Тарасов В.Н., Бахарева Н.Ф.

1 Методологические основы решения оптимизационных задач

1.1 Основные положения теории оптимизации

Математическая теория оптимизации включает в себя фундаментальные результаты и численные методы, позволяющие находить наилучший вариант из множества возможных альтернатив без их полного перебора и сравнения. Для того чтобы использовать результаты и вычислительные процедуры теории оптимизации на практике, необходимо, прежде всего, сформулировать рассматриваемую задачу на математическом языке, т. е. построить математическую модель объекта оптимизации.

В большинстве реальных ситуаций дать исчерпывающее математическое представление оптимизируемой системы с учетом всех взаимосвязей ее частей, взаимодействий с внешним миром, всех целей ее функционирования бывает затруднительно или вовсе невозможно. При построении математической модели необходимо, как правило, выделять и учитывать в дальнейшем только наиболее важные, существенные стороны исследуемого объекта с тем, чтобы было возможным его математическое описание, а также последующее решение поставленной задачи. При этом неучтенные в математической модели факторы не должны существенно влиять на окончательный результат оптимизации. Поэтому процесс построения математической модели для решения оптимизационной задачи можно разбить на следующие основные этапы:

1 Определение границ объекта оптимизации.

Необходимость этого этапа диктуется невозможностью учета и исчерпывающего описания всех сторон большинства реальных систем. Выделив главные переменые, параметры и ограничения, следует приближенно представить систему как некоторую изолированную часть реального мира и упростить ее внутреннюю структуру.

Например, при оптимизации работы одного из цехов предприятия в некоторых случаях можно пренебречь влиянием особенностей функционирования других цехов, систем снабжения и сбыта всего предприятия, его взаимодействием с другими организациями, конъюнктурой рынка и многими другими факторами. Тогда цех будет рассматриваться как изолированная система, а его связи с внешним миром либо считаются зафиксированными, либо вовсе не учитываются.

Может оказаться, что первоначальные границы объекта оптимизации выбраны неудачно. Это становится ясным при дальнейшем анализе системы и ее математической модели, при интерпретации результатов поиска оптимального решения, сопоставлении их с практикой и т. д.

Тогда в одних случаях границы системы следует расширить, а в других - сузить. Например, если выясняется, что влиянием на работу исследуемого цеха со стороны других подразделений предприятия нельзя игнорировать, то необходимо включить в систему и эти подразделения. С другой стороны, может оказаться, что сам цех состоит из нескольких в большой степени независимо работающих участков, которые без значительного упрощения реальной ситуации можно рассматривать изолированно. Тогда для облегчения поиска оптимального решения разумно исследовать каждый участок как отдельную систему.

Вообще, в инженерной практике следует, насколько возможно, стремиться упрощать системы, подлежащие оптимизации, разбивать сложные системы на более простые подсистемы, если есть уверенность, что это повлияет на окончательный результат в допустимых пределах.

2 Выбор управляемых переменных.

На этом этапе построения математической модели необходимо провести различие между теми величинами, значения которых можно выбирать и варьировать с целью достижения наилучшего результата (управляемыми переменными), и величинами, которые фиксированы или определяются внешними факторами. Определение тех значений управляемых переменных, которым соответствует, наилучшая (оптимальная) ситуация, и представляет собой задачу оптимизации.

Одни и те же величины, в зависимости от выбранных границ оптимизируемой системы и уровня детализации ее описания, могут оказаться либо управляемыми переменными, либо нет. Например, в упомянутой ситуации с оптимизацией работы цеха объем поставок какого-либо сырья из другого цеха в одних случаях следует считать фиксированным или не зависящим от нашего выбора, а в других случаях - регулируемым, т. е. управляемой переменной.

3 Определение ограничений на управляемые переменные.

В реальных условиях на выбор значений управляемых переменных, как правило, наложены ограничения, связанные с ограниченностью имеющихся ресурсов, мощностей и других возможностей. При построении математической модели эти ограничения обычно записывают в виде равенств и неравенств или указывают множества, которым должны принадлежать значения управляемых переменных. Совокупность всех ограничений на управляемые переменные определяет так называемое допустимое множество задачи оптимизации.

Например, если годовой объем выпускаемой цехом продукции данного вида является управляемой переменной, то ее значения, во-первых, не могут быть отрицательными и, во-вторых, ограничены сверху максимальной производительностью оборудования цеха.

4 Выбор числового критерия оптимизации.

Обязательной составной частью математической модели объекта оптимизации является числовой критерий, минимальному или максимальному значению которого (в зависимости от конкретной задачи) соответствует наилучший вариант поведения исследуемого объекта. Величина этого критерия полностью определяется выбранными значениями управляемых переменных, т. е. он является функцией этих переменных и называется целевой функцией.

В инженерной практике используется широкий спектр критериев оптимизации. Например, это могут быть критерии экономического характера (себестоимость, прибыль, капитальные затраты и т. д.), технические или физические параметры системы (продолжительность технологического процесса, потребляемая энергия, максимальная механическая нагрузка, достигнутая скорость движения) и т. п.

Следует отметить, что во многих случаях выбор критерия оптимизации не является очевидным и однозначным. Часто бывает трудно поставить в соответствие всей совокупности целей функционирования системы какой-либо один критерий. Это объясняется различными причинами, такими, как сложность целевой функции, описывающей большую совокупность разнородных целей, неопределенность формулировок некоторых целей, препятствующая описанию их с помощью количественных характеристик, наличие противоречивых целей, важность каждой из которых зависит от точки зрения исследователя и т. д. Например, невозможно найти решение, обеспечивающее одновременно минимальные затраты, максимальную надежность, минимальное энергопотребление и максимальное быстродействие.

Выход из этого положения определяется в каждом конкретном случае. Например, из многих критериев, характеризующих различные цели оптимизации, выбирают один, считая его основным, а остальные - второстепенными. Далее второстепенные критерии либо не учитываются, либо учитываются частично с помощью дополнительных ограничений на управляемые переменные. Эти ограничения обеспечивают изменение второстепенных критериев в заданных диапазонах приемлемых значений.

Другой путь состоит в формулировке комплексного критерия, т. е. целевой функции, включающей с разумно выбранными весовыми коэффициентами целевые функции, соответствующие различным целям.

5 Формулировка математической задачи оптимизации.

Объединяя результаты предыдущих этапов построения математической модели, ее записывают в виде математической задачи оптимизации, включающей построенную целевую функцию и найденные ограничения на управляемые переменные. В общем виде математическую задачу оптимизации можно сформулировать следующим образом: минимизировать (максимизировать) целевую функцию с учетом ограничений на управляемые переменные.

Под минимизацией (максимизацией) функции n переменных $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$ на заданном множестве U_n - мерного векторного пространства E_n понимается определение хотя бы одной из точек минимума (максимума) этой функции на множестве U, а также, если это необходимо, и минимального (максимального) на U значения $f(x)$.

При записи математических задач оптимизации в общем виде обычно используется следующая символика:

$$f(x) \to \min_{x \in U}(\max),$$

где $f(x)$ - целевая функция;

U - допустимое множество, заданное ограничениями на управляемые переменные.

1.2 Классификация задач оптимизации

Многие задачи оптимизации сводятся к отысканию наименьшего, (или наибольшего), значения целевой функции или показателя качества. В зависимости от вида целевой функции и вида ограничений на область и параметры функции различают несколько типов задач оптимизации.

Наиболее просты, с математической точки зрения, задачи оптимизации, в которых целевая функция задается явной формулой и является при этом дифференцируемой функцией. В этом случае для исследования свойств функции (определения направлений ее изменения - возрастания или убывания, поиска точек локального экстремума) может быть использована ее производная. Такие задачи относятся к классу задач с явно заданной целевой функцией.

В последние десятилетия в условиях научно-технического прогресса круг задач оптимизации, поставленных практикой, резко расширился. Во многих из них целевая функция не задается формулой, ее значения могут получаться в результате сложных расчетов, браться из эксперимента и так далее. Такие задачи являются более сложными, потому что для них нельзя провести исследование целевой функции с помощью производной и относятся к классу задач с неявно заданной целевой функцией.

Следует также иметь в виду, что сложность задачи существенно зависит от ее размерности, т. е. от числа аргументов целевой функции.

В зависимости от числа аргументов различают одномерные задачи оптимизации и многомерные задачи оптимизации.

Выделение и подробное рассмотрение одномерных задач имеет определенный смысл. Эти задачи наиболее просты, на них легче понять постановку вопроса, методы решения и возникающие трудности. В ряде случаев, хотя и очень редко, одномерные задачи имеют самостоятельный практический интерес. Однако самое главное заключается в том, что алгоритмы решения многомерных задач оптимизации часто сводятся к последовательному многократному решению одномерных задач.

Рассмотрим общие вопросы постановки одномерных задач оптимизации. С математической точки зрения такую задачу можно сформулировать следующим образом: найти наименьшее (или наибольшее) значение целевой функции $f(x)$, заданной на множестве X. Определить значение переменной $x \in X$, при котором она принимает свое экстремальное значение. Математическая модель оптимизации имеет вид:

$$f(x) \to \min(\max),\ x \in X.$$

До сих пор мы обсуждали одномерные задачи оптимизации, в которых целевая функция зависела только от одного аргумента. Однако подавляющее число реальных задач оптимизации, представляющих практический интерес, являются многомерными: в них целевая функция зависит от нескольких аргументов, причем иногда их число может быть весьма большим.

Математическая постановка таких задач аналогична их постановке в одномерном случае: ищется наименьшее (наибольшее) значение целевой функции $f(x)$, заданной на некотором множестве E_n возможных значений ее аргументов. При этом целевая функция должна быть непрерывной, а множество E_n – представлять собой замкнутую ограниченную область.

В дальнейшем мы всегда будем предполагать, не оговаривая этого особо, что все рассматриваемые задачи принадлежат к классу многомерных задач оптимизации.

Многие практические задачи оптимизации сводятся к математическим моделям вида:

$$f(x) \to \min(\max),\ x \in U,$$

где допустимое множество U не совпадает со всем пространством E_n.

В этих случаях говорят об условной минимизации функции n переменных. В большинстве случаев допустимое множество U определяется ограничениями – равенствами и (или) неравенствами, т. е. рассматривается задача:

$$f(x) \to \min(\max),\ x \in E_n,$$
$$g_i \le 0,\ i \in I_1,$$
$$g_i = 0,\ i \in I_2,$$

где $I_1, I_2 \in [1, \ldots, m]$ – заданные множества индексов.

Такая постановка задачи представляет собой запись условий так называемой задачи математического программирования. Различают несколько частных видов задачи математического программирования:

1) задача линейного программирования – когда целевая функция и все ограничения линейны, а переменные x_j удовлетворяют условию неотрицательности $x_j \ge 0$.

2) задача нелинейного программирования – когда хотя бы одна их функций $f(x)$, $g_i(x)$ не является линейной.

3) задача на условный экстремум – отсутствуют ограничения - неравенства, т.е. $I_1 = 0$.

4) задача выпуклого программирования – все функции $f(x)$, $g_i(x)$ выпуклы, а ограничения в виде равенств отсутствуют, то есть $I_2 = 0$. Ее допустимое множество U – выпукло.

Во всех рассмотренных до сих пор задачах оптимизации управляемые переменные могут непрерывно изменяться на некоторых множествах, поэтому такие задачи имеют общее название непрерывных задач. Однако многие содержательные задачи оптимизации приводят к математическим моделям, в которых все переменные или некоторые из них принимают дискретный ряд значений. Такие задачи оптимизации называют дискретными.

Как правило, методы, разработанные для решения непрерывных задач оптимизации, не могут быть использованы применительно к дискретным задачам.

Широкий класс дискретных задач оптимизации составляют целочисленные задачи математического программирования, которые, наряду с обычными ограничениями на допустимое множество (равенствами и неравенствами), содержат и требование целочисленности, налагаемое на какие-либо переменные x_i. Такие задачи возникают, когда управляемые переменные x_i по своему смыслу могут принимать только целочисленные значения (например, x_i - это количество единиц используемого оборудования или число резервных блоков в схеме электронного устройства и т. п.).

Если требованию целочисленности подчинены все n переменных задачи, то она называется полностью целочисленной, а если только часть из них, то говорят о частично целочисленной задаче.

Требование целочисленности обычно записывают в виде:

$$x_i \in Z, i \in I,$$

где $I \in [1,2,\ldots, n]$ - множество индексов, соответствующих целочисленным переменным.

Во многих практических случаях возникает задача оптимизации принимаемого решения, каждая из составных частей которого представляет собой выбор одного из двух возможных вариантов. Приписав j-му выбору варианта управляемую переменную x_j принимающую значения 0 или 1 в зависимости от того, какой из двух вариантов выбран, получим частный случай целочисленной задачи оптимизации - задачу с булевыми переменными.

Еще одним примером математической модели дискретной задачи оптимизации является задача о выборе кратчайшего пути в ориентированном графе. В общем виде такие задачи формулируются следующим образом.

Пусть дан ориентированный граф, т. е. множество вершин, они обозначены буквами и множество дуг, соединяющих заданные пары вершин в указанных направлениях.

В графе выделены начальная и конечная вершины. Каждой дуге приписан определенный вес. Требуется найти ориентированную цепь, т. е. последовательность неповторяющихся вершин, связанных дугами (или последовательность самих этих дуг), которая соединяет начальную и конечную вершины и имеет минимальный (максимальный) вес.

К формальной схеме поиска кратчайшего пути в ориентированном графе сводятся прикладные задачи оптимизации различного содержания. Эти задачи объединяют возможность представить процесс поиска оптимального решения в виде последовательности принятых частичных решений о выборе одного варианта из нескольких возможных. Принятию каждого из этих частичных решений соответствует выбор одной из дуг, исходящих из некоторой вершины графа, а вес выбранной дуги характеризует «качество» принятого частичного решения.

Обобщая вышеизложенное, классификацию задачи оптимизации можно представить следующим образом (рисунок 1.1).

Рисунок 1.1 - классификация задач оптимизации

1.3 Классификация методов оптимизации

Для каждого класса оптимизационных задач существуют различные (чаще всего специфические) методы их решения. Рассмотрим классификацию основных из этих методов.

Классификация методов оптимизации может быть выполнена следующим образом:

1) По размерности решаемой задачи: одномерные и многомерные.

2) По способу формирования шага многомерные методы делятся на следующие виды:

- градиентные;
- безградиентные;
- случайного поиска.

В свою очередь, градиентные методы можно классифицировать:

- по алгоритму коррекции шага;
- по алгоритму вычисления новой точки (одношаговые и многошаговые).

Безградиентные методы делятся на методы: с поочередным изменением переменных и с одновременным изменением переменных.

Методы случайного поиска делятся на методы; с чисто случайной стратегией и со смешанной стратегией.

3) По наличию активных ограничений методы оптимизации можно разделить:

- без ограничений (безусловные);
- с ограничениями (условные).

В свою очередь, последние могут быть:

- с ограничениями типа равенства;
- ограничениями типа неравенств;
- смешанные.

Методы одномерной оптимизации являются базой для некоторых «многомерных» методов. В многомерной градиентной оптимизации строится улучшающая последовательность в зависимости от скорости изменения критерия по различным направлениям. При этом под улучшающей последовательностью понимается такая последовательность x_0, x_1, ... x_i, … в каждой точке которой значение критерия оптимальности лучше, чем в предыдущей. В безградиентных методах величина и направление шага к оптимуму при построении улучшающей последовательности формируется однозначно по определенным детерминированным функциям в зависимости от свойств критерия оптимальности в окрестности текущей точки без использования производных (т. е. градиента). Случайные методы используются в задачах высокой размерности. Многомерная условная оптимизация учитывает активные ограничения, выраженные в виде равенств и неравенств.

В каждом из рассмотренных направлений имеется большое число методов, обладающих своими достоинствами и недостатками, которые зависят, прежде всего, от свойств тех функций, экстремум которых ищется. Одним из сравнительных показателей качества метода является количество значений функции, которое, нужно вычислить для решения задачи с заданной погрешностью. Чем оно меньше, тем при прочих равных условиях эффективнее метод.

Перечислим основные методы, относящиеся к рассмотренным классам, не раскрывая в полном объеме их сущности.

К методам одномерной оптимизации (т. е. методам решения задач оптимизации вида $f(x) \to \min(\max)$, $a \le x \le b$, где x - скаляр, a и b - соответственно минимальное и максимальное возможные значения переменной x относятся следующие методы:

- метод сканирования. Достоинство метода состоит, в том, что можно найти глобальный максимум критерия, если $f(x)$ - многоэкстремальная функция.

К недостаткам метода относится значительное число повторных вычислений $f(x)$, что в случае сложной функции $f(x)$ требует существенных затрат времени;

- метод деления пополам. К недостаткам метода относится его работоспособность только для одноэкстремальных функций (т. е. таких, которые содержат один экстремум того типа, который мы ищем в задаче), так как в других случаях при сравнении двух критериев в соседних точках невозможно правильно выбрать следующий интервал, где находится экстремум;
- метод золотого сечения. Метод обеспечивает более быструю сходимость к решению, чем многие другие методы, и применим, очевидно, только для одноэкстремальных функций;
- метод параболической аппроксимации. К достоинству метода относится высокая скорость сходимости к оптимуму, хотя метод может не всегда сходиться к нему.

Рассмотрим методы многомерной безусловной градиентной оптимизации. К ним относятся методы построения улучшающих последовательностей при отыскании экстремума функции $f(x)$ - без активных ограничений. Активными принято называть такие ограничения, на границе которых находится решение. Если известно, что решение лежит строго внутри допустимой области, например, в случае ограничений типа неравенств, то такие ограничения лучше выводить из задачи на этапе ее постановки. (Отметим, что ограничения типа равенств, всегда активные).

К методам многомерной безусловной градиентной, оптимизации относятся:

- метод градиента. Основной недостаток метода - необходимость частого вычисления производных от $f(x)$;
- метод наискорейшего спуска (лишен недостатка предыдущего метода, однако, как и все градиентные методы, обладает невысокой эффективностью в овражных функциях);
- метод сопряженных градиентов. Является попыткой объединить достоинства методов первого порядка (к ним относятся градиентные методы, так как на интервале шага они заменяют нелинейную функцию $f(x)$ линейной) и второго порядка с исключением их недостатков;
- метод тяжелого шарика. Название метода происходит от аналогии с движением «тяжелого» материального шарика по наклонной поверхности. К недостаткам метода относится необходимость задания сразу двух неформальных параметров, определяющих эффективность поиска. К достоинствам метода, помимо ускорения движения вдали от оптимума, относится возможность «проскока» мелких локальных «ямок» (минимумов) за счет «инерционности шарика» т.е. можно решать и задачу глобальной оптимизации для функции $f(x)$ с одним явно выраженным минимумом и многими «мелкими».

Следующая группа численных методов оптимизации относится к методам многомерной безграничной оптимизации. У этих методов величина и направление шага к оптимуму формируются однозначно, по определенным детерминированным функциям в зависимости от свойств, критерия оптимальности в окрестности текущей точки без использования производных (т. е. градиенте).

Основная особенность рассматриваемой группы методов - отсутствие вычисления градиента критерия оптимальности. Ряд методов прямого поиска базируется на последовательном применении одномерного поиска по переменным или по другим задаваемым направлениям, что облегчает их алгоритмизацию и применение. К. методам названной группы относятся:

- метод Гаусса-Зайделя (метод покоординатного спуска). Метод прост в реализации. На эффективность метода влияет порядок чередования переменных. Недостаток метода состоит в низкой эффективности в овражных функциях, высокая чувствительность к выбору системы координат. Для нейтрализации недостатков разработаны модификации метода, среди которых, в частности, метод поиска с последействием;
- метод Розенброка. Направлен на ликвидацию одного из недостатков предыдущего метода - высокую чувствительность к выбору системы координат. Особенно эффективен для квадратичных функций;
- симплексный метод. (Симплексом в n-мерном пространстве называют фигуру, содержащую $n + 1$ вершину. На плоскости - это треугольник, в трехмерном пространстве - тетраэдр и т. д.). Основным недостатком метода является невозможность ускорения поиска вдали от оптимума. Этот недостаток устранен в одной из модификаций метода, известной как метод Нелдера-Мида;
- метод параллельных касательных. Данный метод эффективен, для задачи невысокой размерности для функций, близких к квадратичным функциям.

Ряд методов оптимизации можно объединить в группу методов многомерной случайной оптимизации. Методы этой группы позволяют в среднем быстрее выходить в район оптимума. Эффективны рассматриваемые методы и при поиске глобального оптимума. К методам названной группы можно отнести:

- метод слепого поиска;
- метод случайных направлений;
- метод поиска с «наказанием случайностью»;
- метод с «блуждающим» поиском.

Последняя группа методов - методы многомерной условной оптимизации. К этой группе относятся численные методы построения улучшающих последовательностей при наличии ограничений типа равенств и типа неравенств. Сюда не входят методы, использующие условия оптимальности. Во всех методах строится в допустимой области последовательность точек, в которых значения, критерия улучшаются. Поиск осуществляется градиентным методом. Основными методами данной группы являются:

- метод штрафов;
- метод прямого поиска с возвратом;
- метод проектирования градиента.

Сущность приведенных выше методов оптимизации достаточно хорошо освещена в учебной и научной литературе по прикладной математике (в том числе в перечисленной в данном учебном пособии).

Особый интерес вызывают методы решения задач математического программирования и дискретных задач оптимизации. Это связано, а первую очередь, с возможностями, появившимися в связи с бурным развитием средств вычислительной техники. Остановимся более подробно на рассмотрении методов решения задач линейного, нелинейного, динамического и целочисленного программирования.

Вопросы для самопроверки

1 Что понимают под оптимизацией?

2 Какие этапы включает процесс формирования математической модели оптимизации и их содержание?

3 Классификация задач оптимизации?

4 Классификация методов оптимизации?

2 Линейное программирование

Линейное программирование (ЛП) это раздел математического программирования, изучающий задачу отыскания максимума или минимума искомой функции при линейных ограничениях в виде равенств или неравенств.

Общая задача линейного программирования формируется следующим образом.

Требуется определить целевую функцию:

$$F = \max\left(\min\right)\sum_{i=1}^{n} c_j x_j \ , \tag{2.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \begin{matrix} \le \\ = \\ \ge \end{matrix} b_i \ , \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} & j = 1, n \\ & i = 1, m \\ & x_j \ge 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

где c_j, a_{ij}, b_i - заданные величины;

x_j - искомая переменная.

В основу метода линейного программирования положено условие:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_jx_j + \ldots + c_nx_n,$$

частные производные по всем переменным – величины постоянные:

$$\frac{dF}{x_j} = c_j - \text{const} \, .$$

Так как производные постоянные величины, следовательно, решение находится на границе области допустимых значений при максимальных или минимальных значениях x_j. Если у нас переменная x_j имеет порядок n, то мы получим 2^n комбинаций решений. Осуществив перебор всех угловых точек области допустимых значений можно определить оптимальное решение. Это трудоемкий процесс, поэтому для решения задачи линейного программирования разработан геометрический метод решения и симплекс метод (аналитический и табличный).

2.1 Геометрический способ решения задач линейного программирования

Для задач ЛП целевая функция и ограничения линейны относительно переменных. В том случае, когда свободных переменных две, отыскание экстремума осуществляется довольно легко по чертежу, так как он всегда лежит границе области допустимых решений.

Пример. Найти $\max\limits_{X}\left(f = 2x_1 + 2x_2\right)$

$$X = \begin{Bmatrix} 3x_1 - 2x_2 \geq -6 \\ 3x_1 + x_2 \geq 3 \\ x_1 \leq 3 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{Bmatrix}$$

Построим область ограничений *X*.

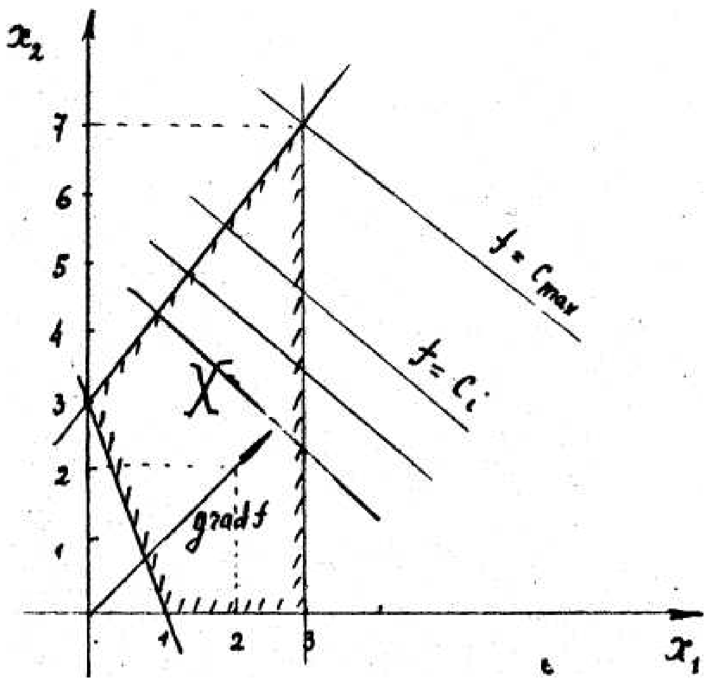


Рисунок 2.1

Построим *grad f* = (2, 2). Линии функции цели перпендикулярны, и самая удаленная от начала будет проходить через вершину с координатами (3; 7,5), тогда $f_{\max} = 2\bullet 3 + 2\bullet 7{,}5 = 21$ и достигается он в точке с координатами (3; 7,5).

В ряде задач удобно использовать двойственные переменные, которые вводятся следующим образом. Пусть дана задача ЛП. Найти

$$\min\left(\max_{X}\right)\left(f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j\right)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i; \quad x_j \ge 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad i = \overline{1,n}.$$

Тогда в двойственных переменных y_i имеем:

$$\max\left(\min_{Y}\right)\left(g = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i\right)$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \le c_j; \quad y_i \ge 0; \quad i = \overline{1,m}; \quad j = \overline{1,n}.$$

Пример. Найти $\min_{X}\left(f = 3x_1 + 2x_2\right)$

$$X = \left\{ \begin{matrix} x_1 + 2x_2 \ge 4; \\ x_1 - x_2 \ge -1; \\ x_1 \ge 0; \quad x_2 \ge 0 \end{matrix} \right\}$$

В двойственных переменных имеем. Найти

$$\max_{Y}\left(g = 4y_1 - y_2\right)$$

$$Y = \left\{ \begin{matrix} y_1 + y_2 \le 3; \\ 2y_1 - y_2 \le 2; \\ y_1 \ge 0; \quad y_2 \ge 0 \end{matrix} \right\}.$$

Решение построим для обычных и двойственных переменных (рисунок 2.2, 2.3).

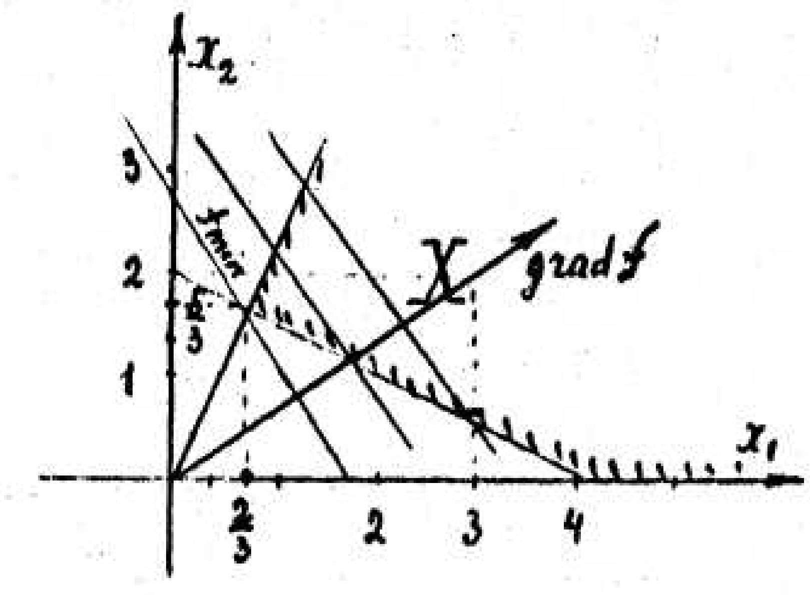


Рисунок 2.2

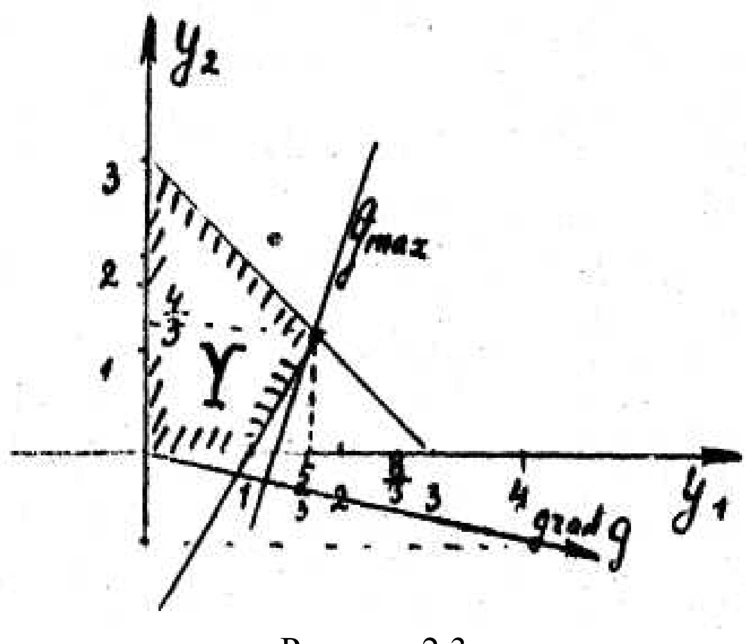


Рисунок 2.3

2.2 Симплекс – метод решения задач линейного программирования

2.2.1 Аналитический вариант

Для того чтобы использовать аналитический метод решения, задача линейного программирования должна быть записана в каноническом виде, то есть все ограничения, путем добавления дополнительных переменных должны определяться в виде равенств:

$$F = \max \sum_{j=1}^{n} c_j x_j , \qquad (2.4)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_j = b_i \ , \qquad (2.5)$$

$$x_j \geq 0,$$

где m – переменные, определяющие базисное решение целевой функции. Эти переменные называются базисными. Остальные переменные n - m будут равны нулю, они называются свободными.

Из условия $\frac{dF}{\partial x_j} = c_j - \text{const}$ одно из базисных решений, доставляющих максимум целевой функции, является оптимальным. С геометрической точки зрения базисное решение находится на границе многогранника области допустимых решений.

Для получения оптимального решения m – базисных переменных принимают максимальное (минимальное) значение, а свободные переменные принимают значения равные нулю. Выразим m – базисных переменных через свободные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = b'_1 - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{1j} \cdot x_j \\ x_2 = b'_2 - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{2j} \cdot x_j \\ \qquad \dots\dots\dots\dots\dots \\ x_m = b'_m - \sum\limits_{j=m+1}^{n} a_{mj} \cdot x_j \end{cases}, \qquad (2.6)$$

Если значения базисных переменных x_1, …, x_m подставим в целевую функцию, получим функцию, выраженную через свободные переменные:

$$F = C_0 + \sum_{j=m+1}^{n} C'_j x_j \, , \qquad (2.7)$$

где $x_j = 0$.

То есть целевая функция равна $F = C_0$.

По виду целевой функции, а точнее по знакам перед коэффициентами при свободных переменных можно определить возможно ли улучшение целевой функции. Если улучшение возможно, то свободная переменная перемещается в базисную, а одна из базисных становится свободной. При нахождении максимума все коэффициенты при свободных переменных в целевой функции должны иметь отрицательное значение. При нахождении минимума все коэффициенты при свободных переменных в целевой функции должны иметь положительное значение.

Пример. Найти максимум функции:

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max,$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 \le 6 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ и \ x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Приведем систему ограничений к каноническому виду, т.е. неравенства запишем в виде равенств путем добавления дополнительных переменных:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 8 \\ x_1 + x_4 = 6 \\ x_2 + x_5 = 4 \end{cases}$$

Базис системы равен трем, следовательно, базисных переменных будет три, а свободных две $n–m = 5 – 3 = 2$. Выберем в качестве базисных переменных x_1, x_4, x_5. Выразим базисные переменные через свободные x_1 и x_2:

$$\begin{cases} x_3 = 8 - x_1 - x_2 \\ x_4 = 6 - x_1 \\ x_5 = 4 - x_2 \end{cases}$$

При свободных переменных $x_1 = x_2 = 0$ имеем значение целевой функции $F = 0$ при базисных переменных $x_3 = 8$; $x_4 = 6$; $x_5 = 4$.

Для перемещения свободной переменной выберем переменную, у которой c_j имеет максимальное положительное значение. Просматривая целевую функцию выберем коэффициент 2 при x_2 и выразим x_2 через x_5, то есть x_5 из базисной переменной перемещается в свободную переменную вместо x_2:

$$\begin{cases} x_2 = 4 - x_5 \\ x_4 = 6 - x_1 \\ x_3 = 8 - x_1 - x_2 = 8 - x_1 - (4 - x_5) = 4 - x_1 + x_5 \end{cases}$$

Подставим x_2 в целевую функцию:

$$F = 8 – 2x_5 + x_1,$$

где $F = 8$, при $x_2 = 4$; $x_3 = 4$; $x_4 = 4$; $x_1 = x_5 = 0$.

В целевой функции остался один положительный коэффициент при x_1. Переместим x_1 из свободной в базисную. Переменная x_1 не может быть больше 4. Поэтому переменную x_3 делаем свободной:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 + x_5 \\ x_2 = 4 - x_5 \\ x_4 = 2 - x_3 - x_5 \end{cases}$$

Подставим x_1 в целевую функцию:

$$F = 12 - x_3 + x_5 - 2x_5 = 12 - x_3 - x_5$$

Дальнейшее улучшение целевой функции не возможно – все коэффициенты отрицательны, следовательно, максимум целевой функции равен $F = 12$ при $x_1 = 4$; $x_2 = 4$; $x_4 = 2$; $x_3 = x_5 = 0$.

2.2.2 Табличный вариант

Покажем на примере его применение.

Пример. Дано:

$$X = \left\{ \begin{aligned} x_1 - 2x_2 \le 1; \\ x_1 + 3x_2 \le 3; \end{aligned} \right\}$$

Найти $\min\limits_X \left(f = 2x_1 - 2x_2 - 1 \right)$.

Решение.

1 Введем добавочные переменные так, чтобы неравенства перешли в равенства:

$$\left. \begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_4 = 3 \end{aligned} \right\}$$

Ранг системы равен двум, значит, базисных переменных тоже две; соответственно свободных переменных 4 – 2 = 2. в качестве базисных переменных возьмем x_3 и x_4, тогда x_1, x_2 – свободные переменные.

Запишем ограничения в целевую функцию в следующем виде (что обязательно при применении табличного варианта симплекс-метода)

$$\left.\begin{aligned} x_3 &= 1-\left(x_1-2x_2\right)\\ x_4 &= 3-\left(x_1+3x_2\right)\\ f &= -1-\left(-2x_1+2x_2\right)\end{aligned}\right\}$$

2 Составим симплекс-таблицу (таблица 2.1).

Таблица 2.1

базисные переменные	свободные переменные		
		x_1	x_2
x_3			
x_4			
f			

В верхнюю половину каждой клетки этой таблице внесем коэффициенты перед x_1 и x_2 в скобках и свободные члены, получим таблицу 2.2.

Таблица 2.2

базисные переменные	свободные переменные		
		x_1	x_2
x_3	1	1	-2
x_4	3	1	3
f	-1	-2	2

Просмотрим последнюю строку: при отыскании минимума f выберем наибольший положительный коэффициент, при отыскании максимума – наименьший отрицательный коэффициент (наибольший по модулю) поставим над столбцом, в котором находится выделенный элемент, стрелку, и получим таблицу 2.3.

Таблица 2.3

базисные переменные	свободные переменные		
		x_1	x_2
x_3	1	1	-2
$\leftarrow x_4$	3	1	3
f	-1	-2	2

Эта стрелка указывает ту переменную из свободных, которую нужно переводить в базис для уменьшения функции f.

Теперь необходимо найти ту из базисных переменных, которую нужно перевести в свободные переменные. Для этого разделим элементы столбца со свободными членами на соответствующие элемента столбца со стрелкой над ним:

1 : (-2) = -0,5
3 : 3 = 1
-1 : 2 = -0,5

Нас интересует неотрицательное решение, поэтому принимаем для анализа только положительные результаты и из них берем наименьший. Около строки с таким результатом тоже ставим стрелку, но влево, вбок. В нашем случае стрелку ставим рядом с x_4, что и показывает, какую из базисных переменных нужно переводить в свободные переменные.

В нашем случае x_4 и x_2 меняются местами.

Элемент на пересечении строки и столбца со стрелками называется генеральным или разрешающим. Обведем его кружком. В нижней части клетки, где находится генеральный элемент, помести обратную ему величину; у нас $\lambda = \frac{1}{3}$, умножим элементы столбца на $-\lambda = -\frac{1}{3}$, а элементы строки со стрелкой на $\lambda = \frac{1}{3}$, получим таблицу 2.4.

Таблица 2.4

базисные переменные	свободные переменные		
		x_1	x_2
x_3	1 / 2	1 / $\frac{2}{3}$	-2 / $\frac{2}{3}$
$\leftarrow x_4$	3 / 1	1 / $\frac{1}{3}$	3 / $\frac{1}{3}$
f	-1 / -2	-2 / $-\frac{2}{3}$	2 / $-\frac{2}{3}$

Обведем замкнутой линией верхние элементы строки со стрелкой и нижние элементы столбца со стрелкой. Умножим теперь последовательно элементы выделенной строки на первый элемент выделенного столбца и результаты запишем в свободные нижние половинки первой строки. Теперь умножим элементы выделенной строки на 3-й элемент выделенного столбца и результаты впишем в нижнюю половину третьей строки таблицы 2.4.

Составим новую таблицу, в которой уже x_2 и x_4 поменялись местами, получим таблицу 2.5.

Таблица 2.5

базисные переменные	свободные переменные		
		x_1	x_4
x_2	1	$\frac{5}{3}$	$\frac{2}{3}$
x_3	3	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
f	-3	$-\frac{8}{3}$	$-\frac{2}{3}$

В таблицу 2.5, прежде всего, запишем в верхние половинки клеток из выделенной ранее строки и выделенного столбца нижние элементы. В верхних половинках других строк и столбцов запишем результаты сложения элементов, стоящих над и под чертой в этих строках. После этого снова просмотрим последнюю строку с целью нахождения наибольшего положительного элемента. Если он существует, то процедура повторяется.

В нашем случае все элементы последней строки отрицательны. Дальнейшее движение невозможно, следовательно, оптимальное решение:

$$x_2^* = 3; \quad x_3^* = 1; \quad x_1^* = x_4^* = 0, \text{ а } f_{\min} = -3.$$

2.3 Отыскание допустимого решения

Часто на практике встречается случай, когда отыскание допустимого базисного решения вызывает серьезные трудности. Это приводит к тому, что на первом шаге при заполнении симплекс таблицы не удается легко и быстро разделить переменные на свободные и базисные так, чтобы последние были неотрицательными. С увеличением числа переменных и уравнений, как правило, подбор допустимого базисного решения вызывает трудности.

Рассмотрим прием, с помощью которого можно найти допустимое базисное решение.

Дано:

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 + x_5 = 10; \\ 2x_2 + 3x_4 + x_5 = 5; \\ 4x_1 + 5x_2 + 2x_5 = 18 \end{array} \right\}.$$

Найти: $\max_X f = 0,4x_1 + 0,3x_2 + 0,5x_3 + 0,8x_4 + 0,2x_5$

Решение. Введем вспомогательные неотрицательные переменные:

$$\xi_1 = 10 - (x_1 + 2x_3 + x_5);$$
$$\xi_2 = 5 - (2x_2 + 3x_4 + x_5);$$
$$\xi_3 = 18 - (4x_1 + 5x_2 + 2x_5);$$

и вспомогательную форму

$$F = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 33 - (5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5).$$

Когда $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ то $F = 0$, а значения $x_i \geq 0$, $i = 1, 5$ будут удовлетворять исходной системе ограничений, т.е. будет найдено допустимое базисное решение.

Следующий шаг будет соответствовать обычного шагу симплекс-таблицы.

Заметим, что удобно сразу же применять симплекс-таблицу, а после того, как все ξ_j перейдут в свободные переменные и вспомогательная функция F станет равной нулю, ненужные столбцы и строка просто вычеркиваются.

1-й шаг, представлен в виде таблицы 2.6:

Таблица 2.6

базисные	свободные					
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	10 / 0	1 / 0	0 / 0	2 / 0	0 / 0	1 / 0
ξ_2	5 / 2,5	0 / 0	2 / 0,5	0 / 0	3 / 1,5	1 / 0,5
ξ_3	18 / -12,5	4 / 0	5 / $-\frac{5}{2}$	0 / 0	0 / -7,5	2 / -2,5
F	33 / -17,5	5 / 0	7 / $-\frac{7}{2}$	2 / 0	3 / -10,5	4 / -3,5
f	0 / 0,75	-0,4 / 0	-0,3 / 0,15	-0,5 / 0	-0,8 / 0,45	-0,2 / 0,15

Ищется F, а функция f пересчитывается одновременно.

2-й шаг, представлен в виде таблицы 2.7:

Таблица 2.7

базисные	свободные					
		x_1	ξ_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	10 / -1,375	1 / -0,25	0 / 0,625	2 / 0	0 / 1,875	1 / 0,125
x_2	2,5 / 0	0 / 0	0,5 / 0	0 / 0	1,5 / 0	0,5 / 0
ξ_3	5,5 / -1,375	4 / 0,25	-2,5 / -0,625	0 / 0	-7,5 / -1,875	-0,5 / 0,125
F	15,5 / -6,875	5 / -1,25	-3,5 / 3,125	2 / 0	-7,5 / 9,375	0,5 / 0,625
f	0,75 / 0,55	-0,4 / 0,1	-0,15 / 0,25	-0,5 / 0	-0,35 / 0,75	-0,05 / 0,15

3-й шаг, представлен в виде таблицы 2.8:

Таблица 2.8

базисные	свободные					
		ξ_3	ξ_2	x_3	x_4	x_5
ξ_1	8,625 / $4\frac{5}{16}$	-0,25 / -0,125	0 / 0,625	2 / 0,5	$\frac{15}{18}$ / $\frac{15}{16}$	$\frac{9}{8}$ / $\frac{9}{16}$
x_2	2,5 / 0	0 / 0	0,5 / 0	0 / 0	1,5 / 0	0,5 / 0
x_1	1,375 / 0	0,25 / 0	-2,5 / -0,625	0 / 0	/ -1,875	-0,125 / 0
F	$8\frac{5}{8}$ / $-8\frac{5}{8}$	-1,25 / 0,25	-3,5 / 3,125	2 / -1	$\frac{15}{8}$ / $\frac{15}{8}$	1,125 / -1,125
f	1,3 / $2\frac{5}{32}$	0,1 / $-\frac{1}{16}$	-0,1 / $\frac{5}{32}$	-0,5 / 0,25	-1,1 / $\frac{15}{32}$	-0,10 / $\frac{9}{32}$

Таблица 2.9

базисные	свободные					
		ξ_3	ξ_2	ξ_1	x_4	x_5
x_3	4,31	-0,125	$\frac{5}{16}$	0,5	$\frac{5}{16}$	$\frac{9}{16}$
x_2	2,5	0	0,5	0	1,5	0,5
x_1	1,375	0,25	-0,625	0	$-\frac{15}{8}$	$-\frac{1}{8}$
F	0	-1	-1	-1	0	0
f	3,45	-0,04	-0,05	0,25	-0,63	0,18

Мы достигли min$F$ = 0, одновременно найдено неотрицательное базисное решение: x_3 = 4,31; x_2 = 2,5; $x_1 = \frac{11}{8}$ и значение f = 3,45. Из данной таблицы убираем ненужные столбцы ξ_1, ξ_2, ξ_3 и строку F, а дальше решаем задачу только для переменных $x_i \geq 0$, i = 1,5.

5-й шаг: можно использовать таблицу для 4-го шага, вычеркнув столбцы ξ_1, ξ_2, ξ_3 и строку F, а можно начертить таблицу заново, что и сделаем таблицу 2.10:

Таблица 2.10

базисные	свободные		
		x_4	x_5
x_3	4,31 -1,58	0,94 -0,63	0,56 -0,32
x_2	2,5 1,68	1,5 0,67	0,5 0,33
x_1	$\frac{11}{8}$ 3,15	$-\frac{15}{8}$ 1,26	$-\frac{1}{8}$ 0,63
f	3,45 1,05	-0,63 0,42	0,18 0,21

6-й шаг, представлен в виде таблицы 2.11:

Таблица 2.11

базисные	свободные		
		x_2	x_5
x_3	2,73	-0,63	0,24
x_4	1,68	0,67	0,33
x_1	4,53	1,26	0,5
f	4,50	0,42	0,39

Дальше движение невозможно, так как в нижней строке нет ни одного отрицательного коэффициента.

Ответ: $f_{\max} = 4,50$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^* = 4,53 \\ x_2^* = 0 \\ x_3^* = 2,73 \\ x_4^* = 1,68 \\ x_5^* = 0 \end{array}\right\} \text{- оптимальное решение.}$$

В рассмотренном случае все добавочные переменные перешли из базиса в свободные. Однако так бывает не всегда. Возможна ситуация, когда форма F уже достигла своего минимума, а некоторые из вспомогательных переменных ξ_i остались среди базисных. В этом случае базисное решение будет оптимальным только тогда, когда все без исключения вспомогательные переменные будут выведены из базиса.

Возможны два случая:

1) в строке с оставшейся вспомогательной переменной ξ_k есть хотя бы один положительный коэффициент, который можно принять за разрешающий элемент. Тогда на следующем шаге ξ_k перейдет в свободные переменные;

2) в строке с оставшейся ξ_k все элементы неположительные. Последнее возможно, когда свободные $x_i = 0$, то есть их в базис уже нельзя выводить совсем, следовательно, и $\xi_k \equiv 0$.

Окончательно все вспомогательные переменные станут равными нулю и будет определено оптимальное базисное решение.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти $\max\limits_X f = 0{,}8x_{11} + 0{,}7x_{12} + 0{,}6x_{13} + 0{,}6x_{21} + 0{,}3x_{22} + 0{,}5x_{23}$;

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 20; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 40; \\ x_{11} + x_{21} = 20; \\ x_{12} + x_{22} = 10; \\ x_{13} + x_{23} = 30. \end{array} \right\}$$

Ответ: $f_{\max}$ = 36; оптимальное решение - $x_{11}^* = 10$; $x_{22}^* = 0$; $x_{12}^* = 10$; $x_{21}^* = 10$; $x_{13}^* = 0$; $x_{23}^* = 0$.

2 Найти $\max\limits_X f = 150x_{11} + 150x_{12} + 300x_{13} + 250x_{21} + 250x_{22} + 150x_{23}$;

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 700; \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 500; \\ x_{11} + x_{21} = 500; \\ x_{12} + x_{22} = 300; \\ x_{13} + x_{23} = 400. \end{array} \right\}$$

Ответ: $f_{\max}$ = 29000; оптимальное решение - $x_{11}^* = 0 \div 300$; $x_{22}^* = 0 \div 300$; $x_{12}^* = 0 \div 300$; $x_{21}^* = 200 \div 500$; $x_{13}^* = 400$.

3 Имеются две базы и три объекта. В таблице 2.12 указаны стоимость перевозки единицы груза с базы на объект в условных единицах стоимости и имеющиеся на базах ресурсы, а также потребность в них объектов. Составить оптимальный план перевозок так, что их общая стоимость была минимальна.

Таблица 2.12

Базы	Объекты			Ресурсы
	I	II	III	
1	7	5	8	11
2	2	4	3	8
Потребность	5	8	6	

Ответ: $f_{\min}$ = 83; $x_{11}^* = 0 \div 5$; $x_{22}^* = 3 \div 8$; $x_{23}^* = 0$; $x_{12}^* = 0 \div 5$; $x_{21}^* = 0 \div 5$; $x_{13}^* = 6$.

4 Имеется 5 ракет и 5 целей. Известна вероятность поражения любой цели каждой из ракет. Составить оптимальный план распределения ракет,

чтобы математическое ожидание числа пораженных целей было максимальным. В таблице 2.13 приведены вероятности поражения, в котором участвуют все ракеты, причем по каждой цели планируется только одна ракета.

Таблица 2.13

Ракеты	Цели				
	I	II	III	IV	V
1	0,12	0,02	0,5	0,43	0,15
2	0,71	0,18	0,81	0,05	0,26
3	0,84	0,76	0,25	0,37	0,52
4	0,22	0,45	0,83	0,81	0,65
5	0,49	0,02	0,5	0,26	0,27

Ответ: $f_{\max} = 2{,}6;\ x_{13}^* = x_{31}^* = x_{44}^* = x_{55}^* = x_{22}^* = 1.$

5 $\max\limits_X f = 12x_1 + 4x_2 \to ?$

$$X = \left\{ \begin{matrix} x_1 + x_2 \ge 2 \\ x_2 \le 4 \\ x_1 \ge 0{,}5 \\ x_1 - x_2 \le 0 \end{matrix} \right\} -$$

Ответ: $f_{\max} = 64;\ x_1^* = 4; x_2^* = 4.$

6 Даны ракеты и цели, а также вероятности поражения каждой ракетой любой цели. Распределить весь ресурс ракет по всем целям, представленным в таблице 2.14.

Таблица 2.14

Ракеты	Цели			Ресурсы
	Ц I	Ц 2	Ц3	
Тип А (x)	0,7	0,6	0,5	10
Тип В (y)	0,6	0,7	0,7	12
Кол-во целей	6	9	7	

Ресурс распределить так, чтобы математическое ожидание числа уничтоженных целей было максимальным.

Ответ: $f_{\max} = 15;\ x_1^* = 6; x_2^* = 4; x_3^* = 0; y_1^* = 0; y_2^* = 5; y_3^* = 7.$

7 Цех выпускает трансформаторы двух видов. На один трансформатор 1-го вида расходуется 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор 2-го вида - 3 кг железа и 2 кг проволоки. От реализации одного трансформатора 1-го вида цех получает 1,2 р. прибыли, а от реализаций одного трансформатора 2-го вида - 1 р. прибыли. Каков должен быть план выпуска трансформаторов обоих видов, чтобы цех поучил максимальную прибыль, если и цехе имеется 480 кг железа и 300 кг проволоки.

Ответ: $f_{\max} = 150$; $x_2^* = 150; x_1^* = 0.$

8 Для откорма скота на ферме в еженедельный рацион необходимо включать не менее 33 единиц вещества А, 23 единицы - вещества В и 12 единиц вещества С. Для откорма используются три вида кормов. Данные о содержании питательных веществ А, В, С, стоимость единицы каждого из кормов даны в таблице 2.15:

Таблица 2.15

Единицы корма	*A*	*B*	*C*	Цена
1	4	3	I	20 к.
2	3	2	I	20 к.
3	2	I	2	10 к.

Составить наиболее дешевый рацион.

Ответ: $f_{\min} = 2{,}2$ руб.; $x_1^* = x_3^* = 0$; $x_2^* = 11$ единиц.

9 Из листового проката определенной формы необходимо вырезать заготовки двух типов А и В. Возможны четыре варианта раскроя одного листа проката. Количество заготовок А и В, вырезаемых из одного листа при каждом варианте раскроя, и отходы раскроя показаны в таблице 2.16:

Таблица 2.16

Вариант	Заготовки		Отходы
	A	*B*	
1	4	0	12
2	3	3	5
3	1	9	3

Для изготовления одного изделия нужны 2 заготовки А и 10 заготовок В. Какое количество листов нужно раскроить каждым вариантом раскроя для изготовления 90 штук изделий, чтобы отходы от раскроя были минимальны.

Ответ: $x_1^* = 0; x_2^* = 60; x_3^* = 0; x_4^* = 60.$

10 Планируется нанесение удара по некоторому объекту двумя различными видами оружия: оружием А - в течение 2 мин; оружием В - в течение 5 мин. Возможности обеспечения стрельбы таковы, что при применении оружия А в течение 5 мин, оружия В, в течение 2 мин общее количество залпов не должно превышать 10, а для преодоления противодействия противника необходимо, чтобы количество залпов оружием А в течение 3 мин превышало количество залпов оружием В за 1 мин не менее, чем на 5. Рассчитать темп стрельбы всеми видами оружия, при котором общее число залпов в ударе будет наибольшим.

Ответ: $x_A^* = \frac{20}{11}$; $x_B^* = \frac{5}{11}$.

Вопросы для самопроверки

1 Сформулируйте общую задачу линейного программирования.

2 Напишите в различных формах математическую модель общей задачи линейного программирования.

3 Приведите геометрическое истолкование задачи линейного программирования. В какой точке многогранника решений линейная функция достигает оптимального значения?

4 На чем основан графический метод решения задачи линейного программирования?

5 Как построить первоначальный базисный план задачи линейного программирования?

6 Перечислите условия оптимального базисного плана на отыскание минимального и максимального значений линейной функции?

7 Сформулируйте теорему двойственности.

3 Специальные задачи линейного программирования

3.1 Транспортная задача

Из множества видов задач линейного программирования наиболее важно является транспортная задача.

Транспортные задачи находят широкое применение для решения следующих задач:

- материально-технического обеспечения;
- оптимального назначения;
- организации ремонтных восстановительных работ;
- оптимального.

Транспортные задачи классифицируются по следующим признакам:

1) по виду представления исходных данных:
- в матричной форме;
- в сетевой форме.

2) по виду критерия оптимальности:
- по критерию стоимости;
- по критерию времени.

3) по виду ограничений:
- с правильным балансом;
- с неправильным балансом.

4) по виду ограничений на пропускную способность маршрутов:
- без ограничений пропускной способности;
- с ограниченной пропускной способностью.

5) по характеру учета фактора времени:
- статические транспортные задачи;
- динамические транспортные задачи.

6) по характеру учета приоритетов:
- без учета приоритета;
- с учетом приоритета.

7) по количеству возможных вариантов перевозки:
- одновариантные задачи;
- многовариантные задачи.

8) по количеству номенклатуры перевозимого груза:
- однономенклатурного груза;
- многономенклатурного груза.

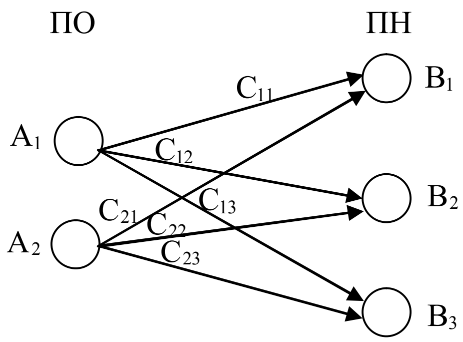
9) по учету дополнительных затрат:
- без учета дополнительных затрат;
- транспортные задачи с фиксированными затратами.

10) по количеству этапов перевозок:
- одноэтапные перевозки;
- многоэтапные перевозки.

Общая постановка транспортной задачи состоит в определении оптимального плана перевозок однородного груза из n пунктов отправления $A_1,\ldots, A_n$ в m пунктов назначения $B_1, \ldots, B_m$. При этом в качестве критерия оптимальности обычно берется минимальная стоимость перевозок всего груза. Мощности поставщиков и запросы потребителей, а также затраты на перевозку единицы груза для каждой пары «поставщик-потребитель» будем сводить в таблицу поставок.

Пример транспортной задачи.

Имеется два пункта отправления (ПО) – A_1, A_2 и три пункта назначения (ПН) – B_1, B_2, B_3. Пункты отправления имеют запасы A_1=400 т., A_2=600 т., пункты назначения имеют потребности запасов B_3=200 т., B_2=600 т., B_3=200 т.



где C_{ij} – стоимость перевозки единицы груза из i – го ПО в j – й ПН.

Требуется определить план перевозки грузов, обеспечивающий минимальную стоимость. Задача линейного программирования имеет вид:

$$F = \min(c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{13}x_{13} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + c_{23}x_{23}),$$

при ограничениях:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = A_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = A_2 \\ x_{11} + x_{21} = B_1 \\ x_{12} + x_{22} = B_2 \\ x_{13} + x_{23} = B_3 \end{cases}$$

где x_{ij} - количество груза, которое перевозится из i – го пункта отправления в j – й пункт назначения.

Для решения задачи можно использовать симплекс метод. Однако особенности транспортной задачи позволило разработать эффективный метод решения этого типа задач - метод потенциалов.

Математическая постановка задачи:

минимизировать функцию:

$$F = \min \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}\ , \qquad (3.1)$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = A_i, \quad i = \overline{1,m}\ , \qquad (3.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = Bj, \quad j = \overline{1,n}\ , \qquad (3.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j\ , \qquad (3.4)$$

$$x_{ij} \ge 0, \left(i = \overline{1,n};\ j = \overline{1,m}\right).$$

Уравнение (3.2) –означает, что количество грузов вывозится все, что есть в пунктах отправления.

Уравнение (3.3) означает, что ввозится столько грузов, сколько возможно принять в каждом пункте назначения.

Уравнение (3.4) – условие баланса: сумма запасов в пунктах отправления равна сумме потребностей в пунктах назначения.

Как мы видим, это задача линейного программирования, и поиск оптимального плана транспортной задачи можно вести с помощью симплекс-метода. Однако, в силу некоторых свойств этой задачи (каждая неизвестная входит лишь в два уравнения-ограничения и коэффициенты при неизвестных в ограничениях равны единице), она может проще решаться специальными методами.

Перейдем к рассмотрению способов решения транспортной задачи.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Транспортная задача, в которой сумма запасов равна сумме потребностей, называется закрытой. В противном случае задача - открытая.

В случае если транспортная задача является открытой, невозможно удовлетворить всех потребителей (если сумма потребностей больше суммы запасов) или вывезти все грузы от поставщиков (если сумма запасов больше, чем сумма потребностей).

В этом случае поступают следующим образом:

а) если сумма запасов больше суммы потребностей

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j\right),$$

то введем в таблицу еще одного потребителя, потребность которого определим, как

$$\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Так как грузы к новому потребителю (фиктивному) отправляться не будут, то тарифы на перевозку грузов фиктивному потребителю положим равными нулю;

б) если сумма запасов меньше суммы потребностей $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{j=1}^{m} b_j\right)$, то вводим в таблицу еще одного поставщика (фиктивного), запас груза у которого определим, как

$$\sum_{j=1}^{m} b_j - \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

тарифы на перевозку грузов от фиктивного поставщика потребителям положим равными нулю из тех же соображений, что и в первом случае (цены в новом столбце проставим равными нулю).

Из чего следует, что в дальнейшем можем рассматривать только закрытые задачи. Приведем без доказательства теорему.

ТЕОРЕМА 3.1. Необходимым и достаточным условием разрешимости транспортной задачи является ее закрытость.

Так как транспортная задача является задачей линейного программирования, то и схема нахождения оптимального решения остается той же: находится первоначальный опорный план, проверяется на оптимальность и, если он не оптимален, то переходим к другому опорному плану, улучшающему целевую функцию в смысле оптимума (например, уменьшающему значение целевой функции).

Вернемся к общей постановке транспортной задачи (3.1) - (3.3). Мы имеем $m \times n$ неизвестных (x_{ij} при $i = \overline{1, n}$ и $j = \overline{1, m}$) и $m + n$ уравнений. Система ограничений (3.2) линейно зависима (сложим первые m уравнений системы (3.2), получим:

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m} b_j .$$

Сумма последних N уравнений дает нам

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} a_i ,$$

но для закрытой транспортной задачи

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j ,$$

отсюда

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} x_{ij} .$$

Следовательно, она может быть разрешена относительно не более чем $m+ n$ - 1 неизвестной (можно доказать, что ранг системы ограничений (3.2) в точности равен $m + n$ - 1), то есть опорный план может иметь не более $m + n$ - 1 отличных от нуля неизвестных.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Опорный план, содержащий $m + n$ - 1 отличных от нуля значений неизвестных, называется невырожденным, а в противном случае - вырожденным.

3.2 Способы определения опорного базисного плана

Методы решения транспортных задач можно разделить на два метода:

- первый метод последовательного улучшения плана, к нему относится метод потенциалов;

- второй метод последовательного сокращения перевозок, к нему относится венгерский метод (сразу ищется план, а потом к нему приводятся ограничения).

Более приспособленным к ручному счету и эффективным при решении на ПК по сравнению с венгерским методом является метод потенциалов.

В методе потенциалов для решения задачи необходимо определить первое базисное решение опорного плана, способом северо-западного угла или минимального элемента.

3.2.1 Способ северо-западного угла

При этом способе назначение начинается с северо-западного угла, при этом назначение определяется как максимально возможное.

Пример. Имеем три ПО и три ПН. Стоимости перевозок заданы матрицей C. В таблице 3.1 сформирован первый опорный план.

Таблица 3.1

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10 30	1 10	3	40
A_2	6	2 80	5	80
A_3	12	5 10	14 50	60
b_j	30	100	50	180

Количество базисных клеток в плане определяется $m + n - 1 = 5$. Остальные $m \times n = 9 - 5 = 4$ будут свободными (незаполненными).

3.2.2 Способ минимального элемента

В таблице 3.2 ищется клетка с минимальной стоимостью перевозки и делается максимальное назначение. Затем находится следующий минимальный элемент и делается максимально возможное назначение с учетом условия ограничений. Процесс продолжается до получения базисного плана.

Таблица 3.2

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	a_i
A_1	10	1 40	3	40
A_2	6	2 60	5 20	80
A_3	12 30	5	14 30	60
b_j	30	100	50	180

Простейшим способом является способ северо-западного угла. Однако этот способ является наименее точным, чем метод минимального элемента. Способ наименьшего элемента прост при ручных расчетах, он дает лучшие результаты.

3.3 Способы улучшения опорного плана

3.3.1 Распределительный метод

Получив опорный базисный план, если он не является оптимальным, то его необходимо улучшить. Идея распределительного метода заключается в следующем: для каждой свободной клетки составляется цикл, и с помощью цикла определяется величина коэффициента k_{ij}, который называется индексом свободной клетки. Индекс свободной клетки показывает как изменится стоимость перевозки, если в данную свободную клетку назначить перевозку единицы груза. Очевидно, что если $k_{ij} \geq 0$, то стоимость перевозки будет увеличиваться. Если же $k_{ij} < 0$, то стоимость базисного плана можно улучшить. Таким образом, если все $k_{ij} \geq 0$, то базисный план является оптимальным. если есть $k_{ij} < 0$, то базисный план можно улучшить. Цикл составляется так, чтобы сохранялся базис перевозок по строке и столбцу.

3.3.2 Метод потенциалов

Недостаток распределительного метода – необходимость построения цикла для каждой свободной клетки. При расчете на ЭВМ это занимает много времени. Значительное упрощение вносит метод потенциалов, который позволяет рассчитывать индексы свободных клеток без построения цикла. С этой целью рассчитываются потенциалы ПО и ПН по зависимости:

$$\begin{cases} \overline{c}_{ij} = U_i + V_j \\ U_i = \overline{c}_{ij} - V_j \\ V_j = \overline{c}_{ij} - U_i \end{cases}, \tag{3.5}$$

где U_i , V_j - потенциалы;

c_{ij} - стоимость перевозки для базисной клетки.

Индексы для свободных клеток рассчитываются по формуле:

$$K_{ij} = c_{ij} - (U_i + V_j),$$

где c_{ij} - стоимость перевозки для свободной клетки.

Для расчета потенциалов необходимо задать начальный потенциал U_1=0. После этого рассчитывают по формулам (3.5) остальные потенциалы, используя базисные клетки. Если базисных клеток не хватает, то есть не выполняется условие количества базисных клеток $m + n - 1$, то для расчета потенциалов необходимо ввести фиктивные базисные клетки с нулевой фиктивной перевозкой. После того как потенциалы определены, отправляются индексы свободных клеток. Затем выбирается самая отрицательная клетка $\left|K_{ij}\right| >> 0$, отмечается знаком $\oplus$ и для нее строится цикл пересчета. Циклом пересчета в таблице транспортной задачи назовем ломаную линию, вершины каждой находятся в заполненных (базисных) клетках, в клетке пересчета эта линия имеет начало и конец, а звенья линии располагаются вдоль строк и столбцов таблицы.

Рассмотрим пример решения транспортной задачи для опорного плана, полученного способом северо-западного угла.

Таблица 3.3

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10 30	1 ⊖ 10	3 ⊕	0
A_2	6	2 80	5	1
A_3	12	5 ⊕ 10	14 ⊖ 50	4
V_j	10	1	10	

Определив потенциалы, рассчитаем индексы для свободных клеток:

$K_{13} = 3 – (10 + 0) = – 7,$
$K_{21} = 6 – (10 + 1) = – 5,$
$K_{23} = 5 – (10 + 1) = – 6,$
$K_{31} = 12 – (10 + 4) = – 2.$

Выберем самый отрицательный индекс K_{13} и туда поставим ⊕. Образуем цикл по часовой стрелке по базисным клеткам, чередуя знаки ⊕ и–, так чтобы баланс по строкам и столбцам не нарушался. В клетки, которые имеют знак ⊕ будем добавлять количество перевозки груза, клетки имеющие знак минус будем отнимать. Величину перемещаемого груза по циклу будем определять по минимальному элементу в клетках со знаком минус. В противном случае получим базисную клетку с отрицательной перевозкой $x_{ij} < 0$, что не допустимо. Таким образом, переместим груз по циклу равный 10 ед., и вновь определим потенциалы, и представим их в таблице 3.4.

Таблица 3.4

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10 ⊖ 30	1 ⊕	3 10	0
A_2	6 ⊕	2 ⊖ 80	5	8
A_3	12	5 ⊕ ⊖ 20	14 40	11
V_j	10	-6	3	

Рассчитаем индексы для свободных клеток:

$$K_{12} = 1 - (-6 + 0) = 7,$$
$$K_{21} = 6 - (10 + 8) = -12,$$
$$K_{23} = 5 - (8 + 3) = -6,$$
$$K_{31} = 12 - (10 + 11) = -9.$$

Выбираем самую отрицательную клетку K_{21} и ставим в нее знак плюс. Строим замкнутый цикл по базисным клеткам. Величина перемещаемого груза равна 30 ед. Строим новую таблицу 3.5.

Таблица 3.5

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10	1	3 40	0
A_2	6 30	2 ⊖ 50	5 ⊕	8
A_3	12	5 ⊕ 50	14 ⊖ 10	11
V_j	-2	-6	3	

Определим потенциалы и индексы свободных клеток:

$$K_{11} = 10 - (-2 + 0) = 12,$$
$$K_{12} = 1 - (-6 + 0) = 7,$$
$$K_{23} = 5 - (3 + 8) = -6,$$
$$K_{13} = 12 - (11 - 2) = 3.$$

Выбираем отрицательную клетку K_{23} и поставим знак $\oplus$, и составляем цикл. Перемещаем по циклу 10 ед. и формируем таблицу 3.6.

Таблица 3.6

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10	1	3 40	0
A_2	6 30	2 40	5 10	2
A_3	12	5 60	14	5
V_j	4	0	3	

Определяем потенциалы и индексы для свободных клеток:

$$K_{11} = 10 - (4 + 0) = 6,$$
$$K_{12} = 1 - (0 + 0) = 1,$$
$$K_{31} = 12 - (5 + 4) = 3,$$
$$K_{33} = 14 - (3 + 5) = 6.$$

Все индексы положительные, следовательно, план является оптимальным. Решим эту же задачу, когда опорный план составлен способом минимального элемента, таблица 3.7.

Таблица 3.7

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10	1 40	3	0
A_2	6	2 ⊖ 60	5 ⊕ 20	1
A_3	12 30	5 ⊕	14 ⊖ 30	10
V_j	2	1	4	

Определим индексы для свободных клеток:

$$K_{11} = 10 - (2 + 0) = 8,$$
$$K_{13} = 3 - (4 + 0) = -1,$$
$$K_{21} = 6 - (2 + 1) = 3,$$
$$K_{32} = 5 - (10 + 1) = -6.$$

В самую отрицательную клетку K_{32} поставим знак ⊕ и образуем цикл, по которому будем перемещать 30 ед. формируя новую таблицу 3.8.

Таблица 3.8

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10	1 40	3	0
A_2	6 ⊕	2 ⊖ 30	5 50	1
A_3	12 ⊖ 30	5 ⊕ 30	14	4
V_j	8	1	4	

Определим индексы для свободных клеток:

$$K_{11} = 10 - (8 + 0) = 2,$$
$$K_{13} = 3 - (4 + 0) = -1,$$
$$K_{21} = 6 - (8 + 1) = -3,$$
$$K_{33} = 14 - (4 + 4) = 6.$$

В клетку K_{21} ставим знак $\oplus$ и формируем замкнутый цикл. Величина груза, перемещаемая по циклу 30 ед. В результате перемещения теряем одну базисную клетку, т.е. нарушается правило количества базисных клеток $m + n + 1$. Чтобы правило не нарушалось, в цикле в клетку с меньшей стоимостью перевозок K_{22} поставим груз перевозки ноль. Формируем таблицу 3.9.

Таблица 3.9

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10	1 $\ominus$ 40	3 $\oplus$	0
A_2	6 30	2 $\oplus$ 0	5 $\ominus$ 50	1
A_3	12	5 60	14	4
V_j	5	1	4	

Определим индексы для свободных клеток:

$$K_{11} = 10 - (5 + 0) = 5,$$
$$K_{13} = 3 - (4 + 0) = -1,$$
$$K_{31} = 12 - (5 + 4) = 3,$$
$$K_{33} = 14 - (4 + 4) = 6.$$

В клетку K_{13} ставим знак $\oplus$ и формируем цикл. Перемещаем груз, равный 40 ед. Строим таблицу 3.10.

Таблица 3.10

ПО	ПН			
	B_1	B_2	B_3	U_i
A_1	10	1	3 40	0
A_2	6 30	2 40	5 10	2
A_3	12	5 60	14	5
V_j	4	0	3	

Определим индексы для свободных клеток:

$K_{11} = 10 - (4 + 0) = 6,$
$K_{12} = 1 - (0 + 0) = 1,$
$K_{31} = 12 - (5 + 4) = 3,$
$K_{33} = 14 - (5 + 8) = 1.$

Вывод: План оптимален. Результаты совпали - задача решена верно.

Вопросы для самопроверки

1 Сформулируйте транспортную задачу и опишите ее математическую модель.

2 Сформулируйте теорему о существовании решения транспортной задачи.

3 Назовите некоторые методы построения первоначального опорного плана транспортной задачи. Кратко изложите основное содержание каждого из них.

4 Как определяется и строится система потенциалов опорного плана транс-портной задачи?

5 В каком случае опорный план транспортной задачи является оптимальным?

6 Сформулируйте задачу целочисленного линейного программирования.

4 Дискретное программирование

4.1 Задачи целочисленного линейного программирования

4.1.1 Задача о размещениях

Пусть имеются m пунктов, в которых могут быть размещены предприятия, производящие некоторую единичную продукцию (станки, линии и т.д.). Кроме того заданы n пунктов потребления этой продукции с объемами потребления, равными соответственно b_1, b_2, ..., b_n, а также матрицы транспортных затрат $C = \{C_{ij}\}_{m\times n}$. Здесь C_{ij} - затраты на транспортировку единицы продукции из производящего пункта i в потребляющий пункт j. Задача состоит в таком размещении предприятий, определении их производственных мощностей и организации перевозок, чтобы суммарные затраты по производству и транспортировке были минимальны. Обозначим через x_i - объем продукции, в единицах, который необходимо производить в пункте i, а через x_{ij} – количество единиц продукции, поставляемой из пункта i в пункт j. Тогда затраты на производство продукции, если стоимость производства единицы продукции в пункте i - C_i, будут равны:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i x_i \ .$$

Затраты на транспортировку произведенной продукции к потребителям:

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \ .$$

Вся задача формулируется так:

Найти такие x_i, и x_{ij}, при которых:

$$F = \sum_{i=1}^{m} C_i x_i + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \min,$$

(суммарные затраты по производству и транспортировке минимальны), при условиях:

1) $x_i \ge 0, x_{ij} \ge 0$;

2) $x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij}, \quad i = \overline{1,m}$ (производимая продукция полностью потребляется);

3) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} \ge b_j, \quad j = \overline{1,n}$ (каждый потребитель получает продукции в объеме, не менее заданного);

4) x_i, x_{ij} - принимают целочисленные значения.

4.1.2 Задача о назначениях

Пусть имеется n единиц оборудования различных типов, которое требуется распределить между n предприятиями, имеющими различный уровень технической оснащенности. Обозначим C_{ij} - производительность i-го типа оборудования на j-м предприятии. Задача состоит в таком распределении оборудования (по одному на предприятие), которое обеспечит максимальную производительность. Определим неизвестные x_{ij} следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i \text{ тип оборудования попадает на } j \text{ предприятие,} \\ 0, \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Теперь задача может быть сформулирована следующим образом. Найти такие значения x_{ij}, чтобы производительность распределяемого оборудования была максимальной:

$$P = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ij} x_{ij} \to \max ,$$

при условиях:

1) $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n$ (На каждое предприятие по одному виду оборудования);

2) $\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \ldots, n$ (Каждая единица оборудования распределяется на 1 предприятие).

Отметим, что возможна задача о назначениях, в которой целью является минимизация. Конкретный пример будет приведен при иллюстрации алгоритма решения.

Пример: Задача оптимального целераспределения. Задана матрица вероятностей поражения i-й цели j-м средством P_{ij}, n = 3, m = 3. Каждое средство может поражать только одну цель. Необходимо произвести оптимальное целераспределение, при котором математическое ожидание количества пораженных целей будет максимальным. Математически данную задачу сформулируем так:

$$M = \max \sum_{i=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} P_{ij} x_{ij} ,$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1,$$

$$\sum_{i=1}^{3} x_{ij} = 1.$$

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } j \text{ средство назначается на } i \text{ цель,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Матрица вероятностей имеет вид

$$\left\| P_{ij} \right\| = \left\| \begin{matrix} 0{,}5 & 0{,}8 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}9 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 0{,}6 & 0{,}7 \end{matrix} \right\|,$$

тогда целевая функция имеет вид

$M = (0{,}5x_{11} + 0{,}8x_{12} + 0{,}6x_{13} + 0{,}9x_{21} + 0{,}9x_{22} + 0{,}8x_{23} + 0{,}7x_{31} + 0{,}6x_{32} + 0{,}7x_{33}) \to \max.$

Ограничения имеют вид

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = 1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = 1 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} = 1 \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 1 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 1 \end{cases}$$

Базис системы уравнений равен пяти (одно уравнение зависимо разрешено), следовательно, базисных переменных $m = 5$. Свободных переменных n будет четыре $9 - 5 = 4$. Назначим базисными переменными $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$ и добавим к ним x_{21} и x_{23}. Остальные переменные x_{12}, x_{13}, x_{31}, и x_{32} – будут свободными. Выразим базисные переменные через свободные.

$$\begin{cases} x_{11} = 1 - x_{12} - x_{13} \\ x_{22} = 1 - x_{12} - x_{32} \\ x_{33} = 1 - x_{31} - x_{32} \\ x_{21} = 1 - x_{31} - x_{11} = 1 - x_{31} - (1 - x_{12} - x_{13}) = 0 - x_{31} + x_{12} + x_{13} \\ x_{23} = 1 - x_{13} - x_{33} = 1 - x_{13} - (1 - x_{31} - x_{32}) = 0 - x_{13} + x_{31} + x_{32} \end{cases}$$

Подставим базисные переменные в целевую функцию

$M = 0{,}5(1 - x_{12} - x_{13}) + 0{,}8x_{12} + 0{,}6x_{13} + 0{,}9(x_{12} + x_{13} - x_{31}) + 0{,}9(1 - x_{12} - x_{32}) + 0{,}8(x_{31} + x_{32} - x_{13}) + 0{,}7x_{31} + 0{,}6x_{32} + 0{,}7(1 - x_{31} - x_{32})$.

Приведем подобные, получим

$$M = 2{,}1 + 0{,}3x_{12} + 0{,}2x_{13} - 0{,}1x_{31} - 0{,}2x_{32}.$$

Целевую функцию можно улучшить за счет положительных переменных x_{12} и x_{13}. Выберем переменную с наибольшим коэффициентом - x_{12} и переведем ее из свободных в базисную переменную.

$$\begin{cases} x_{12} = 1 - x_{11} - x_{13} \\ x_{33} = 1 - x_{31} - x_{32} \\ x_{22} = 0 - x_{32} + x_{11} + x_{13} \\ x_{21} = 1 - x_{31} - x_{11} \\ x_{23} = 0 - x_{13} + x_{31} + x_{32} \end{cases}$$

Подставляем x_{12} в целевую функцию, получаем

$M = 2{,}1 + 0{,}3(1 - x_{11} + x_{13}) + 0{,}2x_{13} - 0{,}1x_{31} - 0{,}2x_{32} = 2{,}4 - 0{,}3x_{11} - 0{,}1x_{13} - 0{,}1x_{31} - 0{,}2x_{32}$.

Все коэффициенты отрицательны, следовательно, дальнейшее увеличение функции не возможно.

Ответ: $M = 2{,}4$ при $x_{12} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$.

4.1.3 Задача о коммивояжере

Имеется n городов. Выезжая из одного, коммивояжер должен объехать все и вернуться в исходный город. В каждый город можно заезжать только один раз. Требуется найти минимальный замкнутый маршрут.

Обозначим $S = \{S_{ij}\}_{m\times n}$ - матрицу расстояний, x_{ij} - переменные, определим следующим образом:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{если коммивояжер из города } i \text{ переезжает в город } j, \\ 0, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Требуется минимизировать

$$\mathrm{F(x)} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} C_{ij}x_{ij} \to \min,$$

при условиях:

$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad j = \overline{1,\ n}$ (из каждого города коммивояжер выезжает только 1 раз);

$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1,\ n}$ (в каждый город коммивояжер въезжает 1 раз).

$$\mathrm{U_i} - U_j + nx_{ij} \le n - 1, \quad i = \overline{1,\ n}, \quad j = \overline{1,\ n}, \quad i \ne j,$$

где U_i, U_j- произвольные действительные числа.

Последнее условие обеспечивает замкнутость маршрута и отсутствие петель.

4.2 Методы решения задач целочисленного программирования

4.2.1 Метод отсечения Гомори

Запишем общую задачу целочисленного программирования в виде: найти максимум

$$\mathrm{F(x)} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{n} C_k x_k \tag{4.1}$$

в области, определенной условиями

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le \mathrm{b}, \quad i = \overline{1,\ m} \tag{4.2}$$

$$x_i > 0, \quad j = \overline{1,\ n} \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{4.3}$$

$$x_i > \text{целые}, \quad j = \overline{1,\ n} \tag{4.4}$$

Метод отсечения Гомори состоит в следующем:

а) решаем задачу линейного программирования (4.1) - (4.3);

б) полученное оптимальное решение задачи (4.1) - (4.3), если оно существует, проверяем на целочисленность; если все x_j, $j = \overline{1,\ n}$ допустимые целые, то полученное оптимальное решение задачи линейного программирования является оптимальным решением задачи целочисленного программирования; если задача линейного программирования решения не имеет, то не имеет решения и задача целочисленного программирования; наконец, если хотя бы одна координата не удовлетворяет условию (4.4), то:

в) строим дополнительное линейное ограничение, с помощью которого отсекается та часть допустимой области, определяемой условиями (4.2) - (4.3), в которой содержится оптимальное решение задачи линейного программирования (4.1) - (4.3), но нет ни одного допустимого решения, удовлетворяющего условию (4.4) и вновь выполняем пункт а) для задачи линейного программирования с дополнительным ограничением и т.д.

4.2.2 Метод ветвей и границ

У многих задач целочисленного программирования, в частности у сформулированных выше, множество всех допустимых решений представляет собой всевозможные комбинации (перестановки) одного и того же набора чисел. Естественно, что оптимальное решение можно найти, анализируя все возможные варианты. Вопрос лишь в том, как целесообразней организовать такой анализ. Существуют методы динамического программирования, метод ветвей и границ, использующие последовательный анализ вариантов.

Рассмотрим второй из них. Пусть G_0 - множество допустимых решений задачи, в которой среди совокупности $x \in G_0$ требуется найти то x, при котором целевая функция F имеет минимум. По некоторому закону (правилу) поставим в соответствие множеству G_0 число Z_0, которое является оценкой нижней границы целевой функции на множестве G_0. Разобьем множество G_0 на конечное число непересекающихся подмножеств (для наглядности на два) G_1 и G_2: $G_0 = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \varnothing$. Определим по выбранному закону (правилу) оценки нижней границы целевой функции на этих подмножествах Z_1 и Z_2.

Возьмем подмножество с меньшей оценкой, допустим G_2, и разобьем $G_2 = G_3 \cup G_4$, $G_3 \cap G_4 = \varnothing$ и найдем оценки подмножеств G_3 и G_4.

Подмножество с меньшей оценкой выбираем для ветвления на рисунке 4.1, и т.д.

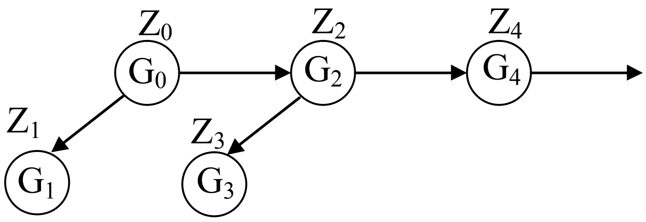


Рисунок 4.1

Естественно ожидать, что оптимальное решение с большей вероятностью содержится в подмножестве, оценка которого меньше оценок неветвленных подмножеств и, таким образом, производя ветвления, добраться до оптимального решения.

4.2.3 Метод ветвей и границ решения задачи о коммивояжере

Рассмотрим задачу о коммивояжере. Пусть $S = \{S_{ij}\}, \quad i = \overline{1,n}, \quad j = \overline{1,n}$ - матрица, элемент которой S_{ij} определяет расстояние при переходе из пункта i в пункт j. Полагаем $S_{ii} = \infty, \quad i = \overline{1,n}$, рассматриваем это как запрет на переезд из i в i.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Циклом t назовем набор из n упорядоченных пар городов, образующих маршрут, который проходит через каждый город только один раз:

$$t = \{(i_1, i_2), (i_2, i_3), \ldots, (i_{n-1}, i_n), (i_n, i_t)\}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Издержками $Z(t)$ для цикла t назовем величину:

$$Z(t) = \sum_{\mathrm{k}=1}^{n-1} S_{i_k, j_{k-1}} + S_{i_n, j}.$$

В нашей интерпретации $Z(t)$ - это длина замкнутого маршрута, образованного циклом t.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Матрица, которая получается из данной вычитанием из элементов каждой строки минимального элемента этой строки, а затем вычитанием из элементов каждого столбца минимального элемента этого столбца, называется приведенной матрицей. Сумма вычитаемых в процессе приведения элементов называется приводящей константой.

Если обозначить $S_{i,j(\mathrm{i})} = \min\limits_{j=1,n} S_{i,j}, i = \overline{1,n}$ - минимальный элемент S в строке i, тогда после вычитания этих элементов получится матрица S' с неотрицательными элементами

$$S'_{\mathrm{ij}} = S_{ij} - S_{i,j(i)}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$$

Обозначим

$$S'_{i(\mathrm{i}),j} = \min_{i=\overline{1,n}} S'_{i,j}, \; j = \overline{1,n},$$

минимальный элемент S' в столбце j. Тогда после вычитания этих элементов получится приведенная матрица S'' с неотрицательными элементами

$$S''_{\mathrm{ij}} = S'_{ij} - S'_{i(i),j}, i = \overline{1,n}, j = \overline{1,n}.$$

По определению приводящая константа

$$h = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} S_{i,j(i)} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{n} S'_{i(j),j}.$$

Если $Z(t)$ - издержки цикла t для исходной матрицы, а $Z'(t)$ - издержки цикла t после приведения, то $Z(t) = Z'(t) + h$ и, очевидно, что h является нижней границей издержек для всех циклов t исходной матрицы расстояний, поскольку h - сумма минимальных элементов строк и столбцов. Из этого следует, что применяя метод ветвей и границ, мы можем использовать h в качестве оценки разветвляемых подмножеств.

Определимся теперь с принципом разбиения на подмножества и нахождения оценок этих подмножеств. Пусть G_0 - множество всех маршрутов. Разобьем G_0 на два подмножества: первое подмножество состоит из всех маршрутов, включающих переезд из города i в город j, говорят содержащих пару (i, j), а второе подмножество состоит из множества маршрутов не содержащих пару (i, j). Пару городов (i, j) для ветвления будем выбирать среди тех пар, которым в приведенной матрице соответствуют нулевые элементы, причем выбирается такая пара (i, j), чтобы подмножество, не содержащее пару (i, j) имело максимальную оценку. Разветвляя, последовательно, мы построим дерево ветвей, на вершине которого будет подмножество, содержащее две пары городов, завершающих маршрут. Спускаясь по дереву ветвей, мы по парам городов, определяющих ветвление, определим все пары городов, составляющих маршрут, представленный на рисунке 4.2.

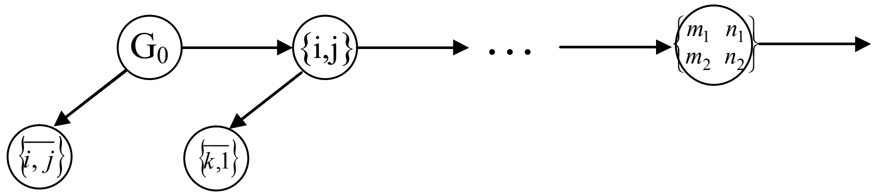


Рисунок 4.2 – Спуск

Опишем вычислительный алгоритм.

1 Осуществим приведение матрицы S по строкам и столбцам, получим приведенную матрицу S'.

2 Вычислим сумму приводящих констант $h(k)$ - это оценка для исходного множества маршрутов G_0. Обозначим оценку $\omega\ (G_0) = h$.

3 Выберем претендентов для ветвления, т.е. (i, j) $i = 1, 2, ..., j = 1, 2, ..., i \neq j$, для которых $S_{ij}(k) = 0$ и вычислим для всех таких $S_{ij}(k)$ величины

$$\theta_{\text{ij}} = \min_{j' \neq j} S_{ij'} + \min_{i' \neq i} C_{ij},\ \ j' = 1,2,...,i' = 1,2...$$

4 Выберем для ветвления ту пару (i, j) из претендентов на ветвление, для которой θ_{ij} получится максимальным.

5 В качестве оценки множества всех маршрутов, не содержащих выбранную пару (i, j), возьмем оценку того множества, которое разветвляли плюс max θ_{ij}.

6 Так как из каждого города можно выезжать только один раз и в каждый город можно въезжать только один раз, то строку i и столбец j можно из дальнейшего рассмотрения исключить. Чтобы не получить замкнутых неполных циклов, нужно наложить необходимые запреты, в частности, на переезд из j в i то есть положить $S_{ij} = \infty$.

7 Если полученная после вычеркивания строки столбца и наложения запретов матрица имеет размерность 2×2, то определяемые ею пары городов завершают маршрут. Приводя эту матрицу и добавляя приводящую константу к оценке последнего разветвляемого множества, получим оценку маршрута. Если эта оценка не больше оценки всех тупиковых ветвей, то маршрут, описываемый

деревом ветвей, является оптимальным, иначе процесс ветвления должен быть продолжен, исходя из множества с меньшей оценкой.

8 Если усеченная матрица не имеет размерности 2×2, то приводим полученную матрицу и находим оценку множества $\{i,\ j\}$, то есть множества маршрутов, содержащих пару (i, j) , как сумму приводящей константы и оценки разветвляемого множества.

Переходим к п. 3.

Пример. Имеется четыре пункта, расстояние между которыми описано матрицей расстояний. Найти оптимальный (минимальный) замкнутый маршрут объезда городов.

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 13 & 12 & 4 \\ 12 & \infty & 7 & 8 \\ 12 & 7 & \infty & 5 \\ 4 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

1) Приводим матрицу S:

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & C_{i,j(i)} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 13 & 12 & 4 \\ 13 & \infty & 7 & 8 \\ 12 & 7 & \infty & 5 \\ 4 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ C_{i(j),j} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 13 & 12 & 4 \\ 13 & \infty & 7 & 8 \\ 12 & 7 & \infty & 5 \\ 4 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 2 & 0 & 0 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 7 & 8 & 0 \\ 6 & \infty & 0 & 1 \\ 7 & 0 & \infty & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Найдем сумму приводящих констант: $h = 22$

Найдем оценку множества G_0: $\omega\ (G_0) = 22$.

3 Укажем претендентов на ветвление и осуществим выбор пары для ветвления:

$S_{14} = 0$, $S_{23} = 0$, $S_{32} = 0$, $S_{34} = 0$, $S_{41} = 0$,

$\theta_{14} = 7 + 0 = 7$, $\theta_{23} = 1 + 1 = 2$, $\theta_{32} = 0 + 2 = 2$, $\theta_{34} = 0 + 0 = 0$,

$\theta_{41} = 6 + 1 = 7$, $\max\ \theta_{ij} = \theta_{14} = 7$ (можно $\theta_{41} = 7$).

4 Итак, для ветвления выбираем пару (1, 4) и начинаем строить дерево ветвей (рисунок 3.4). Найдем оценку множества $\{1,\ 4\}$ - множества всех маршрутов не содержащих пару (1, 4): $\omega\ (\{1, 4\}) = \omega\ (G_0) + \omega\ (1, 4) = 22 + 7 =$ $= 29$.

5 Вычеркнем строку 1, столбец 4 и положим запрет на переезд из 4 в 1:

$$\begin{array}{c} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 6 & \infty & 0 \\ 7 & 0 & \infty \\ \infty & 2 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Приводим матрицу

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc}\underline{1}&\underline{2}&\underline{3}\end{array} & C_{i,j(i)} \\ \begin{array}{c}2\\3\\4\end{array} & \begin{pmatrix}6&\infty&0\\7&0&\infty\\\infty&2&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}0\\0\\1\end{array}\end{array} \to \begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccc}\underline{1}&\underline{2}&\underline{3}\end{array} & \\ \begin{array}{c}2\\3\\4\end{array} & \begin{pmatrix}6&\infty&0\\7&0&\infty\\\infty&2&1\end{pmatrix} & \begin{array}{c}0\\0\\1\end{array} \\ C_{i(j),j} & \begin{array}{ccc}6&0&0\end{array} & \end{array} \to \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc}\underline{1}&\underline{2}&\underline{3}\end{array} \\ \begin{array}{c}2\\3\\4\end{array} & \begin{pmatrix}0&\infty&0\\1&0&\infty\\\infty&1&0\end{pmatrix}\end{array}$$

6 Найдем $h = 1 + 6 = 7$ и найдем оценку $\{1,4\}$.

ω $(\{1, 4\}) = \omega(G_0) + h = 22 + 7 = 29$.

7 Укажем претендентов для ветвления и выберем пару для ветвления: $S_{21} = 0$, $S_{23} = 0$, $S_{32} = 0$, $S_{43} = 0$, $\theta_{21} = 0 + 1 = 1$, $\theta_{23} = 0 + 0 = 0$, $\theta_{32} = 1 + 1 = 2$, $\theta_{43} = 1 + 0 = 1$, $\max \theta_{ij} = \theta_{32} = 2$.

Итак, для ветвления берем пару (3, 2).

Найдем оценку $\{3, 2\}$: ω $(\{3, 2\}) = \omega$ $(\{1, 4\}) + \theta_{32} = 29 + 2 = 31$.

8 Вычеркнем строку 3, столбец 2 и наложим запрет на переезд из 2 в 3.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}1&3\end{array} \\ \begin{array}{c}2\\4\end{array} & \begin{pmatrix}0&\infty\\\infty&0\end{pmatrix}\end{array}$$ - матрица приведенная, следовательно $h = 0$ и

ω $(\{1, 4\}) = \omega$ $(\{1, 4\}) + h = 29$.

9 Так как матрица размерности 2×2, то не запрещенные пары (2, 1) и (4, 3) завершают маршрут, представленный на рисунке 4.3.

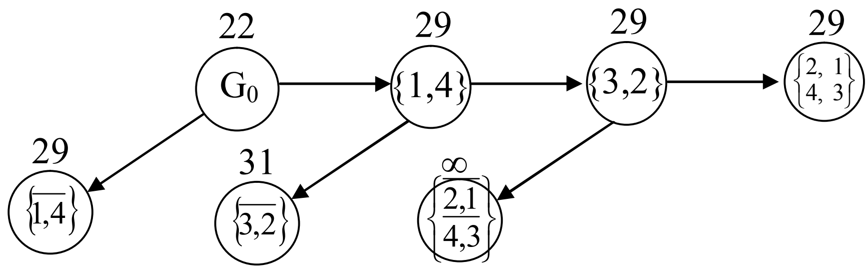


Рисунок 4.3 - Маршрут

Поскольку оценка последнего подмножества не больше оценок тупиковых ветвей, то пары (1, 4), (3, 2), (2, 1), (4, 3) задают оптимальный маршрут, который можно представить, скажем так: $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 1$ с расстоянием $S_{\min} = 29$.

Рассмотрим еще один пример решения задачи коммивояжера.

1 Приводим матрицу S

$$\begin{array}{ccc} & \begin{array}{ccccc}\underline{1}&\underline{2}&\underline{3}&\underline{4}&\underline{5}\end{array} & C_{\mathrm{i,i(i)}} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array} & \begin{pmatrix}\infty&4&3&7&9\\10&\infty&7&6&4\\3&8&\infty&2&1\\7&10&4&\infty&5\\3&7&1&4&\infty\end{pmatrix} & \begin{array}{c}3\\4\\1\\4\\1\end{array}\end{array} \to \begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc}\underline{1}&\underline{2}&\underline{3}&\underline{4}&\underline{5}\end{array} \\ \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\\5\end{array} & \begin{pmatrix}\infty&1&0&4&6\\6&\infty&3&2&0\\2&7&\infty&1&0\\3&6&0&\infty&1\\2&6&0&3&\infty\end{pmatrix} \\ C_{\mathrm{i(j),j}} & \begin{array}{ccccc}2&1&0&1&0\end{array}\end{array} \to$$

$$\begin{array}{r} \\ 1 \\ 2 \\ \to 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 0 & 0 & 3 & 6 \\ 4 & \infty & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & \infty & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 0 & \infty & 1 \\ 0 & 5 & 0 & 2 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Найдем сумму приводящих констант:

$h = 3 + 4 + 1 + 4 + 1 + 2 + 1 + 1 = 17.$

Найдем сумму G_0: $\omega\ (G_0) = 17$.

3 Укажем претендентов на ветвление и осуществим выбор пары для ветвления:

$S_{12} = 0$, $S_{13} = 0$, $S_{25} = 0$, $S_{31} = 0$, $S_{34} = 0$, $S_{35} = 0$, $S_{43} = 0$, $S_{51} = 0$, $S_{53} = 0$,

$\theta_{12} = 0 + 5 = 5$, $\theta_{13} = 0 + 0 = 0$, $\theta_{25} = 1 + 0 = 1$, $\theta_{31} = 0 + 0 = 0$,

$\theta_{34} = 0 + 1 = 1$, $\theta_{35} = 0 + 0 = 0$, $\theta_{43} = 0 + 1 = 1$, $\theta_{51} = 0 + 0 = 0$,

$\theta_{53} = 0 + 0 = 0$, $\max\ \theta_{ij} = \theta_{12} = 5$.

4 Итак, для ветвления выбираем пару (1, 2) и начинаем строить дерево ветвления, представленное на рисунке 4.4. Найдем оценку множества $\{1, 2\}$ - множество всех маршрутов, не содержащих пару (1, 2): $\omega\ (\{1, 2\}) = \omega\ (G_0) + \theta_{12} = 17 + 5 = 22$.

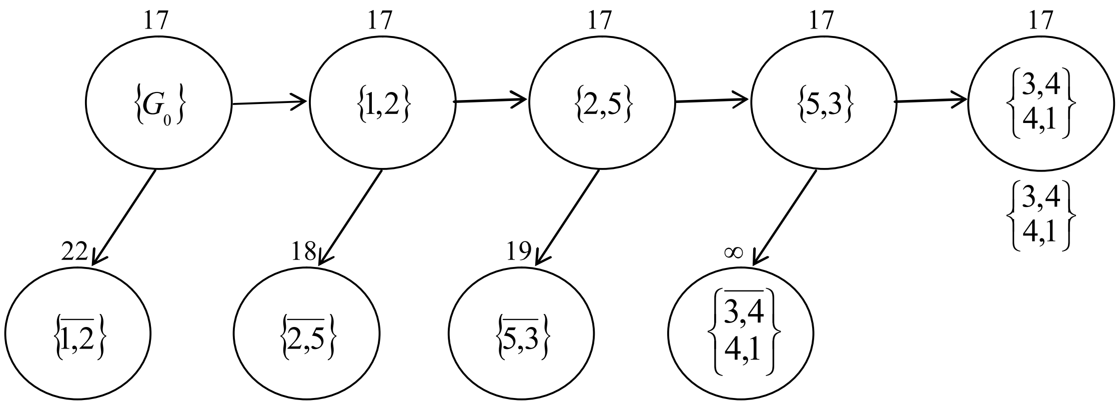


Рисунок 4.4 – Маршруты

5 Вычеркнем строку 1, столбец 2 и назначим запрет на переезд из 2 в 1.

$$\begin{array}{r} \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ C_{i,i(i)} \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \underline{1} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} \end{array} \\ \begin{pmatrix} \infty & 13 & 12 & 4 \\ 13 & \infty & 7 & 8 \\ 12 & 7 & \infty & 5 \\ 4 & 8 & 5 & \infty \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \end{array}\begin{array}{l} C_{i,i(i)} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \\ \end{array}$$

Матрица в приведении не нуждается, так как минимальные элементы в строках и столбцах – нули.

6 Найдем h = 0 + 0 = 0 и тогда значение $\{1, 2\}$:

ω ({1, 2}) = ω (G_0) + h = 17 + 0 = 17.

7 Укажем претендентов для ветвления и выберем пару для ветвления

$S_{25} = 0$, $S_{31} = 0$, $S_{34} = 0$, $S_{35} = 0$, $S_{43} = 0$, $S_{51} = 0$, $S_{53} = 0$,

$\theta_{25} = 1 + 0 = 1$, $\theta_{31} = 0 + 0 = 0$, $\theta_{34} = 0 + 1 = 1$, $\theta_{35} = 0 + 0 = 0$,

$\theta_{43} = 0 + 1 = 1$, $\theta_{51} = 0 + 0 = 0$, $\theta_{53} = 0 + 0 = 0$, max θ_{ij} будет несколько (три). Для удобства ветвления выберем $\theta_{ij} = \theta_{25} = 1$, то есть пару (2, 5).

Найдем оценку {2, 5}: ω ({2, 5}) = ω ({1, 2}) + θ_{25} = 17 + 1 = 18.

8 Вычеркнем строку 2, столбец 5 и назначим запрет на переезд из 5 в 2 и из 5 в 1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} \underline{1} & \underline{3} & \underline{4} \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \infty & 0 \\ 1 & 0 & \infty \\ \infty & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$ – матрица приведена, следовательно $n = 0$.

ω ({2, 5}) = ω ({1, 2}) + h = 17 + 0 = 17.

9 Укажем претендентов для ветвления и выберем пару для ветвления

$S_{31} = 0$, $S_{34} = 0$, $S_{43} = 0$, $S_{43} = 0$, $S_{53} = 0$,

$\theta_{31} = 0 + 1 = 1$, $\theta_{34} = 0 + 2 = 2$, $\theta_{43} = 0 + 1 = 1$, $\theta_{53} = 2 + 0 = 2$, max θ_{ij} будет несколько (два). Для удобства последовательного ветвления выберем $\theta_{ij} = \theta_{53} = 2$, то есть пару (5, 3).

Найдем оценку {5, 3}: ω ({5, 3}) = ω ({2, 5}) + θ_{53} = 17 + 2 = 19.

10 Вычеркнем строку 5, столбец 3 и назначим запрет на переезд из 3 в 5 и из 3 в 1.

$$\begin{array}{cc} & \begin{matrix} 1 & 4 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 3 \\ 4 \end{matrix} & \begin{pmatrix} \infty & 0 \\ 0 & \infty \end{pmatrix} \end{array}$$ - матрица приведена, следовательно $n = 0$.

ω ({5, 3}) = ω ({2, 5}) + h = 17 + 0 = 17.

11 Так как матрица размерности 2×2, то не запрещенные пары (3, 4) и (4, 1) завершают маршрут.

4.2.4 Задача о покрытии

С помощью задачи о покрытии решаются следующие задачи оптимизации:

-задача оптимального размещения средств поражения. Задано n районов возможных маршрутов выдвижения противника и m позиций размещения средств поражения. Необходимо минимальным количеством средств поражения перекрыть все маршруты выдвижения противника;

- задача тестирования сложных автоматизированных средств. Имеется n алгоритмов тестирования, каждый из которых определяет (контролирует) исправность определенных систем. Необходимо выбрать такой набор минимальных алгоритмов, чтобы проконтролировать все системы сложного технического средства;

- задача о выборе минимального количества специальностей (специализаций) для выполнения технологического процесса. Имеется *n* специалистов различной квалификации, каждый из которых может выполнять определенные операции технологического процесса. Необходимо выбрать минимальный перечень специализаций, который бы выполнял весь объем операций технологического процесса.

Математическая постановка задачи:

$$\sum_{i=1}^{m} C_i X_i \to \min,$$

$$\sum a_{ij} x_i \geq 1, \tag{4.5}$$

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{ технологическая операция выполняется,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$$

Ограничение (4.5) означает, что каждая технологическая операция должна покрываться (выполняться). Исходные данные задаются с помощью матрицы инцидентности:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|,$$

где $i = 1, \ldots, m$ - количество операций, которые должны быть выполнены;

$j = 1, \ldots, n$ - количество действующих элементов (специалистов), которые могут выполнять (покрывать) определенные операции;

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{ операция выполняется } j \text{ действующим элементом,} \\ 0, \text{ не выполняется.} \end{cases}$$

Действующие элементы могут быть реальные специалисты или мнимые (нереальные) специалисты. Если считать, что все действующие элементы равноценны то необходимо минимальным количеством специализаций покрыть все технологические операции, т.е. $\sum_{j=1}^{n} x_j \to min$. При этом избыточность специализаций должна быть минимальной: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \to min,\ i = \overline{1,m}$, то есть нереализованные возможности (способности) исполнителей должны стремиться к минимуму. При этом каждая операция должна выполняться хотя бы одним действующим элементом (специалистом).

Данная задача решается методом ветвей границ. Для ее решения указать два момента: во-первых, необходимо определить способ ветвления дерева решений; во-вторых, определить способ вычисления границ решения задачи.

Для оценки границ решения необходимо определить мощность каждого действующего элемента с помощью формулы:

$$W(j) = E'(j) - S(j),$$

где $E'(j)$ – потенциал j-го действующего элемента:

$$E'(j) = \sum_{\forall i \in I} a_{ij},\ j \in J,\ i \in I,$$

где I – множество операций, которые еще не вошли в расписание;

$$S(j) = \sum_{\forall i \in I'} a_{ij}, j = (J / J_1),$$

где I' – множество операций, вошедших в расписание;

$S(j)$ – избыточность или неиспользованные возможности j-го действующего элемента.

Для того, чтобы задача о покрытии быстро сходилась, к конечному результату вводится оценка перспективной мощности действующего элемента:

$$\widetilde{W}(j) = W(i) - S(j),$$

где $W(i)$ - мощность i-го действующего элемента, из которого идет ветвление;

$S(j)$ - избыточность действующего элемента, который претендует на включение в расписание;

$\widetilde{W}(j)$ - перспективная мощность.

Рассмотрим пример решения задачи о покрытии. Задан технологический процесс матрицей инцидентности.

Таблица 4.1

Виды работ	Номера действующих элементов						
	1	2	3	4	5	6	7
1	1	1	0	1	1	0	0
2	1	1	1	0	1	0	0
3	1	0	0	1	0	1	0
4	0	0	1	0	0	1	0
5	0	1	0	1	0	0	1
6	0	1	0	0	0	0	0
7	0	0	1	0	0	0	1
$W(j)$	3	4	3	3	2	2	2

На первом этапе определим мощность каждого элемента при условии, что $S(j) = 0$, т.е. просуммируем все единицы по столбцам.

Дерево ветвления решений представлено на рисунке 4.5

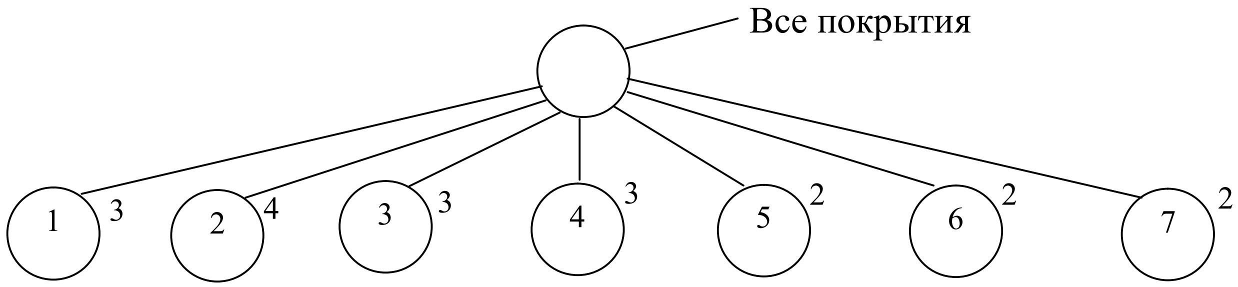


Рисунок 4.5

Из всех действующих элементов выбираем элемент с наибольшей мощностью - номер два, следовательно, данный элемент мы включаем в расписание. После этого формируем усеченную матрицу, в которой исключаем 2 столбец и те операции, которые этот действующий элемент выполняет (строки в которых элемент равен единице, это 1, 2, 5, 6).

Таблица 4.2

Виды работ	Номера действующих элементов					
	1	3	4	5	6	7
3	1	0	1	0	1	0
4	0	1	0	0	1	0
7	0	1	0	0	0	1
$E'(j)$	1	2	1	0	2	1
$S(j)$	2	1	2	2	0	1
$W(j)$	-1	1	-1	-2	2	0

Вновь подсчитываем вектор E (потенциал) для каждого столбца. Определяем избыточность $S(j)$ как сумму единиц, которые совпадают с действующим элементом, который включен в расписание. Определяем мощность $W(j)$ как разность $E'(j)$ и $S(j)$. В полученном векторе мощности выберем максимальный действующий элемент. Попробуем включить его в расписание. Определим его перспективный потенциал:

$$\widetilde{W}(6) = W(2) - S(6) = 4 - 0 = 4.$$

Просматриваем дерево ветвления. Если 4-й элемент максимальный или не меньше других, то включаем его в расписание, рисунок 4.6.

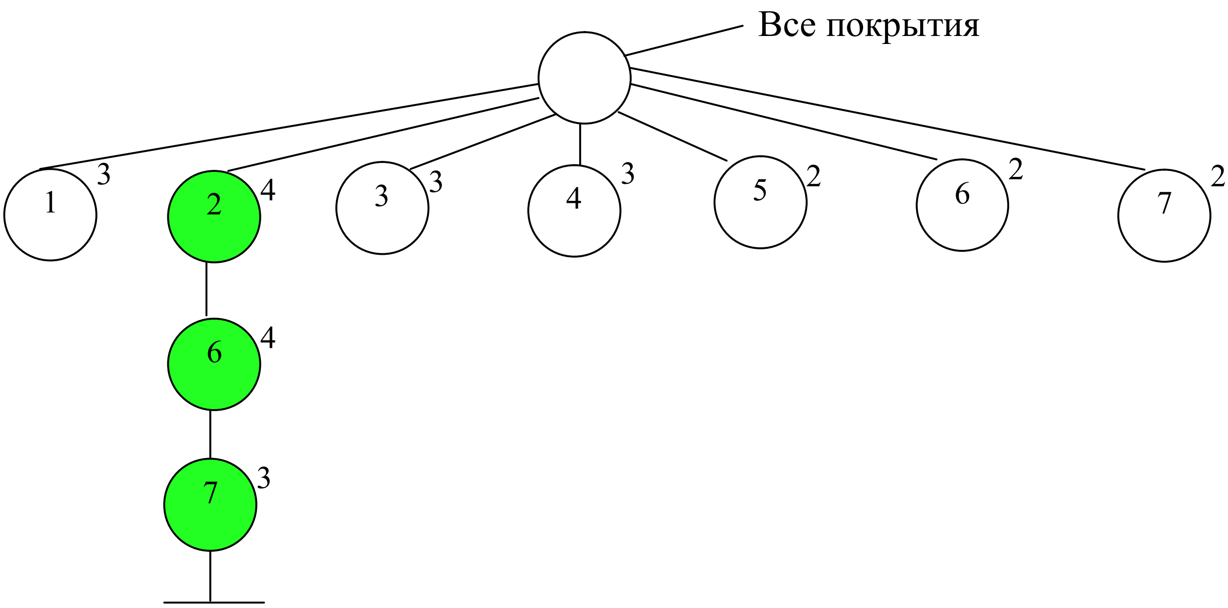


Рисунок 4.6

Формируем усеченную матрицу. Исключаем 6-й столбец и строки 3, 4.

Таблица 4.3

Виды работ	Номера действующих элементов				
	1	3	4	5	7
7	0	1	0	0	1
$E'(j)$	0	1	0	0	1
$S(j)$		2			1
$W(j)$		-1			0

Определяем $E'(j)$. Там, где $E = 0$, считать нет необходимости, т.к. эти действующие элементы не могут входить в расписание. Определяем, где $E'(j) \neq 0$, причем избыточность наращивается с предыдущей матрицы. Выбираем j-й действующий элемент с максимальной W и пытаемся его включить в расписание. Определим перспективный потенциал этого уровня:

$$\widetilde{W}(7) = W(6) - S(7) = 4 - 1 = 3.$$

Этот потенциал не меньше потенциалов в вершинах, поэтому седьмой действующий элемент включаем в расписание. Покрытие закончено, все работы (операции) выполнены. Эффективность решения $W = 3$.

У нас еще имеются ветви 1, 3, 4 с таким же потенциалом. Если их путем ветвления аналогичным образом рассчитать, то получим результат представленный на рисунке 4.7.

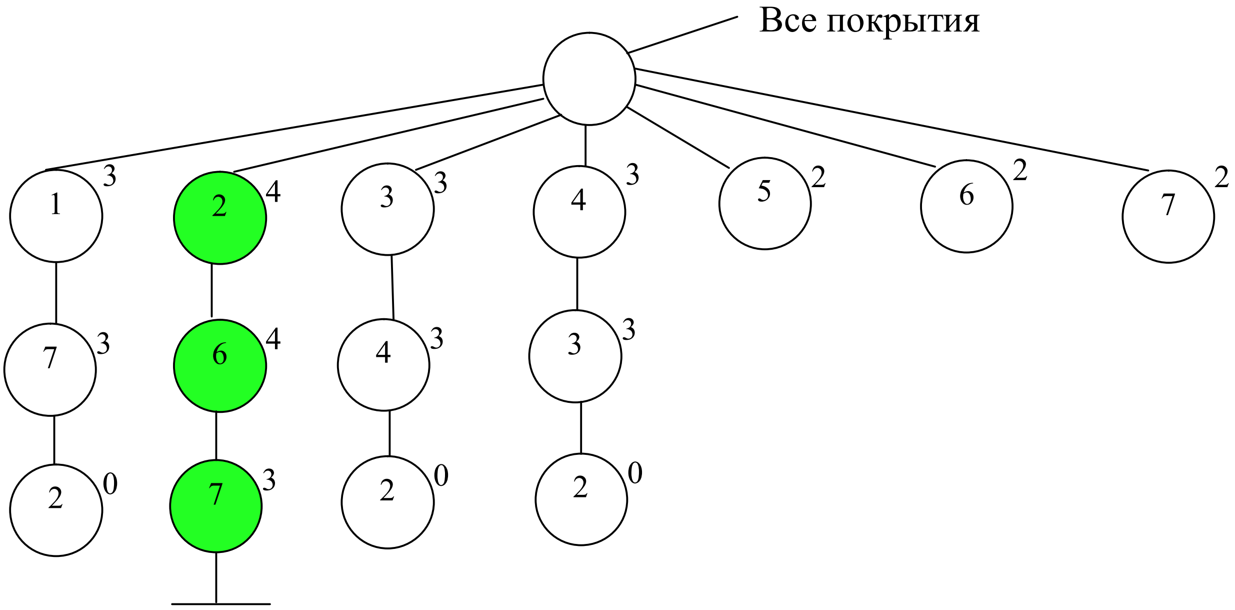


Рисунок 4.7

Таким образом оптимальное покрытие будет {2, 6, 7} с эффективностью решения $W = 3$.

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте задачу целочисленного программирования.
2 Математическая постановка задачи коммивояжера.
3 Смысл ограничений в задаче коммивояжера.
4 Алгоритм решения задачи коммивояжера.
5 Сформулируйте задачу о покрытии.
6 Математическая постановка задачи о покрытии.
7 Алгоритм решения задачи о покрытии.

5 Теория расписания

5.1 Предмет теории расписания

Предметом теории расписания является математические методы решения задач календарного планирования. К задачам календарного планирования относятся комбинаторные задачи, связанные с определением наилучшей последовательности выполнения работ в соответствии с заданным критерием.

Основные понятия теории расписания:

- изделие – любое устройство, с которым выполняется комплекс работ;
- операция – элементарная работа, подлежащая выполнению;
- машина – устройство для выполнения работ.

Общая постановка задачи теории расписания.

Задано n - изделий, которые должны пройти обработку на m машинах. Имеем t_{ij} – время обработки j – го изделия на i – ой машине. Необходимо спланировать выполнение работ, чтобы общее время было минимальным (понятия изделие и машина – обобщенные понятия).

Классификация задач теории расписания:

1) в зависимости от порядка обработки изделий:

а) одинаковый порядок обработки изделий;

б) различный порядок обработки изделий.

2) в зависимости от количества машин, участвующих в обработке изделий:

а) одна машина $m = 1$;

б) две машины $m = 2$;

в) более двух машин $m > 2$ (общая задача теории расписаний).

3) в зависимости от выбранного критерия:

а) минимальная общая продолжительность обработки изделий;

б) минимальная задержка изделия относительно директивных сроков выполнения;

в) экономические критерии.

Типовые задачи теории расписания:

1) задача оптимального восстановления неисправной техники. Задано n – типов техники, которые в процессе восстановления последовательно обрабатываются на m – видов станков. Задано t_{ij} время обработки j – го вида техники на i – м виде станка. Требуется определить последовательность обработки техники, чтобы время восстановления было минимально;

2) задача оптимального распределения целей между различными средствами поражения. Задано n – видов целей и m – типов средств поражения. Известно время t_{ij} – время поражения j – ой цели i – ым средством поражения. Требуется распределить цели по средствам поражения так, чтобы время поражения целей было минимально;

3) задача максимизации количества пораженных целей. Имеется n – целей для которых определено:

а) момент поражения цели t_j;

б) директивный срок поражения j;

в) объем работ или время поражения этой цели b_j.

Требуется определить последовательность поражения целей, при котором поражается максимальное количество целей.

4) задача оптимального перемещения транспорта по маршрутам, имеющие пересечения. Имеется n – транспортов, которые при движении имеют пересекающие маршруты (места пересечения маршрутов играют роль машин). Задано время пересечения t_{ij} – i – го транспорта на j – м узле пересечения. Требуется спланировать движения транспорта таким образом, чтобы общее время $T_{общ}$ было минимально.

5.2 Общая задача теории расписания и методы её решения

Постановка задачи. Имеется m – машин для обработки n – изделий. Каждое изделие должно пройти обработку в определенной последовательности m – машин. Этот порядок может быть одинаков или различный для всех изделий. При этом каждая машина может выполнять только один вид операций. Одновременно на одной машине может обрабатываться не более одного изделия. Обработка изделий на машине начавшись не может быть приостановлена. Последующая операция по обработке каждого изделия может начаться только после выполнения предыдущей операции. Для заданной матрицы t_{ij} необходимо определить такую последовательность обработки всех изделий, чтобы общее время обработки всех изделий было минимально.

Решение данной задачи перебором практически затруднено, так как перебор составляет $n!$ вариантов.

Для решения общей задачи теории расписания существуют следующие методы:

- приближенные методы (метод Джексона и др.);
- эвристические методы, основанные на правилах предпочтения;
- точный метод, основанный на основе метода ветвей и границ.

Алгоритм ветвей и границ для решения общей задачи теории расписаний.

Для решения задачи методом ветвей и границ необходимо:

- указать способ ветвления;
- определить способ оценки нижней границы решения.

На первом шаге на первое место в расписании поставлено любое изделие, из которых выбирается вершина с наименьшей оценкой и оттуда начинается ветвление. Всего $n!$ возможных вариантов дерева ветвления.

Рассмотрим случай когда количество машин $m = 3$.

Обозначим: $u = \{1, 2, \ldots, n\}$ - множество изделий;

$S = \{1, 2, ..., k\}$, $(k < n)$ – множество изделий, вошедших в расписание (дерево), для которых уже определен порядок обработки изделий.

Для изделий обозначим время обработки на соответствующих машинах: $T_1(S)$, $T_2(S)$, $T_3(S)$.

Обработка изделий на 3-й машине закончится в следующие моменты времени:

$$h_1(S) = T_2(S) + \min_{i \in U/S} C_j,$$

где $h_1(S)$ - нижняя граница решения (меньшее время получить нельзя, третья машина работает без остановки);

U/S – множество изделий не вошедших в расписание.

Обработка изделий на 2-й машине закончится в следующие моменты вре-мени:

$$h_2(S) = T_3(S) + \sum_{j \in U/S} b_i + \min_{i \in U/S} C_j,$$

где $h_2(S)$ – нижняя граница решения (меньшее время получить нельзя, вторая машина работает без остановки, на третьей машине последним обрабатывается изделие с минимальным временем C_j).

Обработка изделий на 1-й машине закончится в следующие моменты времени:

$$h_3(S) = T_1(S) + \sum_{j \in U/S} a_j + \min_{j \in U/S}(c_j + b_j),$$

где $h_3(S)$ – нижняя граница решения (меньшее время получить нельзя, последним обрабатывается изделие с минимальным временем $c_j + b_j$).

Тогда оценкой нижней границы будет наихудшая (наибольшая) из этих оценок:

$$H(S) = \max[h_1(S), h_2(S), h_3(S)].$$

Рассмотрим решение примера:

Имеется три j - е изделия, которые обрабатываются последовательно на трех i - х машинах. Время обработки задается матрицей t_{ij}.

Таблица 5.1

i - й номер изделия	j - й номер машины		
	1	2	3
1	8	5	7
2	4	3	6
3	2	7	4

Для решения задачи таблицу t_{ij} развернем во времени. В результате получаем таблицу 5.2.

Таблица 5.2

i - й номер изделия	j - й номер машины					
	1		2		3	
	Начало	Окон.	Начало	Окон.	Начало	Окон.
1	0	8	8	13	13	20
2	0	4	4	7	7	13
3	0	2	2	9	9	13

Определим оценки нижней границы для каждого изделия:
Изделие №1:
$h_1(S) = 20 + 10 = 30$
$h_2(S) = 13 + (3 + 7) + 4 = 27$
$h_3(S) = 8 + (4 + 2) + 9 = 23$
$H_1(S) = 30$
Изделие №2:
$h_1(S) = 13 + 11 = 24$
$h_2(S) = 7 + (5 + 7) + 4 = 23$
$h_3(S) = 4 + (2 + 8) + 11 = 25$
$H_2(S) = 25$
Изделие №2:
$h_1(S) = 13 + (7 + 6) = 26$
$h_2(S) = 9 + (5 + 3) + 6 = 23$
$h_3(S) = 2 + 12 + 9 = 23$
$H_3(S) = 26$

Из полученных оценок выбираем наименьшую (наилучшую) оценку H_2 = 25 и это изделие включается в расписание, то есть изделие №2 обрабатывается первым. Производим перерасчет времени обработки изделий с учетом, что первым обрабатывается второе изделие.

Таблица 5.3

i - й номер изделия	j - й номер машины					
	1		2		3	
	Начало	Окон.	Начало	Окон.	Начало	Окон.
1	4	12	12	17	17	24
3	4	6	7	14	14	18

Определяем нижнюю границу решения для первого и третьего изделия:
Изделие №1:
$h_1(S) = 24 + 4 = 28$
$h_2(S) = 17 + 7 + 4 = 28$
$h_3(S) = 12 + 2 + 11 = 25$
$H_1(S) = 28$
Изделие №3:
$h_1(S) = 18 + 7 = 25$
$h_2(S) = 14 + 5 + 7 = 26$
$h_3(S) = 6 + 8 + 12 = 26$
$H_3(S) = 26$

Включаем в расписание изделие №3, так как нижняя граница решения наименьшая $H_3 = 26$. Осуществляем перерасчет времени обработки изделий №3 и №1. Значения приведены в таблице 5.4

Таблица 5.4

i - й номер изделия	j - й номер машины					
	1		2		3	
	Начало	Окон.	Начало	Окон.	Начало	Окон.
1	6	14	14	19	19	26

Таким образом, оптимальный порядок обработки изделий – 2, 3, 1, а время обработки составляет 26 единиц.

Дерево ветвления представлено на рисунке 5.1.

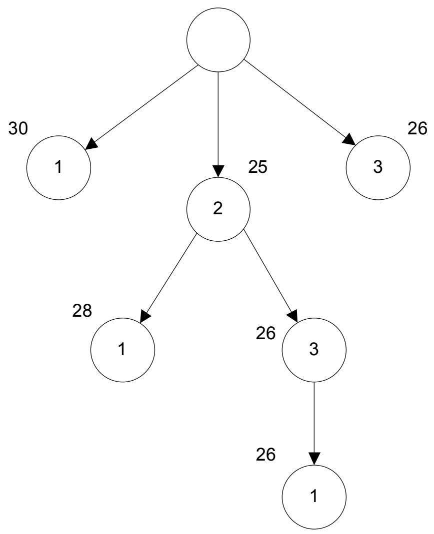


Рисунок 5.1- Дерево ветвления

5.3 Минимаксная задача теории расписания

Существует два метода сокращения времени выполнения работ.

Первый способ используют в конверсионных процессах, когда все работы разбиваются на элементарные, которые выполняются на отдельных рабочих местах. Такой подход позволяет повысить производительность и сократить среднее время затраченное на обработку каждого изделия.

Второй способ обеспечивает сокращение времени подготовки изделий за счет параллельной обработки изделий. Планирование такого типа процессов сводится к решению минимаксной задачи теории расписания.

Формулировка минимаксной задачи теории расписания:

Имеется m – исполнителей (машин) и n – работ (изделий). Каждый исполнитель выполняет не более k работ. Задана матрица $\|t_{ij}\|$ время выполнения i – ой работы j – м исполнителем $i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},.$ Требуется распределить работы между исполнителями, таким образом, чтобы каждый исполнитель выполнял не более k работ и при параллельной работе исполнителей время выполнения всех работ было минимально.

Математическая постановка задачи:

$$T = \min\max\sum_{i=1}^{n} t_{ij}\cdot x_{ij} \text{ - целевая функция.} \tag{5.1}$$

где $x_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ если } i \text{ работа выполняется } j \text{ исполнителем,} \\ 0, \text{ в противном случае.} \end{cases}$

При ограничениях

$$\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = 1, i = \overline{1,n}. \tag{5.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} xij \le k, j = \overline{1,m}. \tag{5.3}$$

Из условия (5.2) следует, что каждая работа должна быть выполнена. Из условия (5.3) следует, что каждый исполнитель должен выполнить не более k работ.

Алгоритм решения минимаксной задачи при $k = 1$.

Рассмотрим алгоритм решения задачи $n = m$ и $k = 1$. В основу алгоритма положен метод ветвей и границ. Используем общепринятые обозначения в методе ветвей и границ.

S_l – множество изделий, вводимых в расписание;

G_l – множество изделий, претендующих на включение в расписание;

l – меняется 0, 1, 2, …, n – номер работы.

То есть количество работ, элементов переходит в множество S. На первом шаге $l = 0$, $S_0 = 0$ – пустое множество. $G_0 = U$. U – общее количество переменных. Схема ветвления дихотомическая. Для определения нижних границ T_{S_0} в каждой строке и столбце находят минимальный элемент, выбрав из них максимальный, находим нижнюю границу решения.

В множестве S_0 – целесообразно вводить переменную x_{ij}^*, для которой величина $T_{S_0}\left(\overline{x_{ij}^*}\right)$ - максимальна. То есть, если эту переменную не включать в расписание, то на эту максимальную величину увеличится нижняя граница оценки.

Для определения $T_{S_0}\left(\overline{x_{ij}^*}\right)$ в матрицу t_{ij} вместо минимальных элементов строк и столбцов подставляем бесконечности и находим вторые минимальные элементы в каждой столбце и строке.

Максимальный элемент из минимальных элементов строки и столбца определяет эту величину. Если элемент $x_{ij}^* = 1$ то производится вычеркивание соответствующих столбца и строки и определяется новое значение T_S по полученной новой матрице.

В дальнейшем в процессе решения все операции повторяются, пока не будет выполняться условие $l = n$ и $G_k = 0$ – пустое множество. Тогда последняя величина T_{S_n} – является приближенным решением.

Если в процессе решения:

$$T_{S_l}\left(\overline{x_{ij}^*}\right) < T_{S_{l-1}} \text{ и } T_{S_l}\left(x_{ij}^*\right) < T_{S_{l-1}},$$

то есть новые оценки нижних границ меньше по сравнению с предыдущем решением, то в качестве оценки границ решения берут предыдущую оценку.

Рассмотрим решение на примере $n = 5$, $m = 5$, $k = 1$.

Таблица 5.5

i	j номер машины					u_i	α_i
	1	2	3	4	5		
1	3	6	5	7	6	3	5
2	4	5	4	8	4	4	4
3	1	4	3	4	6	1	3
4	7	7	5	4	7	4	5
5	9	6	3	3	8	3	3
v_j	1	4	3	3	4	-	-
β_j	3	5	3	4	6	-	-

u_i – первый минимальный элемент в строке;
v_j – первый минимальный элемент в столбце;
α_i - второй минимальный элемент в строке;
β_j - второй минимальный элемент в столбце.

Находим максимальный элемент среди α_i и β_j, $\max(\alpha_i, \beta_j) = 6$. В столбце под номером 5 находим минимальный элемент $\min(u_i, v_j) = 4$ – нижняя граница решения. $x_{2,5}$ – выбираем для ветвления, если $x_{2,5} = 1$ – то нижняя граница равна $T_S = 4$, если $x_{2,5} = 0$, то нижняя граница равна $T_S = 6$. Вычеркиваем строку и столбец с элементом $x_{2,5}$. Получаем матрицу:

Таблица 5.6

i	j номер машины				u_i	α_i
	1	2	3	4		
1	3	6	5	7	3	5
3	1	4	3	4	1	3
4	7	7	5	4	4	5
5	9	6	3	3	3	3
v_j	1	4	3	3	-	-
β_j	3	5	3	4	-	-

Находим максимальный элемент max(α_i, β_j) = 5. В столбце под номером 2 находим минимальный элемент min(u_i, v_j) = 4 – нижняя граница решения. $x_{3,2}$ – выбираем для ветвления. Если $x_{3,2}$ = 1, то нижняя граница равна T_S = 4, если $x_{3,2}$ = 0, то нижняя граница T_S = 6. Вычеркиваем строку и столбец с элементом $x_{3,2}$ и получаем матрицу:

Таблица 5.7

i	j номер машины			u_i	α_i
	1	3	4		
1	3	5	7	3	5
4	7	5	4	4	5
5	9	3	3	3	3
v_j	3	3	3	-	-
β_j	7	5	4	-	-

Определяем первый и второй минимальные элементы в столбцах и строках матрицы. Находим максимальный элемент max(α_i, β_j) = 7. В столбце под номером 1 находим минимальный элемент min(u_i, v_j) = 3. Но нижняя оценка не может быть меньше 4, поэтому $x_{1,1}$ - выберем для ветвления. Вычеркиваем строку и столбец с элементом $x_{1,1}$. Получим новую матрицу:

Таблица 5.8

i	j номер машины		u_i	α_i
	3	4		
4	5	4	4	5
5	3	3	3	3
v_j	3	3	-	-
β_j	5	4	-	-

Находим max(α_i, β_j) = 5, min(u_i, v_j) = 3 берем min(u_i, v_j) = 4. Выберем элемент в строке при $x_{5,3}$. Вычеркиваем строку и столбец с этим элементом. Остается последний элемент $x_{4,4}$, с нижней границей равной 4. Дерево решения представлено на рисунке 5.2:

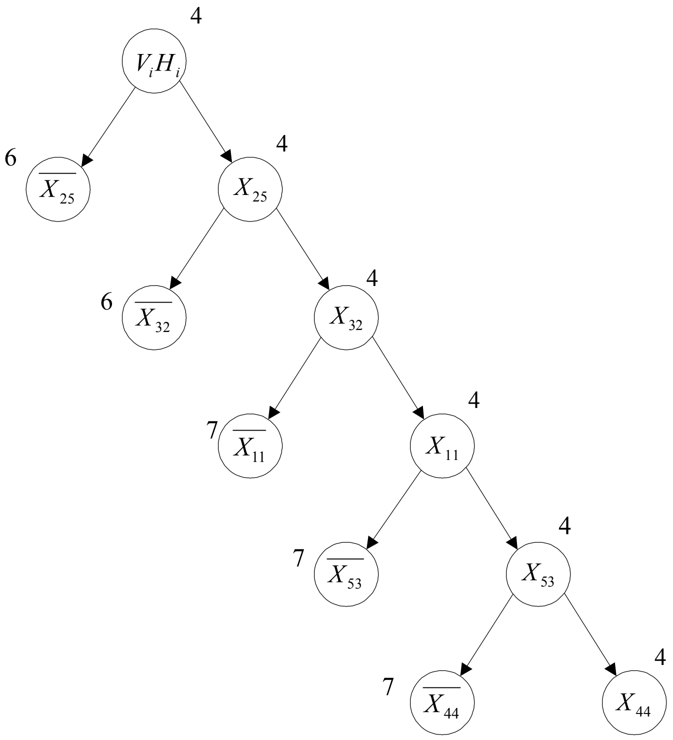


Рисунок 5.2 – Дерево решения

Ответ: $x_{2,5} \rightarrow x_{3,2} \rightarrow x_{1,1} \rightarrow x_{5,3} \rightarrow x_{4,4}$. Время выполнения: четыре единицы.

Алгоритм решения задачи при $n > m$, $k > 1$.

Особенность алгоритма: определяется только значение u_i и α_i по строкам. При выборе очередной переменной для включения в расписание соответствующее время добавляется ко всем элементам данного столбца. Решение рассмотрим на примере. Исходные данные представлены в таблице 5.9.

Таблица 5.9

i	j номер машины			u_i	α_i
	1	2	3		
1	6	4	7	4	6
2	5	6	5	5	5
3	3	2	4	2	3
4	4	3	6	8	4
5	2	1	2	1	2

Выбираем $\max(\alpha_i) = 6$. Находим минимальный элемент в первой строке $\min(u_i) = 4$. Элемент $x_{1,2} = 4$. С него начнем ветвление. Вычеркиваем 1 строку, осуществляем перерасчет элементов 2 столбца и строим новую матрицу.

Таблица 5.10

i	j номер машины			u_i	α_i
	1	2	3		
2	5	10	5	5	5
3	3	6	4	3	4
4	4	7	6	4	6
5	2	5	2	2	2

max(α_i) = 6, min(u_i) = 4. Делаем назначение $x_{4,1}$. Осуществляем пересчет 1 столбца и получаем новую таблицу 5.11.

Таблица 5.11

i	j номер машины			u_i	α_i
	1	2	3		
2	1	10	5	5	9
3	7	6	4	4	6
5	6	5	2	2	5

max(α_i) = 9, min(u_i) = 5. Делаем назначение $x_{2,3}$. Осуществляем пересчет 3 столбца получаем новую таблицу 5.12.

Таблица 5.12

i	j номер машины			u_i	α_i
	1	2	3		
3	7	6	9	6	7
5	6	5	7	5	6

max(α_i) = 7, min(u_i) = 6. Делаем назначение $x_{3,2}$. Осуществляем пересчет 2 столбца и получаем новую таблицу 5.13.

Таблица 5.13

i	j номер машины			u_i	α_i
	1	2	3		
5	6	7	7	6	7

max(α_i) = 7, min(u_i) = 6. Делаем назначение $x_{5,1}$.

Дерево решения представлено на рисунке 5.3.

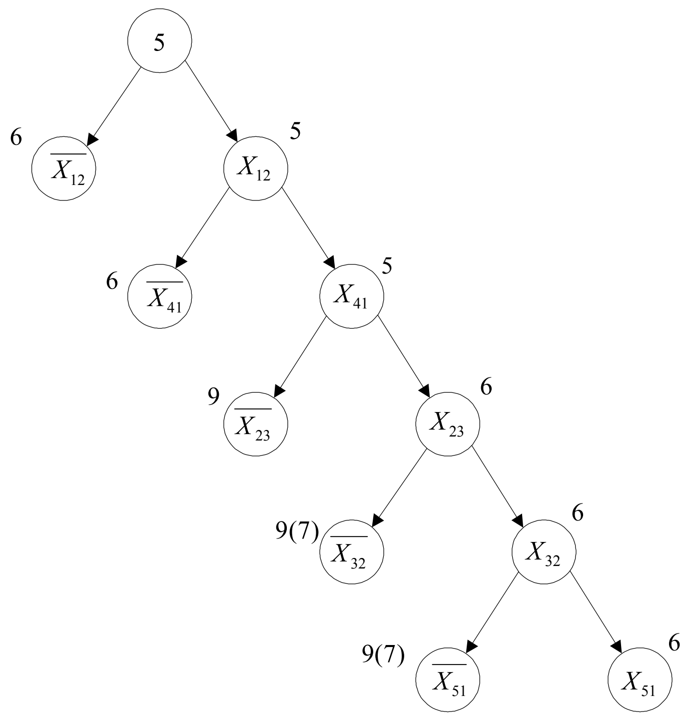


Рисунок 5.3 – Дерево решения

Ответ: время $T = 6$, при назначении: $x_{1,2} \to x_{4,1} \to x_{2,3} \to x_{3,2} \to x_{5,1}$.

Задание для самостоятельной работы.

1

Таблица 5.14

Номер изделия	Номер машины		
	1	2	3
1	7	13	21
2	18	12	15
3	4	17	5
4	9	11	9
5	6	3	6

Ответ: 5 – 4 – 1 – 2 – 3. Время обработки – 80.

6 Нелинейное программирование

6.1 Геометрический способ решения задач нелинейного программирования

Нелинейное программирование это раздел математического программирования по решению задачи отыскания максимума или минимума целевой функции, при этом хотя бы одно из уравнений носит нелинейный характер.

В этом случае отыскание экстремума осуществляется с помощью геометрических методов.

Пример 1. Найти $\min\limits_{x} f = 4\left(x_1 - 6\right) + 6\left(x_2 - 2\right)^2$

$$X = \left\{ \begin{matrix} 0,5x_1 + x_2 \le 4 \\ 3x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0; x_2 \ge 0 \end{matrix} \right\}$$

Решение. Построим область допустимых решений и семейство целевых функций, представленную на рисунке 6.1.

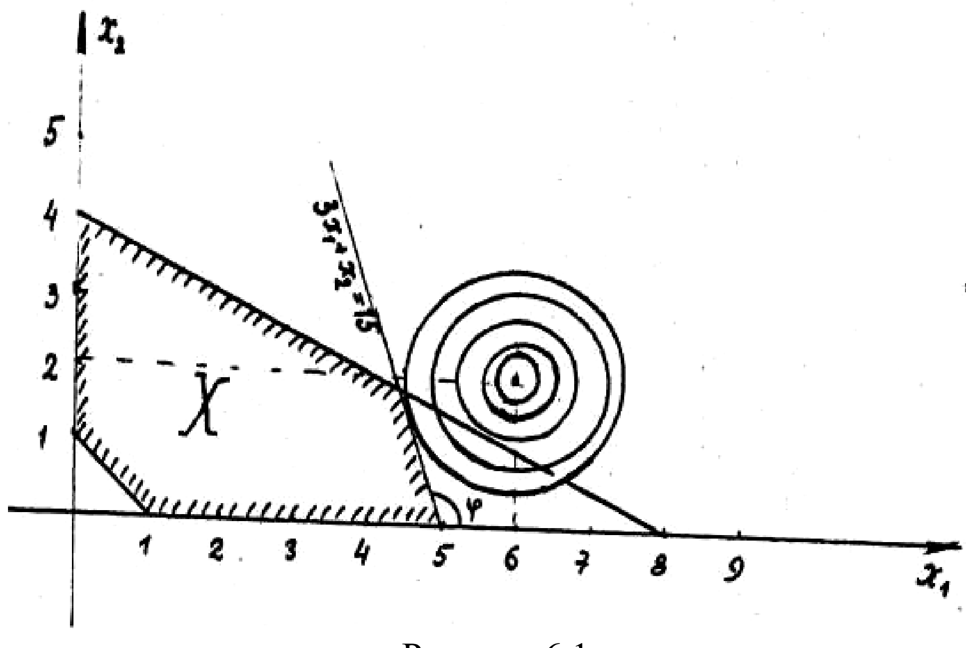


Рисунок 6.1

Геометрическая целевая функция – семейство эллипсов с центром в точке (6, 2) и полуосями, кратными 0,5 и $\sqrt{\frac{1}{6}}$ соответственно. Собственный минимум целевой функции находится в точке (6, 2) – центре эллипсов, и равен нулю, а минимум при наличии ограничений, как видно из рисунка, - в точке касания эллипса с прямой $3x_1 + x_2 = 15$, являющейся одной из границ области допустимых решений.

В точке касания касательная к эллипсу должна совпасть с прямой $3x_1 + x_2 = 15$, поэтому тангенсы углов наклона касательной и данной прямой к оси x_1 должны быть равными, т. е.

$$tg\varphi = -\frac{\partial f}{\partial x_1} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x_2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 8(x_1 - 6),$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = 12(x_2 - 2),$$

$$tg\ \varphi = -3.$$

Следовательно,

$$\frac{8(x_1 - 6)}{12(x_2 - 2)} = 3.$$

Таким образом, координаты точки касания должны удовлетворять уравнениям:

$2x_1 – 9x_2 = -6;$
$3x_1 + x_2 = 15.$

Решая их, найдем

$$x_1' = 4{,}44; \quad x_2' = 1{,}65; \quad f\min = 10{,}47.$$

Пример 2. Найти $\min\limits_{x} f = 2x_1 + 3x_2 + 4x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_1 \leq 3;\, x_2 \geq 0 \end{Bmatrix}$$

Решение.

1 В отличие от предыдущей задачи, вид функции цели не ясен, поэтому с помощью аналитической геометрии выясним, что представляет собой

семейство целевых функций. Для кривой второго порядка $Ax_2 + 2Bxy + Cy_2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$. Составим дискриминант старших членов и дискриминант уравнения:

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix},$$

$$\delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 1{,}5 & 0 \end{vmatrix} = -7.$$

Возможны следующие случаи, представленные в таблице 6.1:

Таблица 6.1

	$\Delta \neq 0$	$\Delta = 0$
$\delta > 0$	Эллипс	Точка
$\delta < 0$	Гипербола	Пара пересекающихся прямых
$\delta = 0$	Парабола	Пара параллельных прямых, действительных или мнимых

В нашем случае $\delta > 0$, $\Delta \neq 0$, поэтому функция цели является эллипсом.

2 Определим координаты этого семейства эллипсов, для чего составим уравнения:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= 2 + 8x_1 + 2x_2 = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= 3 + 2x_1 + 2x_2 = 0 \end{aligned}\right\}$$

Решая систему уравнений, получим, что $x_1 = \frac{1}{6}$; $x_2 = -\frac{5}{3}$ являются координатами центра эллипсов. Перенесем начало координат в эту точку, совершив линейное преобразование по формулам:

$$x_1 = \tilde{x}_1 + \frac{1}{6}, \quad x_2 = \tilde{x}_2 - \frac{5}{3},$$

где $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ – новые оси, параллельные исходным, имеющие начало в точке $\left(\frac{1}{6}; -\frac{5}{3}\right)$.

В новых осях функция цели имеет вид

$$f = 4\tilde{x}_1^2 + \tilde{x}_2^2 + 2\tilde{x}_1\tilde{x}_2 - \frac{7}{3}.$$

3 Совершим поворот осей на угол φ так, чтобы в выражении функции цели не содержались бы произведения координат по формулам:

$$\tilde{x}_1 = x\cos\varphi - y\sin\varphi, \qquad \tilde{x}_2 = y\sin\varphi - x\cos\varphi,$$

тогда

$$\tilde{x}_1^2 = x^2\cos^2\varphi - 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2\sin^2\varphi;$$

$$\tilde{x}_2^2 = x^2\sin^2\varphi + 2xy\sin\varphi\cos\varphi + y^2\cos^2\varphi;$$

$$\tilde{x}_1\tilde{x}_2 = x^2\cos\varphi\sin\varphi + y^2\cos\varphi\sin\varphi - xy\sin^2\varphi + xy\cos^2\varphi;$$

и

$$f = x^2\left(4\cos^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\right) + y^2\left(4\sin^2\varphi + \cos^2\varphi + 2\sin\varphi\cos\varphi\right) +$$
$$+ xy\left(-6\sin\varphi\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi\right) - \frac{7}{3}.$$

Определим угол φ так, чтобы коэффициент перед xy в выражении f был равен нулю:

$$-6\sin\varphi\cos\varphi + 2\cos^2\varphi - 2\sin^2\varphi = 0,$$

откуда

$$tg2\varphi = \frac{2}{3}; \quad 2\varphi = 33{,}69°.$$

Следовательно, оси $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$, необходимо повернуть против часовой стрелки на угол φ = 16,84°, тогда получим оси x и y, в которых

$$f = 4{,}203x^2 + 1{,}807y^2 - \frac{7}{3}.$$

Окончательно построим область допустимых решений и семейство эллипсов, представленное на рисунке 6.2:

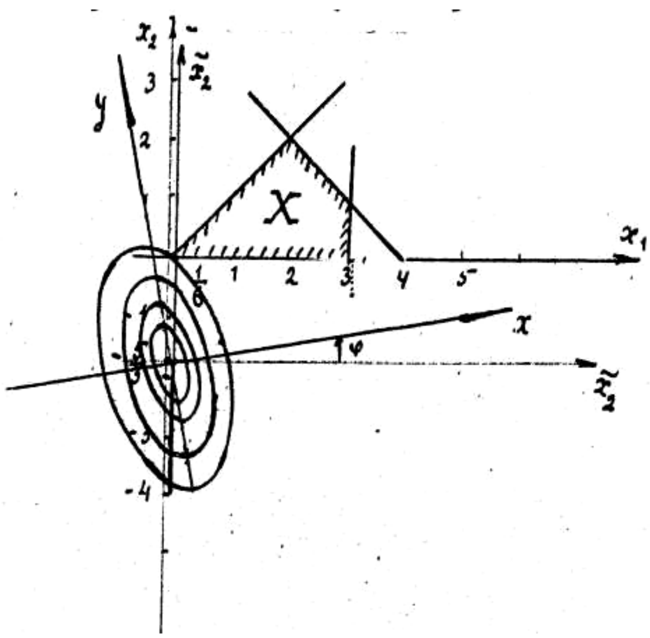


Рисунок 6.2

4 Из рисунка видно, что минимум функции f достигается в точке (0, 0), так как точка касания не принадлежит области допустимых решений.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти $\max\limits_{X} f = 3x_1 + 2x_2$

$$X = \begin{cases} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Ответ: $x_1' = 1 + \dfrac{4}{\sqrt{13}}; \quad x_2' = 1 + \dfrac{6}{\sqrt{13}}; \quad f_{\max} = 17{,}98.$

2 Найти $\min_X(\max) f = 5x_1^2 + 3x_1 - 4x_2$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2 \le 5 \\ 0{,}3x_1 + x_2 \le 3; \quad x_1, x_2 \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{matrix} f_{\max} = 140 \\ x_1' = 5 \\ x_2' = 0 \end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} f_{\min} = -12 \\ x_1'' = 0 \\ x_2'' = 3 \end{matrix}\right\}.$

3 Найти $\max_X f = 4x_1 + 3x_2$

$$X = \begin{Bmatrix} (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \le 9 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{matrix} f_{\max} = 18 \\ x_1' = 3 \\ x_2' = 2 \end{matrix}\right\}.$

4 Имеются две цели стоимостью 100 и 200 условных единиц и пять одинаковых ракет. Вероятность поражения первой цели одной ракетой - 0,2, второй цели - 0,3. Распределить ракета по целям так, чтобы математическое ожидание ущерба было максимальным.

Ответ: $M_{\max} = 171{,}98; \quad x_1' = 1; \quad x_2' = 4.$

5 Цель может находиться в двух районах с вероятностями 0,2 и 0,8 соответственно. Вероятности обнаружения цели одним разведывательным средством для 1-го и 2-го районов равны соответственно 0,6 и 0,3. Имеется 6 однотипных разведывательных средств, которые надо распределить по районам так, чтобы полная вероятность обнаружения цели была максимальна.

Ответ: $P_{\max} = 0{,}7856; \qquad x_1' = 1; \quad x_2' = 5.$

6.2 Классические методы поиска экстремума. Отыскание безусловного и условного экстремума. Метод множителей Лагранжа

Экстремум функции, заданной в неограниченной области. Необходимым условием существования такого экстремума является $\nabla f = 0$, либо ∇f не существует. Точки, в которых выполнены эти условия, называются стационарными.

Если $d^2 f > 0$, то в стационарной точке минимум, если $d^2 f < 0$, то максимум.

В свою очередь для того, чтобы $d^2f > 0$, достаточно, чтобы все главные миноры матрицы Гессе были неотрицательны:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \geq 0; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Для того чтобы $d^2f < 0$, достаточно, чтобы главные миноры гессиана меняли знак:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} \leq 0; \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} \geq 0, \quad (-1)^n \cdot \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Пример.

Дана функция $f = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_2 + x_1 - 2x_3$. Найти ее собственный экстремум.

Решение.

Составим $\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_2 + 1,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 - x_1;\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - 2.$

Приравняв к нулю $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, определим стационарную точку $x_1' = -\frac{2}{3}$, $x_2' = -\frac{1}{3},\ x_3' = 1.$

Составим гессиан и его главные миноры:

$$\Delta_1 = 2 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0,\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 6 > 0.$$

Следовательно, в данной точке функция f имеет собственный минимум.

Экстремум функции при наличии ограничений – равенств.

В этом случае составляется функция Лагранжа $Z = f(\bar{x}) + \lambda g(\bar{x})$. Здесь λ - множитель Лагранжа, $g(\bar{x}) = 0$ - ограничение, $\bar{x} = (x_1, ..., x_n)$ - точки, подозрительные на экстремум, находятся из условий

$$\frac{\partial Z}{\partial x_i}=0,\quad i=\overline{1,n},\quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda}=0,$$

с последующей проверкой на максимум и минимум.

Если ограничений - равенств несколько, то функция Лагранжа имеет вид:

$$Z\left(\bar{x},\bar{\lambda}\right)=f\left(\bar{x}\right)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j g_j\left(\bar{x}\right).$$

Соответственно необходимые условия существования экстремума таковы:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1}=0,\quad i=\overline{1,n},\quad \frac{\partial Z}{\partial \lambda_j}=0,\quad j=\overline{1,k}.$$

Пример.

Найти экстремум функции $f = 6 - 4x_1 - 3x_2$ при условии $g=x_1^2+x_2^2-1=0$.

Решение.

Составим функцию Лагранжа $Z=6-4x_1-3x_2+\lambda\left(x_1^2+x_2^2-1\right)$ и необходимые условия существования экстремума:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1}=-4+2\lambda x_1=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial x_2}=-3+2\lambda x_2=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial x_2}=x_1^2+x_2^2-1=0.$$

Решая уравнения, получим:

$$\left.\begin{array}{l}\lambda_1=\frac{5}{2}\\ x_1=\frac{4}{5}\\ x_2=\frac{3}{5}\\ f_{\min}\left(\frac{4}{5};\frac{3}{5}\right)=1\end{array}\right\},\quad \left.\begin{array}{l}\lambda_2=-\frac{5}{2}\\ x_1=-\frac{4}{5}\\ x_2=-\frac{3}{5}\\ f_{\max}\left(-\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)=11\end{array}\right\}.$$

Экстремум функции при наличии ограничений-неравенств.

В этом случае объединяются два предыдущих этапа. Сначала находят собственный экстремум функции; а затем условный экстремум, проверяются все угловые точки и из них отбирается наибольшее или наименьшее значение функции.

Пример. Найти $\min\limits_{X}(\max)\ f=(x_1+1)^2+9x_2-18x_2$

$$X=\left\{\begin{matrix} x_1+4x_2-8 \\ x_1\ge 0;\ x_2\ge 0\end{matrix}\right\}$$

Решение.

1 Отыскание собственного экстремума:

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1+1)=0\to x_1=-1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2}=18x_2-18=0\to x_2=1\end{matrix}\right\},\quad f=(-1,1)=-9.$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1^2}=2>0,\quad \begin{vmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}2 & 0 \\ 0 & 18\end{vmatrix}=36>0.$$

Следовательно, в точке (-1, 1) - собственный минимум функции *f*. Однако эта точка не принадлежит области допустимых решений.

2 Отыскание условного экстремума:

а) $Z_1=(x_1+1)^2+9x_2^2-18x_2+\lambda_1(x_1+4x_2-8)$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial Z_1}{\partial x_1}=2(x_1+1)+\lambda_1=0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial x_2}=18x_2-18+4\lambda_1=0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_1}=x_1+4x_2-8=0\end{matrix}\right\}\to\lambda_1=-3,6,\quad \left.\begin{matrix}x_1=0,8 \\ x_2=1,8\end{matrix}\right\}\in x,\ f(0,8;1,8)=0.$$

б) $Z_2=(x_1+1)^2+9x_2^2-18x_2+\lambda_2 x_1$

$$\left.\begin{matrix}\dfrac{\partial Z_2}{\partial x_1}=2(x_1+1)+\lambda_2=0 \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial x_2}=18x_2-18=0 \\ \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_2}=x_1=0\end{matrix}\right\}\to\lambda_2=-2,\qquad \left.\begin{matrix}x_1=0 \\ x_2=1\end{matrix}\right\}\in x,\quad f(0,1)=-8.$$

в) $Z_3=\left(x_1+1\right)^2+9x_2^2-18x_2+\lambda_3 x_2$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Z_3}{\partial x_1}=2(x_1+1)=0\\&\frac{\partial Z_3}{\partial x_2}=18x_2-18+\lambda_3=0\\&\frac{\partial Z}{\partial \lambda_3}=x_2=0\end{aligned}\right\}\rightarrow\lambda_3=18,\qquad \left.\begin{aligned}x_1&=-1;\\x_2&=0;\end{aligned}\right\}\notin x.$$

3 Проверка угловых точек области допустимых решений:

$$\left.\begin{aligned}x_1&=0\\x_2&=2\end{aligned}\right\}\quad f\left(0,2\right)=1,$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=8\\x_2&=0\end{aligned}\right\}\quad f\left(8,0\right)=81,$$

$$\left.\begin{aligned}x_1&=0\\x_2&=0\end{aligned}\right\}\quad f\left(0,0\right)=1.$$

4 Окончательно, анализируя пп. 1-3, получаем:

$$\left.\begin{aligned}&f_{\min}=-8\\&x_1'=0\\&x_2'=1\end{aligned}\right\},;$$

$$\left.\begin{aligned}&f_{\max}=81\\&x_1'=8\\&x_2'=0\end{aligned}\right\},\quad\left.\begin{aligned}&f\min=-8\\&x_1''=0\\&x_2''=1\end{aligned}\right\}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Во всех нижеперечисленных задачах найти экстремум классическими методами поиска.

1 $f=3x^2+2xy+2y^2+3x-4y$

$$X=\left\{\begin{aligned}&x+2y\le 2\\&x-y\le 0\\&x,y\ge 0\end{aligned}\right\}$$

Ответ: $\left.\begin{matrix} f_{\max} = 2{,}44 \\ x^* = \dfrac{2}{3} \\ y^* = \dfrac{2}{3} \end{matrix}\right\}$; $\left.\begin{matrix} f_{\min} = -2 \\ x^{**} = 0 \\ y^{**} = 1 \end{matrix}\right\}$.

2 $f = x^2 + xy + 2y^2 + x - y$

$$X = \begin{Bmatrix} 3x + 5y \le 15 \\ x - 3y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{matrix} f_{\max} = 30 \\ x' = 5 \\ y' = 0 \end{matrix}\right\}$; $\left.\begin{matrix} f_{\min} = 0 \\ x'' = 0 \\ y'' = 0 \end{matrix}\right\}$.

3 $f = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9$

$$X = \begin{Bmatrix} x + 2y - 3 \ge 0 \\ 2x + y - 3 \ge 0 \\ x + y \le 3 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{matrix} f_{\max} = 0 \\ \left.\begin{matrix} x' = 3 \\ y' = 0 \end{matrix}\right\} \\ \left.\begin{matrix} x' = 0 \\ y' = 3 \end{matrix}\right\} \end{matrix}\right\}$; $\left.\begin{matrix} f_{\min} = -9 \\ x'' = 1 \\ y'' = 1 \end{matrix}\right\}$.

4 $f = 3x^2 + 7xy + 5y^2 - 4x - 5y + 1$

$$X = \begin{Bmatrix} x + 2y \ge 1 \\ x - y + 0{,}5 \ge 0 \\ x \le 3 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{array}{l} f_{\max} = 133{,}25 \\ x' = 3 \\ y' = 3{,}5 \end{array}\right\};\qquad \left.\begin{array}{l} f_{\min} = -\dfrac{1}{3} \\ x' = \dfrac{1}{3} \\ y' = \dfrac{1}{3} \end{array}\right\}.$

6.3 Выпуклое программирование. Теорема Куна-Таккера

Для задач выпуклого программирования (ВП) отыскание точек экстремума сводится к отысканию седловых точек функции Лагранжа. Для строго выпуклой функции такая точка единственна, тогда как для просто выпуклой функции их может быть несколько. Теорема Куна-Таккера для нахождения седловых точек дает следующие условия:

- для максимума

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z}{\partial x_i} \le 0;\, i = \overline{1,n} \\ x_i \dfrac{\partial Z}{\partial x_i} = 0 \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_j} \ge 0;\, j = \overline{1,k} \\ \lambda_j \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_j} = 0 \end{array}\right\},$$

- для минимума

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z}{\partial x_i} \ge 0;\, i = \overline{1,n} \\ x_i \dfrac{\partial Z}{\partial x_i} = 0; \end{array}\right\},$$

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_j} \le 0;\, j = \overline{1,k} \\ \lambda_j \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_j} = 0; \end{array}\right\}.$$

В первом случае все ограничения должны быть приведены к виду $g_j\left(\overline{x}\right) \ge 0$, а во втором - к виду $g_j\left(\overline{x}\right) \le 0$, в противном случае нарушатся условия теоремы Куна-Таккера.

Пример. Найти $\min\limits_{X} \; f = 2x_1^2 + 3x_1 - 2x_1x_2 + x_2{}^2 + x_2$

$$X = \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 \ge 1 \\ x_1 + 4x_2 - 4 \le 0 \\ x_2 \ge 0 \end{array} \right\}$$

Решение.

1 Проверим на выпуклость функцию *f*, для чего составим главные миноры матрицы Гессе:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 4 > 0, \quad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0.$$

Следовательно, функция *f* - строго выпуклая, поэтому у нее существует единственный минимум на выпуклом множестве *X*.

2 Составим функцию Лагранжа, предварительно приведя все ограничения к виду $g_j(\bar{x}) \le 0$:

$$Z = 2x_1^2 + 3x_1 - 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2 + \lambda_1\left(1 - x_1 - x_2\right) + \lambda_2\left(x_1 + 4x_2 - 4\right) - \lambda_3 x_3 .$$

3 Запишем условиях Куна–Таккера:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = 4x_1 + 3 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \ge 0, \\ x_1 \dfrac{\partial Z}{\partial x_1} = x_1\left(4x_1 + 3 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial x_2} = -2x_1 + 2x_2 + 1 - \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 \ge 0, \\ x_2 \dfrac{\partial Z}{\partial x_2} = x_2\left(2x_1 + 1 + 2x_2 - \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_1} = 1 - x_1 - x_2 \le 0, \\ \lambda_1 \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_1} = \lambda_1\left(1 - x_1 - x_2\right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_2} = x_1 + 4x_2 - 4 \le 0, \\ \lambda_2 \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_2} = \lambda_2 \left(x_1 + 4x_2 - 4 \right) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_3} = -x_2 \le 0, \\ \lambda_3 \dfrac{\partial Z}{\partial \lambda_3} = -\lambda_3 x_2 = 0. \end{cases}$$

$\underline{x_1 = x_2 = 0,}$
$3 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \ge 0,$
$2x_2 + 1 - \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 \ge 0.$

В этом случае не удовлетворяется неравенство $1 - x_1 - x_2 \le 0$.

$\underline{x_1 = 0, x_2 \ne 0,}$
$3 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 \ge 0,$
$2x_2 + 1 - \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 \ge 0,$
$x_2 - 1 \ge 0;\ 4x_2 - 4 \le 0;\ \lambda_1 \ge 0;\ \lambda_2 \le 0;\ \lambda_3 = 0.$

Совместное выполнение этих условий невозможно.

$\underline{x_1 \ne 0, x_2 = 0,}$
$4x_1 + 3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$
$-2x_1 + 1 - \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 \ge 0,$
$1 - x_1 \le 0;\ x_1 - 4 \le 0;\ \lambda_1 \ge 0;\ \lambda_2 \ge 0;\ \lambda_3 \ge 0,$

что невозможно по первым двум условиям, когда $\underline{x_1 \ge 0}$.
$\underline{x_1 \ne 0, x_2 \ne 0},$
$4x_1 + 3 - 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,$
$-2x_1 + 2x_2 + 1 - \lambda_1 + 4\lambda_2 - \lambda_3 = 0,$
$1 - x_1 - x_2 \le 0;\ x_1 + 4x_2 - 4 \le 0;\ \lambda_1 \ge 0;\ \lambda_2 \ge 0;\ \lambda_3 = 0.$

Пусть $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, тогда

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3 - 2x_2 = 0 \\ -2x_1 + 1 + 2x_2 = 0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x_1 = -2 \\ x_2 = \frac{3}{2} \end{aligned}\right\} \notin X$$, так как нарушено неравенство $x_1 \ge 0$.

Пусть $\lambda_1 \ne 0;\ \lambda_2 = 0$, тогда

$$\left.\begin{aligned} 4x_1+3-2x_2-\lambda_1=0 \\ -2x_1+1+2x_2-\lambda_1=0 \end{aligned}\right\} \to \left.\begin{aligned} x_1=\lambda_1-2 \\ x_2=\frac{1}{2}\left(3\lambda_1-5\right) \end{aligned}\right\},$$

$1 - x_1 - x_2 = 0; \to\ \lambda_1 = 2{,}2;\ x_1 = 0{,}2;\ x_2 = 0{,}8.$

Эта точка принадлежит области допустимых решений. Поскольку функция f – строго выпуклая, то найденная седловая точка $\left(x_1^*=0{,}2;\, x_2^*=0{,}8;\, \lambda_1=2{,}2;\, \lambda_2=\lambda_3=0\right)$ – единственная, следовательно,

$$\left.\begin{aligned} f_{\min}=1{,}8 \\ x_1^*=0{,}2 \\ x_2^*=0{,}8 \end{aligned}\right\}.$$

Задачи для самостоятельной работы

Во всех перечисленных далее задачах найти экстремум с помощью условий Куна – Таккера.

1 $\min\limits_X f=\left(x_1-1\right)^2+\left(x_2-1\right)^2$

$$X=\left\{\begin{aligned} x_1+x_2\le 5 \\ x_1, x_2\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $\left.\begin{aligned} \lambda_1^*=\lambda_2^*=\lambda_3^*=0 \\ x_1^*=x_2^*=1 \end{aligned}\right\},\quad f_{\min}=0.$

2 $\min\limits_X\left(\max\right) f=7x^2+4xy+4y^2-40x-32y+5$

$$X=\left\{\begin{aligned} x+y\le 16 \\ 3x+2y\ge 6 \\ x, y\ge 0 \end{aligned}\right\}$$

Ответ: $\left.\begin{aligned} f_{\min}=-83 \\ \lambda_1^*=\lambda_2^*=\lambda_3^*=\lambda_4^*=0 \\ x_1^*=2;\quad y^*=3 \end{aligned}\right\},\quad \left.\begin{aligned} f_{\max}=1157 \\ \lambda_1^{**}=184;\lambda_2^{**}=\lambda_3^{**}=0;\lambda_4^{**}=152 \\ x^{**}=16;y^{**}=0 \end{aligned}\right\}.$

3 $\min\limits_X\left(\max\right) f=x_1^2+x_2^2-4x_1-6x_2+x_1x_2$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 - x_2 + 1 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 - 1 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{matrix} f_{\min} = -9{,}08 \\ \lambda_1^* = 0{,}5; \lambda_2^* = \lambda_3^* = 0 \\ x_1^* = \dfrac{7}{6}; \quad x_2^* = \dfrac{13}{6} \end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix} f_{\max} = -3 \\ \lambda_1^{**} = 0; \lambda_2^{**} = 0; \lambda_3^{**} = \dfrac{22}{3} \\ x_1^{**} = \dfrac{10}{3}; \quad x_2^{**} = \dfrac{1}{3} \end{matrix}\right\}.$

4 $\min\limits_X(\max) f = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 4x_2 - x_1x_2$

$$X = \begin{Bmatrix} 3 - x_1 - x_2 \le 0 \\ -1 - x_1 + x_2 \le 0 \\ 2 \ge x_1 \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{matrix} f_{\min} = -11 \\ \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0; \lambda_3^* = 2 \\ x_1^* = 2; \quad x_2^* = 3 \end{matrix}\right\},\qquad \left.\begin{matrix} f_{\max} = -3 \\ 0 \le \lambda_1^{**} \le 1{,}5; 0 \le \lambda_2^{**} \le 2{,}5; \lambda_3^{**} = 0 \\ x_1^{**} = 0; \quad x_2^{**} = 1 \end{matrix}\right\}.$

5 $\max\limits_X f = x_1^2 + x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2$

$$X = \begin{Bmatrix} x_1 + x_2 \le 10 \\ 2x_1 \ge x_2 \\ x_1 - 2x_2 \le 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\begin{cases} f_{\max} = 6\dfrac{2}{3} \\ \lambda_1^* = 4; \lambda_2^* = 0; \lambda_3^* = 4. \\ x_1^* = 6\dfrac{2}{3}, \quad x_2^* = 3\dfrac{1}{3} \end{cases}$

6 $\min\limits_X(\max) f = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y$

$$X = \begin{Bmatrix} x + 2y \le 2 \\ x - y \le 0 \\ x, y \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $\left.\begin{array}{l} f_{\min} = -2 \\ \lambda_1^* = \lambda_2^* = 0; \lambda_3^* \le 5; \lambda_4^* = 0 \\ x^* = 0; \quad y^* = 1 \end{array}\right\},$ $\left.\begin{array}{l} f_{\max} = 2,44 \\ \lambda_1^{**} = \dfrac{25}{6}; \lambda_2^{**} = \dfrac{25}{3}; \lambda_3^{**} = \lambda_4^{**} = 0 \\ x^{**} = \dfrac{2}{3}; \quad y^{**} = \dfrac{2}{3} \end{array}\right\}.$

6.4 Градиентные методы поиска экстремума

6.4.1 Отыскание безусловного экстремума

На шаг не наложено ограничений.

При отыскании максимума движение начинается из произвольной точки в направлении градиента, и антиградиента - при отыскании минимума. Шаг подбирается по ходу решения. Если характер поведения функции изменился на очередном шаге, то необходимо вернуться к предыдущему шагу, уменьшить шаг и двигаться в выбранном направлении. О близости к экстремуму судят по величине $|\nabla f|$, которая должна стремиться к нулю при приближении к экстремуму.

Пример. Найти $\min\limits_{X} f = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y$

Решение.

1 ∇f =($6x + 2y + 3$; $2x + 4y - 4$).

2 Возьмем точку с координатами (x, y) в качестве начальной произвольной и шаг h = 0,2.

1-я итерация:
x_1 = - 1,8,
y_1 = - 0,6,
∇f_1 = (-9; -10),
f_1 = 9,6.

2-я итерация:
x_2= -1,8 - 0,2□(-9) = 0,
y_2 = - 0,06 - 0,2□ (-10) = 1,4,
∇f_2 = (5,8; 2,6),
f_2 = -0,08.

3-я итерация:
x_3= 0 - 0,2□5,8 = -1,16,
y_3 = 1,4 - 0,2□1,6 = 1,08,
∇f_3 = (-1,8; -2),
f_3 = -3,94.

4-я итерация:
x_4 = -1,16 - 0,2□(-1,8) = -0,8,
y_4 = 1,08 - 0,2□ (-2) = 1,48,
∇f_4 = (1,16; 0,32),
f_4 = -2,28.

Функция на четвертой итерации увеличилась, поэтому уменьшаем шаг до 0,1 и вычисляем заново x_4 и y_4:

$x_4 = -1{,}16-(0{,}1) \square (-1{,}8) = -0{,}98$,

$y_4 = 1{,}08-0{,}1\square (-0{,}2) = 1{,}28$,

$\nabla f_4 = (-0{,}32; -0{,}84)$,

$f_4 = -4{,}41$.

5-я итерация:

$x_5 = -0{,}98-0{,}1\square(-0{,}32) = -0{,}95$,

$y_5 = 1{,}28-0{,}1\ (-0{,}84) = 1{,}36$,

$\nabla f_5 = (-0{,}02; -0{,}46)$,

$f_5 = -4{,}467$.

6-я итерация:

$x_6 = -0{,}95-0{,}1\square 0{,}2 = -0{,}952$,

$y_6 = 1{,}36-0{,}1\square (-0{,}46) = 1{,}406$,

$\nabla f_6 = (0{,}1; -0{,}28)$,

$f_6 = -4{,}484$.

7-я итерация:

$x_7 = -0{,}952-0{,}1\square 0{,}1 = -0{,}962$,

$y_7 = 1{,}406+0{,}1\square 0{,}28 = 1{,}434$,

$\nabla f_7 = (0{,}096; -0{,}188)$,

$f_7 = -4{,}492$.

Возьмем величину шага h равной 0,3, тогда

8-я итерация:

$x_8 = -0{,}962-0{,}3\square 0{,}096 = -0{,}991$,

$y_8 = 1{,}434 - 0{,}3\square (-0{,}188) = 1{,}490$,

$\nabla f_8 = (0{,}034; -0{,}02)$,

$f_8 = -4{,}4997$.

Возьмем $h = 0{,}2$:

9-я итерация:

$x_9 = -0{,}991-0{,}2\square 0{,}034 = -0{,}998$,

$y_9 = 1{,}490 - 0{,}2\square (-0{,}2) = 1{,}494$,

$\nabla f_9 = (0; -0{,}02)$,

$f_9 = -4{,}4999$.

10-я итерация:

$x_{10} = -0{,}998 - 0{,}2\square 0 = -0{,}998$,

$y_{10} = 1{,}494 - 0{,}2\square (-0{,}02) = 1{,}498$,

$\nabla f_{10} = (0{,}008; -0{,}004)$,

$f_{10} = -4{,}49999$.

Оценку точности можно провести по величине $|\nabla f|$ или косвенным путем, учитывая совпадение результатов на двух последних итерациях.

Составим матрицу Гессе $\Gamma = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ и вычислим $R = \sqrt{6^2 + 2^2 + 2^2 + 4^2} = 60$.

Известно, что при шаге $h \le \frac{1}{R}$ для выпуклой функции движение по антиградиенту приведет к минимуму функции. В нашем случае h = 0,13. движение начнем из точки (2, 2):

1-я итерация:
x_1 = 2 - 0,13□19 = -0,47,
y_1 = 2 - 0,13□8 = 0,96,
∇f_1 = (2,1; -1,1).

2-я итерация:
x_2 = -0,47 - 0,13□2,1 = -0,74,
y_2 = 0,96 - 0,13□ (-1,1) = 1,1,
∇f_2 = (0,76; -1,08).

3-я итерация:
x_3 = -0,74 - 0,13□0,76 = -0,84,
y_3 = 1,1 - 0,13□ (-1,08) = 1,24,
∇f_3 = (0,44; -0,72).

4-я итерация:
x_4 = -0,84 - 0,13□0,44 = -0,89,
y_4 = 1,24 - 0,13□ (-0,72) = 1,33,
∇f_4 = (0,32; -0,46).

5-я итерация:
x_5 = -0,89 - 0,13□0,32 = -0,93,
y_5 = 1,33 - 0,13□ (-0,46) = 1,39,
∇f_5 = (0,20; -0,30).

6-я итерация:
x_6 = -0,93 - 0,13□0,20 = -0,96,
y_6 = 1,39 - 0,13□ (-0,30) = 1,43,
∇f_6 = (0,10; -0,20).

7-я итерация:
x_7 = -0,96 - 0,13□0,10 = -0,97,
y_7 = 1,43 - 0,13□(-0,20) = 1,46,
∇f_7 = (0,10; -0,10).

8-я итерация:
$x_8 = -0,97 - 0,13 \cdot 0,10 = -0,98$,
$y_8 = 1,46 - 0,13 \cdot (-0,10) = 1,47$,
$\nabla f_8 = (0,06; -0,08)$.

9-я итерация:
$x_9 = -0,98 - 0,13 \cdot 0,06 = -0,988$,
$y_9 = 1,47 + 0,13 \cdot 0,08 = 1,480$,
$\nabla f_9 = (0,032; -0,056)$.

10-я итерация:
$x_{10} = -0,988 - 0,13 \cdot 0,032 = -0,992$,
$y_{10} = 1,480 + 0,13 \cdot 0,056 = 1,487$,
$\nabla f_{10} = (0,022; -0,036)$.

11-я итерация:
$x_{11} = 0,922 - 0,13 \cdot 0,022 = -0,995$,
$y_{11} = 1,487 - 0,13 \cdot (-0,036) = 1,492$,
$\nabla f_{11} = (0,014; -0,022)$.

12-я итерация:
$x_{12} = -0,995 - 0,13 \cdot 0,014 = -0,997$,
$y_{12} = 1,492 - 0,13 \cdot (-0,022) = 1,495$,
$\nabla f_{12} = (0,008; -0,014)$.

13-я итерация:
$x_{13} = -0,997 - 0,13 \cdot 0,008 = -0,998$,
$y_{13} = 1,495 - 0,13 \cdot (-0,14) = 1,497$,
$\nabla f_{13} = (0,006; -0,008)$.

14-я итерация:
$x_{14} = -0,998 - 0,13 \cdot 0,006 = -0,999$,
$y_{14} = 1,497 - 0,13 \cdot (-0,008) = 1,498$,
$\nabla f_{14} = (0,002; -0,006)$.

15-я итерация:
$x_{15} = -0,999 - 0,13 \cdot 0,002 = -0,999$,
$y_{15} = 1,498 - 0,13 \cdot (-0,006) = 1,499$,
$\nabla f_{15} = (0,004; -0,002)$.

На этой итерации процесс закончим, так как $|\nabla f_{15}| < 0,005$.
Окончательно, $x_4 = - 0,999$, $y_4 = 1,499$, $f_{\min} = - 4,499$.

6.4.1.1 Метод наискорейшего спуска

В качестве начальной точки возьмем точку (2, 2), а шаг определим из требования $\min\limits_h f$.

1-я итерация:

$x_1 = 2 - 19 \cdot h,$

$y_1 = 2 - 8 \cdot h,$

$f_1 = 3 \cdot (2\text{-}19 \cdot h)^2 + 2 \cdot (2\text{-}19 \cdot h) \cdot (2 - 8 \cdot h) + 2 \cdot (2 - 8 \cdot h)^2 + 3 \cdot (2 - 19 \cdot h) - 4 \cdot (2\text{-}8 \cdot h) = -433 \cdot h + 1515 \cdot h^2 + 20.$

Составив $\frac{df_1}{dh} = -433 + 3030h = 0$. Отсюда шаг h_1 = 0,14 определяет $\min\limits_h f$. Совершим спуск с этим шагом:

$x_1 = 2 - 19 \cdot 0{,}14 = -0{,}66,$

$y_1 = 2 - 8 \cdot 0{,}14 = 0{,}88,$

$\nabla f_1 = (0{,}8;\ -1{,}8).$

2-я итерация:

$x_2 = -0{,}66 - 0{,}8 \cdot h,$

$y_2 = 0{,}88 + 1{,}8 \cdot h,$

$f_2 = -3{,}88 \cdot h + 5{,}52 \cdot h^2 - 3{,}806.$

Приравняв нулю $\frac{df_2}{dh} = -3{,}88 + 11{,}04h = 0$, получим h_2 = 0,35, тогда

$x_2 = -0{,}66 - 0{,}8 \cdot 0{,}35 = -0{,}94,$

$y_2 = 0{,}88 + 0{,}35 \cdot 1{,}8 = 1{,}51,$

$\nabla f_2 = (0{,}38;\ 0{,}16).$

3-я итерация:

$x_3 = -0{,}94 - h \cdot 0{,}38,$

$y_3 = 1{,}51 - 0{,}16 \cdot h,$

$f_3 = -0{,}46\ h + 0{,}72\ h^2 + c_3,$

$\frac{df_3}{dh} = -0{,}46 + 1{,}44h = 0,$

$h_3 = 0{,}32,$

$x_3 = -1{,}06,$

$y_3 = 1{,}459,$

$\nabla f_3 = (-0{,}44;\ -0{,}281).$

4-я итерация:

$x_4 = -1{,}06 + h \cdot 0{,}44,$

$y_4 = 1{,}459 + 0{,}284 \cdot h,$

$f_4 = -0{,}274 \cdot h + 0{,}984 \cdot \nabla h^2 + c_4,$

$\frac{df_4}{dh} = -0{,}274 + 1{,}968h = 0,$

$h_4 = 0{,}14$,
$x_4 = -0{,}998$,
$y_4 = 1{,}498$,
$\nabla f_4 = (0{,}008;\ 0{,}003)$.

Можно прекратить процесс, полагая, что x_4 = -0,998, y_4 = 1,498, $f_{\min}$ = -4,499.

6.4.2 Отыскание условного экстремума

Пример.
Найти $\max\limits_{X} f = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x - 4y$

$$X = \left\{ \begin{aligned} x + 2y \le 2, \\ x - y \le 0, \end{aligned} \quad x, y \ge 0 \right\}$$

Решение.
1 Возьмем точку (0,01; 0,8), в которой ∇f_0 = (4,66; - 0,76).
2 Сделаем шаг в направлении градиента и подберем шаг h так, чтобы попасть на ограничение $x + 2y = 2$.
x_1 = 0,01 + 4,66□h,
y_1 = 0,8 - 0,76□h,
0,01 + 4,66 +2□ (0,8 – 0,76□h) = 2, отсюда
h = 0,126,
x_1 = -0,597,
y_1 = 0,701,
∇f_1 = (7,98; - 0,002).

Запишем уравнение прямой в виде $\dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y}{-0{,}5}$. Скалярное произведение ∇f и направляющего вектора этой прямой $\vec{e}$.

$$(\nabla f, \vec{e}) = 7{,}98 \cdot 1 + 0{,}5 \cdot 0{,}002 > 0,$$

поэтому следующий шаг сделаем в направлении $\vec{e}$ с шагом 0,064
x_2 = 0,597 + 1□0,064 = 0,661,
y_2 = 0,701 + (- 0,5) □0,064 = 0,668,
f_2 = 2,397.

3-я итерация: уменьшим шаг до 0,004, иначе нарушится ограничение $x - y \le 0$:
x_3 = 0,661 + 1□0,004 = 0,665,
y_3 = 0,668 - 0,5□0,004 = 0,666,
f_3 = 2,431.

4-я итерация:
h = 0,001,
x_4 = 0,665 + 1$\cdot$0,001 = 0,666,
y_4 = 0,666 - 0,5$\cdot$0,001 = 0,665,
нарушилось ограничение $x - y \leq 0$.
f_4 = 2,430.
Очевидно, можно остановиться. Таким образом, $f_{\max}$ = 2,431,
x^* = 0,665,
y^* = 0,666.

Задачи для самостоятельной работы

В следующих примерах найти безусловный экстремум с помощью градиентных методов.

1 $\max f = x_2 - x_1 - x_1^2 + x_1 x_2 - 2x_2^2$
Ответ: $f_{\max}$ = 0,286, x_1^* = - 0,43, x_2^* = 0,14.

2 $\min f = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9$
Ответ: $f_{\min}$ = -9, x^* = 1, y^* = 1.

3 $\min f = 3x^2 + 7xy + 5y^2 - 4x - 5y + 1$
Ответ: $f_{\min} = \dfrac{1}{3},\ x^* = y^* = \dfrac{1}{3}$.

4 $\min f = x^2 + xy + 2y^2 + x - y$
Ответ: $f_{\min}$ = - 0,57, x^* = - 0,711, y^* = 0,43.

5 Найти условный экстремум в задачах 1-6 п. 5.2 с помощью градиентных методов.

Вопросы для самопроверки

1 Сформулируйте задачу нелинейного программирования.
2 Когда применим и в чем заключается графический метод решения задач нелинейного программирования?
3 какому условию должны удовлетворять ограничения, определяющие некоторое множество, чтобы это множество было выпуклым?
4 Дайте определение функции Лагранжа и ее седловой точки.
5 Сформулируйте теорему Куна-Таккера.
6 Напишите локальные условия Куна-Таккера. В каком случае они имеют место?

6.5 Метод штрафных функций

Метод внешней точки.
Пример. Найти $\min\limits_X f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_1 x_2$

$$X=\begin{Bmatrix} x_1-x_2+1\ge 0 \\ 2x_1+x_2-7\le 0 \\ x_1+2x_2-4\ge 0 \end{Bmatrix}$$

Решение.

1 Составим вспомогательную функцию

$$F=x_1^2+x_2^2-4x_1-6x_2+x_1x_2+r\left[\left(x_1-x_2+1\right)^2+\left(2x_1+x_2-7\right)^2+\left(x_1-2x_2-4\right)^2\right],$$

где r – штрафующий коэффициент, причем $r\to\infty$ при приближении к границе области допустимых решений.

2 Приравняем нулю частные производные $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=2x_1-4+x_2+2r\left[x_1+1-x_2+2\left(2x_1+x_2-7\right)+x_1-2x_2-4\right]=0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_2}=2x_2-6+x_1+2r\left[-x_1+x_2-1+2x_1+x_2-7+2x_1+4x_2-8\right]=0.$$

Решая, получим:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix} 34r+4 & 1+6r \\ 32r+6 & 2+12r \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+12r & 1+6r \\ 1+6r & 2+12r \end{vmatrix}},$$

$$x_2=\frac{\begin{vmatrix} 2+12r & 34r+4 \\ 1+6r & 32r+6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2+12r & 1+6r \\ 1+6r & 2+12r \end{vmatrix}}.$$

При $r\to\infty,\ x_1\to 2,\ x_2\to\dfrac{5}{3}$ но эта точка принадлежит области допустимых решений, т. е. граница области осталась позади, тогда как известно, что экстремум находится на границе. Проверим поэтому ограничения не все одновременно, а поочередно.

3 Составим функцию

$$F_1=x_1^2+x_2^2-4x_1-6x_2+x_1x_2+r\left(x_1+1-x_2\right)^2.$$

Приравняем нулю частные производные:

$$\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 + x_2 + 2r\left(x_1 + 1 - x_2\right) = 0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - 6 + x_1 + 2r(-x_1 - 1 + x_2) = 0.$$

Решая, получим

$$x_1 = \frac{14r + 2}{12r + 3},$$
$$x_2 = \frac{26r + 8}{12r + 3}.$$

При $r \to \infty$, $x_1 \to \frac{7}{6}$, $x_2 \to \frac{13}{6}$ принадлежит границе, f = -9,08.

Если взять другое ограничение, то получим

$$F_2 = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_1x_2 + r\left(2x_1 + x_2 - 7\right)^2,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x_1} = 2x_1 - 4 + x_2 + 2r\left(2x_1 + x_2 - 7\right)2 = 0,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial x_2} = 2x_2 - 6 + x_1 + 2r\left(2x_1 + x_2 - 7\right) = 0,$$

откуда

$$x_1 = \frac{26r + 2}{12r + 3},$$
$$x_2 = \frac{32r + 8}{12r + 3}.$$

При $r \to \infty$, $x_1 \to \frac{13}{6}$, $x_2 \to \frac{8}{3}$ принадлежит границе, f = -7,08.

Аналогично можно проверить и третье ограничение. В этом случае при $r \to \infty$, $x_1 \to \frac{2}{3}$, $x_2 \to \frac{5}{3}$, f = -8,33. Окончательно $f_{\min}$ = -9,08 при $x_1 = \frac{7}{6}$, $x_2 = \frac{13}{6}$ принадлежит границе.

Таким образом, с помощью вспомогательной функции F мы приходим к искомой точке минимума, причем движение к минимуму осуществляется извне.

6.5.1 Метод внутренней точки

В этом случае движение к минимуму происходит изнутри области, а штрафующий коэффициент при приближении к границе стремится к нулю.

Рассмотрим предыдущий пример. Составим функцию F с «барьерной» штрафной функцией:

$$F = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_1x_2 - r\ln\left(x_1 + 1 - x_2\right).$$

Приравняв нулю $\dfrac{\partial F}{\partial x_1}$ и $\dfrac{\partial F}{\partial x_2}$, получим

$$2x_1 - 4 + x_2 - \frac{r}{x_1 + 1 - x_2} = 0,$$
$$2x_2 - 6 + x_1 + \frac{r}{x_1 + 1 - x_2} = 0,$$

отсюда при $r \to \infty$, $x_1 \to \dfrac{7}{6}$, $x_2 \to \dfrac{13}{6}$, а это и есть искомая точка минимума.

6.5.2 Метод обобщенного градиента

Решим предыдущий пример методом обобщенного градиента. Начнем движение из точки (0, 0)$\notin$ X. Величину шага спуска определим из условия $h \le \dfrac{1}{R}$, где $R = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{10}$, а под корнем стоят элементы матрицы Гессе $\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1-я итерация:
∇f_0 = (-4; -6),
h_1 = 0,3,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= -0{,}3 \cdot (-4) = 1{,}2 \\ x_2^{(1)} &= -0{,}3 \cdot (-6) = 1{,}8 \end{aligned}\right\} \in X,$$

∇f_1 = (0,42; -0,944),
f_1 = -8,7.

2-я итерация:
h_2 = 0,3,

$x_1^{(2)} = 1,2 - 0,3 \cdot 0,42 = 1,07,$

$x_2^{(2)} = 1,8 - 0,3 \cdot (-0,944) = 2,08,$

$\nabla f_2 = (0,22;\ -0,77).$

Точка (1,07; 2,08) $\notin$X, нарушено первое ограничение. Введем обобщенный градиент $\nabla G = \nabla f - r\nabla g_1$, $\nabla g_1 = (1;\ -1)$.

3-я итерация:
$h_3 = 0,1,$

$x_1^{(3)} = 1,07 - 0,1 \cdot (0,22 - r),$

$x_2^{(3)} = 2,08 - 0,1 \cdot (-0,77 + r).$

При $r = 1$, тогда

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(3)} = 1,148 \\ x_2^{(3)} = 2,057 \end{array}\right\} \in X,$$

$\nabla f_3 = (0,35;\ -0,74),$
$f_3 = -8,9.$

4-я итерация:
$h_4 = 0,01,$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(4)} = 1,148 - 0,01 \cdot 0,35 = 1,144 \\ x_2^{(4)} = 2,057 - 0,01 \cdot (-0,74) = 2,064 \end{array}\right\} \in X,$$

$\nabla f_4 = (0,34;\ -0,75),$
$f_4 = -9,03.$

5-я итерация:
$h_5 = 0,01,$

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(5)} = 1,144 - 0,01 \cdot 0,34 = 1,141 \\ x_2^{(5)} = 2,064 - 0,01 \cdot (-0,75) = 2,07 \end{array}\right\} \in X,$$

$f_5 = -9,035.$

Из-за медленной сходимости увеличиваем шаг до 0,05:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(5)} = 1,144 - 0,05 \cdot 0,34 = 1,127 \\ x_2^{(5)} = 2,064 - 0,05 \cdot (-0,73) = 2,1 \end{array}\right\} \in X,$$

$\nabla f_5 = (0,35;\ -0,67),$
$f_5 = -9,06.$

6-я итерация:
$h_3 = 0,05,$

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(6)} &= 1{,}127 - 0{,}05 \cdot 0{,}35 = 1{,}117 \\ x_2^{(6)} &= 2{,}1 - 0{,}05 \cdot (-0{,}67) = 2{,}120 \end{aligned}\right\} \notin X,$$

$\nabla f_6 = (0{,}35;\ -0{,}64)$.

Введем опять обобщенный градиент:
7-я итерация:
$h_7 = 0{,}05$,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(7)} &= 1{,}117 - 0{,}05 \cdot (0{,}35 - r) = 1{,}149 \\ x_2^{(7)} &= 2{,}120 - 0{,}05 \cdot (-0{,}64 + r) = 2{,}102 \end{aligned}\right\} \in X,$$

$\nabla f_7 = (0{,}40;\ -0{,}64)$,
$f_7 = -9{,}054$.

8-я итерация:
$h_8 = 0{,}1$,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(8)} &= 1{,}149 - 0{,}1 \cdot 0{,}4 = 1{,}109 \\ x_2^{(8)} &= 2{,}102 + 0{,}1 \cdot 0{,}64 = 2{,}164 \end{aligned}\right\} \notin X,$$

$\nabla f_8 = (0{,}38;\ -0{,}56)$.

Вводим обобщенный градиент:
9-я итерация:
$h_9 = 0{,}06$,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(9)} &= 1{,}109 - 0{,}06 \cdot (0{,}38 - r) = 1{,}146 \\ x_2^{(9)} &= 2{,}164 - 0{,}06 \cdot (-0{,}56 + r) = 2{,}136 \end{aligned}\right\} \in X,$$

$\nabla f_9 = (0{,}42;\ -0{,}58)$,
$f_9 = -9{,}07$.

10-я итерация:
$h_{10} = 0{,}06$,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(10)} &= 1{,}146 - 0{,}06 \cdot 0{,}42 = 1{,}121 \\ x_2^{(10)} &= 2{,}136 + 0{,}06 \cdot 0{,}58 = 2{,}171 \end{aligned}\right\} \notin X,$$

$\nabla f_{10} = (0{,}41;\ -0{,}53)$.

Вводим обобщенный градиент:
11-я итерация:
$h_{11} = 0{,}05$,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(11)} &= 1{,}121 - 0{,}05\big(0{,}41 - r\big) = 1{,}15 \\ x_2^{(11)} &= 2{,}171 - 0{,}05\big(-0{,}53 + r\big) = 2{,}147 \end{aligned}\right\} \in X,$$

$\nabla f_{11} = (0{,}45;\ -0{,}55)$,
$f_{11} = -9{,}08$.

12-я итерация:
$h_{12} = 0{,}06$,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(12)} &= 1{,}150 - 0{,}06 \cdot 0{,}45 = 1{,}123 \\ x_2^{(12)} &= 2{,}147 + 0{,}06 \cdot 0{,}58 = 2{,}185 \end{aligned}\right\} \notin X,$$

$\nabla f_{12} = (0{,}43;\ -0{,}51)$.

Вводим обобщенный градиент:
13-я итерация:
$h_{13} = 0{,}06$,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(13)} &= 1{,}123 - 0{,}06(0{,}43 - r) = 1{,}166 \\ x_2^{(13)} &= 2{,}185 - 0{,}06(-0{,}51 + r) = 2{,}166 \end{aligned}\right\} \in X,$$

$f_{13} = -9{,}08$.

Таким образом, точка минимума имеет координаты $x_1^* = 1{,}166$, $x_2^* = 2{,}166$, а $f_{\min} = -9{,}08$.

Задачи для самостоятельной работы

1 Решить с помощью штрафных функций задачи из пункта 6.2.

6.6 Квадратичное программирование. Метод Вольфа

Применение метода Вольфа возможно, если:
1) функция цели - совокупность линейной и квадратичной форм;
2) ограничения - линейные функции;
3) все переменные - неотрицательные величины, а квадратичная форма - определенно положительна.

Процедура метода Вольфа состоит из трех этапов. На первом этапе составляются условия Куна-Таккера и вводятся переменно $p_i \geq 0$; $q_j \geq 0$, переводящие все неравенства в равенства. На втором этапе группу линейных уравнений записывают так, чтобы свободные члены были неотрицательными и стояли в уравнениях справа. После чего вводятся добавочные переменные $z_i \geq 0$, $y_j \geq 0$. Если в уравнении свободный член равен нулю, то вводить добавочную переменную в этом уравнении не следует. Третий этап состоит в применении симплекс-метода к решению двух последовательных задач оптимизации.

1-я задача. Находят $\min f_1 = \sum_j y_j$ при ограничениях, которыми являются полученные уравнения. На этом шаге нельзя вводить в базис переменные z_i. Если другого пути нет, необходимо менять базис, после чего может оказаться, что процесс уже окончен без решения 2-й задачи оптимизации. При переводе переменных в базис необходимо следите за тем, чтобы выполнялись условия $\lambda_i q_i = 0$, ибо в противном случае окажутся невыполненными условия Куна-Таккера. Первый этап заканчивается, когда все $y_j = 0$ и $f_1 = 0$. При этом все столбцы с переменными y_j можно исключить из дальнейшего рассмотрения.

2-я задача. Найти $\min f_2 = \sum_i z_i$ при оставшихся после первой задачи уравнениях ограничений. Здесь также необходимо следить за выполнением условий $x_i p_i = 0$ при переводе в базис, а также иметь в виду, что основные переменные следует вводить в базис только тогда, когда других возможностей нет. После того, когда все $z_i = 0$ и $f_2 = 0$, процесс заканчивается. Переменные, находящиеся в базисе, дают оптимальное решение исходной задачи при нулевых значениях остальных переменных.

Пример.

Найти $\min_X f = 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6$;

$$X = \begin{Bmatrix} x + y \le 3 \\ 3x + y \le 3 \\ 2y \ge x - 1 \end{Bmatrix}$$

Решение.

1 Составим матрицу Гессе: $\begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 18 \end{pmatrix}$. Миноры этой матрицы $\Delta_1 = 12$ и $\Delta_2 = 216 - 16 = 200$. Следовательно, функция f - строго выпуклая книзу на выпуклом множестве X. Тогда у нее существует единственный минимум на этом множестве.

2 Запишем условия Куна-Таккера для функции Лагранжа:

$$z = 6x^2 - 4xy + 9y^2 - 4x - 32y - 6 + \lambda_1(x + y - 3) + \lambda_2(3x + y - 3) + \lambda_3(x - 2y - 1),$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x - 4y - 4 + \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 = p_1 \ge 0,\ xp_1 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -4x + 18y - 32 + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 = p_2 \ge 0,\ yp_2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_1} = x + y - 3 = -q_1 \le 0,\ q_1 \ge 0;\ \lambda_1 q_1 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_2} = 3x + y - 3 = -q_2 \le 0,\ q_2 \ge 0;\ \lambda_2 q_2 = 0,$$

$$\frac{\partial z}{\partial \lambda_3} = x - 2y - 1 = -q_3 \le 0;\ q_3 \ge 0;\ \lambda_3 q_3 = 0.$$

3 Перепишем эти уравнения так, чтобы свободные члены стояли в уравнениях справа и были неотрицательными, а также введем добавочные переменные $z_i \ge 0$, $y_j \ge 0$

$$\left.\begin{array}{l} 12x - 4y + \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 - p_1 + z_1 = 4 \\ -4x + 18y + \lambda_1 + \lambda_2 - 2\lambda_3 - p_2 + z_2 = 32 \\ x + y + q_1 + y_1 = 3 \\ 3x + y + q_2 + y_2 = 3 \\ x - 2y + q_3 + y_3 = 1 \end{array}\right\}$$

4 Разрешим эту систему относительно базисных переменных

$$
\left.
\begin{aligned}
z_1 &= 4-\left(12x-4y+\lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3-p_1\right)\\
z_2 &= 32-\left(4x+18y+\lambda_1+\lambda_2-2\lambda_3-p_2\right)\\
y_1 &= 3-\left(x+y+q_1\right)\\
y_2 &= 3-\left(3x+y+q_2\right)\\
y_3 &= 1-\left(x-2y+q_3\right)
\end{aligned}
\right\}
$$

5 Применим симплекс-метод для решения 1-й задачи оптимизации по отысканию min $f_1 = y_1 + y_2 + y_3$. Решение построим табличным методом, результаты представим в таблицах 6.2, 6.3, 6.4:

Таблица 6.2

		x	y	ЮЮ λ_1	λ_2	λ_3	p_1	p_2	q_1	q_2	q_3
z_1	4	12	-4	1	3	1	-1				
z_2	32	-4	18	1	1	-2		-1			
y_1	3	1	1						1		
y_2	3	3	1							1	
y_3	1 / 1	1 / 1	-2 / -2								1 / 1
f_1	7 / -1	5 / -1	0 / 2						1	1	1 / -1

Таблица 6.3

		x	y	λ_1	λ_2	λ_3	p_1	p_2	q_1	q_2	y_3
z_1	4	12	-4	1	3	1	-1				
z_2	32	-4	18	1	1	-2		-1			
y_1	3	1	1						1		
y_2	3 / 3	3 / 3	1 / 1							1 / 1	
q_3	1	1	-2								1
f_1	6 / -3	4 / -3	2 / -1					-1	1	1 / -1	-1

Таблица 6.4

		x	y	λ_1	λ_2	λ_3	p_1	p_2	q_1	y_2	y_3
z_1	4	12	-4	1	3	1	-1				
z_2	32	-4	18	1	1	-2		-1			
y_1	3 / 3	1 / 1	1 / 1						1 / 1		
q_2	3	3	1							1	
q_3	1	1	-2								1
f_1	3 / -3	1 / -1	1 / -1						1 / -1	-1	-1
		x	y	λ_1	λ_2	λ_3	p_1	p_2	y_1	y_2	y_3
z_1	4	12	-4	1	3	1	-1				
z_2	32	-4	18	1	1	-2		-1			
q_1	3 / 3	1	1 / 1						1		
q_2	3	3	1							1	
q_3	1	1	-2								1
f_1	0	0	0						-1	-1	-1

1-я задача оптимизации решена. Вычеркиваем столбцы y_j и приступаем к решению 2-й задачи оптимизации. Решение также проведем табличным способом, результаты представим в таблицах 6.5, 6.6, 6.7, 6.8):

Таблица 6.5

		x	y	λ_1	λ_2	λ_3	p_1	p_2
z_1	4 / 1/3	12 / 1/12	-4 / -1/3	1 / 1/12	3 / 1/4	1 / 1/12	-1 / -1/12	0 / 0
z_2	32 / 4/3	-4 / 1/3	18 / -4/3	1 / 1/3	1 / 1	-2 / 1/3	0 / -1/3	-1 / 0
q_1	3 / 1/3	1 / -1/12	1 / 1/3	0 / -1/12	0 / -1/4	0 / -1/12	0 / 1/12	0 / 0
q_2	3 / -1	3 / -1/14	1 / 1	0 / -1/4	0 / -3/4	0 / -1/4	0 / 1/4	0 / 0
q_3	1 / -1/3	1 / -1/12	-2 / -1/3	0 / -1/12	0 / -1/4	0 / -1/12	0 / 1/12	0 / 0
f_2	36 / -8/3	8 / -2/3	14 / 8/3	2 / -2/3	4 / -2	-1 / -2/3	-1 / 2/3	-1 / 0

Таблица 6.6

		z_1	y	λ_1	λ_2	λ_3	p_1	p_2
x	1/3 / 1/3	1/12 / -1/24	-1/3 / 1/6	1/12 / -1/24	1/4 / -1/8	1/12 / -1/24	-1/12 / 1/24	0 / 0
z_2	100/3 / -50/3	1/3 / 25/12	50/3 / -25/3	4/3 / 25/12	2 / 25/4	-5/3 / 25/12	-1/3 / -25/12	-1 / 0
q_1	8/3 / -4/3	-1/12 / 1/6	4/3 / -2/3	-1/12 / 1/6	-1/4 / 1/2	-1/12 / 1/6	1/12 / -1/6	0 / 0
q_2	2 / 1	-1/4 / -1/8	2 / 1/2	-1/4 / -1/8	-3/4 / -3/8	-1/4 / -1/8	1/4 / 1/8	0 / 0
q_3	2/3 / 5/3	-1/12 / -5/24	-5/3 / 5/6	-1/12 / -5/24	-1/4 / -5/8	1/12 / -5/24	1/12 / 5/24	0 / 0
f_2	100/3 / -50/3	-2/3 / 25/12	50/3 / -25/3	4/3 / 25/12	2 / 25/4	-5/3 / 25/12	-1/3 / -25/12	-1 / 0

Таблица 6.7

		z_1	q_2	λ_1	λ_2	λ_3	p_1	p_2
x	2/3 / -25/99	1/14	1/6	1/24	1/8 / -1/66	1/24	-1/24	0
z_2	50/3 / -200/99	29/12 / 29/99	-25/3 / -100/99	3/4 / 1/11	33/4 / 4/33	13/12 / 42/99	-29/12 / -29/99	-1 / -4/33
q_1	4/8 / -50/99	1/12	2/3	1/12	1/4 / -1/33	1/12	-1/12	0
y_2	1 / 26/33	-1/8	1/2	-1/8	-3/8 / 1/22	-1/8	1/8	0
q_3	7/3 / 175/99	-7/24	5/6	-7/24	-7/8 / 7/66	-1/8	7/24	0
f_2	50/3 / -50/3	-17/12 / 29/12	-25/3 / 25/3	37/12 / -3/4	33/4 / -1	-5/12 / -3/12	-29/12 / 29/12	-1 / 1

Таблица 6.8

		z_1	q_2	λ_1	z_2	λ_3	p_1	p_2
x	0,41							
λ_2	200/99							
q_1	0,83							
y_2	1,76							
q_3	406/99							
f_2	0	-1	0	13/6	-1	-1/12	0	0

Дальнейшее движение невозможно, поэтому оптимальное решение таково:

$x^* = 0{,}41$, $y^* = 1{,}76$, а $f_{\min} = -37{,}94$.

Задачи для самостоятельной работы

Во всех задачах найти минимум функции на множестве X методом Вольфа.

1 $\min\limits_X f = 2x_1^2 + 4xy + 3y^2 - 3x - 3y$

$$X = \begin{Bmatrix} x + 3y - 12 \le 0 \\ 3x - y \ge 0 \\ x, y \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 3/4$, $y^* = 0$, а $f_{\min} = -9/8$.

2 $\min\limits_X f = 2x^2 + 4y + 12x - 3$

$$X = \begin{Bmatrix} x - 3y \le 6 \\ 2y - x + 1 \le 0 \\ y \le 3 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = -10/3$, $y^* = 28/9$, а $f_{\min} = -33/2$.

3 $\min\limits_X f = 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x - 10y$

$$X = \begin{Bmatrix} x + y \le 4 \\ 2x - y \ge 0 \\ y \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 5/3$, $y^* = 1/3$, а $f_{\min} = -8/3$.

4 $\max\limits_{X} f = x^2 + 2xy + 2y^2 - 6x + 2y - 3$

$$X = \begin{Bmatrix} 4x - y - 5 \ge 0 \\ x - y \ge 0 \\ x + y \le 5 \\ y \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 2{,}5$, $y^* = 2{,}5$, а $f_{\max} = 18{,}25$.

5 $\min\limits_{X} f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_1 x_2$

$$X = \begin{Bmatrix} x1 - x_2 + 1 \ge 0 \\ 2x_1 + x_2 - 7 \le 0 \\ x_1 + 2x_2 - 4 \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 7/6$, $y^* = 13/6$, а $f_{\min} = -9/8$.

6.7 Метод кусочно-линейной аппроксимации сепарабельных функций

Пример.

Найти $\min\limits_{X} f = 2x^2 + 4y - 24x + 31$

$$X = \begin{Bmatrix} x - 3y \le 0 \\ 2y - x \le 0 \\ y - 8 \le 0 \end{Bmatrix}$$

Решение.

1-й этап.

$f_1 = 2x^2 - 24x$, $f_2 = 4y$, $g_{11} = x$, $g_{21} = -x$, $g_{31} = 0$, $g_{12} = -3y$, $g_{22} = 2y$, $g_{32} = y$.

Составим вспомогательные таблицы 6.9, 6.10 для линеаризации переменных и целевой функции:

Таблица 6.9

k	x_k	λ_{1k}	f_{1k}	g_{11k}	g_{21k}	g_{31k}
0	0	λ_{10}	0	0	0	0
1	6	λ_{11}	-72	6	-6	0
2	12	λ_{12}	0	12	-12	0
3	18	λ_{13}	216	18	-18	0
4	24	λ_{14}	576	24	-24	0

Таблица 6.10

k	y_k	λ_{2k}	f_{2k}	g_{12k}	g_{22k}	g_{32k}
0	0	λ_{20}	0	0	0	0
1	2	λ_{21}	8	-6	4	2
2	4	λ_{22}	16	-12	8	4
3	6	λ_{23}	24	-18	12	6
4	8	λ_{24}	32	-24	16	8

Функция цели и ограничения будут тогда иметь вид:

$$f = 31 \square (72\lambda_{11} - 216\lambda_{13} - 57\lambda_{14} - 8\lambda_{21} - 16\lambda_{22} - 24\lambda_{23} - 32\lambda_{24}),$$
$$x_1 = 0 - (6\lambda_{11} + 12\lambda_{12} + 18\lambda_{13} + 24\lambda_{14} - 6\lambda_{21} - 18\lambda_{22} + 12\lambda_{23} - 24\lambda_{24}),$$
$$x_2 = 0 - (-6\lambda_{11} - 12\lambda_{12} - 18\lambda_{13} - 24\lambda_{14} + 4\lambda_{21} + 8\lambda_{22} + 12\lambda_{23} + 16\lambda_{24}),$$
$$x_3 = 8 - (2\lambda_{21} + 4\lambda_{22} + 6\lambda_{23} + 8\lambda_{24}),$$
$$\lambda_{10} = 1 - (\lambda_{11} + \lambda_{12} + \lambda_{13} + \lambda_{14}),$$
$$\lambda_{20} = 1 - (\lambda_{21} + \lambda_{22} + \lambda_{23} + \lambda_{24}).$$

Решение.

Построим симплекс-методом в табличном виде, помня том, что в базисе могут быть только соседние значения λ_{ij}, представленные в таблице 6.11:

Таблица 6.11

		λ_{11}	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}
x_1	0	6 1/6	12 2	18 3	24 4	-6 -1	-12 -2	-18 -3	-24 -4
x_2	0	-6 1	-12 12	-18 18	-24 24	4 -6	8 -12	12 -18	16 -24
x_3	8	0 0	0 0	0	0	2	4	6	8
λ_{10}	1	1 -1/6	1 -2	1 -3	1 -4	0 1	0 2	0 3	0 4
λ_{20}	1	0 0	0 0	0	0	1	1	1	1
f	31 0	72 -12	0 144	-216 -216	-576 -288	-8 72	-16 144	-24 216	-32 288

Таблица 6.12

		x_1	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{21}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}
λ_{11}	0 1	1/6 0	2	3	4	-1 1	-2 1	-3 1	-4 1
x_2	 2	1 0				-2 2	-4 2	-6 2	-8 2
x_3	-8 2					2 -2	4 -2	6 -2	8 -2
λ_{10}	1 -1	-1/6	-1	-2	-3	1 -1	2 -1	3 -1	4 -1
λ_{20}	1 1	0 0				1 1	1 1	1 1	1 1
f	31 -64	-12 0	-144	-432	-864	64 -64	128 -64	192 -64	256 -64

Таблица 6.13

		x_1	λ_{12}	λ_{13}	λ_{14}	λ_{20}	λ_{22}	λ_{23}	λ_{24}
λ_{11}	1	1/6	2	3	4	1	-1	-2	-3
x_2	2	1				2	-2	-4	-6
x_3	6					-2	2	4	6
λ_{10}	0	-1/6	-1	-2	-3	-1	1	2	3
λ_{21}	1	0 0				1	1	1	1
f	-33	-12	-144	-432	-864	-64	64	128	192

Дальнейшее улучшение невозможно, так как $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{10} = 0$, а вводить в базис $\lambda_{ij} \le 1$, не стоящие рядом с уже находящимися λ нельзя!

Таким образом, оптимальное решение $\lambda_{10}^* = 0$, $\lambda_{11}^* = 1$, $f_{\min} = -33$. Соответственно $x^* = \lambda_{11}^* \lambda x_{11} = 6$, $y^* = \lambda_{21}^* \lambda y_{11} = 2$.

2-й этап. Для получения более точного решения следует теперь взять окрестность точки (6, 2) и повторить процедуру поиска минимума, аналогичную первому этапу. Например, можно взять интервалы $x \in [5; 7]$, $y \in [1; 3]$, составить вспомогательные таблицы с шагом 0,5, а далее - как и ранее. Этот этап рекомендуется выполнить самостоятельно.

Для получения еще более точного решения следует перейти к третьему этапу, в котором окрестность полученной во втором этапе точки опять разбить на равные доли и повторить процедуру, и т. д.

Задачи для самостоятельной работы

Найти минимум с помощью λ - метода.

1 $f = 0,98x^2 + 5,97y^2 - 2,94x - 17,91y + 7,3$

$$X = \begin{Bmatrix} 0,44x + 1,34y \le 4,67 \\ 0,01x + 2,24y \ge 0,35 \\ 0,45x + 0,89y \ge 1,68 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 0,75$, $y^* = 1,5$, $f_{\min} = -7,72$.

2 $f = 1,5x^2 - 2,13x + 0,5y^2 - 3,54y - 2,33$

$$X = \begin{Bmatrix} y \le 2,8 \\ 2,12x + 0,71y - 2 \ge 0 \\ 2,12x - 0,71y - 2 \le 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 0,71$, $y^* = 2,8$, $f_{\min} = -9,08$.

3 $f = 3,62x^2 + 1,38y^2 + 0,45x - 4,98y$

$$X = \begin{Bmatrix} 1,9x + 1,17y \le 2 \\ 0,32x - 1,38y \le 0 \\ 0,53x + 0,85y \ge 0 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 0,92$, $y^* = 0,22$, $f_{\min} = 2,44$.

4 $f = 7,52x^2 + 15,04x + 0,35y^2 + 0,7y + 8,77$

$$X = \begin{Bmatrix} -2,18x - 0,14y \le 2,77 \\ 0,19x + 1,39y \le -0,81 \\ 0,6x - 0,79y \le 2,74 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 0,98$, $y^* = 10,98$, $f_{\min} = 31,75$.

5 $f = \frac{1}{2}x_1^2 - 3\sqrt{2}x_1 + \frac{3}{2}x_2^2 - 3\sqrt{2}x_2 - \frac{1}{3}$

$$X = \begin{Bmatrix} 6\sqrt{2}x_1 + 3\sqrt{2}x_2 \ge 8 \\ 3\sqrt{2}x_2 \ge 8 \\ \frac{3}{\sqrt{2}}x_1 - \frac{3}{\sqrt{2}}x_2 \le 2 \end{Bmatrix}$$

Ответ: $x^* = 2,79$, $y^* = 1,88$, $f_{\min} = -10,95$.

6.8 Методы случайного поиска. Случайный покоординатный спуск

Схема 1. В этом методе с помощью датчика случайных чисел, распределенных равномерно, выбирается номер оси, в направлении которой и совершается спуск при отыскании минимума функции и подъем - при отыскании максимума.

Пример. Найти $\max f = 2x_3 - x_1^2 + x_2 x_3 - x_2^4 - 2x_3^2 - x_1 x_3 + x_1$

Решение. Движение начнем из точки (0, 0, 0).

1-я итерация:

$$x_1^{(1)} = 0 + h,$$
$$x_2^{(1)} = 0,$$
$$x_3^{(1)} = 0.$$

Подставим эти координаты в функцию f, тогда $f_1 = -h^2 + h$.

Составим $\frac{\partial f_1}{\partial h} = -2h + 1 = 0 \rightarrow h = 0{,}5$, $\frac{\partial^2 f_1}{\partial h^2} = -2 < 0$, то есть при h = 0,5, $f_1(0{,}5) = \max_h f_1$. Найденный шаг и возьмем за первый, тогда $x_1^{(1)} = 0{,}5$, $x_2^{(1)} = 0$, $x_3^{(1)} = 0$.

2-я итерация:

$$x_1^{(2)} = 0{,}5,$$
$$x_2^{(2)} = 0,$$
$$x_3^{(2)} = 0 + h,$$
$$f_1 = 0{,}25,$$
$$f_2 = -2h^2 + 1{,}5h + 0{,}25,$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial h} = -4h + 1{,}5 = 0, \quad h = 0{,}375,$$
$$f_2(0{,}375) = \max_h f_2(h).$$

Тогда

$$x_1^{(2)} = 0{,}5,$$
$$x_2^{(2)} = 0,$$
$$x_3^{(2)} = 0{,}375,$$
$$f_2 = 0{,}53.$$

3-я итерация:

$$x_1^{(3)} = 0{,}5,$$
$$x_2^{(3)} = 0 + h,$$
$$x_3^{(3)} = 0{,}375,$$
$$f_3 = -h^4 + 0{,}375h + 0{,}53,$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial h} = -4h^3 + 0,375 = 0, \quad h = 0,45,$$
$$f''_{h^2} = -12 < 0, \quad f_3(0,45) = \max_h f_3(h).$$

Следовательно,

$x_1^{(3)} = 0,5$,
$x_2^{(3)} = 0,45$,
$x_3^{(3)} = 0,375$,
$f_3 = 0,66$.

4-я итерация:
$x_1^{(4)} = 0,5$,
$x_2^{(4)} = 0,45$,
$x_3^{(4)} = 0,375 + h$,
$f_4 = -2h^2 + 0,45h + 0,66$,
$$\frac{\partial f_4}{\partial h} = -4h + 0,45 = 0, \quad h = 0,112$$
$x_1^{(4)} = 0,5$,
$x_2^{(4)} = 0,45$,
$x_3^{(4)} = 0,487$,
$f_4 = 0,68$.

5-я итерация:
$x_1^{(5)} = 0,5 + h$,
$x_2^{(5)} = 0,45$,
$x_3^{(5)} = 0,487$,
$$\frac{\partial f_5}{\partial h} = -2h - 0,487 = 0, \quad h = -0,243,$$
$x_1^{(5)} = 0,257$,
$x_2^{(5)} = 0,45$,
$x_3^{(5)} = 0,487$,
$f_5 = 0,75$.

6-я итерация:
$x_1^{(6)} = 0,257$,
$x_2^{(6)} = 0,45 + h$,
$x_3^{(6)} = 0,487$,

$$\frac{\partial f_6}{\partial h} = -4\left(0,45+h\right)^3 + 0,487 = 0, \quad h = 0,03,$$
$x_1^{(6)} = 0,257$,
$x_2^{(6)} = 0,48$,
$x_3^{(6)} = 0,487$,
$f_6 = 0,76$.

7-я итерация:
$x_1^{(7)} = 0,257 + h$,
$x_2^{(7)} = 0,48$,
$x_3^{(7)} = 0,487$,
$$\frac{\partial f_7}{\partial h} = -2h + 0,001 = 0, \quad h = 0,0005,$$
$x_1^{(7)} = 0,258$,
$x_2^{(7)} = 0,48$,
$x_3^{(7)} = 0,487$,
$f_7 = 0,76$.

8-я итерация:
$x_1^{(8)} = 0,257$,
$x_2^{(8)} = 0,48 + h$,
$x_3^{(8)} = 0,487$,
$$\frac{\partial f_8}{\partial h} = -4\left(0,48+h\right)^3 + 0,487 = 0, \quad h = 0,$$

Таким образом, $f_{\max} = 0,76$, $x_1^* = 0,258$, $x_2^* = 0,48$, $x_3^* = 0,487$.

Схема 2. В этой схеме шаг выбирается из условия:
- для максимума

$$f\left(\overline{x}^{(\kappa)} + \beta_\kappa \overline{e}_\kappa\right) - f\left(\overline{x}^{(\kappa)}\right) \geq \frac{\beta_\kappa}{2}\left(\nabla f^{(\kappa)}, \overline{e}_\kappa\right) \cdot sign\left(\nabla f^{(\kappa)}, \overline{e}_\kappa\right),$$

- для минимума

$$f\left(\overline{x}^{(\kappa)}\right) - f\left(\overline{x}^{(\kappa)} + \beta_\kappa \overline{e}_\kappa\right) \geq \frac{\beta_\kappa}{2}\left(\nabla f^{(\kappa)}, \overline{e}_\kappa\right) \cdot sign\left(\nabla f^{(\kappa)}, \overline{e}_\kappa\right).$$

Пример.

Найти $\min f = x_1^2 + x_2^2 - 3x_1 - 4x_2 - x_1x_2$.

Решение.

В качестве начальной точки возьмем (0, 0), $f_0 = 0$, $\nabla f_0 = (-3, -4)$.

1-я итерация:

$x_1^{(1)} = \beta$, $x_2^{(1)} = 0$, $f_1 = \beta_1 - 3\beta_1$.

Найдем β_1 из неравенства $f_0 - f_1 \geq \frac{\beta_1}{2}\left(\nabla f_0, \bar{e}_\kappa\right) \cdot sign\left(\nabla f_0, \bar{e}_\kappa\right)$.

$$-\beta_1^2 + 3\beta_1 \geq \frac{\beta_1}{2}(-3) \cdot sign(-3) = \frac{3}{2}\beta_1; \rightarrow \beta_1 \leq 1{,}5.$$

Пусть $\beta_1 = 1{,}5$, тогда

$x_1^{(1)} = 1{,}5$, $x_2^{(1)} = 0$, $f_1 = -2{,}25$, $\nabla f_1 = (0, -5{,}5)$.

2-я итерация:

$x_1^{(2)} = 1{,}5$, $x_2^{(2)} = \beta_2$, $f_2 = -5{,}5\beta_2 + \beta_2^2 - 2{,}25$,

$f_1 - f_2 = -\beta_2^2 + 5{,}5\beta_2 \geq \frac{\beta_2}{2}(-5{,}5) \cdot sign(-5{,}5) = 2{,}75\beta_2$,

$\beta_2 = 2{,}75$, $x_1^{(2)} = 1{,}5$, $x_2^{(2)} = 2{,}75$, $f_2 = 9{,}81$, $\nabla f_2 = (-2{,}75, 0)$.

3-я итерация:

$x_1^{(3)} = 1{,}5 + \beta_3$, $x_2^{(3)} = 2{,}75$,

$-\beta_3^2 + 1{,}375\beta_3 \geq 0, \quad \beta_3 = 1{,}375$,

$x_1^{(3)} = 2{,}875$, $x_2^{(3)} = 2{,}75$, $f_3 = -11{,}70$, $\nabla f_3 = (0, -1{,}375)$.

4-я итерация:

$x_1^{(4)} = 2{,}875$, $x_2^{(4)} = 2{,}75 + \beta_4$,

$-\beta_4^2 + 0{,}688\beta_4 \geq 0, \quad \beta_4 = 0{,}688$, тогда

$x_1^{(4)} = 2{,}875$, $x_2^{(4)} = 3{,}348$, $f_4 = -12{,}175$, $\nabla f_4 = (-0{,}688, 0)$.

5-я итерация:

$x_1^{(5)} = 2{,}875 + \beta_5$; $x_2^{(5)} = 3{,}438$,

$-\beta_5^2 + 0{,}343\beta_5 \geq 0, \quad \beta_5 = 0{,}343$, тогда

$x_1^{(5)} = 3{,}218$, $x_2^{(5)} = 3{,}438$, $f_5 = -12{,}294$, $\nabla f_5 = (0, -0{,}343)$.

6-я итерация:
$x_1^{(6)} = 3,218$, $x_2^{(6)} = 3,438 + \beta_6$,
$-\beta_6{}^2 + 0,172\beta_6 \geq 0, \quad \beta_6 = 0,172$, тогда
$x_1^{(6)} = 3,218$, $x_2^{(6)} = 3,609$, f_6 = -12,323, ∇f_6 = (-0,172, -0,001).

7-я итерация:
$x_1^{(7)} = 3,218 + \beta_7$, $x_2^{(7)} = 3,609$,
$-\beta_7{}^2 + 0,086\beta_7 \geq 0, \quad \beta_7 = 0,086$, тогда
$x_1^{(7)} = 3,304$, $x_2^{(7)} = 3,609$, f_7 = -12,331, ∇f_7 = (-0,009, -0,080).

Остановимся на этой итерации: $f_{\min}$ = -12,33, x_1^* = 3,3, x_2^* = 3,61.

Задачи для самостоятельной работы

Найти минимум функции с помощью методов случайного поиска.
1 $f = 3x^2 + 2xy + 2y^2 + 3x + 4y$
Ответ: $f_{\min}$ = -4,45, x^* = -1, y^* = -1,5.

2 $f = 2x_1^2 + 2x_1 + 3x_2^2 - 6x_2$
Ответ: $f_{\min}$ = -4,25, x_1^* = -2, x_2^* = -2,5.

3 $f = 2x^2 + 4xy + 5y^2 - 8x - 10y$
Ответ: $f_{\min}$ = -8/3, x^* = 1,72, y^* = 0,31.

4 $f = x_1^2 + x_2^2 - 4x_1 - 6x_2 + x_1x_2$
Ответ: $f_{\min}$ = -9/3, x_1^* = 2/3, x_2^* = 8/3.

5 $f = x^2 + xy + 2y^2 + x - y$
Ответ: $f_{\min}$ = -0,571, x^* = -0,71, y^* = 0,43.

6 $f = 5x^2 + 8xy + 5y^2 - 18x - 18y + 9$
Ответ: $f_{\min}$ = -9, x^* = 1, y^* = 1.

Вопросы для самопроверки

1 Суть метода штрафных функций.
2 Суть метода случайного поиска.
3 Суть метода Вольфа.

7 Методы оптимального управления

7.1 Динамическое программирование

Динамическое программирование (ДП) - это вычислительный метод, применяемый при решении задач оптимизации, которые можно разбить на n однотипных шагов. Пусть каждый шаг j описывается своей переменной x_j тогда $f\left(x_1,\ldots,\ x_n\right)=\sum_{j=1}^{n} f_j\left(x_j\right)$, следовательно, задачу оптимизации можно разбить на n однотипных шагов. Обозначим $\Lambda_n\left(b_n\right)=\min\underset{X}{(\max)} f\left(x_1,\ldots,x_n\right)$.

Принцип оптимальности Беллмана

Оптимальное решение обладает тем свойством, что каковы бы ни были начальное состояние и начальное решение, последующее решение должно быть оптимальным по отношению к состоянию, получающемуся в результате начального решения.

Очевидно, на основании принципа оптимальности Беллмана можно записать следующее:

$$\Lambda_n\left(b_n\right)=\min\underset{X}{(\max)}\left[f_n\left(x_n\right)+\Lambda_{n-1}\left(b_{n-1}\right)\right],$$

где $X=\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \le b_n;\ a_j;\ b_n \ge 0;\ x_j \ge 0\right\}$.

В свою очередь, $\Lambda_n\left(b_n\right)=\min\underset{X_n}{(\max)}\left[f_n\left(x_n\right)+\Lambda_{n-2}\left(b_{n-2}\right)\right]$,

$$b_{n-1} = b_n - a_n x_n,$$

$$\Lambda_{n-1}\left(b_{n-1}\right)=\min\underset{x_{n-1}}{(\max)}\left[f_{n-1}\left(x_{n-1}\right)+\Lambda_{n-2}\left(b_{n-2}\right)\right],$$

$$b_{n-2} = b_{n-1} - a_{n-1}x_{n-1}.$$

Продолжая дальше, получим

$$\Lambda_{n-2}\left(b_{n-2}\right)=\min\underset{x_{n-2}}{(\max)}\left[f_{n-2}\left(x_{n-2}\right)+\Lambda_{n-3}\left(b_{n-3}\right)\right],$$

$$b_{n-3} = b_{n-2} - a_{n-2}x_{n-2}.$$

На последнем шаге

$$\Lambda_1(b_1) = \min_{x_1}(\max)\left[f_1(x_1)\right],$$

$$b_1 = b_2 - a_2x_2.$$

Эти соотношения называются функциональными уравнениями Беллмана.

Обычно известно, да и то не всегда, только b_n, а b_1, …, b_{n-1} заранее неизвестны, поэтому ДП является, по существу, организованным перебором с последовательным отсечением промежуточных результатов. При этом значения b_1, …, b_n, берутся из всего возможного диапазона их изменений от 0 до b_n включительно. Для каждого значения b_j рассматриваются все значения переменных x_j и находят то x^*_j, которое доставляет экстремум $\Lambda_j(b_j)$. На последнем этапе определяется x^*_n, доставляющее экстремум $\Lambda_n(b_n)$. При этом сначала просматривается все от x_1 до x_n. Затем начинается движение в обратном направлении.

По b_n и x^*_n определяется $\max\limits_{x}\sum\limits_{i=1}^{4} A_i\left(1-e^{-0,25x_i}\right)$, по которому находится x^*_{n-1}. Далее по $\max\limits_{x}\sum\limits_{i=1}^{4} A_i\left(1-e^{-0,25x_i}\right)$ и x^*_{n-1} ищется x^*_{n-2}. Продолжая далее, на последнем этапе находится $b_1 = b_2 - a_2x^*_2$, по которому определяется x^*_1. Таким образом, получается оптимальное решение x^*_1, …, x^*_n, обеспечивающее экстремум целевой функции на множестве X.

Заметим, что процедуру перебора можно было бы организовать и от Λ_n до Λ_1, а затем последовательно определять x^*_1, …, x^*_n.

Покажем на примерах оба способа.

Пример 1.

Распределить огневые средства так, чтобы общий ущерб был максимален, если вероятность поражения i-й цели $p_i = 1 - e^{-0,25x_i}$, где x_i - количество однотипных огневых средств. Имеются четыре средства и четыре цели, коэффициенты важности которых соответственно равны $A_1 = 4$, $A_2 = 8$, $A_3 = 12$, $A_4 = 16$. Ущерб оценивается суммой $\sum\limits_{i=1}^{4} A_i p_i$, определяющей математическое ожидание.

Решение.

1 Постановка задачи, ее формализация: найти $\max\limits_{X}\sum\limits_{i=1}^{4} A_i\left(1-e^{-0,25x_i}\right)$, где $X = \left\{\sum\limits_{i=1}^{4} \underset{x_i \ge 0}{x_i} = 4\right\}$. И функция цели, и ограничение являются сепарабельными, что позволяет применить метод динамического программирования.

2 Составим функциональные уравнения Беллмана:

а) $\Lambda_1\left(b_1\right)=\max\limits_{x_1} f_1\left(x_1\right)=\max\limits_{0\le x_1\le b_1}\left[A_1\left(1-e^{-0,25x_1}\right)\right]$,

b_1 – неизвестно, поэтому перебираем все возможные значения от 0 до 4;

б) $\Lambda_2\left(b_2\right)=\max\limits_{0\le x_2\le b_2}\left[f_2\left(x_2\right)+\Lambda_1\left(b_2-x_2\right)\right]=\max\limits_{x_2}\left[A_2\left(1-e^{-0,25x_2}+\Lambda_1\left(b_2-x_2\right)\right)\right]$,

b_2 неизвестно, поэтому оно также может иметь значения от 0 до 4;

в) $\Lambda_3\left(b_3\right)=\max\limits_{0\le x_3\le b_3}\left[A_3\left(1-e^{-0,25x_3}\right)+\Lambda_2\left(b_3-x_3\right)\right]$,

и здесь b_3 тоже неизвестно, поэтому оно может принять значения от 0 до 4.

В отличие от предыдущих этапов, b_4 известно и равно 4, поэтому перебор проводится только для $b_4 = 4$. Все расчеты сведем в таблицу 7.1:

Таблица 7.1

b_i	x_i	$f_1(x_1)$	$f_2(x_2) + \Lambda_1(b_2 - x_2)$	$f_3(x_3) + \Lambda_2(b_3 - x_3)$	$f_4(x_4) + \Lambda_3(b_4 - x_4)$
0	0	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>	<u>0</u>
1	0	0	0 + 0,85 = 0,885	0 + 1,77 = 1,77	
	1	<u>0,885</u>	1,77 + 0 = <u>1,77</u>	2,654 + 0 = 2,654	
2	0	0	0 + 1,574 = 1,574	0 + 3,148 = 3,148	
	1	0,885	1,77 + 0,885 = 2,655	2,654 + 1,77 = 4,428	
	2	<u>1,574</u>	3,148 + 0 = <u>3,148</u>	4,722 + 0 = <u>4,722</u>	
3	0	0	0 + 2,111 = 2,111	0 + 4,221 = 4,221	
	1	0,885	1,77 + 1,574 = 3,344	2,654 + 3,148 = 5,802	
	2	1,574	3,148 + 0,885 = 4,033	4,722 + 1,77 = <u>6,492</u>	
	3	<u>2,111</u>	4,221 + 0 = <u>4,221</u>	6,332 + 0 = 6,332	
4	0	0	0 + 2,528 = 2,528	0 + 5,106 = 5,106	0 + 8,102 = 8,102
	1	0,885	1,77 + 2,111 = 3,881	2,654 + 4,221 = 6,875	3,539 + 6,492 = 10,031
	2	1,574	3,148 + 1,574 = 4,622	4,722 + 3,148 = 7,870	6,296 + 4,722 = 11,018
	3	2,111	4,221 + 0,885 = <u>5,106</u>	6,332 + 1,77 = <u>8,102</u>	8,442 + 2,654 = <u>11,096</u>
	4	<u>2,528</u>	5,057 + 0 = 5,057	7,585 + 0 = 7,585	10,114 + 0 = 10,114

Подчеркнем в таблице $\Lambda_j(b_j)$. Из последнего столбца следует, что $\Lambda_4(b_4)$ =11,096 и достигается этот максимум при $x^*_4 = 3$, т. е. на 4-ю цель необходимо направить три огневых средства. Зная $b_4 = 4$ и $x^*_4 = 3$, определим $b_3 = 4 - 3 = 1$. В предпоследнем столбце при $b_3 = 1$ найдем $x^*_3 = 1$, т. е. на третий объект должно быть направлено одно средство. Зная x^*_3, определим $b_2 = b_3 - x^*_3$. Тогда подучим, что при $b_2 = 0$ и $x^*_2 = 0$. В свою очередь, $b_1 = b_2 - x^*_2$, т. е. $b_1 = 0$ и при $b_1 = 0$, $x^*_1 = 0$.

Таким образом, на 1-ю и 2-ю цель не следует направлять ни одного из имеющихся средств, на 3-ю – одно, тогда как три средства должна быть направлены на 4-ю цель.

Пример 2. Распределить пять однотипных средств по четырем не однотипным объектам, коэффициенты важности которых соответственно равны $A_1 = 3$, $A_2 = A_3 = A_4 = 1$. Вероятность поражения одной ударной единицей i-го объекта равна p_i, а для n_i ударных единиц $p_i = 1-\left(1-p_i\right)^{n_i}$, $p_1 = 0,2$, $p_2 = 0,4$, $p_3 = 0,5$, $p_4 = 0,3$.

Распределять средства так, чтобы математическое ожидание общего ущерба было максимальным.

Решение.

Для дальнейшего удобства подсчитаем частные ущербы, представленные в таблица 7.2.

Таблица 7.2

n	$M_1(n)$	$M_2(n)$	$M_3(n)$	$M_4(n)$
0	0	0	0	0
1	0,600	0,400	0,500	0,300
2	1,080	0,640	0,750	0,510
3	1,464	0,784	0,875	0,657
4	1,770	0,870	0,938	0,760
5	2,016	0,922	0,969	0,832

Эту задачу будем решать с конца. Функциональные уравнения Беллмана тогда будут иметь вид:

$$\Lambda_{44} = \max_{0 \le k_4 \le 5} M_4(k_4),$$

$$\Lambda_{34} = \max_{0 \le k_3 \le 5} \left[\mu_3(k_3) + \Lambda_{44}(n - k_3) \right],$$

$$\Lambda_{24} = \max_{0 \le k_2 \le 5} \left[\mu_2(k_2) + \Lambda_{34}(n - k_2) \right],$$

$$\Lambda_{14} = \max_{0 \le k_1 \le 5} \left[\mu_1(k_1) + \Lambda_{24}(n - k_1) \right],$$

$$\Lambda_{14} = \max_{X} \sum_{i=1}^{4} A_i \left[1 - (1 - p_i)^{n_i} \right],$$

$$X = \left\{ \sum_{i=1}^{4} n_i \le 5 \right\}.$$

Решение оформим в виде таблицы 7.3:

Таблица 7.3

n	k_i	$\mu_4(k_4)$	$\mu_3(k_3) + \Lambda_{44}(n - k_3)$	$\mu_2(k_2) + \Lambda_{34}(n - k_2)$	$\mu_1(k_1) + \Lambda_{24}(n - k_1)$
1	0		0 + 0,3 = 0,3	0+ 0,5 = $\underline{0,5}$	0 + 0,5 = 0,5
	1	$\underline{0,3}$	0,5 + 0 = 0,5	0,4 + 0 = 0,4	0,6 + 0 = $\underline{0,6}$
2	0		0+ 0,51 = 0,51	0 + 0,8 = 0,8	0 + 0,9 = 0,9
	1		0,5 + 0,3 = $\underline{0,8}$	0,4 + 0,5 = $\underline{0,9}$	0,6 + 0,5 = $\underline{1,1}$
	2	$\underline{0,51}$	0,75 + 0 = 0,75	0,64 + 0 = 0,64	1,08 + 0 = 1,08
3	0		0 + 0,657 = 0,657	0 + 1,05 = 1,05	0 + 1,2 = 1,2
	1		0,5 + 0,51 = 1,01	0,4 + 0,8 = $\underline{1,2}$	0,6+ 0,9 = 1,2
	2		0,75 + 0,3 = $\underline{1,05}$	0,64 + 0,5 = 1,14	1,08 + 0,5 =$\underline{1,58}$
	3	$\underline{0,657}$	0,875 + 0 = 0,875	0,784 + 0 = 0,784	1,464 + 0 = 1,464
4	0		0 + 0,76 = 0,76	0 + 1,26 = 1,26	0 + 1,45 = 1,45
	1		0,5 + 0,657 = 1,157	0,4 + 1,05 = $\underline{1,45}$	0,6 + 1,2 = 1,8
	2		0,75 + 0,51 = $\underline{1,26}$	0,64 + 0,8 = 1,44	1,08 + 0,9 = $\underline{1,98}$
	3		0,875 + 0,3 = 1,175	0,784 + 0,5 = 1,284	1,464 + 0,5 = 1,964
	4	$\underline{0,76}$	0,938 + 0 = 0,938	0,87 + 0 = 0,87	1,77 + 0 = 1,77
5	0		0 + 0,832 = 0,832	0 + 1,407 = 1,407	0 + 1,69 = 1,69
	1		0,5 + 076 = 1,26	0,4 + 1,26 = 1,66	0,6 + 1,45 = 2,05
	2		0,75 + 0,657 = $\underline{1,407}$	0,64 + 1,05 = $\underline{1,69}$	1,08 + 1,2 = 2,28
	3		0,875 + 0,51 = 1,385	0,784 + 0,8 = 1,584	1,464 + 0,9 = $\underline{2,364}$
	4		0,938 + 0,3 = 1,238	0,87 + 0,5 = 1,87	1,77 + 0,5 = 2,27
	5	$\underline{0,832}$	0,969 + 0 = 0,969	0,922 + 0 = 0,922	2,016 + 0 = 2,016

Λ_{ij} подчеркнуты в таблице. Анализируя таблицу, заключаем, что максимальный ущерб равен 2,364. При этом на первый объект должно быть направлено три ударных единицы, тогда для других трех объектов остаются 5 – 3 = 2 ударные единицы. Из предпоследнего столбца при n = 2 находим максимальный ущерб, равный 0,9, что соответствует одной ударной единице, направленной на 2-й объект. Остается одна ударная единица. По таблице при n = 1 в третьем справа столбце находим максимальный ущерб, равный 0,5, который реализуется при k_3 = 1, т.е. на третий объект следует направить одну ударную единицу. Больше средств не осталось, следовательно, на 4-й объект направить нечего.

Задачи для самостоятельной работы

1 Найти $\max\limits_X \left[x_1^2 + 2\ln\left(1+x_2\right) + e^{x_3}\right]; \quad X = \left\{\sum\limits_{i=1}^{3} x_i \le 4\right\}$

Ответ: $\max\limits_X f = 54{,}575$ при $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 0$, $x^*_3 = 4$.

2 Распределить огневые средства оптимальным образом так, чтобы общий материальный ущерб был максимальным, если вероятность поражения i - й цели x_i - м количеством средств равна $p_i = 1 - e^{-0,15 x_i}$, общее количество

средств равно 6, число целей – 3, коэффициенты важности соответственно равны 10, 20, 30 условным единицам.

Ответ: max M = 18,71 единиц, $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 2$, $x^*_3 = 4$.

3 Составить оптимальный план загрузки транспорта так, чтобы общий вес взятого груза был максимален при ограничении по объему, который не должен превышать 100 условных единиц. Данные по единице груза приведены в таблице 7.4:

Таблицы 7.4

Груз	№ 1	№ 2	№ 3	№ 4	№ 5	№ 6	№ 7
Вес	10	20	30	40	50	60	70
Объем	1	1	2	2	3	3	4

Ответ: $Q_{\max} = 2000$, $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 1$, $x^*_3 = 0$, $x^*_4 = 0$, $x^*_5 = 0$, $x^*_6 = 33$.

4 Семь единиц боевых средств распределяются между двумя подразделениями. Первому выделяются Y средств, второму – оставшееся количество средств. Боевые действия ведутся в три этапа, на каждом из которых эффективность использования средств составляет для i-го подразделения $0{,}4y^2$, для второго – $(x - y)$, где x - общее количество средств. Вследствие потерь после каждого этапа количество средств уменьшается для i-го подразделения до $0{,}6y$, а у 2-го – до $0{,}9(x - y)$. К началу нового этапа средства перераспределяются. Определить оптимальное распределение средств, чтобы общая эффективность за все этапы боевых действий была максимальна.

Ответ: $Э_{\max} = 29{,}6$ условных единиц, $y_1 = 7$, $y_2 = 0$, $y_3 = 3$.

5 Комплекс состоит из четырех звеньев, к каждому из которых подключено несколько однотипных элементов. Вероятность безотказной работы элемента i - го звена обозначим через p_i, стоимость элемента - c_i, число элементов в i - м звене - n_i. Значения этих параметров приведены в таблице 7.5:

Таблицы 7.5

Номер звена	p_i	c_i	n_i	$r_i = 1-(1-p_i)^{n_i}$
1	0,9	5	1	0,9
2	0,8	3	1	0,8
3	0,7	2	2	0,91
4	0,6	1	2	0,84

r_i – вероятность надежности i -го элемента.

Стоимость комплекса $\sum_{i=1}^{4} c_i n_i = 14$ условных единиц, его надежность $R = r_1 \cdot r_2 \cdot r_3 \cdot r_4 = 0{,}55$. Принято решение повысить его стоимость до 20 условных единиц. Задача состоит в оптимальном распределении шести дополнительных единиц для повышения максимальной надежности комплекса.

Ответ: $R = 0{,}787$, $x^*_1 = 0$, $x^*_2 = 3$, $x^*_3 = 4$, $x^*_4 = 1$.

Вопросы для самоконтроля

1 Приведите примеры задач динамического программирования.

2 Сформулируйте принцип оптимальности Беллмана и поясните его смысл.

3 Дайте геометрическую интерпретацию задач динамического программирования.

4 Сформулируйте основные требования к структуре решаемой задачи, необходимые для применения метода динамического программирования.

5 Какой вид имеют рекуррентно-функциональные уравнения?

8 Элементы теории графов

8.1 Графы, виды графов, матрицы смежности и инцидентности

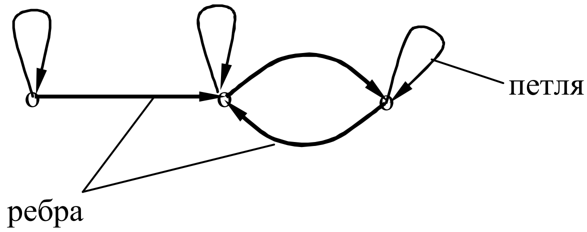


Рисунок 8.1 – Псевдограф

Рисунок 8.2 – Граф: а - симметричный ориентированный граф; б - несимметричный ориентированный граф

Рисунок 8.3 – Мультиграф

Дан граф, представленный на рисунке 8.4 который можно описать:

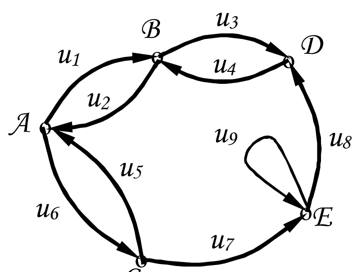
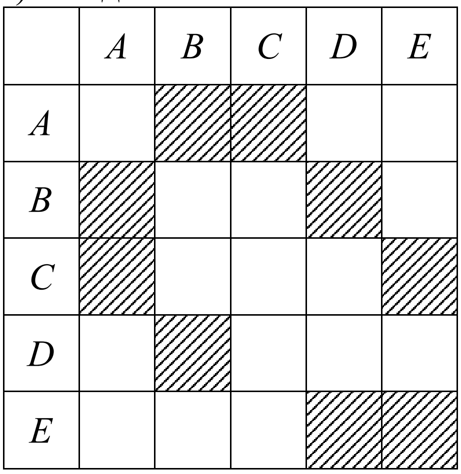


Рисунок 8.4 - Граф

1) в виде сот



Клеточка штрихуется, если есть ребро, соединяющее рассматриваемые вершины.

2) в виде латинской матрицы

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A		*AB*	*AC*		
B	*BA*			*BD*	
C	*CA*				*CE*
D		*DB*			
E				*ED*	*EE*

В клеточку вписываются две буквы, соответствующие началу и концу ребра между этими вершинами.

3) в виде соответствия, рисунок 8.5:

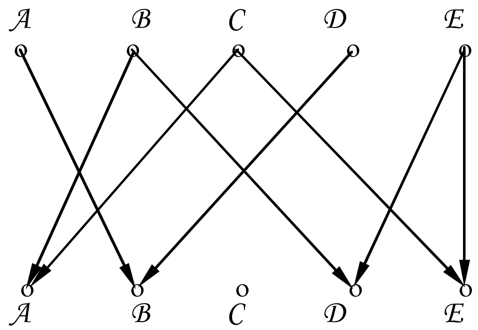


Рисунок 8.5 - Граф

4) в виде преобразования $ГA = \{B, C\}$, $ГB = \{A, D\}$, $ГD = \{B\}$, $ГE = \{E, D\}$.

$B = \{\ldots\}$ - указаны вершины, куда из рассматриваемой вершины выходят ребра,

$Г^{-1}A = \{B, C\}$, $Г^{-1}B = \{A, D\}$, $Г^{-1}C = \{A\}$, $Г^{-1}D = \{B, E\}$, $Г^{-1}E = \{C, E\}$.

B = {…} - указаны вершины, из которых в заданную вершину направлены дуги.

5) в виде матрицы смежности вершин:

	A	*B*	*C*	*D*	*E*
A	0	1	1	0	1
B	1	0	0	1	0
C	1	0	0	0	1
D	0	1	0	0	0
E	0	0	0	1	1

Если есть ребро, соединяющее вершины, то ставится 1, в противном случае 0.

6) в виде матрицы инцидентности:

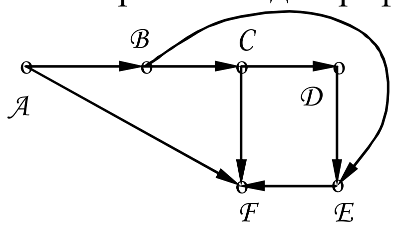
	A	*B*	*C*	*D*	*E*
u_1	+1	-1	0	0	0
u_2	-1	+1	0	0	0
u_3	0	+1	0	-1	0
u_4	0	-1	0	+1	0
u_5	-1	0	+1	0	0
u_6	+1	0	-1	0	0
u_7	0	0	+1	0	-1
u_8	0	0	0	-1	+1
u_9	0	0	0	0	+1

Если *Q* – начальная вершина графа, то ставится +1; если *Q* – конечная вершина, то ставится -1. Для неориентированного графа могут быть только 0 (не инцидентность вершины и ребра) или 1 (инцидентность вершины и ребра).

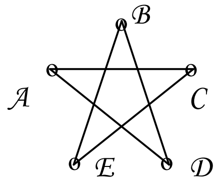
Примеры на самостоятельную работу

Проанализировать виды графов и дать все способы задания:

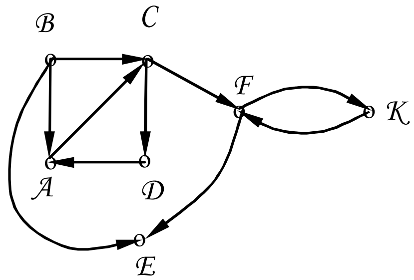
1



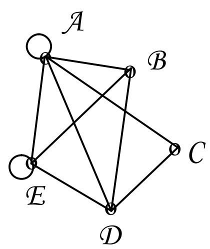
2



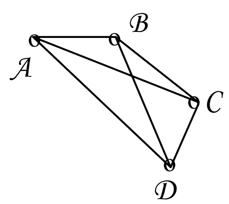
3



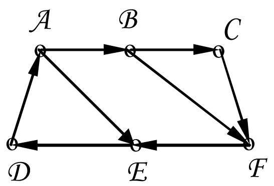
4



5



6



8.2 Выявление маршрутов с заданным количеством ребер

Маршрут – конечная или бесконечная последовательность ребер, таких, что два соседних ребра имеют общую вершину.

Теорема о количестве маршрутов позволяет найти все маршруты, содержащие заданное количество ребер, с помощью матрицы смежности. Так, для определения количества маршрутов, состоящих из k ребер, необходимо возвести в k – ю степень матрицу смежности.

Пример. Дан граф на рисунке 8.6. Составим матрицу смежности, указывая в клетках количество ребер, соединяющих заданные вершины.

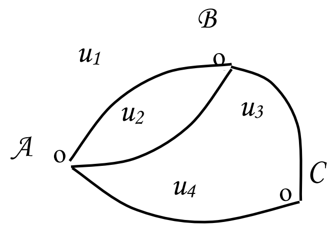


Рисунок 8.6

		A	B	C
$R =$	A	0	2	1
	B	2	0	0
	C	1	1	0

Очевидно, матрица смежности указывает количество маршрутов из одного ребра между всеми вершинами графа.

Возведем в квадрат матрицу R:

$$\mathrm{R}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, эта матрица определяет все маршруты, содержащие два ребра, в том числе и такие, когда по одному и тому же ребру движение осуществляется «туда» и «обратно».

Действительно рассмотрим первую строку матрицы R.

Число 5 означает, что существует пять маршрутов из двух ребер, соединяющих вершину A с вершиной A. Эти маршруты таковы:

Au_1Bu_1A, Au_2Bu_2A, Au_1Bu_2A, Au_2Bu_1A, Au_4Cu_4A.

Число 1 означает, что существует один маршрут из двух ребер, соединяющих вершину A с вершиной B. Это маршрут: Au_4Cu_3B.

Число 2 означает, что существует два маршрута из двух ребер, соединяющих вершины A и C. Это маршруты: Au_1Bu_3C и Au_2Bu_3C.

Аналогично и по другим строкам.

Неудобство метода состоит в том, что для нахождения самих маршрутов необходимо работать с графом. Поэтому используется видоизменение теоремы о количестве маршрутов с помощью модифицированной матрицы смежности, в ячейки которой записываются названия ребер.

В нашем случае $R_u = \begin{pmatrix} 0 & u_1+u_2 & u_4 \\ u_1+u_2 & 0 & u_3 \\ u_4 & u_3 & 0 \end{pmatrix}$.

$$R_u^2 = \begin{pmatrix} 0 & u_1+u_2 & u_4 \\ u_1+u_2 & 0 & u_3 \\ u_4 & u_3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & u_1+u_2 & u_4 \\ u_1+u_2 & 0 & u_3 \\ u_4 & u_3 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} u_1u_1+u_2u_1+u_1u_2+u_2u_2+u_4u_4 & u_4u_3 & u_1u_3+u_2u_3 \\ u_3u_4 & u_1u_1+u_2u_1+u_1u_2+u_2u_2+u_3u_3 & u_1u_4+u_2u_4 \\ u_1u_3+u_2u_3 & u_1u_4+u_1u_2 & u_4u_4+u_3u_3 \end{pmatrix}.$$

При таком способе получаем не только количество маршрутов, соединяющих два ребра, но и сами маршруты.

Для получения цепей (маршрутов, в которых ребро встречается только один раз) в полученной матрице следует вычеркнуть те слагаемые, в которых какой-либо сомножитель встречается более одного раза.

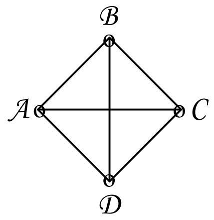
Для рассматриваемого случая имеем:

$$\tilde{R} = \begin{pmatrix} u_2u_1+u_1u_2 & u_4u_3 & u_1u_3+u_2u_3 \\ u_3u_4 & u_2u_1+u_1u_2 & u_1u_4+u_2u_4 \\ u_1u_3+u_2u_3 & u_4u_1+u_4u_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

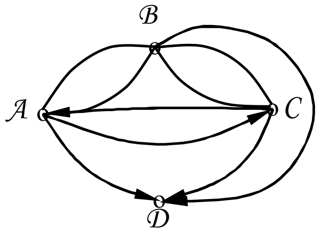
Примеры для самостоятельной работы

Используя теорему о количестве маршрутов, найти все маршруты, а также цепи, соединяющие одно, два, три, четыре ребра.

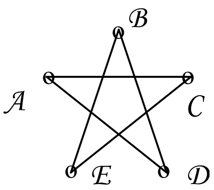
1



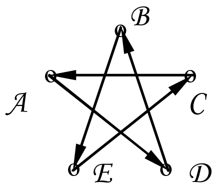
2



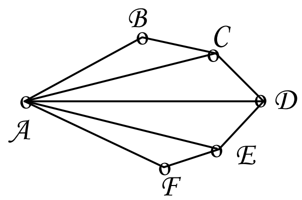
3



4



5



8.3 Определение экстремальных путей на графах

8.3.1 Метод Шимбелла

Специальные операции над элементами матрицы, введенные Шимбеллом.

1 Операция умножения двух величин a и b при возведении матрицы в степень соответствует их алгебраической сумме, при этом:

$$a \bullet b = b \bullet a \;\to\; a \bullet b = b \bullet a,$$

$$a \bullet 0 = 0 \bullet a = 0.$$

2 операция сложения двух величин a и b заменяется выбором из этих величин минимального (максимального) элемента, т.е.

$$a + b = b + a = \min(\max)\{a, b\}.$$

Знак сложения в этом случае соответствует логической операции «дизъюнкция», а именно $b \to a \vee b$.

С помощью этих операций длины кратчайших или максимальных путей между всеми вершинами определяются возведением в степень матрицы смежности – нагрузки A, содержащей веса ребер.

Если умножить матрицу A n – го порядка обычным способом на себя, то получим матрицу A^2, элементы которой определяются по известному правилу:

$$a_{ij}^{(2)} = a_{i1}^{(1)} a_{1j}^{(1)} + a_{i2}^{(1)} a_{2j}^{(1)} + \ldots + a_{in}^{(1)} a_{nj}^{(1)}, \quad i, j = \overline{1, n},$$

$$\left\{a_{ij}^{(1)}\right\} = A, \quad \left\{a_{ij}^{(2)}\right\} = A^2.$$

С учетом операций, введенных Шимбеллом, имеем

$$a_{ij}^{(2)} = \min(\max)\left\{\left(a_{i1}^{(1)} + a_{1j}^{(1)}\right); \ \left(a_{i2}^{(1)} + a_{2j}^{(1)}\right); \ldots ; \left(a_{in}^{(1)} + a_{nj}^{(1)}\right)\right\}.$$

Аналогично определяются элементы k – ой степени матрицы A.

Пример. На графе (рисунок 5.7) изображена сеть автомобильных дорог с указанием расстояний между пунктами A, B, C, D, E, F, K. Найти кратчайшие пути между пунктами, содержащие не более трех ребер.

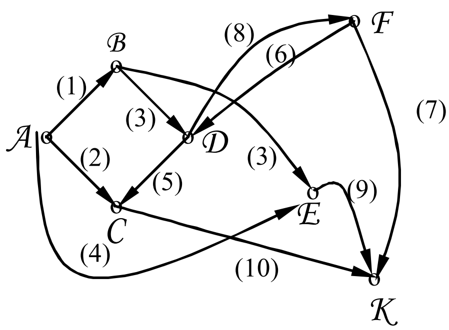


Рисунок 7.7

Решение. Составим матрицу смежности нагрузки. Она определяет все маршруты, состоящие из одного ребра:

$R_u =$

	A	B	C	D	E	F	K
A	0	1	2	0	4	0	0
B	0	0	0	5	3	0	0
C	0	0	0	0	0	0	10
D	0	0	5	0	0	0	8
E	0	0	0	0	0	0	9
F	0	0	0	6	0	0	0
K	0	0	0	0	0	0	0

Найдем кратчайшие пути из двух ребер, для чего возведем матрицу в квадрат и применим операции Шимбелла:

$$R_u^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далее найдем кратчайшие пути из трех ребер:

$$R_u^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 & 4 & 0 & 13 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 15 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 0 & 14 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 20 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix}.$$

И, наконец, кратчайшие пути из четырех ребер:

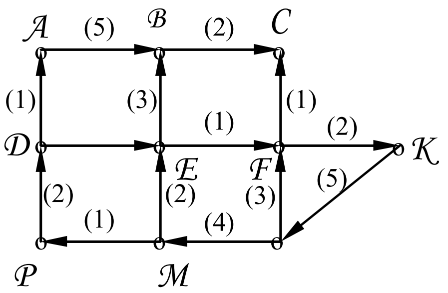
$$R_u^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 & 0 & 0 & 20 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 19 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 23 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 21 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 22 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 21 & 21 \\ 0 & 0 & 18 & 0 & 0 & 0 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 7 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 26 & 20 & 21 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & 0 & 27 & 0 \\ 0 & 0 & 28 & 0 & 0 & 0 & 31 \\ 0 & 0 & 26 & 0 & 0 & 0 & 29 \\ 0 & 0 & 27 & 0 & 0 & 0 & 30 \\ 0 & 0 & 0 & 27 & 0 & 28 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 28 & 28 \end{pmatrix}.$$

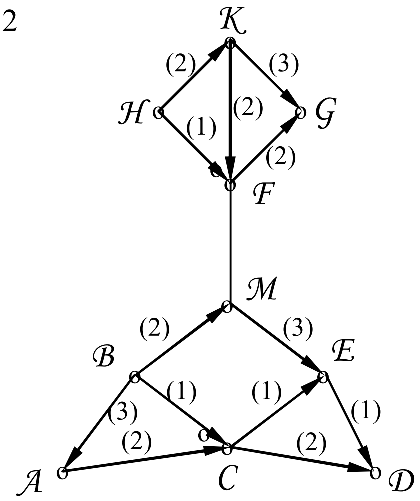
Примеры для самостоятельной работы

Определить кратчайшие и самые длинные маршруты между вершинами, содержащие не более трех ребер:

1



2



8.3.2 Индексно – матричный метод

Для определения самых длинных или кратчайших путей также используется матрица смежности, представленная на рисунке 8.1 – нагрузки, к которой добавляется столбец слева и строка сверху вершины графа нумеруются, а по диагоналям ставится буква *М*.

Таблица 8.1

			j						
				a_{12}	a_{13}	…	…	…	a_{1n}
			1	2	3	…	…	…	n
		1	M	a_{12}	a_{13}	…	…	…	a_{1n}
	a_{12}	2	a_{21}	M	a_{23}	…	…	…	a_{2n}
i	a_{13}	3	a_{31}	a_{32}	M	…	…	…	a_{3n}
	…	…	…	…	…	…	…	…	
	a_{1n}	n	a_{n1}	a_{n2}	a_{n3}	…	…	…	M

На первом шаге просматривается первая строка матрицы смежности нагрузки, и вписываются в добавочные строку и столбец все данные из первой строки. Таким образом, просмотрены все маршруты, состоящие из одного ребра выходящего из первой вершины во все остальные.

На втором шаге сравнивается результат сложения элемента $a_{12} + a_{2j}$ и $a_{1j} \neq 0$. Если при каком-то j $a_{12} + a_{2j}$ больше $a_{1j} \neq 0$, то элемент a_{1j} зачеркивается и над ним записывается результат $a_{12} + a_{2j}$. Одновременно меняется j – й элемент в добавочном столбце. Таким образом, определяются самые длинные пути из первой вершины через вторую во все остальные вершины.

На третьем шаге сравнивается результат сложения третьего сверху вниз элемента в дополнительном столбце с элементами третьей строки и соответствующим результатом в дополнительной строке.

Если $a_{13} + a_{3j} > a_{1j} \neq 0$, то j - й элемент в добавочных строках и столбцах заменяется суммой $a_{13} + a_{3j}$.

Так будут отмечены все маршруты максимальной длины, соединяющие первую вершину через третью со всеми остальными.

Продолжая подобным способом, изучение всех строк, придем к тому, что дальнейшая замена уже невозможна, т.е. найден самый длинный маршрут. Для определения самого маршрута движение идет в обратную сторону, а именно, по равенству $a_j = a_i + a_{ij}$ в столбце j ищется элемент с весом a_{ij}, который бы удовлетворял этому равенству. Найденный номер i и есть предпоследняя вершина.

Аналогично поступаем и далее, пока не придем в начальную вершину.

Рассмотрим пример. Дан граф предыдущего примера. Найдем в нем самый короткий путь из A и F. Составим матрицу смежности – нагрузки, но с добавлением дополнительных строки и столбца и заменой букв A, B, C, D, E, F, K номерами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 соответственно, таблица 8.2.

На первом шаге запишем все элементы первой строки в дополнительную строку сверху и столбец слева (нули не пишем).

На втором шаге складывается 1 и элементы (не нулевые), стоящие во второй строке: 1 + 5 = 6. в дополнительной строке над элементом 5 ничего не стоит, поэтому записываем туда результат.

Далее: 1 + 3 = 4 и стоит над элементом 3 тоже 4, то есть менять нечего.

Таблица 8.2

			1	2	6	4	19	12
		1	2	3	4	5	6	7
0	1	*M*	1	2	0	4	0	0
1	2	0	*M*	0	5	3	0	0
2	3	0	0	*M*	0	0	0	10
6	4	0	0	5	*M*	0	0	8
4	5	0	0	0	0	*M*	0	9
19	6	0	0	0	6	0	*M*	0
12	7	0	0	0	0	0	7	*M*

На третьем шаге складываем 2 с ненулевыми элементами третьей строки, то есть 2 + 10 = 12. Над элементом 10 ничего не стоит, поэтому записываем туда 12.

На четвертом шаге просматриваем четвертую строку: 6 + 5 = 11 > 2 – тоже не меняем.

На пятом шаге просматриваем пятую строку: 4 + 9 = 13 > 12 – ничего не меняем.

На шестом шаге просматриваем седьмую строку (шестую пропускаем, так как там нет элемента): 12 + 7 = 19 и вписываем этот результат в пустую клетку дополнительных столбцов и строк.

Теперь можно просмотреть шестую строку: 19 + 6 = 25 > 6 – ничего не меняем.

Очевидно, больше ничего нельзя изменить.

Восстанавливаем маршруты *A*, *F*.

Рассмотрим шестой столбец. Величина 19 достигается при сложении величин 12 и 7, находящихся на седьмой строке. Значит, предпоследняя вершина имеет № 7.

Рассмотрим тогда столбец № 7. Величина 12 достигается при сложении величин 2 и 10, находящихся на третьей строке. Следовательно, третьей вершиной с конца будет вершина № 3 от начала.

Рассмотрим теперь столбец № 3. Величина 2 получается при сложении нуля и двух, находящихся на первой строке. Значит, мы пришли уже в первую вершину.

Самый короткий путь, представлен на рисунке 8.8.

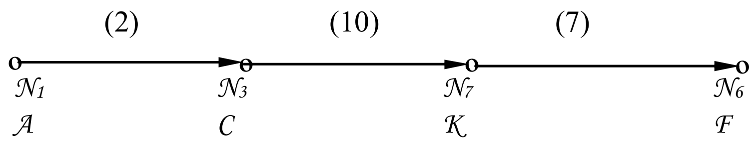


Рисунок 8.8

Его протяжность равна 19.

Найдем теперь самый длинный путь из *A* в *F*.

Опять составим матрицу смежности – нагрузки с добавочными строкой сверху и столбцом слева, представленную в таблице 8.3:

Таблица 8.3

										21
						11	27		28	~~14~~
					1	~~2~~	6	4	21	12
				A	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*	*K*
			A	*M*	I	2	0	4	0	0
		1	*B*		*M*	0	5	3		
	11	~~2~~	*C*			*M*				10
	27	6	*D*			5	*M*			8
		4	*E*					*M*		9
	28	21	*F*				6		*M*	
21	~~14~~	12	*K*						7	*M*

На первом шаге переносим все результаты первой строки в добавочную строку и столбец.

На втором шаге сравниваем сумму 1 и элементов второй строки с результатами в добавочной строке.

1 + 5 = 6, над элементом 5 пусто, поэтому вписываем над *D* 6 и в столбец слева от *D* тоже 6, 1 + 3 = 4. Над *E* тоже стоит 4, поэтому ничего не меняем.

На третьем шаге складываем 2 с элементами третьей строки, сравниваем с элементами добавочной строки: 2 + 10 = 12, а над вершиной *K* пусто, поэтому записываем над *K* 12 и слева в столбце от *K* тоже 12.

На четвертом шаге складываем 6 с элементами с элементами четвертой строки и сравниваем с элементами добавочной строки: 6 + 5 = 11 > 2, следовательно, заменяем 2 в строке и столбце на 11, 6 + 8 = 14 > 12, – тоже заменяем 12 в дополнительных строках и столбцах на 14.

На пятом шаге складываем 4 с элементами пятой строки и сравниваем с элементами добавочной строки: 4 + 9 = 13 < 14 – менять нечего.

Шестую строку пока пропускаем, так как нет элемента в добавочном столбце, и переходим к седьмой строке, складываем 14 с ее элементами и сравниваем с результатами в добавочной строке: 14 + 7 = 21, а над *F* пусто, поэтому вносим туда и слева в столбец от *F* величину 21.

И начинаем просмотр сначала:

11 + 10 = 21 >14 - заменяем над *K* и рядом с *K* 14 на 21;

21 + 6 = 27 > 6 - заменяем над *D* и рядом с *D* 6 на 27;

21 + 7 = 28 > 21 - заменяем над и рядом с 21 на 28.

И опять начинаем просмотр сначала.

Нетрудно видеть, что из-за наличия циклов *F DK F*, *F DCK F* можно поток все увеличивать, накручивая обороты. Поэтому нужно вернуться в *F* к самому первому случаю, то есть к случаю, когда была получена величина над *F*, равная 28.

Восстановим теперь маршрут:

28 = 21 + 7. Величины 21 и 7 – на седьмой строке, следовательно, предыдущий вершиной была *K*. Входим в столбец *K*.

21 = 11 + 10, то есть предыдущей вершиной была *C*. Входим в столбец *C*.

11 = 6 + 5, значит, предыдущей вершиной была *D*. Входим в столбец *D*.

6 = 1 + 5 предыдущей вершиной была *B*. Входим в столбец *B*.

1 = 1 + 0, то есть мы пришли в *A*.

Окончательно самый длинный без циклов маршрут из *A* в *F* таков: *ABDCKF*, его протяжность равна 28.

Задачи для самостоятельной работы

Решить те же примеры, что и в предыдущем разделе, но индексно-матричным методом.

8.4 Алгоритм сетевого планирования

Сетевой граф (СГ) – это ориентированный нагруженный граф без петель и циклов, имеющий начальную вершину, из которой дуги только уходят, и конечную вершину, в которую дуги только входят. Вершина в СГ – это событие, означающее итог того или иного процесса; нагрузка на ребрах СГ – это мера выполненный работы.

Основные параметры сетевого графа:

1 Критический путь – самый длинный путь из начала в конец проекта;

2 Длина критического пути, называемая критическим временем;

3 Резервы времени.

При этом необходимо уметь находить:

а) минимальное (наиболее ранее) время наступления события x_k, равное максимальной длине цепи из x_0 в x_k:

$$T_k = max\sum_{i=0}^{k} f_i\left(u_i\right) = \underset{(k-1)}{max}\left\{T_{k-1} + f_{k-1,k}\right\},$$

$$u_i \in \{x_0, x_k\}.$$

б) максимальное (наиболее позднее) время наступления события X_k, такое, чтобы окончание всех работ, входящих в X_k, не помешало окончанию всего проекта за критическое время $T_{кр} = T$:

$$\tilde{T}_k = T - max\sum_{i=k}^{n} f_i\left(u_i\right) = \min_{(k+1)}\left\{\tilde{T}_{k+1} - f_{k,k+1}\right\},$$

$$u_i \in \{x_k, x_n\}.$$

Очевидно, самое раннее и самое позднее время наступления равны, то есть $T = T_n = \tilde{T}_n = T_{kp}$.

в) резерв времени в вершине $\tau\left(x_k\right) = \tilde{T}_k - T_k$;

г) резерв времени в пути $\tau\left(p_{ok}\right) = T_k - f\left(p_{ok}\right)$;

д) полный резерв времени $\tau_1 = \tilde{T}_{к'} - T_к - f_{кк'}$;

е) свободный резерв $\tau_2 = T_{к'} - T_к - f_{кк'}$;

ж) независимый резерв $\tau_3 = \max\left\{0,\ T_{к'} - \tilde{T}_к - f_{кк'}\right\}$.

Для проверки правильности расчета параметров СГ полезно знать следующее.

1 Минимальное и максимальное время совпадает только для вершин, лежащих на критическом пути: $T_k - \tilde{T}_k$.

2 τ $(x_k) = 0$ для вершин, лежащих на критическом пути.

3 τ (p_{ok}) максимально для кратчайших по длине цепей.

4 Полный резерв $\tau_1 = 0$ только для критических работ.

5 Свободный резерв совпадает с полным только для работ, оканчивающихся в вершинах на критическом пути.

6 Независимый резерв совпадает со свободным для работ, начинающихся в вершинах, лежащих на критическом пути.

Рассмотрим на примере все алгоритмы сетевого планирования.

Дан граф, представленный на рисунке 8.9.

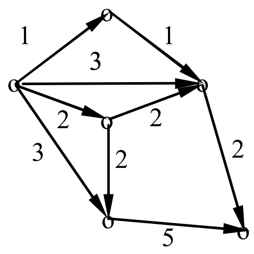


Рисунок 8.9

Алгоритм нумерации событий. Перенумеруем события в соответствии с алгоритмом нумерации событий. Назовем вершину, из которой только уходят дуги, началом проекта и обозначим ее через x_0 (событие нулевого ранга). Вычеркнем теперь все дуги, выходящие из x_0 , тогда те вершины, из которых после вычеркивания дуги будут только выходить, назовем событиями первого ранга. В нашем случае их две, поэтому обозначим через x_{11}, а другую через x_{12}. Теперь вычеркнем все дуги, выходящие из вершины первого ранга. Те вершины, из ко-торых после вычеркивания дуги только выходят, будут уже событиями второго ранга. У нас – это вершины x_{21} и x_{22}.

Теперь вычеркнем все дуги, выходящие из вершины второго ранга, рисунок 8.10. Осталась одна вершина, из которой уже ни одна дуга не выходит. Это и есть конец проекта. Одновременно оставшаяся вершина является событием третьего ранга, поэтому назовем ее x_3.

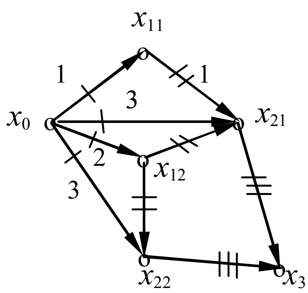


Рисунок 8.10

Нумерация событий по рангам закончена.

Алгоритм нахождения критического пути.

В скобках стоит предпоследняя вершина, через которую проходит самый длинный путь:

1) $T_0 = 0$;
2) $T_{11} = x_0x_{11} = 1(x_0)$;
3) $T_{12} = x_0x_{12} = 2(x_0)$;
4) $T_{21} = \max\{T_{11} + x_{11}x_{21}; x_0x_{21}; T_{12} + x_{12}x_{21}\} = \max\{1 + 1; 3; 2 + 2\} = 4(x_{12})$
5) $T_{22} = \max\{T_{12} + x_{12}x_{22}; x_0x_{22}\} = \max\{2 + 2; 3\} = 4(x_{12})$;
6) $T_3 = \max\{T_{21} + x_{21}x_3; T_{22} + x_{22}x_3\} = \max\{4 + 2; 4 + 5\} = 9(x_{22})$.

Таким образом, кратчайший путь (в обратном порядке):

$x_0 \leftarrow x_{12} \leftarrow x_{22} \leftarrow x_3$, а его длина равна 9.

На чертеже обычно критический путь выделяют красным или синим цветом. Может быть ситуация, когда критический путь не один, а их несколько, тогда они раскрашиваются в разные цвета.

Алгоритм нахождения максимальных времен (самое позднее время наступления, события).

1) $\tilde{T}_3 = 9 = T_3$;
2) $\tilde{T}_{22} = \tilde{T}_3 - x_{22}x_3 = 9 - 5 = 4 = T_{22}$;
3) $\tilde{T}_{21} = \tilde{T}_3 - x_{21}x_3 = 9 - 2 = 7$;
4) $\tilde{T}_{12} = \min\left\{\tilde{T}_{22} - x_{12}x_{22};\quad \tilde{T}_{21} - x_{12}x_{21}\right\} = \min\left\{4 - 2;\quad 7 - 2\right\} = 2 = T_{22}$;
5) $\tilde{T}_{11} = \tilde{T}_{21} - x_{11}x_{21} = 7 - 1 = 6$;
6) $\tilde{T}_0 = \min\left\{\tilde{T}_{11} - x_0x_{11};\quad \tilde{T}_{12} - x_0x_{12};\quad \tilde{T}_{22} - x_0x_{22}\right\} =$

$= \min\{6 – 1; 2 – 2; 4 - 3\} = 0 = T_0$.

Для событий, лежащих на критическом пути, $T_k = \tilde{T}_k$.

Алгоритм нахождения кратчайшего по длине пути.

$t_0 = 0$; $t_k = \min\limits_{(k-1)}\left\{t_{k-1} + t_{k-1,k}\right\}$.

1) $t_0 = 0$;
2) $t_{11} = t_0 + x_0x_{11} = 1(x_0)$;
3) $t_{12} = t_0 + x_0x_{12} = 2(x_0)$;
4) $t_{22} = \min\{x_0x_{22}; t_{12} + x_{12}x_{22}\} = \min\{3; 2 + 2\} = 3(x_0)$;
5) $t_{21} = \min\{x_0x_{21}; t_{11} + x_{11}x_{21l}; t_{12} + x_{12}x_{21}\} = \min\{3; 1 + 1; 2 + 2\} = 2(x_{11})$;
6) $t_3 = \min\{t_{21} + x_{21}x_3; t_{22} + x_{22}x_3\} = \min\{2 + 2; 3 + 5\} = 4(x_{21})$.

Восстанавливаем самый короткий путь с конца:

$x_3 \rightarrow x_{21} \rightarrow x_{11} \rightarrow x_0$, пользуясь названием вершин, указанных в скобках. Длина самого короткого пути равна 4.

Резервы в вершинах, представлены в таблице 8.4.

Таблица 8.4

x_i	x_0	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	x_3
$\tau(x_i) = \widetilde{T}_i - T_i$	0 – 0 = 0	6 – 1 = 5	2 – 2 = 0	7 – 4 = 3	4 – 4 = 0	9 – 9 = 0

Резервы в пути.

$\tau\ (x_0, x_{11}) = T_{11} - x_0x_{11} = 1 - 1 = 0;$
$\tau\ (x_0, x_{12}) = T_{12} - x_0x_{12} = 2 - 2 = 0;$
$\tau\ (x_0, x_{21}) = T_{21} - \min\{f(x_{0,}\, x_{12})\} = T_{21} - t_{21} = 4 - 2 = 2;$
$\tau\ (x_0, x_{22}) = T_{22} - t_{22} = 4 - 3 = 1;$
$\tau\ (x_0, x_3) = T_3 - t_3 = 9 - 4 = 5.$

Расчет дополнительных резервов приведен в таблице 8.5

Таблица 8.5 – Дополнительные резервы

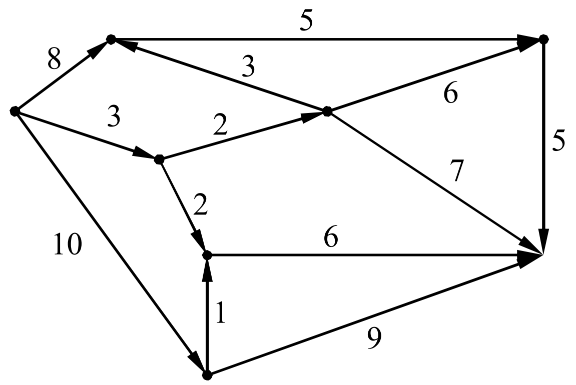
							Резервы		
x_k	$x_{k'}$	Продолжительность	$\boldsymbol{T_k}$		$\tilde{T}_k$		Полный	Свободный	Независимый
Вершины		$f_{kk'}$	T_k	$T_{k'}$	$\tilde{T}_k$	$\tilde{T}_{k'}$	$\tau_1 = \tilde{T}_{\kappa'} - T_{\kappa} - f_{\kappa\kappa'}$	$\tau_2 = T_{k'} - T_k - f_{kk'}$	$\tau_3 = \max\{0; T_{\kappa'} - \tilde{T}_{\kappa} - f_{\kappa\kappa'}\}$
x_0	x_0	0	0	0	0	0	0	0	0
x_0	x_{11}	1	0	1	0	6	6 – 0 – 1 = 5	1 – 0 – 1 = 0	0
x_0	x_{21}	3	0	4	0	7	7 – 0 – 3 = 4	4 – 0 – 3 = 1	4 – 0 – 3 = 1
x_0	x_{12}	2	0	2	0	2	2 – 0 – 2 = 0	2 – 0 – 2 = 0	2 – 0 – 2 = 0
x_0	x_{22}	3	0	4	0	4	4 – 0 – 3 = 1	4 – 0 – 3 = 1	4 – 0 – 3 = 1
x_{11}	x_{21}	1	1	4	6	7	7 – 1 – 1 = 5	4 – 1 – 1 = 2	max{0; 4 – 6 - 1} = 0
x_{12}	x_{21}	2	2	4	2	7	7 – 2 – 2 = 3	4 – 2 – 2 = 0	4 – 2 – 2 = 0
x_{12}	x_{22}	2	2	4	2	4	4 – 2 – 2 = 0	4 – 2 – 2 = 0	4 – 2 – 2 = 0
x_{21}	x_3	2	4	9	7	9	9 – 4 – 2 = 3	9 – 4 – 2 = 3	9 – 7 – 2 = 0
x_{22}	x_3	5	4	9	4	9	9 – 4 – 5 = 0	9 – 4 – 5 = 0	9 – 4 – 5 = 0

В таблице 8.5 штриховкой отмечены все дуги, лежащие на критическом пути.

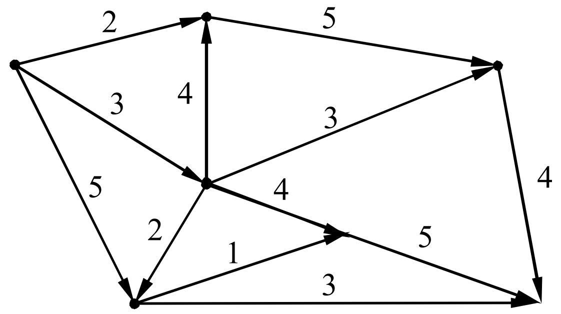
Задачи для самостоятельной работы

Найти все параметры и резервы сетевых графов.

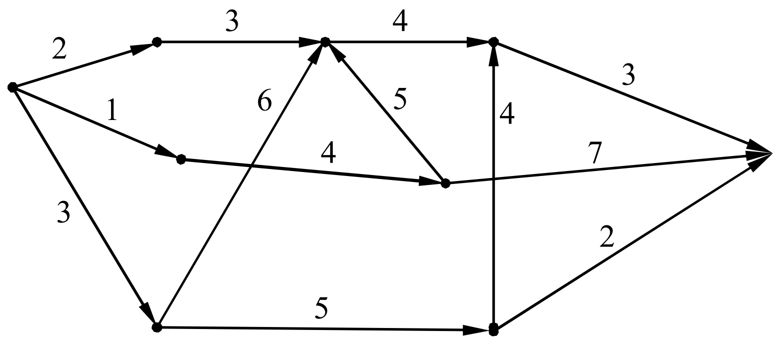
1



2



3



8.5 Транспортные сети

Ориентированный нагруженный граф без петель с одной начальной и одной конечной вершиной называется транспортной сетью, если:

1) на каждой дуге указаны ее пропускная способность $c(\vec{u}) \geq 0$ и поток $\varphi(\vec{u}) \geq 0$ по дуге;

2) для каждой вершины суммарный входящий поток по всем дугам равен суммарному выходящему потоку:

$$\sum_{\kappa} \varphi_{i\kappa}\left(u_{i\kappa}^{-}\right) = \sum_{m} \varphi_{im}\left(u_{im}^{+}\right),$$

где $u_{i\kappa}^{-}$ - k - я дуга, входящая в x_i;

u_{im}^{+} - m - я дуга, выходящая из x_i.

Разрезом в сети называется множество дуг, заходящих в подмножество вершин графа, не содержащее вершины x_0. пропускная способность разреза – это суммарная пропускная способность всех дух, заходящих в заданное подмножество вершин, не содержащее x_0.

Для отыскания максимального патока в транспортной сети применяется теорема Форда – Фалкерсона, в соответствии с которой максимальный поток в сети равен минимальной пропускной способности разреза.

Разрез с минимальной пропускной способностью соответствует тому случаю, когда все дуги этого разреза насыщенные.

Дуга называется насыщенной, если поток по ней в прямом направлении равен пропускной способности дуги, и является нулевым в обратном направлении.

Процедура построения максимального потока состоит из двух этапов.

Этап 1. Просматриваются все пути (все дуги ориентированы в одну сторону). Если существуют ненасыщенные дуги, то поток можно увеличить на $\delta = \min_i \left\{ \varphi_i\left(\vec{u}_i\right) \cdot c_i\left(\vec{u}_i\right) \right\}$ по данному пути. Таким способом увеличивают поток при движении в прямом направлении.

Этап 2. Просматривают все цепи (часть дуг ориентирована в одну сторону, часть в другую). Если существуют ненасыщенные дуги, то в этом случае можно увеличить поток в прямом направлении на

$$\varepsilon = \min_{i,j} \left\{ \varphi_j\left(\vec{u}_j\right); \;\; -\varphi_i\left(\vec{u}_i\right) + c_i\left(u_i\right) \right\},$$

для чего на дугах обратного направления поток уменьшается, а на дугах прямого направления увеличивается на величину ε. Если не существует более ни путей, ни цепей, в которых возможно увеличение потока указанным способом, то больше в данной сети поток увеличивать нельзя. Осуществляя разрез по насыщенным дугам, находим величину максимального потока.

Пример. Дан граф, представленный на рисунке 8.11.

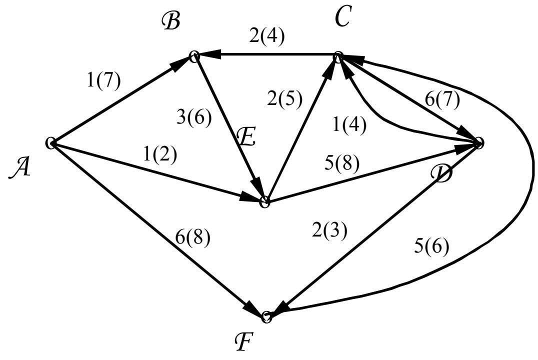


Рисунок 8.11

1 Граф содержит ненасыщенные дуги.

2 Проверим все вершины и убедимся, что в вершинах B, C, E, F сумма входящего по дугам потока равна сумме выходящего потока, а из вершины A уходит поток в 8 единиц, который в том же количестве входит в вершину D. Следовательно, увеличивать поток в данной транспортной сети.

Этап 1.

а) Путь $A \xrightarrow{1(7)} B \xrightarrow{3(6)} E \xrightarrow{2(5)} C \xrightarrow{6(7)} D$

$\delta = \min\{7 – 1; 6 – 3; 2 – 5; 7 - 6\} = 1.$

Увеличим по этому пути поток на 1, ребро CD станет насыщенным, то есть

$A \xrightarrow{2(7)} B \xrightarrow{4(6)} E \xrightarrow{3(5)} C \xrightarrow{7(7)} D.$

б) Путь $A \xrightarrow{6(8)} F \xrightarrow{3(5)} E \xrightarrow{5(8)} D$

$\delta = \min\{8 – 6; 5 – 3; 8 - 5\} = 2.$

Поток по этому пути можно увеличить на 2, при этом ребра AF и FE станут насыщенными, то есть

$A \xrightarrow{8(8)} F \xrightarrow{5(5)} E \xrightarrow{7(8)} D.$

в) Путь $A \xrightarrow{1(2)} E \xrightarrow{7(8)} D$

$\delta = \min\{2 - 1; 8 - 7\} = 1.$

Поток можно увеличить на 1, обе дуги AE и ED станут насыщенными:

$A \xrightarrow{2(2)} E \xrightarrow{8(8)} D.$

Путей больше нет.

г) Рассмотрим цепь

$A \xrightarrow{2(7)} B \xleftarrow{2(4)} C \xleftarrow{1(4)} D$

$\delta = \min\{7 – 2; 2; 1\} = 1.$

Поток увеличиваем на 1:

$A \xrightarrow{3(7)} B \xleftarrow{1(4)} C \xleftarrow{0(4)} D.$

д) Цепь $A \xrightarrow{3(7)} B \xleftarrow{1(4)} C \xleftarrow{5(6)} F \xleftarrow{2(3)} D$

$\delta = \min\{7 - 3;\ 1;\ 5;\ 2\} = 1.$

Поток можно увеличить на 1:

$A \xrightarrow{4(7)} B \xleftarrow{0(4)} C \xleftarrow{4(6)} F \xleftarrow{1(3)} D.$

е) Цепь $A \xrightarrow{4(7)} B \xrightarrow{4(6)} E \xrightarrow{3(5)} C \xleftarrow{4(6)} F \xleftarrow{1(3)} D$

$\delta = \min\{7 - 4;\ 6 - 4;\ 5 - 3;\ 4;\ 1\} = 1.$

Поток можно увеличить на 1:

$A \xrightarrow{5(7)} B \xrightarrow{5(6)} E \xrightarrow{4(5)} C \xleftarrow{3(6)} F \xleftarrow{0(3)} D.$

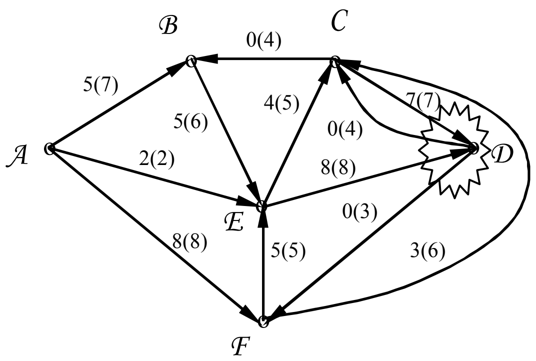


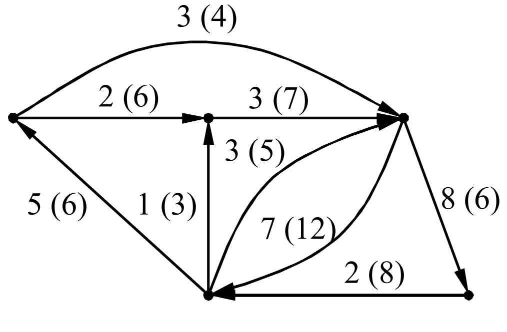
Рисунок 8.12

На рисунке 8.12 видно, что цепей больше нет. Поток максимален. Делая разрез вокруг D по насыщенным дугам получаем его величину: 7 + 8 – 0 – 0 = 15.

Примеры для самостоятельной работы

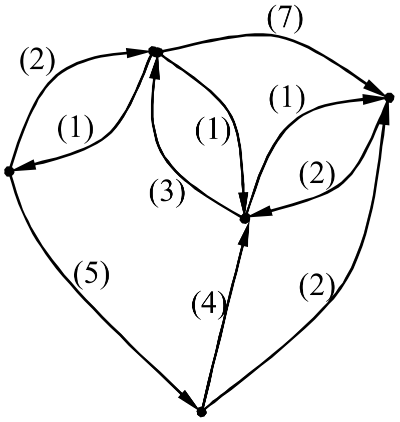
Построить максимальный поток.

1



Ответ: $\varphi_{\max} = 6$.

2



Ответ: $\varphi_{\max} = 7$.

Определение минимального потока.

В этом случае $\varphi(\vec{u}) \geq c(\vec{u})$.

Покажем на примере, как найти минимальный поток в сети. Дан граф на рисунке 8.13.

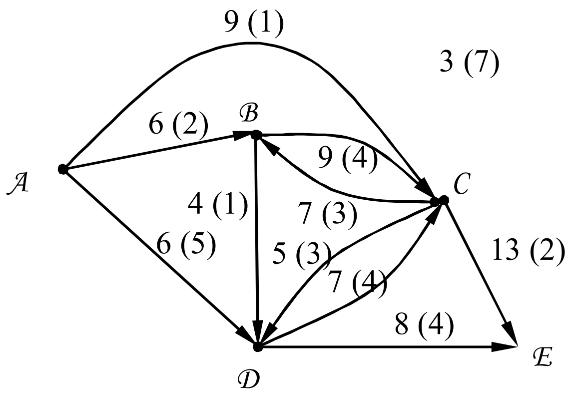


Рисунок 8.13

1 Прежде всего проверяем сбалансированность графа, чтобы суммы втекающего в каждую вершину и вытекающего из нее потока были равны.

2 Просматриваем все пути из A в E, рисунок 8.14.

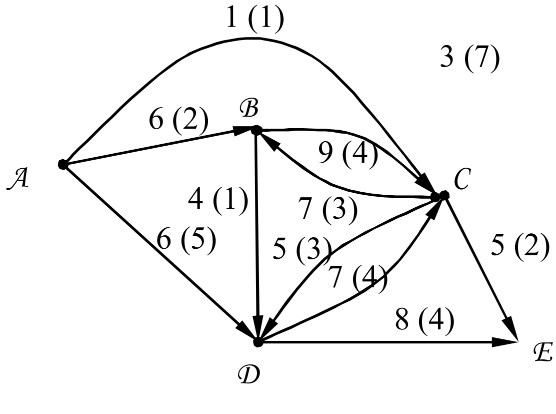


Рисунок 8.14

а) Путь $A \xrightarrow{9(1)} C \xrightarrow{13(2)} E$

δ = min{9 – 1; 13 - 2} = 8.

Поток уменьшается на 8 единиц.

б) Путь $A \xrightarrow{6(2)} B \xrightarrow{4(1)} D \xrightarrow{8(4)} E$

δ = min{6 – 2; 4 – 1; 8 - 4} = 3.

Поток уменьшается на 3 единицы, рисунок 8.15.

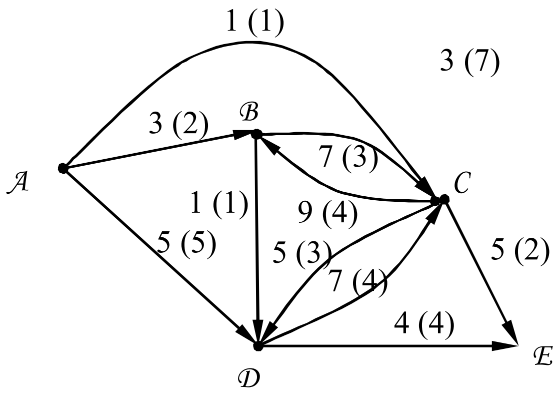


Рисунок 8.15

в) Путь $A \xrightarrow{6(5)} D \xrightarrow{5(4)} E$

δ = min{6 – 5; 5 - 4} = 1.

Поток уменьшается на 1, рисунок 8.16.

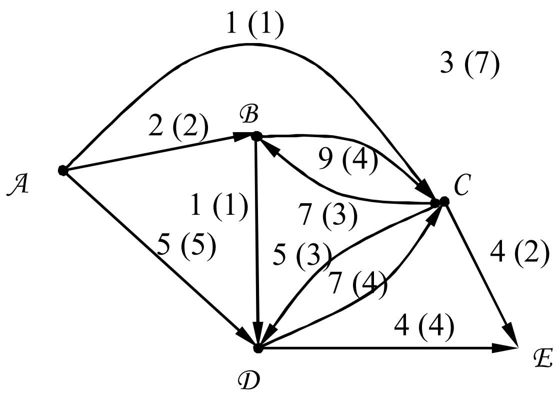


Рисунок 8.16

г) Путь $A \xrightarrow{3(2)} B \xrightarrow{9(4)} C \xrightarrow{5(2)} E$

δ = min{3 – 2; 9 – 4; 5 - 2} = 1.

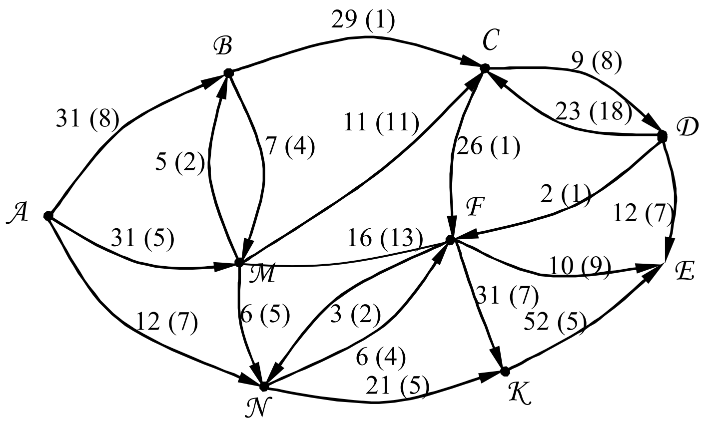
Поток можно уменьшить на 1.

Больше нет ни одного пути и цепи с ненасыщенными дугами. Делая разрез по насыщенным дугам, определяем величину минимального потока, равную восьми.

Примеры для самостоятельной работы

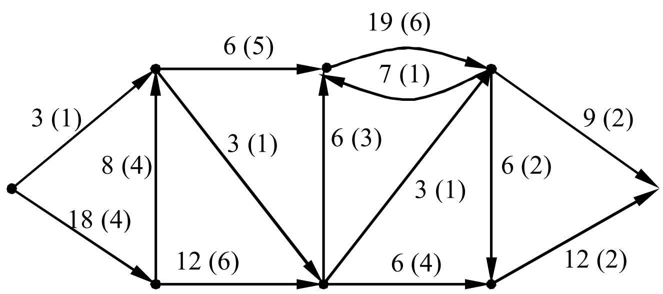
Найти минимальный поток в графе:

1



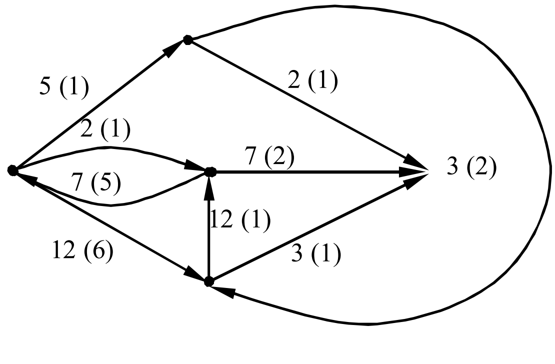
Ответ: $\varphi_{\min} = 37$.

2



Ответ: $\varphi_{\min} = 13$.

3



Ответ: $\varphi_{\min} = 4$.

Вопросы для самопроверки

1 Определение критического пути сетевой модели.
2 Определение резервов вершин и резервов работ.
3 Понятие транспортной сети.
4 Максимальный и минимальный потоки в сети.
5 Алгоритмы сетевого планирования.

Заключение

Учебное пособие освещает основы теории и практики предмета методы оптимизации. Рассмотрены вопросы классификации задач и методов оптимизации. Для каждого раздела методов оптимизации определены фундаментальные понятия, сформулирована словесная и математическая постановка задачи. На основании теоретического материала строятся математические модели исследуемых объектов, рассматриваются алгоритмы решения задач и с помощью приведенных алгоритмов решаются прикладные задачи.

В учебном пособии оптимально соотнесены теория и практика, при этом основное внимание уделено практической реализации алгоритмов для решения прикладных задач.

Список использованных источников

1 **Абчук, В.А.** Справочник по исследованию операций / В.А. Абчук. - М.: Воениздат, 1979. – 240 с.

2 **Лукин А.И.** Системы массового обслуживания / А.И. Лукин. - М.: Воениздат, 1980. - 218 с.

3 **Понтрягин Л.С.** Математическая теория оптимальных процессов /Л.С. Понтрягин. - М.: Наука, 1983. – 283 с.

4 **Эльсгольц Л.Э.** Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление /Л.Э. Эльсгольц. - М.: Наука, 1969. – 146 с.

5 **Банди Б.** Методы оптимизации. Вводный курс: Пер. с англ. / Б. Банди. – М.: Радио и связь, 1988. – 128 с.

6 **Хедли Дж.** Нелинейное и динамическое программирование: Пер. с англ. /Дж. Хедли. – М.: Мир, 1969. – 424 с.

7 **Сухарев, А.Г.** Курс методов оптимизации. / А.Г. Сухарев, А.В. Тимохов, В.В. Федоров. – М.: Наука, 1986. – 328 с.

8 **Данциг Дж.** Линейное программирование: Пер. с англ. / Дж. Данциг – М.: Прогресс. 1966. – 600 с.

9 **Мину М.** Математическое программирование. Теория и алгоритмы: Пер. с франц. / М. Мину. – М.: Наука, 1990. – 487 с.