Е.В. Квитек, В.Н. Тарасов, В.Д. Шевеленко

ФИЛЬТРАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИГНАЛОВ МЕТОДОМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ОРТОГОНАЛИЗАЦИИ

В работе рассматривается спектральный метод фильтрации измерительных сигналов, основанный на возможности сокращения объема преобразований над сигналом путем перехода от базиса гармонических функций к базису в виде ядра Дирихле.

Возрастание требований к микроминиатюризации, надежности, точности, энергопотреблению и стоимости частно-избирательных устройств служат стимулом к развитию новых методов фильтрации. Однако получение измерительной информации об изменениях амплитуд и фаз гармоник или изменениях параметров групповых сигналов, представляющих собой суперпозиции гармоник, затруднено недостаточно высокими качественными показателями фильтров.

Использование для целей фильтрации интеграла Дюамеля предполагает формирование весовых функций, определяющих вид импульсной реакции фильтра, из которых наибольшее применение находят ступенчатые или дискретные [1]. Формирование непрерывных весовых функций требует анализавозможностей, потенциально заложенных в интегральных соотношениях типа интеграла Дюамеля.

Возможность представления входного сигнала, воздействующего на линейную стационарную систему с оператором D и импульсной характеристикой

$h(t-\tau) = D\delta(t-\tau)$, где $\delta(t-\tau)$ - запаздывающая на τ относительно начала координат дельта-функция, в виде

$$U_{вх}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\tau) h(t-\tau)\,d\tau$$

позволяет определить выходную реакцию скалярным произведением

$$U_{вых}(t) = D\int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\tau)\delta(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\tau)h(t-\tau)\,d\tau . \qquad (1)$$

Для спектра выходной реакции имеем:

$$U_{вых}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{вых}(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} \cdot \left[\int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\tau)h(t-\tau)\,d\tau\right]dt \qquad (2)$$

Произведя в (2) замену переменных $t-\tau=\xi$, получим:

$$U_{вых}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau = K(j\omega)U_{вх}(j\omega), \qquad (3)$$

где $U_{вх}(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$ - спектр входного воздействия;

$K(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\xi)e^{-j\omega\xi}d\xi$ - частотный коэффициент передачи системы.

Применение к выражению (3) обратного преобразования Фурье дает

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} U_{вх}(j\omega)K(j\omega)e^{j\omega t}d\omega. \qquad (4)$$

Из (4) следует, что формирование весовой функции h(t-τ) должно производиться с учетом того, что K(jω) устройства, реализующего левую часть (4), есть спектр весовой функции, а значит целенаправленное изменение K(jω) возможно управлением спектром весовой функции.

Поскольку фильтрация измерительных сигналов заключается в целенаправленном изменении соотношения между различными компонентами спектра сигнала [1], то, с учетом легко осуществляемой в измерительной технике периодизации однократных реализаций сигналов, представляет значительный интерес поиск новых возможностей, заключенных в ортонормированности базиса обобщенного ряда Фурье фильтруемого сигнала.

Далее подлежащий фильтрации сигнал Uвх(t) полагаем периодическим с периодом T, представимым своим обобщенным рядом Фурье

$$U_{вх}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} C_m U_m(t) \tag{5}$$

в базисе тригонометрических или экспоненциальных функций, как не подвергающихся изменениям формы в процессе преобразования их линейными системами.

Умножение обеих частей Uвх(t) на базисную функцию Uk с произвольным номером "K" с последующим интегрированием по времени

$$\int_0^T U_{вх}(t) U_k(t) dt = \sum_{m=0}^{\infty} C_m \int_0^T U_m U_k dt = C_k \tag{6}$$

вследствие ортонормированности базиса создает условия для появления в качестве выходного эффекта частотного компонента входного сигнала CkUk(t).

Использование в качестве управляющего сигнала суммы из N+1 элементов ортонормированного базиса

$$U_{упр}(t) = \sum_{k=0}^{N} U_k(t) \tag{7}$$

обеспечивает выходной эффект в виде ограниченной суммы членов ряда (5). Действительно,

$$U_{вых}(t) = \sum_{k=0}^{N} U_k(t) \int_0^T U_{вх}(\xi) U_k(\xi) d\xi = ,$$

$$= \sum_{k=0}^{N} U_k(t) \int_0^T \sum_{m=0}^{\infty} C_m U_m(\xi) U_k(\xi) d\xi = \sum_{m=0}^{N} C_m U_m(t) = U_{вх_N}(t), \tag{8}$$

что одновременно означает ортогонализацию (т.е. обращение в ноль) всех членов ряда (5) с номерами m>N (т.е. полиномиальную ортогонализацию как целенаправленный эффект фильтрации).

Для тригонометрического ряда Фурье входного сигнала (5) "N"-ая частичная сумма в комплексной форме

$$U_{вхN}(t) = \sum_{m=-N}^{N} C_m e^{jm\omega_1 t}, \tag{9}$$

где $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$, а ряд Фурье имеет вид:

$$U_{вх}(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{jm\omega_1 t}, \tag{10}$$

где $C_m = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{вх}(t) e^{-jm\omega_1 t}$. (11)

При подстановке (11) в (9) имеем:

$$U_{вх_N}(t) = \sum_{m=-N}^{N} \left(\frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{вх}(\xi) e^{-jm\omega_1 \xi} d\xi\right) e^{jm\omega_1 t}$$

$$= \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{вх}(\xi) \left[\sum_{m=-N}^{N} e^{jm\omega_1 (t-\xi)}\right] d\xi = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{вх}(\xi) \sum_{m=-N}^{N} e^{jmx} d\xi, \tag{12}$$

где $x = \omega_1 (t - \xi)$. Но

$$D_N(x) = \sum_{m=-N}^{N} e^{jmx} = \frac{e^{j(N+1)} - e^{-jNx}}{e^{jx} - 1} = \frac{e^{j(N+\frac{1}{2})x} - e^{-j(N+\frac{1}{2})x}}{e^{j\frac{x}{2}} - e^{-j\frac{x}{2}}}$$

$$= \frac{\sin(N+\frac{1}{2})x}{\sin\frac{x}{2}}, \tag{13}$$

поэтому

$$U_{вых}(t) = U_{вхN}(t) = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} U_{вх}(\xi) D_N[\omega_1(t-\xi)] d\xi, \tag{14}$$

а функция DN(x) "N" - ое ядро Дирихле, позволяющее представить частичную сумму UвхN(t) в интегральной форме. Интеграл Дирихле (14) представляет основу для реализации фильтрующего свойства ортонормированного базиса. Действительно, результат интегрирования (14) дает функцию, зависящую от t как аргумента и N как параметра, а потому форма Uвых(t)=UвхN(t) определяется полосой частот $\Delta f = Nf_1 = \frac{N}{T_1}$, требуемой для воспроизведения в реальном масштабе времени t, либо количеством гармоник N, укладывающихся в выделенной для воспроизведения функции UвхN(t) полосе частот $N = \frac{\Delta f}{f_1}$.

Реализация фильтрующего свойства ортонормированного базиса определяется возможностями синтеза ядра Дирихле (13) или возможностями синтеза равноамплитудного полинома на основании [2] соотношения

$$\frac{\sin(N+\frac{1}{2})\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \sum_{k=1}^{N}\cos K\alpha + \frac{1}{2} \qquad (15)$$

Для реализации правой части (15) необходимо синхронизировать работу "N" генераторов гармонических колебаний кратных частот в процессе суммирования этих колебаний с равными амплитудами и строгими фазовыми соотношениями, а следовательно и с необходимостью стабилизации амплитуд и фаз суммируемых колебаний, что является сложной технической проблемой. По этим же причинам необходимость поддерживать строгие связи между амплитудами и фазами первой и "2N+1"-ой гармоник периодически воспроизводимой функции DN(x) препятствует высокоточной реализации левой части (15), особенно при изменении частоты повторения подлежащего фильтрации сигнала Uвх(t).

Поиск разрешения противоречий приводит к необходимости анализа возможностей, содержащихся в выражении (15).

В случае синтеза равноамплитудного полинома (15) имеем:

$$\alpha_{вых}(t) = A_m\sum_{k=1}^{N}\cos(kw_1t+\varphi_0) = \frac{A_m}{2}\left[\sum_{k=1}^{N}e^{j(kw_1t+\varphi_0)} + \sum_{k=1}^{N}e^{-j(kw_1t+\varphi_0)}\right] =$$

$$= \frac{A_m}{2}\cdot\frac{\sin\frac{Nw_1t}{2}}{\sin\frac{w_1t}{2}}\left[e^{j(\frac{N+1}{2}w_1t+\varphi_0)} + e^{-j(\frac{N+1}{2}w_1t+\varphi_0)}\right] =,$$

$$= A_m\frac{\sin\frac{Nw_1t}{2}}{\sin\frac{w_1t}{2}}\cos(\frac{N+1}{2}w_1t+\varphi_0) = K(t)\cdot A_m\cos(\frac{N+1}{2}w_1t+\varphi_0)$$

откуда следует возможность воспроизведения равноамплитудного полинома амплитудно-модулированным колебанием, закон изменения огибающей которого

$$A(t) = A_m\frac{\sin\frac{Nw_1t}{2}}{\sin\frac{w_1t}{2}}, \qquad (17)$$

где Am – амплитуда колебаний несущей частоты $\frac{N+1}{2}f_1$.

Одновременно в выражении (16) содержится информация о необходимости реализации параметрического преобразователя с системным оператором K(t). При синтезе устройства для воспроизведения амплитудно-модулированного колебания (16) главным требованием является поддержание жесткой связи между параметрами несущего колебания и модулирующего процесса, что может быть обеспечено резистивной параметрической цепью, периодическое изменение коэффициента передачи K(t) которой внутри интервала $t = 2T_1 = \frac{4\pi}{w_1}$ осуществляется переключением резисторов в моменты прохождения нулевых мгновенных значений колебаниями несущей частоты.

Формальную основу для реализации функционального преобразования

$K(t) = \frac{\sin\frac{Nw_1t}{2}}{\sin\frac{w_1t}{2}}$ составляет известное положение теории операционных усилителей, охваченных параллельной отрицательной обратной связью, согласно которому коэффициент передачи по напряжению масштабного усилителя $K_U = -\frac{R_2}{R_1}$, где R2 – сопротивление, включенное между выходным зажимом и суммирующей точкой, а R1- сопротивление, включенное между входным зажимом и суммирующей точкой [3].

Точность задания коэффициента передачи K(t) масштабного преобразователя определяется стабильностью резисторного делителя, т.е. достижимым технологическим уровнем долговременной стабильности резисторов, что позволяет на порядок повысить точность воспроизведения равноамплитудных полиномов, а следовательно и процедуры фильтрации измерительных сигналов. Воспроизведение функции Uвых(t) может быть обеспечено устройством, структурная схема которого приведена на рисунке.

Формирование ядра Дирихле изменением N в широких пределах обеспечивает фильтрацию сигнала Uвх(t).

Действительно, формирование $D_{N_{max}}(x)$ выбором N=Nmax обеспечивает получение Uвыхнч(t)=$U_{вхN_{max}}(t)$ с ограниченным количеством членов равноамплитудного полинома, образующего ядро Дирихле, и вызывает обращение в ноль членов бесконечного ряда Фурье (10) с номерами “m” превышающими N=Nmax, т.е. подавление высокочастотной части спектра Uвх(t) или его низкочастотную фильтрацию.

Существенно при этом, что в полосе пропускания такого фильтра низких частот (ФНЧ) соотношение между соответствующими частотными компонентами Uвх(t) и $U_{вхN_{max}}(t)$ сохраняется с той степенью точности, с какой удается формировать ядро Дирихле и интегрировать результат его перемножения с фильтруемым сигналом Uвх(t).

Формирование $U_{вхN_{min}}(t)$ при N=Nmin обеспечивает получение
$U_{вых_{вч}}(t) = U_{вх}(t) - U_{выхN_{min}}(t)$ с подавленной низкочастотной частью спектра Uвх(t).

Для обеспечения эффекта полосовой фильтрации необходимо получить Uвыхпф(t)=Uвыхвч(t)-[Uвх(t)-Uвыхнч(t)] т.е. сформировать базисную функцию

$$D_{N_{ПФ}}(x) = D_{max}(x) - D_{min}(x) = \frac{\sin(N_{max}+\frac{1}{2})x - \sin(N_{min}+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\frac{(N_{max}-N_{min})x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} \times \cos\frac{(N_{max}+N_{min}+1)x}{2}, \quad (18)$$

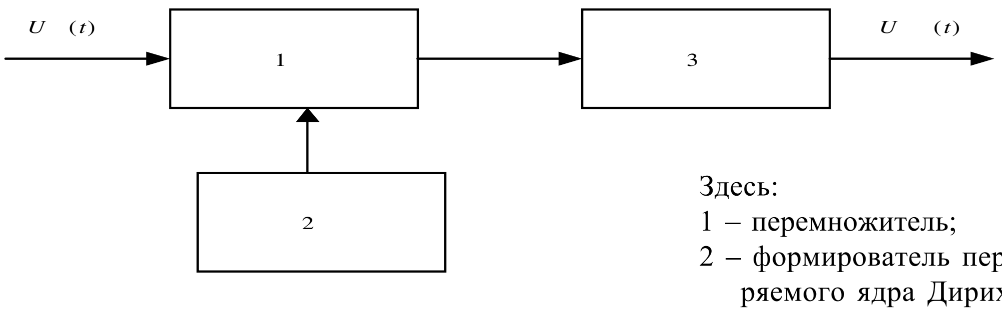
которая в рассматриваемом случае наделяет Uвыхпф(t) свойствами осциллирующей функции.

Из (18) следует, в частности, что при Nmax=Nmin+1

$$D_N(x) = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\cos(N_{min}+1)x = \cos N_{max}x = \cos N_{max}\cdot\omega_1(t-\xi),$$

а потому в предельном случае полосой фильтрации выходной сигнал представляет собой гармоническое колебание частоты $f_{ПФ} = N_{max} f$.

Проведенное исследование позволяет сделать вывод о принципиальной возможности фильтрации измерительных сигналов переходом к базису в виде ядра Дирихле, реализация которого воспроизведением в виде амплитудно-модулированного колебания позволяет обеспечить высокую точность фильтрации при малом объеме оборудования.



Здесь:
1 – перемножитель;
2 – формирователь периодически повторяемого ядра Дирихле;
3 – интегратор.

Список использованной литературы

1. Гутников В.С. Фильтрация измерительных сигналов. Энергоатомиздат, Ленинградское отделение. Ленинград. 1990. с.4; с.103.(191с.).
2. Двайт Г.Б. Таблицы интегралов и другие математические формулы. “Наука”, М. 1973. с.82. (228с.)
3. Гутников В.С. Методы реализации специальных весовых функций в измерительных устройствах. “Измерения, контроль, автоматизация”. 1983. №2. с.3-15.