

А.П.Васильев, Т.В.Трошина

## ИССЛЕДОВАНИЕ АДИАБАТИЧЕСКОГО ПРОЦЕССА В ДВУХФАЗНОЙ ОДНОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЕ ТИПА «ПАР-ЖИДКОСТЬ»

Статья посвящена исследованию адиабатического процесса в двухфазной однокомпонентной системе типа «пар-жидкость»

Адиабатические процессы в двухфазных системах «жидкость-пар» находят широкое применение в ряде важных технических приложений. Сюда можно отнести сжатие паров хладона в парокомпрессорных холодильных установках, в том числе и магнетогидродинамических [1], истечение вскипающей жидкости при разгерметизации трубопроводов высокого давления [2] и в ряде других технологических процессов.

Сейчас расчеты подобных процессов обычно проводятся с использованием *i*-диаграмм соответствующих систем. И если для такой распространенной в энергетике системы как «вода-пар» имеются подробные диаграммы теплофизических свойств, то попытка исследования других аналогичных систем, ввиду отсутствия подобных диаграмм, встречает определенные затруднения. Кроме того, диаграммный способ представления информации о двухфазных системах создает неудобства в создании математических моделей термодинамических процессов.

В [3] с позиций общих принципов термодинамики дается качественный анализ двух изоэнтروпических процессов в двухфазных системах: адиабатического расширения вскипающей жидкости и адиабатического сжатия влажного пара, при этом адиабату влажного пара предложено описывать через соответствующий показатель степени, который, в отличие от идеальной системы, изменяется вместе с параметрами состояния. И если первый процесс всегда ведет к легко пред-

сказуемому результату: испарению жидкости, снижению её температуры и повышению степени сухости пара, то итог второго процесса оказывается зависящим от начального состояния двухфазной системы.

Действительно, на простейший вопрос, можно ли адиабатически перевести влажный пар в жидкое состояние, уже невозможно ответить однозначного поскольку необходимо знать исходное термодинамическое состояние системы. При больших начальных степенях сухости пара с адиабатическое сжатие ведет к испарению жидкой фазы (подсушиванию пара), при малых же значениях с имеет место конденсация пара.

Однозначный ответ на этот и подобный ему вопросы можно получить из анализа уравнения изоэнтропы в области двухфазных состояний.

Запишем основное термодинамическое тождество для простой термодинамической системы

$$\delta q = T ds = di - v dp, \quad (1)$$

где *dq*-удельная теплота, *T*-температура, *s*-удельная энтропия, *i*-удельная энтальпия, *v*-удельный объем и *p*-давление в системе.

Учитывая, что энтальпия системы есть функция состояния, выразим её полный дифференциал:

$$di(p, T) = \left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial i}{\partial p} \right)_T dp,$$

подставив который в тождество (1),

перепишем его в виде:

Достаточным условием адиабатичности процесса является его изоэнтропичность, поэтому полагая в (2)  $s = \text{const}$ , получаем

Теперь учтем, что в двухфазных системах энтальпия остается аддитивной функцией по массе вещества, поэтому для неё можно написать:

$$i = (1 - \chi) i_1 + \chi i_g, \quad (4)$$

где  $\chi$  - степень сухости пара,  $i_1$  и  $i_g$  - энтальпии насыщенных жидкости и пара.

Подставляя это выражение в левую часть (3), получим

где  $C_1$  - удельная изобарная массовая теплоемкость жидкой фазы на кривой насыщения.

Учтем, что  $i_g - i_1 = r$  - скрытой теплоте парообразования, тогда для левой части уравнения (3) окончательно найдем:

$$\left( \frac{\partial i}{\partial T} \right)_p dT = \left[ C_1 + r \left( \frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_p + \chi \left( \frac{\partial r}{\partial T} \right)_p \right] dT. \quad (5)$$

Преобразуем теперь правую часть равенства (3), для чего заменим удельный объем двухфазной системы выражением:

где  $v_1$  и  $v_g$  - удельные объемы жидкой и паровой фазы на линии насыщения.

Для вычисления удельных объемов необходимо привлечь термические уравнения состояния каждой из фаз. Для жидкой фазы можно принять простейшую модель несжимаемой жидкости. Действительно, если рассматривать плотность жидкости  $\rho_1 = 1/v_1$  как функцию параметров состояния системы  $(p, T)$ , то можно написать:

Здесь  $\alpha$  и  $\beta$  - термические коэффициенты теплового расширения и сжимаемости жидкой фазы, определенные равенствами

$$\alpha = -\frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial T} \right)_p, \quad \beta = \frac{1}{\rho_1} \left( \frac{\partial \rho_1}{\partial p} \right)_T.$$

В силу малых значений коэффициента сжимаемости жидкости можно пренебречь изменением плотности с давлением, тогда  $d\rho_1 = -\rho_1 \alpha dT$ , интегрируя которое при постоянном  $\alpha$ , получим:  $\rho_1 = \rho_{10} (1 - \alpha(T - T_0))$ , т.е. уравнение состояния несжимаемой жидкости.

Что касается термического уравнения состояния сухого насыщенного пара, то в области невысоких давлений свойства реальных газов ещё не проявляются и пар можно рассматривать как идеальный газ с уравнением состояния Менделеева - Клапейрона

где  $R_m$  - удельная газовая постоянная.

В области высоких давлений свойства пара начинают отличаться от идеальных, и для описания его термических свойств необходимо привлечь одно из уравнений состояния реальных газов, например уравнение Дитеричи, или же напрямую воспользоваться экспериментальными данными на правой ветви пограничной кривой двухфазных состояний рассматриваемой системы.

Вычисление термодинамической производной  $(\partial i / \partial p)_T$  из правой части уравнения (3) с учетом (4) приводит к следующему выражению

$$\left( \frac{\partial i}{\partial p} \right)_T = \left( \frac{\partial i_1}{\partial p} \right)_T - i_1 \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_T - \chi \left( \frac{\partial i_1}{\partial p} \right)_T + \chi \left( \frac{\partial i_g}{\partial p} \right)_T + i_g \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_T. \quad (8)$$

Подставляя теперь выражения (5), (6) и (8) в уравнение (3), приведем его к виду:

$$C_1 dT - \chi \left[ \left( \frac{\partial i_1}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial i_1}{\partial p} \right)_T dp \right] + r \left[ \left( \frac{\partial \chi}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_T dp \right] + \chi \left[ \left( \frac{\partial i_g}{\partial T} \right)_p dT + \left( \frac{\partial i_g}{\partial p} \right)_T dp \right] = \left[ \frac{1 - \chi}{\rho_1(T)} + \frac{\chi}{\rho_g(p, T)} \right] dp.$$

Учитывая, что выражения в квадратных скобках являются полными математическими дифференциалами соответствующих функций, придадим последнему выражению следующий вид

$$C_1 \left( \frac{\partial T}{\partial p} \right)_s + r \left( \frac{\partial \chi}{\partial p} \right)_s + \chi \left( \frac{\partial r}{\partial p} \right)_s = \frac{1 - \chi}{\rho_1(T)} + \frac{\chi}{\rho_g(p, T)}. \quad (9)$$

Согласно правилу фаз Гиббса в равно-

весной двухфазной системе есть только одна степень свободы, поэтому температура и давление оказываются связанными друг с другом уравнением Клапейрона-Клаузиуса

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s = \frac{T(\vartheta_g - \vartheta_l)}{r} = \left(\frac{1}{\rho_g} - \frac{1}{\rho_l}\right) \frac{T}{r},$$

тогда уравнение (9) можно привести к виду неоднородного дифференциального уравнения первого порядка на изоэнтропе (индекс  $s$  далее опускаем):

$$\frac{d\chi}{dp} + \frac{\chi}{r(p)} \frac{dr(p)}{dp} = \frac{1}{r(p)} \left[ \frac{1-\chi}{\rho_l} + \frac{\chi}{\rho_g} - \frac{C_1(p)T(p)}{r(p)} \left( \frac{1}{\rho_l} - \frac{1}{\rho_g} \right) \right]. \quad (10)$$

Это и есть дифференциальное уравнение адиабаты в области двухфазных состояний, где в качестве независимой переменной принято давление. Уравнение Клапейрона - Клаузиуса позволяет также при необходимости перейти от давления к температуре, что, однако, не принципиально.

Решение уравнения (10) в общем случае может быть найдено численным интегрированием. Однако в частном случае при  $\max p_s(T) \ll p_{кр}$ , его решение удастся найти в элементарных функциях. Покажем это. Примем допущение, что можно пренебречь работой поверхностных сил на тепловых деформациях жидкой фазы, т.е. считаем, что не смотря на изменение температуры,  $r_1 = \text{const}$ . Далее считаем, что в области невысоких давлений пар подчиняется уравнению Менделеева-Клапейрона, а теплота фазового перехода и теплоемкость жидкой фазы в рассматриваемом диапазоне давлений не изменяются.

При этих допущениях уравнение Клапейрона-Клаузиуса принимает вид и легко интегрируется

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{T_0} - \frac{R_\mu}{r} \ln \frac{p}{p_0}, \quad (11)$$

где  $p_0$  и  $T_0$  -параметры в какой-либо точке на кривой насыщения.

Принятые допущения позволяют записать уравнение адиабаты (10) в таком виде:

Заменяя здесь температуру по уравне-

нию (11) и переходя к безразмерным величинам  $p^* = p/p_0$ ,  $T^* = T/T_0$ , приведем уравнение адиабаты к виду удобному для интегрирования

$$\frac{d\chi}{dp^*} + \alpha\chi - \chi \frac{\beta}{p^*(1-\alpha \ln(p^*))} = \alpha + \frac{\alpha\gamma}{1-\alpha \ln(p^*)} - \frac{\beta\gamma}{p^*(1-\alpha \ln(p^*))^2}, \quad (12)$$

где  $a$ ,  $b$ ,  $g$  -параметры задачи, определенных равенствами:  $a = p_0/(r_1 r)$ ,  $b = RmT_0/r$ ,  $g = C_1 T_0/r$ .

Решая уравнение (12) методом вариации постоянной [4], получим

$$\chi(p_*, l) = \frac{\chi_0 (1 - \alpha \ln(p_*, l)) \exp(\alpha p_*) + I_1(p_*, p_*) + I_2(p_*, p_*) + I_3(p_*, p_*)}{(1 - \alpha \ln(p_*, l)) \exp(\alpha p_*)}$$

где величины  $I_i(p_*, p_*)$  определены выражениями:

$$I_1(p_*, p_*) = \alpha \int_{p_0}^{p_*} (1 - \alpha \ln \zeta) \exp(\alpha \zeta) d\zeta,$$

$$I_2(p_*, p_*) = \gamma (\exp(\alpha p_*) - \exp(\alpha p_0)),$$

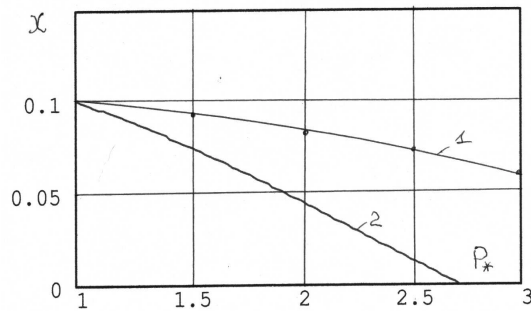
$$I_3(p_*, p_*) = -\beta \gamma \int_{p_0}^{p_*} \frac{\exp(\alpha \zeta)}{\zeta (1 - \alpha \ln \zeta)} d\zeta.$$

Когда характерные масштабы  $p_0$  и  $T_0$  определены в исходном состоянии системы  $p_0 = p_0/p_0 = 1$ , решение имеет наиболее простую форму

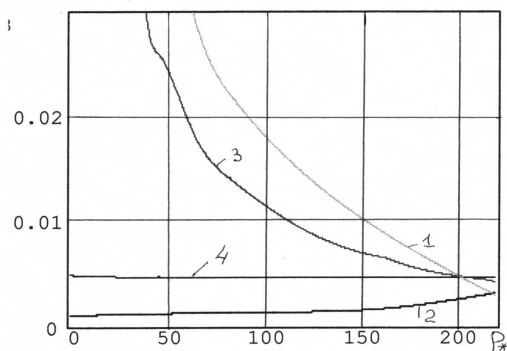
$$\chi(p_*) = \frac{\chi_0 e^\alpha + \sum_{i=1}^3 I_i(l, p_*)}{(1 - \alpha \ln(p_*)) \exp(\alpha p_*)}.$$

В области больших изменений давления от тройной точки до критической уравнение адиабаты (10) можно проинтегрировать численно. Для этого необходимо описать зависимости  $r(p)$ ,  $C_1(p)$ ,  $T(p)$ ,  $r_1(p)$  и  $r_g(p)$  на кривой насыщения. При наличии экспериментальных данных по рассматриваемой системе [5] подобная процедура легко осуществляется методами интерполяции, после чего интегрирование уравнения сводится к применению стандартных вычислительных процедур, например широко известного метода Рунге-Кутты.

Ниже представлены результаты расчета адиабаты по аналитическому решению и численному интегрированию уравнения (10) методом Рунге-Кутты пятого порядка точности.



На рис.1 изображена зависимость степени сухости пара от величины приведенного давления при адиабатическом сжатии влажного пара воды с начальной степенью сухости пара  $s_0=0.1$ . Кривая 1- расчет по аналитическому решению, 2- численное интегрирование уравнения (10). Графики показывают, что с ростом давления результаты расчета начинают расходиться, что легко объясняется приближением термических свойств пара к реальному газу, что никак не учитывает уравнение Менделеева-Клапейрона, принятое в аналитическом решении. Кроме того, видно, что при малых степенях сухости пара двухфазная система за счет адиабатического сжатия может быть переведена в жидкое состояние.



На рис.2 показана адиабата влажного пара в  $PV$ -диаграмме (кривая 3), линия 1 - зависимость  $u_g(p)$ -левая ветвь пограничной кривой, линия 2 - зависимость  $u_l(p)$  - правая ветвь пограничной кривой, линия 4 - зависимость  $s(p)/10^6, \text{Дж/кг}\cdot\text{К}$ . Начальная степень сухости пара принималась равной  $s_0=0.3$ . Постоянство графика энтропии говорит об адиабатичности процесса.

Представляет интерес сравнить результаты расчета с широко известными  $is$ -диаграммами воды и водяного пара. Приводим результаты сравнения: при  $p_0=0.1$  МПа и  $s_0=0.6$  численное интегрирование уравнения дает следующие значения: энтропии  $s_0=4.98$  кДж/кгК и энтальпии  $i_0=1773$  кДж/кг. Аналогичные величины, найденные по  $is$ -диаграмме, имеют такие значения:  $s_0=5.24$  кДж/кгК,  $i_0=1890$  кДж/кг. При адиабатическом сжатии влажного пара с этими параметрами до конечного давления  $p=0.5$  МПа численное интегрирование уравнения приводит к  $s=0.76$ ,  $i=2262$  кДж/кгК,  $s=5.32$  кДж/кгК; а результаты расчета по  $is$ -диаграмме такие:  $s=0.68$ ,  $i=1995$  кДж/кгК,  $s=5.24$  кДж/кгК, т.е. в пределах погрешности 5-8% совпадают. Наибольшее расхождение возникает в конечных степенях сухости пара, объяснить которое не удается.

На вопрос, сформулированный в начале статьи, можно дать такой ответ: если энтропия исходного состояния двухфазной системы  $s_0 > s_{кр}$  - энтропии в критической точке пограничной кривой, то адиабатическое сжатие будет сопровождаться испарением жидкости и процесс завершится на правой пограничной кривой, если же  $s_0 < s_{кр}$ , то адиабатическое сжатие переведет систему в жидкое состояние, т.е. на левую пограничную кривую.

#### Список использованной литературы

1. Жидкометаллический МГД - компрессор/ Васильев А.П., Бондаренко В.А., Тараков Д.А. и др. / Холодильная техника, № 12, 1992, с.22-24.
2. Фисенко В.В. Критические двухфазные потоки. М.: Атомиздат, 1978.-158 с.
3. Вукалович М.П., Новиков В.В. Техническая термодинамика. М.: Энергия, 1968.- 496 с.
4. Матвеев Н.М. Методы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Высшая школа, 1967.- 563 с.
5. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972.- 720 с.