А. Н. Поляков

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ТЕПЛОВОЙ ИСТОЧНИК В УПОРНОМ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПОДШИПНИКЕ С НЕПОДВИЖНЫМИ СЕГМЕНТАМИ

Представлена стохастическая тепловая модель упорного гидродинамического подшипника с неподвижными сегментами. Адекватность модели подтверждена экспериментальными исследованиями горизонтально-шлифовального станка.

Теория и практика теплового моделирования станков показывает, что структура и адекватность тепловой модели в значительной степени определяются моделью теплового источника.

В шлифовальных станках одним из распространенных типов используемых подшипников являются гидродинамические. В большей степени распространение получили радиальные подшипники. Вместе с этим в отдельных моделях станков для восприятия осевой нагрузки устанавливаются упорные подшипники (подпятники). Осевые опоры по конструктивному исполнению подразделяются на два основных типа: опоры с неподвижными наклонными (несущими) поверхностями скольжения и опоры с самоустанавливающимися поверхностями. Это различие вносит особенности в методику их расчета. В данной работе рассматриваются подшипники первого исполнения.

Целью работы являлось разработка стохастического теплового источника гидродинамического упорного подшипника для последующей реализации его в стохастической тепловой модели станка. Не углубляясь в актуальность стохастического теплового моделирования, отметим, что необходимость такого подхода в тепловом моделировании объективно обусловлена двумя причинами. Первая причина объясняется существенной параметрической неопределенностью входящих в модель параметров. Вторая причина лежит в стохастической природе термодинамических процессов в станке. Напомним, что стохастическая тепловая модель включает две свои разновидности: вероятностную и статистическую. Вероятностная модель основана на построении законов распределения для выходных функций модели в соответствии с основными положениями теории вероятностей. В этом случае закон распределения для искомой функции получаются как результат последовательных преобразований законов входящих в модель параметров. Статистическая модель основана на статистической обработке результатов многовариантных вычислений детерминированной модели. Принципиальное отличие при практической реализации двух разновидностей стохастической модели выражается в количестве выполняемых операций в одном расчете модели. Как правило, вероятностная модель более сложная (сложней, чем детерминированная), но требует меньше итераций расчета (в основном только для численного интегрирования и дифференцирования), чем статистическая.

Основу стохастической модели составляет детерминированная модель. На первом этапе стохастического моделирования всегда выполняется оценка эффективности реализации вероятностного и статистического подходов. При этом может оказаться, что вероятностная модель нереализуема, ввиду сложности детерминированной модели, обусловленной наличием зависимых случайных функций.

В качестве базовой детерминированной модели использована модель теплового источника, приведенная в работах Чернавского С. А., Воскресенского В. А. и Дьякова В. И. Проведенный вычислительный эксперимент, в котором сопоставлялись эти модели и приведенные модели в известных работах Решетова Д. Н. и Пуша А. В., показал: модели изложенные в работах первых трех авторов, позволили получить наименьшие расхождения с экспериментальными данными фирмы **FAG**. Для сопоставимого параметра быстроходности подшипника результаты моделирования оказались наиболее близкими (расхождения не превысили **10%**). Результаты, полученные по моделям, изложенным в работах Решетова Д. Н. и Пуша А. В. (это основные справочные пособия для расчетов металлорежущих станков), отличались более чем на **100%**. Хотя это не означает, что эти модели не верны. Это лишь означает, что в работах Решетова Д. Н. и Пуша А. В. представленные модели могут использоваться при наличии дополнительных пояснений и ограничений.

Не останавливаясь подробно на анализе возможности практической реализации вероятностного теплового источника для упорного гидродинамического подшипника, отметим следующее. При выводе окончательного соотношения для вероятностного теплового источника сформировались зависимые случайные функции с условными законами распределения, аналитическое представление которых получить не удалось.

Выделим основные задачи и алгоритмы, реализующие статистический подход при построении теплового источника упорного гидродинамического подшипника.

Первая задача. Определение числовых характеристик: математическое ожидание и дисперсия от мощности тепловыделения в подшипнике.

Вторая задача. Построение статистического закона распределения для мощности тепловыделения.

Назначение первой задачи очевидно. Необходимость во второй задаче обусловлена главной задачей теплового моделирования шпиндельного узла станка и подшипника в частности – определение температурного поля. Актуальность данной задачи порождается еще и нелинейностью мощности тепловыделения в подшипнике, обусловленной функциональной связью вязкости масла и температуры. Установление закона распределения для мощности тепловыделения в подшипнике позволит использовать статистическую модель теплового источника в гибридной стохастической тепловой модели, совместно реализующей вероятностный и статистический подход при построении температурного поля. В гибридной стохастической тепловой модели: статистический подход используется в тепловом источнике, а построение температурного поля осуществляется реализацией вероятностного подхода.

При построении стохастической модели необходимо выбрать семейства неслучайных и случайных параметров.

Для подпятника с неподвижными наклонными несущими поверхностями потери на трение возникают на двух участках. Первый участок является плоским без скосов или иногда его называют плоскопараллельным из-за его параллельности сопрягаемой поверхности. Этот участок отвечает за восприятие нагрузки на переходных режимах, когда скорость относительного перемещения недостаточна для образования в клиновом зазоре необходимого гидродинамического давления. Второй участок – клиновой и принимается в литературе как нагруженная зона.

Потери на клиновых участках $N_к$ имеют вид, **[Вт]**:

$$N_к = \left(z \cdot W\mu_{ср} b R_{пр}^3\right)^{0,5} \omega^{1,5} \xi \qquad (1)$$

где z – число клиновых участков;

ω – частота вращения подшипника **1/с**;

b – длина наклонной поверхности

$$b = 0,5 D_1 (\beta - 1), \text{ м};$$

$R_{пр} = \dfrac{D_1(\beta^3 - 1)}{3(\beta^2 - 1)}$ – приведенный радиус подшипника, **м**;

D_1 – внутренний диаметр подпятника, **м**;

D_2 – наружный диаметр подпятника, **м**;

$\beta = D_2 / D_1$ – отношение диаметров подпятника;

W – нагрузка, действующая на подшипник, **Н**;

ξ – безразмерный коэффициент сопротивления вращению, определяется по диаграмме.

Выражение для потерь на плоскопараллельных участках N_a имеет вид, **[Вт]**:

$$N_a = z \cdot \theta_a \frac{\mu_{ср}\omega^2 D_1^4}{64 h_{\min}} (\beta^4 - 1), \qquad (2)$$

где θ_a – угловой размер плоскопараллельного участка;

$h_{\min}$ – толщина смазочного слоя на выходе из клина.

Угловой размер плоскопараллельного участка:

$$\theta_a = \frac{8W}{z[p_m] D_1^2 (\beta^2 - 1)}, \qquad (3)$$

здесь $[p_m]$ – допустимая удельная нагрузка на подшипник, **Па**.

Толщина смазочного слоя на выходе из клина определяется по выражению, **[м]**:

$$h_{\min} = l\left(\frac{\mu_{ср}\omega R_{пр} b z \zeta}{W}\right)^{0,5} \qquad (4)$$

здесь ζ – безразмерный коэффициент нагруженности; l – средняя ширина несущей поверхности, **[м]**:

$$l = 0,25 \cdot \theta_к D_1 (\beta + 1) \qquad (5)$$

Угол наклонного участка несущей поверхности θ_k определяется, **[м]**:

$$\theta_к = \frac{2\pi}{z} - \frac{4 b_к}{D_1(1 + \beta)} - \theta_a \qquad (6)$$

Для упорных подшипников оптимизируемыми параметрами являются:

1) размер плоского участка **а**. Известно, что размер **а** выбирают так, чтобы среднее давление неподвижной пяты на плоскопараллельную поверхность подпятника не превышало допускаемого;

2) соотношение диаметров или радиусов подпятника, т. е. оптимизируемыми являются D_2 и D_1;

3) соотношение ширины несущей поверхности l и длины наклонной поверхности b;

4) число наклонных поверхностей z определяют в зависимости от характера вращения пяты. Так для постоянного направления вращения, характерного для работы шпинделя шлифовального станка:

$$z = \frac{\pi D_{cp}}{l + b_к + a} \tag{7}$$

где $b_к$ – ширина радиальной канавки, разделяющей поверхность подпятника на равные участки принимают равной $2-4$ *мм*.

На основании представленной детерминированной модели теплового источника (1)-(7) семейство случайных параметров образуют внутренний диаметр D_1, параметр β отношений диаметров подпятника и ширина разделительной канавки $b_к$. Все остальные параметры принимаются неслучайными.

Прежде чем перейти к изложению алгоритма формирования статистического теплового источника, остановимся на процедуре рандомизации или имитации случайных величин при заданном законе распределения и автоматизации задания параметров ξ ζ, в соотношениях (1) и (4).

Рандомизация строится по следующему алгоритму:

1) формируется источник случайных чисел x_R из класса вещественных чисел, $x_R \in [0,1]$.

Для этого используется генератор случайных чисел из диапазона от **0** до некоторого значения N_{max}, определяемого компилятором (например, для компилятора **Watcom C/C++** $N_{max} = 32767$; для **Borland C 3. 0** $N_{max} = 232$):

$$x_R = N_i / N_{max}. \tag{8}$$

здесь N_i – текущее значение, генерируемое генератором случайных чисел.

2) устанавливается диапазон неопределенности случайных величин. На основании чего выполняется их рандомизация, в соответствии с выражением вида:

$$x = x_{min} + x_R \Delta_x \tag{9}$$

где x_{min} – минимальное значение случайной величины, задаваемое заранее;

Δ_x – приращение случайной величины x:

$$\Delta_x = (x_{max} - x_{min}) / m, \tag{10}$$

где m – количество рандомизируемых чисел x_R.

Таким образом, формируется следующая совокупность случайных параметров:

$$D_1 = D_{min} + x_R \Delta_D; \beta = \beta_{min} + x_R \Delta_\beta;$$
$$b_к = b_{к,min} + x_R \Delta_b; \tag{11}$$

В общем случае безразмерный коэффициент сопротивления вращению ξ и безразмерный коэффициент нагруженности ζ выбираются по диаграммам, в зависимости от соотношения толщины смазочного слоя на входе h_2 и выходе h_1 из клина. Количественно это описывается безразмерным параметром $\beta_h = h_2 / h_1$. В работах по расчету гидродинамических подшипников отмечается, что для эксплуатационных режимов работы следует принимать параметр β_h из диапазона: $2 \le \beta_h \le 3$. Именно поэтому в литературе приводятся данные по безразмерным коэффициентам ξ и ζ из условия, что $\beta_h = 2$ или $\beta_h = 3$.

Принимая во внимание, что в реальных условиях в конструкциях условие соблюдения параметра β_h, заложенное в проекте, может быть нарушено по различным причинам, назначение фиксированного значения ξ и ζ осуществляется путем рассмотрения этих параметров в виде случайных величин, с равномерным распределением. При этом нижняя и верхние грани области состояний этих параметров являются переменными, зависящими от случайной величины $x_\xi = l / b$.

Применение в автоматизированных расчетах для задания значений безразмерных коэффициентов ξ и ζ в виде диаграмм неудобно. Поэтому следует использовать интерполяционные зависимости:

– для $\beta_h = 2$

$$\xi(x_\xi) = 0{,}196 + 0{,}0446 x_\xi + 0{,}0343 x_\xi^2 \tag{12}$$

$$\zeta(x_\xi) = 0{,}158 - 0{,}109x_\xi + 0{,}0234x_\xi^2; \quad (13)$$

– для

$\beta_h = 3$

$$\xi(x_\xi) = 0{,}18 + 0{,}034x_\xi + 0{,}0235x_\xi^2 - 0{,}001x_\xi^3 \quad (14)$$

$$\zeta(x_\xi) = 0{,}146 - 0{,}101x_\xi + 0{,}0221x_\xi^2. \quad (15)$$

Как показал проведенный вычислительный эксперимент, расхождение значений, полученных по этим выражениям и с помощью диаграмм, находится в пределах $\pm 1\%$.

Задание случайных параметров ξ и ζ осуществляется следующем образом. В соответствии с принятым равномерным законом распределения для каждого значения x_ξ следует записать выражения для плотностей распределений $g_{x_\xi}(x_\xi)$ и $g_{x_\zeta}(x_\zeta)$ в виде:

$$g_{x_\xi}(x_\xi) = \frac{1}{\xi_2(x_\xi) - \xi_3(x_\xi)};$$

$$g_{x_\zeta}(x_\xi) = \frac{1}{\zeta_2(x_\xi) - \zeta_3(x_\xi)} \quad (16)$$

где $x_{\xi,3}, x_{\xi,2} \in [0{,}2;2]$.

Здесь индексы «2» и «3» используются для обозначений функциональных зависимостей при соответствующих значениях параметра β_h.

Для проведения более полного анализа диапазон изменения $x_\xi = L/B$ здесь принят более широкий, чем обычно принимается (традиционно принимают диапазон изменения $x_{\xi,3}, x_{\xi,2} \in [0{,}5;1{,}6]$). Случайная величина x_ξ рандомизируется в соответствии с выражением (9). Каждому одному значению x_ξ соответствует не единственные значения параметров ξ и ζ, а совокупности случайных величин с соответствующими плотностями распределений описываемых выражением (16). В этом случае коэффициенты ξ и ζ выбираются в соответствии с выражениями:

$$\xi_i = \xi_{3,i} + x_{\xi,i}\Delta_{\xi,i} \text{ и } \zeta_i = \zeta_{3,i} + x_{\xi,i}\Delta_{\zeta,i}$$

$$\Delta_{\xi,i} = \left|\xi_{2,i} - \xi_{3,i}\right| \text{ и } \Delta_{\zeta,i} = \left|\zeta_{2,i} - \zeta_{3,i}\right|.$$

здесь i – индекс соответствующий выбранному значению x_ξ.

Алгоритм формирования статистического теплового источника включает семь основных блоков (рисунок 1).

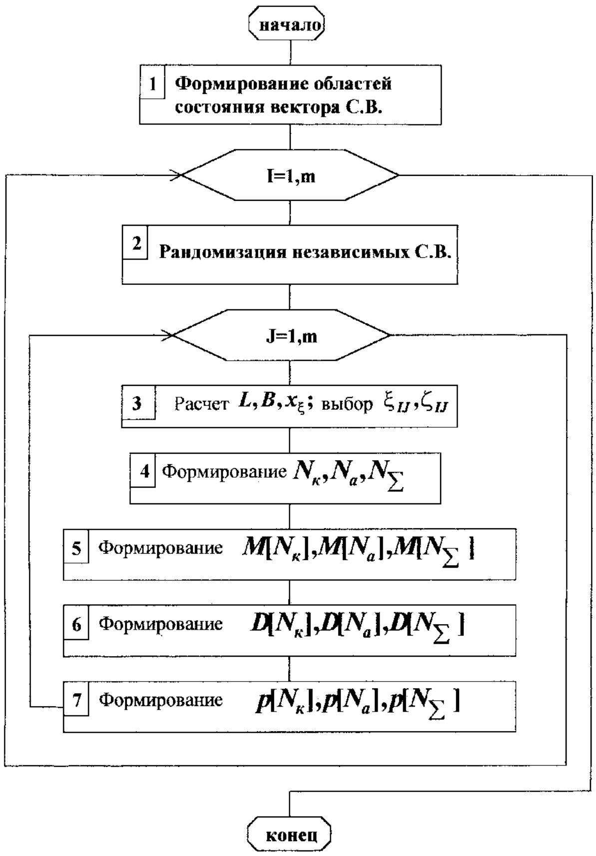

Рисунок 1. Блок-схема алгоритма формирования числовых характеристик и статистической функции распределения

В **первом** блоке осуществляется формирование областей состояния вектора случайных величин. Так, для внутреннего диаметра подшипника будем принимать $\Delta_{D_1} = \pm 0{,}5D_1$. Для коэффициента $\beta_{min} = 1{,}5$; $\beta_{max} = 2$ и $\Delta_\beta = 0{,}5$. Ширина канавки принимается $b_{к,min} = 2$ *мм* и $b_{к,maa} = 4$ *мм*.

Второй блок находится внутри цикла $I = 1, m$. Цикл организован на рандомизации случайных чисел. Во втором блоке помещается источник случайных чисел x_ξ, по значениям которого, в соответствии с соотношением (11), осуществляется формирование вектора случайных величин: $D_1, \beta, b_к$. После этого начинает выполняться второй цикл со счетчиком J. Цикл открывается **третьим** блоком, в котором происходит выбор безразмерных коэффициентов ξ_{IJ}, ζ_{IJ}. Их выбор строится на предварительном вычислении средней ширины несущей поверхности l и длины ее наклонного участка b. Этот блок также включает: определение углов наклонного и плоскопараллельного участков несущей поверхности $\theta_к$ и θ_a, соответственно; минимальной толщины смазочного слоя $h_{\min}$.

Четвертый блок включает организацию вычислительного процесса для составляющих потерь на трение $N_к$, N_a и суммарных потерь в подшипнике N_Σ. В этом блоке формируются три совокупности случайных величин $N_{к,i}$ $N_{a,i}$, и $N_{\Sigma,i}$. Индекс «i» соответствует текущей реализации случайных величин, входящих в (1) и (2).

В **пятом** блоке вычисляются математические ожидания случайных величин, вычисленных в четвертом блоке, представляющих среднее арифметическое для отдельных совокупностей $N_{к,i}$ $N_{a,i}$, и $N_{\Sigma,i}$.

$$M[N_k] = \sum_{i=1}^{m} N_{к,i} / m ; M[N_a] = \sum_{i=1}^{m} N_{a,i} / m ; \quad (17)$$

$$M[N_\Sigma] = \sum_{i=1}^{m} N_{\Sigma,i} / m .$$

Шестой блок по структуре подобен **пятому**, только здесь вычисляются дисперсии искомых случайных величин $D[N_к], D[N_a]$ и $D[N_\Sigma]$ в соответствии с выражением:

$$D[N_к] = \sum_{i=1}^{m} N_{к,i}^2 / m - M^2[N_к];$$

$$D[N_a] = \sum_{i=1}^{m} N_{a,i}^2 / m - M^2[N_a];$$

$$D[N_\Sigma] = \sum_{i=1}^{m} N_{\Sigma,i}^2 / m - M^2[N_\Sigma] \quad (18)$$

В **седьмом** блоке выполняется построение статистической функции распределения. Для этого выбирается число интервалов p и вся область состояний для $N_к$, N_a и N_Σ разбивается на p интервалов. Тогда размер каждого интервала составляет следующие величины:

$$\Delta_{1,N_k} = \Delta_{N_k} / p; \ \Delta_{2,N_a} = \Delta_{N_a} / p$$

и

$$\Delta_{3,N_\Sigma} = \Delta_{N_\Sigma} / p ,$$

где $\Delta_{N_k} = N_{k,\max} - N_{k,\min}$;

$\Delta_{N_a} = N_{a,\max} - N_{a,\min}$;

$\Delta_{N_\Sigma} = N_{\Sigma,\max} - N_{\Sigma,\min}$.

После этого устанавливаются относительные частоты попадания текущих случайных величин $N_{к,i}$, $N_{a,i}$ и $N_{\Sigma,i}$ в виде:

$$p_{1,j} = m_{1,j} / m ; p_{2,j} = m_{2,j} / m ; p_{3,j} = m_{3,j} / m ,$$

где $m_{1,j}; m_{2,j}; m_{3,j}$ – частота попадания текущих случайных величин $N_{к,i}$, $N_{a,i}$ и $N_{\Sigma,i}$ в соответствующие интервалы Δ_{1,N_k} Δ_{2,N_a}, и Δ_{3,N_Σ}.

Предложенный алгоритм был реализован программно. После этого был проведен вычислительный эксперимент, в ходе которого исследовались следующие положения:

1) влияние ширины диапазона неопределенности каждого из случайных параметров D_1, β и $b_к$ на характер функции распределения выходных случайных функций $N_к$, N_a и N_Σ и их область состояний;

2) влияние количества рандомизируемых чисел m на флуктуацию соответствующих числовых характеристик и вид функций распределения выходных случайных функций $N_к$, N_a и N_Σ;

3) выбор рационального числа интервалов p для построения законов распределения случайных функций $N_к$, N_a и N_Σ.

В целях сокращения объема статьи иллюстрации приведены для кривых распределения только суммарных потерь N_Σ (рисунок 2). Кривые **1** и **3** соответствует меньшему значению, а кривые **2** и **4** соответствуют большим значениям неопределенности для случайных параметров $b_к$ (рисунок 2. а) β, (рисунок 2. б) и D_1 (рисунок 2. в). Анализ кривых распределения показывает, что наиболее сильное влияние на характер функции распределения суммарных потерь на трение N_Σ оказывают флуктуации внутреннего диаметра D_1 и коэффициента β. Кривые распределения **1** и **2** получены при рандомизации 10000 реализаций, т. е. $m = 10000$. Кривые распределения **3** и **4** получены при $m = 500$. Сопоставление кривых распределения **1** и **3**, а также **2** и **4** показывает, что такое большое число реализаций случайного процесса, как **500,** еще не обеспечивает хорошего качества статистического закона распределения. Для установления рационального числа интервалов разбиения p вычислительный эксперимент включал построение законов распределения при различном количестве интервалов p и различном числе реализаций m. При этом рациональное число интервалов p следует принимать не выше 20. Именно это число интервалов позволяет получать вполне устойчивый характер статистического закона распределения при числе реализаций случайных функций: $m \leq 32767$. Именно это количество реализаций случайного процесса для **ПК** обеспечивает вполне приемлемые машинные затраты. В конкретном примере расчет выполнен для упорного подшипника горизонтально-шлифовального станка высокой точности с внутренним диаметром $D_1 = 58\,мм$. Расчет проводился для частоты вращения $n = 3000\,мин^{-1}$ для масла $И-12$ при температуре $35^\circ C$. Этой температуры, как показали натурные эксперименты, масло достигает после **30** минут работы станка, при начальной температуре окружающей среды не выше $20^\circ C$.

Таким образом, приведенная модель теплового источника может быть встроена в общую стохастическую тепловую модель шпиндельного узла и станка в целом. Однако вычислительные затраты на формирование статистического источника могут стать определяющими эффективность теплового моделирования станка, если в алгоритме формирования температурного поля будут жестко увязаны реализации случайного источника с реализациями случайного термодинамического процесса в шпинделе. Поэтому статистический тепловой источник представляет практический интерес только в гибридной тепловой модели, разработка которой осуществляется в настоящее время.

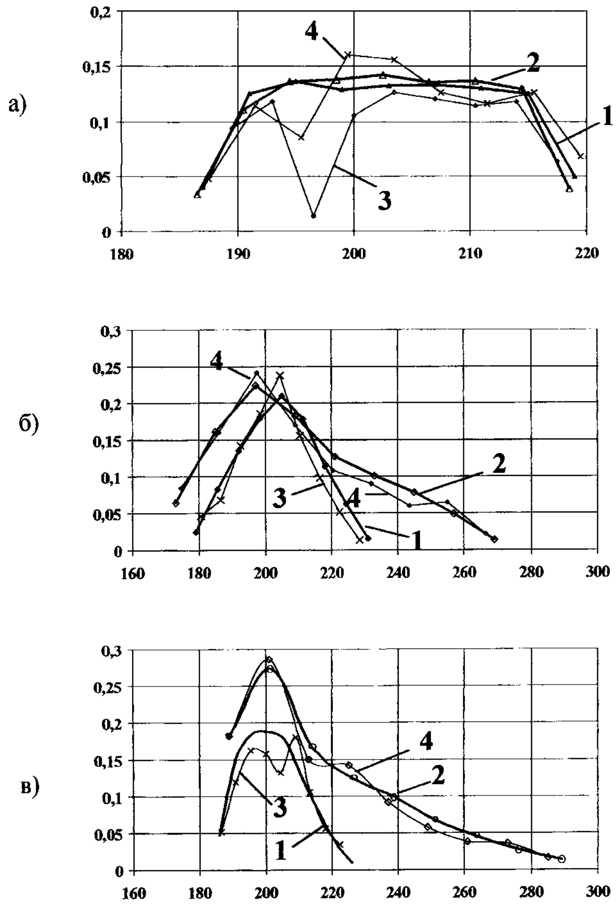

Рисунок 2. Кривые распределения для суммарных потерь трения в упорном гидродинамическом подшипнике