Л. М. Невоструев, Г. А. Ивашкина

ВЕСОВАЯ ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Проведенные в работе исследования позволяют установить критерий пригодности традиционно используемых участков границы области служить носителями краевых условий. При этом в зависимости от поведения на носителях коэффициентов данного уравнения определяется форма, в которой краевые условия задаются. Это либо значения искомого решения, либо значение его нормальной производной, либо значение его «косой» производной, либо различных комбинаций их, заданные в локальной или нелокальной формах, возможно ещё и с некоторым «весом».

Рассмотрим уравнение

$$U_{\xi\eta}+\beta\xi^{\alpha-1}U\xi+\gamma\xi^{\alpha-2}U=0, \qquad (1)$$

где $\beta>0,\ \gamma<0,\ 0<\alpha<1,\ -\dfrac{\gamma}{\beta}+\alpha-1=0$

Введем в рассмотрение область D, ограниченную характеристиками $\xi=0,\ \eta=1$ и прямой J, заданной уравнением $\eta=\xi$.

Задача. Найти решение уравнения (1) $U(\xi_0,\eta_0)\in C(\overline{D})\cap C'(D\cap J)\cap C^2(D)$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$U(\xi_0,\xi_0)=\tau(\xi_0), \qquad (2)$$

$$\lim_{\xi_0\to 0}U(\xi_0,\eta_0)\xi_0^{\gamma/\beta}=\psi(\eta) \qquad (3)$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(U\eta+\beta\xi^{\alpha-1}u\right)+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\xi^{\alpha-2}u=0$$

Интегрируя его в пределах от ε до ξ_0, получим

$$U_\eta(\xi_0,\eta)+\beta\xi_0^{\alpha-1}U(\xi_0,\eta)+$$
$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\int_\varepsilon^{\xi_0}\xi^{\alpha-2}U(\xi,\eta)d\xi= \qquad (4)$$
$$=U_\eta(\varepsilon,\eta)+\beta\varepsilon^{\alpha-1}U(\xi,\eta)$$

Легко убедиться, что функция

$$U^*(\xi_0,\eta)=C(\eta)\xi_0^{-\gamma/\beta} \qquad (5)$$

на линии $\xi_0=\varepsilon$ удовлетворяет уравнению (4).

Запишем равенство

$$\frac{\partial C}{\partial\eta}\varepsilon^{-\gamma/\beta}+\beta\varepsilon^{\alpha-1}C(\eta)\varepsilon^{-\gamma/\beta}=U_\eta(\varepsilon,\eta)+\beta\varepsilon^{\alpha-1}U(\varepsilon,\eta) \qquad (6)$$

Сравнивая левую и правую части равенства (6), заключаем, что

$$C(\eta)=\lim_{\varepsilon\to 0}U(\varepsilon,\eta)\varepsilon^{\gamma/\beta}=\psi(\eta) \qquad (7)$$

С учетом (7) представим (4) в виде

$$U_\eta(\xi_0,\eta)+\beta\xi_0^{\alpha-1}U(\xi_0,\eta)+$$
$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\int_\varepsilon^{\xi_0}\xi^{\alpha-2}u(\xi,\eta)d\xi= \qquad (8)$$
$$=\varepsilon^{-\gamma/\beta}\psi'_\varepsilon(\eta)+\beta\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1}\psi_\varepsilon(\eta)$$

Умножим обе части равенства (8) на $e^{-\beta(\eta-\eta_0)\xi_0^{\alpha-1}}$ и запишем результат следующим образом

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(U(\xi_0,\eta)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\right)+$$
$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\int_\varepsilon^{\xi_0}U(\xi,\eta)\xi^{\alpha-2}d\xi= \qquad (9)$$
$$=e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\left(\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}}\psi'_\varepsilon(\eta)+\beta\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1}\psi_\varepsilon(\eta)\right)$$

Интегрируя (9) в пределах от ξ_0 до η_0, получим

$$U(\xi_0,\eta_0)+$$
$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\int_{\xi_0}^{\eta_0}e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}d\eta\int_\varepsilon^{\xi_0}U(\xi,\eta)\xi^{\alpha-2}d\xi=$$
$$=\tau(\xi_0)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\xi_0)}+ \qquad (10)$$
$$+\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}}\int_{\xi_0}^{\eta_0}e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\left(\psi'_\varepsilon(\eta)+\beta\varepsilon^{\alpha-1}\psi_\varepsilon(\eta)\right)d\eta$$

В интегральном уравнении (10) перейдем к пределу при $\varepsilon \to 0$, учитывая при этом, что $-\frac{\gamma}{\beta} > 0$. Тогда (10) примет вид

$$U(\xi_0, \eta_0) + (\gamma - \beta(\alpha - 1)) \int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta \xi_0^{\alpha-1}(\eta_0 - \eta)} d\eta \int_0^{\xi_0} U(\xi, \eta) \xi^{\alpha-2} d\xi = \tau(\xi_0) e^{-\beta \xi_0^{\alpha-1}(\eta_0 - \xi_0)} + \beta \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta} + \alpha - 1} \int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta \xi_0^{\alpha-1}(\eta_0 - \eta)} \psi(\eta) d\eta \quad (11)$$

Из (11) видно, что задача поставлена корректно, если $-\frac{\gamma}{\beta} + \alpha - 1 = 0$.

Итак, при условии $-\frac{\gamma}{\beta} + \alpha - 1 = 0$, решение уравнения (1) с краевыми условиями (2), (3) имеет вид

$$U(\xi_0, \eta_0) = \tau(\xi_0) e^{-\beta \xi_0^{\alpha-1}(\eta_0 - \xi_0)} + \beta \int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta \xi_0^{\alpha-1}(\eta_0 - \eta)} \psi(\eta) d\eta \quad (12)$$

Если $-\frac{\gamma}{\beta} + \alpha - 1 > 0$, то решение задачи (1), (2), (3) сведется к решению интегрального уравнения

$$U(\xi_0, \eta_0) + (\gamma - \beta(\alpha - 1)) \int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta \xi_0^{\alpha-1}(\eta_0 - \eta)} d\eta \int_0^{\xi_0} U(\xi, \eta) \xi^{\alpha-2} d\xi = \tau(\xi_0) e^{-\beta \xi_0^{\alpha-1}(\eta_0 - \xi_0)} \quad (13)$$

Если $-\frac{\gamma}{\beta} + \alpha - 1 < 0$, то задача Дарбу для уравнения (1) не имеет решений.