



И. М. Киянов

ОПТИМАЛЬНЫЕ ПАРАМЕТРЫ ГЕОМЕТРИИ АРКИ С ЗАТЯЖКОЙ И ШПРЕНГЕЛЬНОЙ БАЛКИ, ПРЕДНАПРЯЖЕННЫХ ПОСТОЯННЫМ УСИЛИЕМ

В системах строительной механики открыты параметры геометрии, соответствующие максимальной суммарной работе усилий в лишних связях и не зависящие от нагрузки и степени преднапряжения. Приводится вывод формул для определения таких параметров в конструкциях: жесткая арка с гибкой затяжкой, шпренгельная балка (патент РФ № 2012749).

На рис. 1. показана пологая жесткая арка с гибкой затяжкой, имеющая: $\frac{f}{l} \leq \frac{1}{6}$; $E_a J_a = const$; $F_a = const$.

Ось арки очерчена по квадратной параболе, уравнение которой

$$y = \frac{4f}{l^2} x(l-x).$$

В затяжку включена связь, сохраняющая растягивающее усилие преднапряжения постоянным. Включенная в затяжку связь приближает пологую жесткую арку с гибкой затяжкой к системе один раз статически неопределимой. Если связь убрать, то в затяжке получится разрез. Действие убранной связи заменено двумя силами (см. рис. 1) – это основная система.

Каноническое уравнение метода сил:

$$x_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0.$$

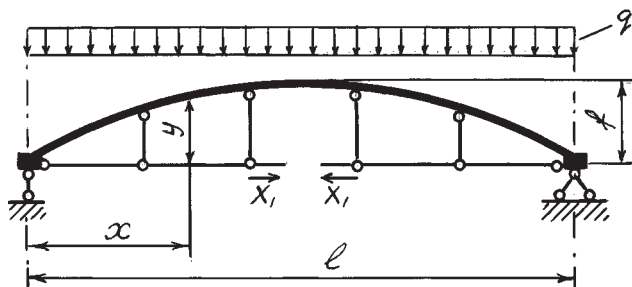


Рис 1. Основная система пологой жесткой арки с гибкой затяжкой.

От действия на основную систему равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q , приложенной по длине всего пролета, работает только криволинейная балка. Следовательно выражение для Δ_{1P} будет то же, что и для аналогичной двухшарнирной арки. Что касается перемещения δ_{11} , то по сравнению с пологой двухшарнирной аркой в аналогичной жесткой арке с гибкой затяжкой добавляется влияние удлинения затяжки в состоянии $X_1 = 1$, т. е. перемещение:

$$\delta_{11}^3 = \frac{1 \cdot l_3}{E_3 F_3},$$

где l_3 – длина затяжки;
 $E_3 F_3$ – жесткость затяжки на растяжение.

Таким образом, для δ_{11} имеем

$$\delta_{11} = \frac{l}{E_a F_a f} + \frac{8lf^2}{15E_a J_a} + \frac{l_3}{E_3 F_3 f}.$$

Пренебрегая влиянием продольных и поперечных сил в арке, записываем усилие в затяжке:

$$X_1 = - \frac{- \frac{ql^3 f}{15E_a J_a}}{\frac{l}{E_a F_a f} + \frac{8lf^2}{15E_a J_a} + \frac{l_3}{E_3 F_3 f}}.$$

Обозначим

$$\frac{l}{E_a F_a f} + \frac{8lf}{15E_a J_a} + \frac{l_3}{E_3 F_3 f} = U$$

Тогда

$$X_1 = \frac{ql^3}{15E_a J_a U}.$$

При $f = 0$ и при $f = \infty$ усилие в затяжке равно нулю. Это значит, что при определенной стреле усилие в затяжке будет максимальным (теорема Ролля).

Определяем стрелу арки, при которой усилие в затяжке будет максимальным:

$$\frac{dX_1}{df} = \frac{d}{df} \left(\frac{ql^3}{15E_a J_a U} \right) = 0;$$

$$\frac{d}{df} \left(\frac{1}{U} \right) = \frac{d}{df} (U^{-1}) = -U^{-2} \frac{dU}{df} = 0;$$

$$\frac{dU}{df} = 0;$$

$$\frac{8l}{15E_a J_a} - \frac{1}{f_{on}^2} \left(\frac{l}{E_a F_a} + \frac{l_3}{E_3 F_3} \right) = 0;$$

$$f_{on} = \sqrt{\frac{15}{8} \left(\frac{J_a}{F_a} + \frac{l_3 E_a J_a}{l E_3 F_3} \right)}. \quad (1)$$

При оптимальной стреле, полученной по формуле (1), требуемый эффект преднапряжения достигается меньшим усилием. Это значит, что и связь, создающая постоянное усилие преднапряжения, и затяжка при оптимальной стреле будут экономичнее.

Формула (1) показывает, что увеличение жесткости арки при неизменной жесткости затяжки приводит к увеличению оптимальной стрелы, а при увеличении жесткости затяжки (жесткость арки неизменна) оптимальная стрела арки с затяжкой приближается к оптимальной стреле арки без затяжки.

Взяв различные отношения жесткости арки к жесткости затяжки, определив по формуле (1) для каждого из них оптимальную стрелу, из серии арок с затяжкой одинакового пролета следует выбрать ту, которая при расчетной нагрузке будет наиболее полно удовлетворять требованиям прочности, жесткости и экономичности.

На рис. 2 показана основная система шпренгельной балки с одной стойкой в шпренгеле. В стойку 1-3 (см. рис. 2, а) включена связь, сохраняющая постоянным усилие в растянутых элементах шпренгеля 0-1 и 1-2 (связь на рисунке не показана). Точки пересечения осей растянутых элементов шпренгеля 0-1 и 1-2 с вертикальными осями, проходящими через центры шарниров опорных частей, лежат на нейтральном слое, совпадающем с осью 0-0.

За основную систему принята балка с разрезанным шпренгелем. Взаимное смещение сечений разреза для основной системы равно нулю. Поэтому каноническое уравнение метода сил имеет вид:

$$X_1 \delta_{11} + \Delta_{1P} = 0,$$

где δ_{11} – взаимное смещение сечений разреза под углом γ к горизонту от действия силы $X_1 = 1$;

Δ_{1P} – то же от приложенной нагрузки.

Сила $X_1 = 1$ вызывает в стойке 1-3 усилие равное $\bar{N}_{1-3} = 2 \cos(90^\circ - \gamma) = 2 \sin \gamma$, где γ угол наклона элементов шпренгеля 0-1 и 1-2 к горизонту (см. рис. 2, а/).

На шпренгельную балку действует сосредоточенная сила P , приложенная в середине пролета.

Перемещения определяем, пользуясь правилом перемножения эпюр.

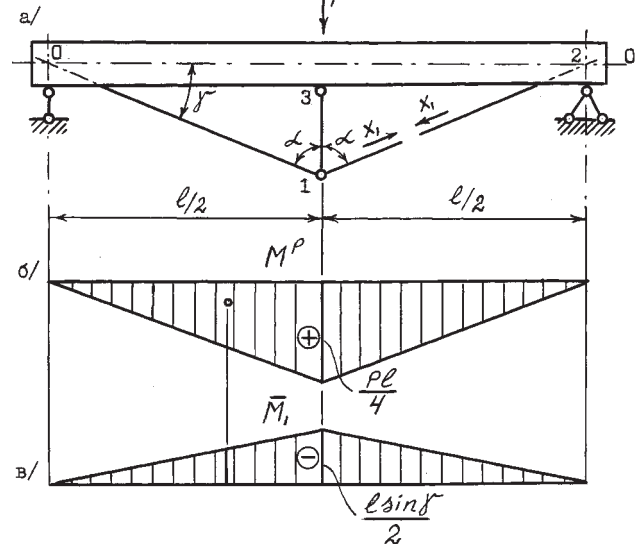


Рис. 2. Основная система шпренгельной балки с одной стойкой в шпренгеле. В стойку 1-3 включена связь, сохраняющая постоянным усилие в растянутых элементах шпренгеля (на рисунке связь не показана).

Умножив эпюру \bar{M}_1 (см. рис. 2, в) на ту же эпюру M^P , получим

$$\delta_{11}^{\sigma} = \frac{l \cdot l \sin \gamma \cdot l \sin \gamma}{2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot E_{\sigma} J} = \frac{l^3 \sin^2 \gamma}{12 E_{\sigma} J},$$

где $E_{\sigma} J$ – жесткость балки при изгибе.

Умножив эпюру \bar{M}_1 на эпюру M^P (см. рис. 2, б), получим

$$\Delta_{1P} = - \frac{P \cdot l \cdot l \cdot l \cdot \sin \gamma}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot E_{\sigma} J} = - \frac{Pl^3 \sin \gamma}{24 E_{\sigma} J}. \quad (2)$$

Единичное перемещение δ_{11} с учетом изгиба балки (δ_{11}^{σ}), растяжения растянутых элементов шпренгеля и сжатия балки равно

$$\delta_{11} = \frac{l^3 \sin^2 \gamma}{12 E_{\sigma} J} + \frac{l}{E_{uu} F_{uu} \cos \gamma} + \frac{l \cos^2 \gamma}{E_{\sigma} F_{\sigma}}. \quad (3)$$

Подставив перемещения (2) и (3) в каноническое уравнение метода сил, получим усилие в шпренгеле:

$$X_1 = \frac{Pl^2 \sin \gamma}{24 E_{\sigma} J \left(\frac{l^2 \sin^2 \gamma}{12 E_{\sigma} J} + \frac{1}{E_{uu} F_{uu} \cos \gamma} + \frac{\cos^2 \gamma}{E_{\sigma} F_{\sigma}} \right)} =$$

$$= \frac{Pl^2 \sin \gamma}{2l^2 \sin^2 \gamma + \frac{24E_\sigma J}{E_u F_u \cos \gamma} + \frac{24J \cos^2 \gamma}{F_\sigma}} \quad (4)$$

Параметром геометрии балки, показанной на рис. 2, является угол наклона растянутых элементов шпренгеля к горизонту (см. рис. 2,а, угол γ). Из функции (4) видно, что при $\gamma = 0$ и при $\gamma = 90^\circ$ усилие в растянутых элементах шпренгеля равно нулю. При оптимальном угле γ_{on} силы X_1 будут иметь максимальное значение.

Находится оптимальный угол наклона растянутых элементов шпренгеля к горизонту из уравнения, получаемого приравнением нулю производной от функции (4) по углу γ .

Обозначим: $\sin \gamma = U$; $\delta_{11} = V$.

Приравняем производную от (4) по параметру геометрии нулю:

$$\frac{dX_1}{d\gamma} = \frac{d}{d\gamma} \left(\frac{U}{V} \right) = \frac{V \frac{dU}{d\gamma} - U \frac{dV}{d\gamma}}{V^2} = 0;$$

$$V \frac{dU}{d\gamma} - U \frac{dV}{d\gamma} = 0; \quad (5)$$

$$\frac{dU}{d\gamma} = \cos \gamma; \quad (6)$$

$$\frac{dV}{d\gamma} = \frac{l^3}{12E_\sigma J} 2 \sin \gamma \cos \gamma + \frac{l}{E_u F_u} \cos^{-2} \gamma \sin \gamma - \frac{l}{E_\sigma F_\sigma} 2 \cos \gamma \sin \gamma. \quad (7)$$

Подставив (3), (6) и (7) в (5), получим

$$\frac{l^2 \sin^2 \gamma \cos \gamma}{12E_\sigma J} + \frac{1}{E_u F_u} + \frac{\cos^3 \gamma}{E_\sigma F_\sigma} - \frac{l^2 \sin 2\gamma \sin \gamma}{12E_\sigma J} - \frac{tg^2 \gamma}{E_u F_u} + \frac{\sin 2\gamma \sin \gamma}{12E_\sigma J} = 0 \quad (8)$$

Если пренебречь сжатием балки, то уравнение (8) получается проще:

$$\frac{l^2 E_u F_u \cos \gamma}{12E_\sigma J} - \frac{l^2 E_u F_u \sin 2\gamma \sin \gamma}{12E_\sigma J} + 1 - tg^2 \gamma = 0. \quad (9)$$

Взяв для шпренгельной балки определенного пролета различные отношения $\frac{E_u F_u}{E_\sigma J}$, определив из уравнения (9) для каждого из этих отно-

шений оптимальный угол γ , из серии шпренгельных балок следует выбрать ту, которая будет наиболее полно отвечать требованиям прочности, жесткости и экономичности.

На рис. 3 показан опорный узел шпренгельной балки, у которой точки пересечения осей растянутых элементов шпренгеля с вертикальными осями, проходящими через центры шарниров опорных частей, расположены ниже нейтрального слоя балки, на расстоянии Z от этого слоя. На рис. 3 нейтральный слой обозначен 0-0.

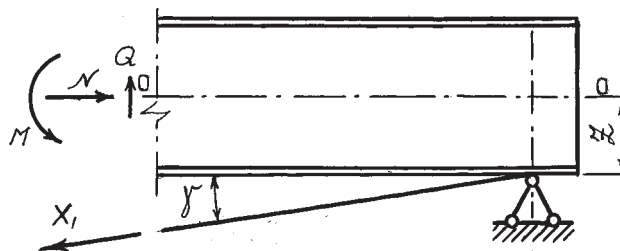


Рис. 3. Опорный узел шпренгельной балки.

На рис. 3 показан опорный узел шпренгельной балки. Эта шпренгельная балка имеет два параметра геометрии: γ – угол наклона растянутых элементов шпренгеля к горизонтали и расстояние Z . Оптимальное значение их находится из системы двух дифференциальных уравнений (патент РФ № 2012749).

Чтобы решить систему уравнений, определяем сначала усилие X_1 .

Допустим, что у шпренгельной балки, показанной на рисунке 3, нагрузка такая же, как и у шпренгельной балки, показанной на рис. 2, – сосредоточенная сила P , приложенная в середине пролета.

Находим перемещения Δ_{1P} и δ_{11} :

$$\Delta_{1P} = -\frac{Pl^3 \sin \gamma}{24E_\sigma J} - \frac{Pl \cdot l \cdot \cos \gamma Z}{4 \cdot 2E_\sigma J} = -\frac{Pl^2}{8E_\sigma J} \left(\frac{\sin \gamma}{3} + Z \cos \gamma \right), \quad (10)$$

где $Z \cos \gamma$ – ордината прямоугольной эпюры изгибающих моментов в балке от действия силы $\bar{X}_1 = 1$;

$$\delta_{11} = \frac{l^3 \sin^2 \gamma}{12E_\sigma J} + \frac{1}{E_u F_u \cos \gamma} + \frac{lZ^2 \cos^2 \gamma}{E_\sigma J}. \quad (11)$$

При нахождении перемещений (10) и (11) не учтено сжатие балки, так как его влияние на оптимальный параметр геометрии незначительно.

Усилие X_1 равно

$$X_1 = \frac{Pl(l \sin \gamma + 3Z \cos \gamma)}{24E_0 J \left(\frac{l^2 \sin^2 \gamma}{12E_0 J} + \frac{1}{E_u F_u \cos \gamma} + \frac{Z^2 \cos^2 \gamma}{E_0 J} \right)}. \quad (12)$$

Приравниваем частную производную от функции (12) по углу γ нулю:

$$\frac{\partial X_1}{\partial \gamma} = \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{U_\gamma}{V_\gamma} \right) = \frac{V_\gamma \frac{\partial U_\gamma}{\partial \gamma} - U_\gamma \frac{\partial V_\gamma}{\partial \gamma}}{V_\gamma^2} = 0;$$

$$V_\gamma \frac{\partial U_\gamma}{\partial \gamma} - U_\gamma \frac{\partial V_\gamma}{\partial \gamma} = 0, \quad (13)$$

где $U_\gamma = l \sin \gamma + 3Z \cos \gamma$;

$$V_\gamma = \frac{l^2 \sin^2 \gamma}{12E_0 J} + \frac{1}{E_u F_u \cos \gamma} + \frac{Z^2 \cos^2 \gamma}{E_0 J}.$$

Находим частные производные от U_γ и V_γ :

$$\frac{\partial U_\gamma}{\partial \gamma} = l \cos \gamma - 3Z \sin \gamma; \quad (14)$$

$$\frac{\partial V_\gamma}{\partial \gamma} = \frac{l^2}{12E_0 J} 2 \sin \gamma \cos \gamma + \frac{1}{E_u F_u} \cos^{-2} \gamma \sin \gamma - \frac{2Z^2 \cos \gamma \sin \gamma}{E_0 J} =$$

$$= \left(\frac{l^2}{12} - Z^2 \right) \frac{\sin 2\gamma}{E_0 J} + \frac{tg \gamma}{E_u F_u \cos \gamma}.$$

Подставив в уравнение (13) частные производные (14) и (15), а также значения U_γ и V_γ , получим уравнение:

$$\frac{l^3 \sin^2 \gamma \cos \gamma}{12E_0 J} + \frac{l}{E_u F_u} + \frac{lZ^2 \cos^3 \gamma}{E_0 J} - \frac{3l^2 Z \sin^3 \gamma}{12E_0 J} - \frac{3Ztg \gamma}{E_u F_u} - \frac{3Z^3 \sin \gamma \cos^2 \gamma}{E_0 J} - \left(\frac{l^2}{12} - Z^2 \right) \frac{l \sin \gamma \sin 2\gamma}{E_0 J} - \frac{ltg^2 \gamma}{E_u F_u} - 3Z \left(\frac{l^2}{12} - Z^2 \right) \frac{\sin 2\gamma \cos \gamma}{E_0 J} - \frac{3Ztg \gamma}{E_u F_u} = 0;$$

$$\frac{l^2 \sin^2 \gamma}{12E_0 J} (l \cos \gamma - 3Z \sin \gamma) + \frac{l}{E_u F_u} (1 - tg^2 \gamma) + \frac{Z^2 \cos^2 \gamma}{E_0 J} (l \cos \gamma - 3Z \sin \gamma) - \frac{6Ztg \gamma}{E_u F_u} - \left(\frac{l^2}{12} - Z^2 \right) \frac{\sin 2\gamma (l \sin \gamma + 3Z \cos \gamma)}{E_0 J} = 0;$$

$$\left(\frac{l^2 \sin^2 \gamma}{12} + Z^2 \cos^2 \gamma \right) (l \cos \gamma - 3Z \sin \gamma) + \frac{E_0 J}{E_u F_u} [l(1 - tg^2 \gamma) - 6Ztg \gamma] - \left(\frac{l^2}{12} - Z^2 \right) (l \sin \gamma + 3Z \cos \gamma) \sin 2\gamma = 0. \quad (16)$$

При $Z=0$ уравнение (16) примет вид:

$$\frac{l^2}{12} \sin^2 \gamma \cos \gamma + \frac{E_0 J}{E_u F_u} (1 - tg^2 \gamma) - \frac{l^2}{12} \sin \gamma \sin 2\gamma = 0. \quad (17)$$

Приравниваем частную производную от X_1 по Z нулю:

$$\frac{\partial X_1}{\partial Z} = \frac{V_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} - U_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z}}{V_Z^2} = 0;$$

$$V_Z \frac{\partial U_Z}{\partial Z} - U_Z \frac{\partial V_Z}{\partial Z} = 0, \quad (18)$$

где $U_Z = l \sin \gamma + 3Z \cos \gamma$;

$$V_Z = \frac{l^2 \sin^2 \gamma}{12E_0 J} + \frac{1}{E_u F_u \cos \gamma} + \frac{Z^2 \cos^2 \gamma}{E_0 J}.$$

Находим частные производные от U_Z и V_Z :

$$\frac{\partial U_Z}{\partial Z} = 3 \cos \gamma; \quad (19)$$

$$\frac{\partial V_Z}{\partial Z} = \frac{2 \cos^2 \gamma Z}{E_0 J}. \quad (20)$$

Подставив в уравнение (18) частные производные (19) и (20), а также значения U_Z и V_Z , получим уравнение:

$$\frac{3l^2 \sin^2 \gamma \cos \gamma}{12E_0 J} + \frac{3 \cos \gamma}{E_u F_u \cos \gamma} + \frac{3 \cos^3 \gamma Z^2}{E_0 J} - \frac{2l \sin \gamma \cos^2 \gamma Z}{E_0 J} - \frac{6 \cos^3 \gamma Z^2}{E_0 J} = 0;$$

$$Z^2 + \frac{2ltg \gamma}{3} Z - \frac{l^2 tg^2 \gamma}{12} - \frac{E_0 J}{E_u F_u \cos^3 \gamma} = 0. \quad (21)$$

При $\gamma=0$ уравнение (21) имеет следующее решение:

$$Z_{on} = \sqrt{\frac{E_0 J}{E_u F_u}}. \quad (22)$$

Из формулы (22) видно, что увеличение жесткости балки и уменьшение жесткости затяжки при-

водят к увеличению Z_{on} . Взяв для шпренгельной балки определенного пролета, имеющей два пара-

метра геометрии, различные отношения $\frac{E_o J}{E_u F_u}$,

определив из уравнений (16) и (21) для каждого из этих отношений оптимальные параметры геометрии γ_{on} и Z_{on} , из серии шпренгельных балок следует выбрать ту, которая наиболее полно будет удовлетворять требованиям прочности, жесткости и экономичности.

В шпренгельной балке, показанной на рис. 2, связь, создающая усилие преднапряжения в растянутых элементах шпренгеля и сохраняющая его постоянным, включена не в растянутый элемент шпренгеля, а в сжатую стойку. Выгодность включения связи в сжатую стойку легко доказать. Дополнительный отрицательный изгибающий момент (отрицательный по знаку), возникающий от перестановки связи из растянутого элемента шпренгеля в сжатую стойку, равен.

$$\Delta M = P_c \left[\frac{l}{2} (0,5 - \sin \gamma) + Z (0,5 \operatorname{ctg} \gamma - \cos \gamma) \right], \quad (23)$$

где P_c – усилие, создаваемое связью.

В растянутый элемент шпренгеля ставится связь, создающая растягивающее усилие, а в сжатую стойку – сжимающее. В том и в другом случае усилие, создаваемое связью, равно P_c . Создание одинакового усилия означает, что стоимость связей примерно одинакова.

Шпренгельная балка, показанная на рис. 2, – удачное техническое решение. Роль сжатой стойки в этой балке выполняет связь. При таком использовании связи отпадает необходимость делать стойку, что удешевляет установку связи.

Из формулы (23) видно, что при малых углах γ даже от небольшого усилия преднапряжения, создаваемого экономичной связью, в балке будут возникать значительные отрицательные изгибающие моменты. А это значит, что при малых углах γ не только связь, но и балка будет экономичной. И формула (23), и уравнение (16) указывают на рациональность небольших углов наклона растянутых элементов шпренгеля к горизонтали.