Л. М. Невоструев, Г. А. Ивашкина

ВЕСОВАЯ ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ ОДНОГО УРАВНЕНИЯ С ПАРАМЕТРАМИ

Проведенные в работе исследования позволяют установить критерий пригодности традиционно используемых участков границы области служить носителями краевых условий. При этом в зависимости от коэффициентов уравнения определяется форма, в которой краевые условия задаются. Это либо значения искомого решения, либо значение его «косой» производной, либо различных комбинаций их, заданные в локальной или нелокальной формах, возможно еще и с некоторым «весом».

Рассмотрим уравнение

$$U_{\xi\eta}+\beta\xi^{\alpha-1}U_{\xi}+\gamma\xi^{\alpha-2}U=0\,, \qquad (1)$$

где $\beta>0,\ \gamma<0,\ 0<\alpha<1,\ -\dfrac{\gamma}{\beta}+\alpha-1=0$

Введем в рассмотрение область *D*, ограниченную характеристиками $\Gamma_1:\xi=0,\ \ \Gamma_2:\eta=1$ и прямой *J*, заданной уравнением $\eta=\xi$, т. е. $\Gamma=J\cup\Gamma_1\cup\Gamma_2$ есть граница области *D*.

Задача. Найти решение уравнения (1) $U(\xi_0,\eta_0)\in C(\overline{D})\cap C'(D\cap J)\cap C^2(D)$ и удовлетворяющее краевым условиям

$$U(\xi_0,\xi_0)=\tau(\xi_0), \qquad (2)$$

$$\lim_{\xi_0\to 0}U(\xi_0,\eta_0)\xi_0^{\gamma/\beta}=\psi(\eta)\,. \qquad (3)$$

Представим уравнение (1) в виде

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(U\eta+\beta\xi^{\alpha-1}u\right)+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\xi^{\alpha-2}u=0\,.$$

Интегрируя его в пределах от ε до ξ_0, получим

$$U_{\eta}(\xi_0,\eta)+\beta\xi_0^{\alpha-1}U(\xi_0,\eta)+$$

$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\int_{\varepsilon}^{\xi_0}\xi^{\alpha-2}U(\xi,\eta)d\xi= \qquad (4)$$

$$=U_{\eta}(\varepsilon,\eta)+\beta\varepsilon^{\alpha-1}U(\xi,\eta)\,.$$

Легко убедиться, что функция

$$U^{*}(\xi_0,\eta)=C(\eta)\xi_0^{-\gamma/\beta} \qquad (5)$$

на линии $\xi_0=\varepsilon$ удовлетворяет уравнению (4).

Запишем равенство

$$\frac{\partial C}{\partial\eta}\varepsilon^{-\gamma/\beta}+\beta\varepsilon^{\alpha-1}C(\eta)\varepsilon^{-\gamma/\beta}=$$

$$=U_{\eta}(\varepsilon,\eta)+\beta\varepsilon^{\alpha-1}U(\varepsilon,\eta)\,. \qquad (6)$$

Сравнивая левую и правую части равенства (6), заключаем, что

$$C(\eta)=\lim_{\varepsilon\to 0}U(\varepsilon,\eta)\varepsilon^{\gamma/\beta}=\psi(\eta)\,. \qquad (7)$$

С учетом (7) представим (4) в виде

$$U_{\eta}(\xi_0,\eta)+\beta\xi_0^{\alpha-1}U(\xi_0,\eta)+$$

$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\int_{\varepsilon}^{\xi_0}\xi^{\alpha-2}u(\xi,\eta)d\xi= \qquad (8)$$

$$=\varepsilon^{-\gamma/\beta}\psi'_{\varepsilon}(\eta)+\beta\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1}\psi_{\varepsilon}(\eta)\,.$$

Умножим обе части равенства (8) на $e^{-\beta(\eta-\eta_0)\xi_0^{\alpha-1}}$ и запишем результат следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(U(\xi_0,\eta)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\right)+$$

$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\int_{\varepsilon}^{\xi_0}U(\xi,\eta)\xi^{\alpha-2}d\xi= \qquad (9)$$

$$=e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\left(\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}}\psi'_{\varepsilon}(\eta)+\beta\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1}\psi_{\varepsilon}(\eta)\right).$$

Интегрируя (9) в пределах от ξ_0 до η_0, получим

$$U(\xi_0,\eta_0)+$$

$$+\left(\gamma-\beta(\alpha-1)\right)\int_{\xi_0}^{\eta_0}e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}d\eta\int_{\varepsilon}^{\xi_0}U(\xi,\eta)\xi^{\alpha-2}d\xi=$$

$$=\tau(\xi_0)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\xi_0)}+ \qquad (10)$$

$$+\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}}\int_{\xi_0}^{\eta_0}e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\left(\psi'_{\varepsilon}(\eta)+\beta\varepsilon^{\alpha-1}\psi_{\varepsilon}(\eta)\right)d\eta\,.$$

В интегральном уравнении (10) перейдем к пределу при $\varepsilon\to 0$, учитывая при этом, что $-\dfrac{\gamma}{\beta}>0$. Тогда (10) примет вид

$$U(\xi_0,\eta_0)+$$

$$+(\gamma-\beta(\alpha-1))\int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}d\eta\int_0^{\xi_0} U(\xi,\eta)\xi^{\alpha-2}d\xi= \tag{11}$$

$$=\tau(\xi_0)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\xi_0)}+$$

$$+\beta\cdot\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1}\int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\psi(\eta)d\eta$$

Из (11) видно, что задача поставлена корректно, если $-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1=0$. Итак, при условии $-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1=0$, решение уравнения (1) с краевыми условиями (2), (3) имеет вид

$$U(\xi_0,\eta_0)=\tau(\xi_0)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\xi_0)}+ \tag{12}$$

$$+\beta\int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}\psi(\eta)d\eta\,.$$

Если $-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1>0$, то решение задачи (1), (2), (3) сведется к решению интегрального уравнения

$$U(\xi_0,\eta_0)+$$

$$+(\gamma-\beta(\alpha-1))\int_{\xi_0}^{\eta_0} e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\eta)}d\eta\int_0^{\xi_0} U(\xi,\eta)\xi^{\alpha-2}d\xi= \tag{13}$$

$$=\tau(\xi_0)e^{-\beta\xi_0^{\alpha-1}(\eta_0-\xi_0)}\,.$$

Если $-\frac{\gamma}{\beta}+\alpha-1<0$, то задача Дарбу в постановке (1), (2), (3) не имеет решений.

Таким образом, если коэффициенты уравнения (1) на участке J границы области D не имеют особенностей, то и участок J используется как носитель краевого условия без «осложнений».

Если на участке границы Γ_1 коэффициенты уравнения (1) имеют особенности, то этот участок не всегда может служить носителем традиционного краевого условия.

Только после специальных исследований поведения коэффициентов и их комбинаций можно установить форму постановки краевого условия.

Список использованной литературы:

1. Бицадзе А. В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М.: Наука, 1981.
2. Невоструев Л. М. О задачах Дарбу для гиперболических уравнений с вырождением типа и порядка. – Дифф. уравнения, 1987, т. 23, с. 1780-1786.