

Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

И.В.Крючкова

РЯДЫ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Методические указания

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Государственного образовательного учреждения высшего
профессионального образования «Оренбургский государственный
университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 517.443(07)
ББК 22.161 Я7
К85

Рецензент - кандидат физико-математических наук Г.А.Ивашкина

Крючкова, И.В.
К85 Ряды и преобразование Фурье: методические указания/
И.В. Крючкова; Оренбургский гос.ун-т – Оренбург: ОГУ,
2011. - 59 с.

В методических указаниях рассмотрена теория рядов и преобразования Фурье, приводятся примеры решения задач, в том числе с использованием системы MathCAD, сформулированы задачи для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

УДК 517.443(07)
ББК 22.161 Я7

© Крючкова И.В., 2011
© ГОУ ОГУ, 2011

Содержание

Введение.....	4
1 Ряды Фурье.....	5
1.1 Тригонометрический ряд.....	5
1.2 Теорема Дирихле.....	7
1.3 Неполные ряды Фурье.....	10
1.4 «Раздельная» запись ряда Фурье.....	10
1.5 Разложение функций, заданных на отрезке	11
1.6 Разложение в ряд Фурье на произвольном отрезке.....	15
1.7 Комплексная запись ряда Фурье.....	16
1.8 Указания к решению задач по теме «Тригонометрические ряды» в системе MathCAD	18
1.9 Примеры решения задач.....	20
2 Преобразование Фурье.....	31
2.1 Интеграл Фурье.....	31
2.2 Интеграл Фурье четной и нечетной функций.....	33
2.3 Косинус- и синус-преобразования Фурье.....	35
2.4 Комплексная форма записи интеграла Фурье.....	37
2.5 Указания к решению задач по теме «Преобразование Фурье» в системе MathCAD	39
2.6 Примеры решения задач.....	40
3 Задачи для самостоятельного решения.....	44
Список использованных источников.....	46
Приложение А.....	47

Введение

В настоящее время появилось много учебных пособий, излагающих теорию обобщенных рядов Фурье с точки зрения функционального анализа. Однако, такое общее изложение слишком далеко от прикладных задач, решаемых инженерами и специалистами в электротехнике, электронике и во многих других прикладных и теоретических дисциплинах.

В данных методических указаниях излагается теория тригонометрических рядов Фурье, преобразования Фурье. Изложение теоретического материала ведется на доступном для студентов уровне доказательности. В согласии с обычной практикой прохождения данного раздела курса математического анализа изложение проводится при помощи нестрогих, «эвристических» рассуждений, доказательство теоремы Дирихле о разложении в ряд Фурье опущено. Приводятся примеры решения задач, в том числе с использованием системы MathCAD.

В методических указаниях даются рекомендации по использованию символьного процессора MathCAD, что облегчит будущим инженерам применение теории преобразования Фурье в дальнейшей практической деятельности.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

1 Ряды Фурье

1.1 Тригонометрический ряд

Системой тригонометрических функций называется совокупность функций:

$$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx, \dots \quad (1.1)$$

Система тригонометрических функций является подмножеством множества непрерывных функций на всей числовой оси. Как известно множество непрерывных функций образует линейное пространство.

В этом пространстве скалярное произведение можно ввести следующим

образом: $(f(x); g(x)) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)dx$.

Система тригонометрических функций (1.1) является ортогональной, т.е.

$$(f(x); g(x)) = \begin{cases} 0, & f(x) \neq g(x) \\ \pi, & f(x) = g(x) \end{cases} \quad (1.2)$$

Оставляем читателю самостоятельно убедиться в этом.

Тригонометрическим рядом Фурье называется ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)), \quad a_n \in R, \quad b_n \in R \quad (1.3)$$

Так как $\cos nx$, $\sin nx$ - периодические функции с периодом $T = \frac{2\pi}{n}$, то сумма ряда (1.3), если она существует, имеет период $T = 2\pi$.

Предположим, что тригонометрический ряд сходится, причем равномерно, на отрезке $[-\pi; \pi]$. $S(x)$ - его сумма, она будет являться непрерывной функцией.

Рассмотрим ряды:

$$S(x) \cdot \cos Nx = \frac{a_0}{2} \cos Nx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos nx \cdot \cos Nx + b_n \cdot \sin nx \cdot \cos Nx) \quad (1.4)$$

$$S(x) \cdot \sin Nx = \frac{a_0}{2} \sin Nx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx \cdot \sin Nx + b_n \cdot \sin nx \cdot \sin Nx) \quad (1.5)$$

Если тригонометрический ряд (1.3) сходится равномерно, то ряды (1.4) и (1.5) также сходятся равномерно, и их можно почленно интегрировать.

Проинтегрируем тригонометрический ряд (1.3):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x) dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x) dx)$$

И в силу утверждения (1.2):

$$\int_{-\pi}^{\pi} S(x) dx = \frac{a_0}{2} \cdot 2\pi = a_0 \cdot \pi$$

Отсюда: $a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) dx$.

Аналогично проинтегрируем ряды (1.4) и (1.5):

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \cos(N \cdot x) dx &= \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(N \cdot x) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x) \cdot \cos(N \cdot x) dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x) \cdot \cos(N \cdot x) dx) = \\ &= a_N \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(N \cdot x) dx = a_N \cdot \pi \end{aligned}$$

$$a_N = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \cos Nx dx$$

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \sin(N \cdot x) dx &= \frac{a_0}{2} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(N \cdot x) dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \cos(n \cdot x) \cdot \sin(N \cdot x) dx + b_n \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin(n \cdot x) \cdot \sin(N \cdot x) dx) = \\ &= b_N \cdot \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(N \cdot x) dx = b_N \cdot \pi \end{aligned}$$

$$b_N = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \sin(N \cdot x) dx$$

Получили формулы Эйлера – Фурье функции $S(x)$:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) dx \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} S(x) \cdot \sin(n \cdot x) dx \end{aligned} \tag{1.6}$$

Таким образом, каждой интегрируемой на отрезке $[-\pi; \pi]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)), \tag{1.7}$$

коэффициенты которого вычисляются по формулам Эйлера-Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) dx$$

Однако, выводя формулы Эйлера-Фурье, мы предполагали равномерную сходимость тригонометрического ряда и равенство

$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x))$ пока еще не доказано. В следующей теореме сформулированы достаточные условия разложимости функции в ряд Фурье.

1.2 Теорема Дирихле

Условия Дирихле:

пусть на отрезке $[-\pi; \pi]$ задана ограниченная функция $f(x)$, и, кроме того:

1) функция $f(x)$ кусочно-непрерывна, т.е. имеет на отрезке $[-\pi; \pi]$ лишь конечное число точек разрыва I -ого рода.

2) функция $f(x)$ кусочно-монотонна, т.е. отрезок $[-\pi; \pi]$ можно разбить на конечное число частичных отрезков, на каждом из которых $f(x)$ монотонно возрастает или убывает, либо остается постоянной.

При выполнении условий Дирихле функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд (1.7), который сходится на отрезке $[-\pi; \pi]$, причем:

1) в каждой точке x_0 непрерывности $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна значению функции $f(x)$ в этой точке:

$$S(x_0) = f(x_0)$$

2) в каждой точке x_1 разрыва функции $f(x)$ сумма ряда $S(x)$ равна среднему арифметическому левого и правого пределов $f(x)$ в этой точке:

$$S(x_1) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_1 - 0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_1 + 0} f(x) \right)$$

3) в точках $x = -\pi$ и $x = \pi$ сумма ряда равна среднему арифметическому правого предела $f(x)$ в точке $-\pi$ и левого предела $f(x)$ в точке π :

$$S(-\pi) = S(\pi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) \right)$$

4) на любом частичном отрезке $[\alpha; \beta] \subset [-\pi; \pi]$, свободного от точек разрыва $f(x)$ ряд Фурье равномерно сходится к $f(x)$.

Замечание:

1. Если функция $f(x)$ удовлетворяет на $[-\pi; \pi]$ условиям Дирихле и является периодической с периодом $T = 2\pi$, то ряд (1.7) будет сходиться к $f(x)$ не только на отрезке $[-\pi; \pi]$, но и во всех точках действительной оси.

Характер сходимости ряда (1.7) к функции $f(x)$ в этом случае можно охарактеризовать законом среднего арифметического:

- в точках непрерывности: $S(x_0) = f(x_0) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \right)$

- в точках разрыва это следует из пункта 2 теоремы Дирихле.

- в точках π и $-\pi$:

$$S(\pi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow \pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) \right)$$

$$S(-\pi) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi-0} f(x) \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{x \rightarrow -\pi+0} f(x) + \lim_{x \rightarrow -\pi-0} f(x) \right)$$

Таким образом, в точках разрыва функции и в точках $x = (2k+1) \cdot \pi$ значения $S(x)$ могут отличаться от значений функции $f(x)$ в этих точках. Пример показан на рисунке 1.1.

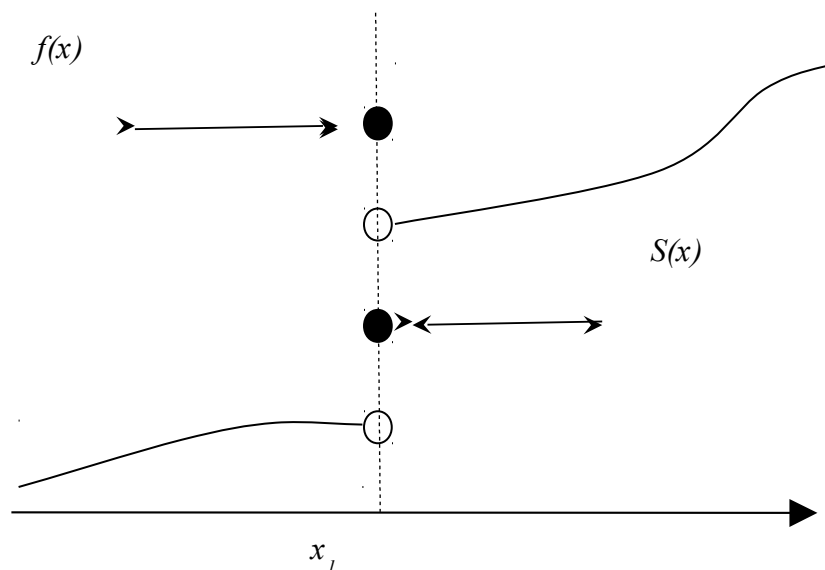


Рисунок 1.1 – Сумма ряда Фурье в точке разрыва

Поэтому на практике заранее (до разложения) не задают значения функции $f(x)$ в точках разрыва и в точках $(2 \cdot k + 1) \cdot \pi$.

2. в случае, когда функция $f(x)$ не является периодической или имеет период, отличный от 2π , разложение в ряд (1.7) справедливо только на отрезке $[-\pi; \pi]$. Сумма ряда $S(x)$ повторяет свои значения, как периодическая функция с периодом 2π , и за пределами отрезка отличается от $f(x)$.

Пример 1.1

Разложить функцию $f(x) = e^x$, $-\pi < x < \pi$ в ряд Фурье.

Решение.

Применим формулы Эйлера-Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^x dx = \frac{1}{\pi} \cdot e^x \Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{\pi} \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot \cos nx dx = \frac{(-1)^n \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi \cdot (1 + n^2)}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} e^x \cdot \sin nx dx = \frac{(-1)^n \cdot n \cdot (e^{\pi} - e^{-\pi})}{\pi \cdot (1 + n^2)}$$

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \cdot \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos x}{2} + \frac{\sin x}{2} + \frac{\cos 2x}{5} - \frac{2 \cdot \sin 2x}{5} - \dots \right)$$

Исходя из теоремы Дирихле, сумма полученного ряда представлена на рисунке 1.2.

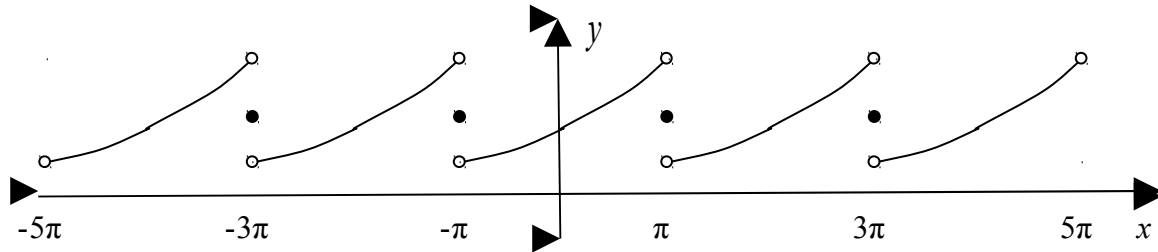


Рисунок 1.2 – Сумма ряда

1.3 Неполные ряды Фурье

Разложим в ряд Фурье четную функцию $f_1(x)$:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cdot \sin(n \cdot x) dx = 0, \text{ так как под интегралом стоит нечетная функция, а}$$

интегрирование идет по симметричному отрезку.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_1(x) dx, \text{ так как } f_1(x) - \text{четная функция.}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx, \text{ так как}$$

$f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x)$ - четная функция.

Получили разложение четной функции в неполный ряд Фурье:

$$f_1(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cdot \cos(n \cdot x), \quad (1.8)$$

$$\text{где } \tilde{a}_0 = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_1(x) dx, \quad \tilde{a}_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx$$

Аналогично получается разложение нечетной функции в неполный ряд Фурье:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \cdot \sin(n \cdot x), \quad (1.9)$$

$$\text{где } \tilde{b}_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_2(x) \cdot \sin(n \cdot x) dx$$

1.4 «Раздельная» запись ряда Фурье

Под раздельной записью ряда Фурье понимают:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos(n \cdot x) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin(n \cdot x)$$

Обоснуем возможность подобной записи. Любую функцию $f(x)$ можно представить в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\text{где} \quad \begin{aligned} f_1(-x) &= f_1(x) \\ f_2(-x) &= -f_2(x) \end{aligned}$$

Покажем это:

если $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$, то $f(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) - f_2(x)$, отсюда

$$\left. \begin{aligned} f(x) + f(-x) &= 2 \cdot f_1(x) \\ f(x) - f(-x) &= 2 \cdot f_2(x) \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} f_1(x) &= \frac{f(x) + f(-x)}{2} \\ f_2(x) &= \frac{f(x) - f(-x)}{2} \end{aligned}$$

Если функция $f(x)$ удовлетворяет теореме Дирихле, тогда $f_1(x)$ и $f_2(x)$ также удовлетворяют условиям теоремы Дирихле и разлагаются в неполные ряды (1.8), (1.9).

Для обоснования возможности раздельной записи ряда Фурье осталось

показать: $\begin{aligned} a_n &= \tilde{a}_n \\ b_n &= \tilde{b}_n \end{aligned}$

$$\begin{aligned}
\tilde{a}_n &= \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f_1(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \frac{f(x) + f(-x)}{2} \cdot \cos(n \cdot x) dx = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx + \int_0^{\pi} f(-x) \cdot \cos(n \cdot x) dx \right) = \left| \begin{array}{l} t = -x \\ dt = -dx \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx - \int_0^{-\pi} f(t) \cdot \cos(n \cdot t) dt \right) = \left| \begin{array}{l} x = t \\ dx = dt \end{array} \right| = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_0^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx + \int_{-\pi}^0 f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx \right) = \\
&= \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) dx = a_n
\end{aligned}$$

Аналогично показывается $\tilde{b}_n = b_n$.

1.5 Разложение функций, заданных на отрезке $[-l; l]$

Пусть функция $f(x)$ задана на отрезке $[-l; l]$, $l > 0$. И $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на этом отрезке.

Выполним преобразование $t = \frac{\pi}{l} \cdot x$

$$-l < x < l \Rightarrow -\pi < t < \pi$$

Положим $F(t) = f\left(\frac{l}{\pi} \cdot t\right) = f(x)$. $F(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[-\pi; \pi]$. Разложим $F(t)$ в тригонометрический ряд:

$$F(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot t) + b_n \cdot \sin(n \cdot t))$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} F(t) dt = \left| \begin{array}{l} t = \frac{\pi}{l} \cdot x; dt = \frac{\pi}{l} \cdot dx \\ t = -\pi; x = -l \\ t = \pi; x = l \end{array} \right| = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-l}^l F\left(\frac{\pi}{l} \cdot x\right) \cdot \frac{\pi}{l} dx = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) dx$$

Аналогично вычисляются a_n и b_n .

Получили следующее разложение:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} \right), \quad (1.10)$$

где

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(x) dx$$

Можно переформулировать теорему Дирихле для функций, заданных на отрезке $[-l; l]$, заменив символ π на l .

Теперь получим неполные ряды Фурье функций, заданных на отрезке $[-l; l]$.

Пусть $f_1(x)$ - четная функция. Тогда:

$$f_1(x) = \frac{\tilde{a}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{a}_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}, \quad (1.11)$$

где

$$\tilde{a}_0 = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f_1(x) dx$$

$$\tilde{a}_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f_1(x) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$$

Пусть $f_2(x)$ - нечетная функция. Тогда:

$$f_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{b}_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}, \quad (1.12)$$

где
$$\tilde{b}_n = \frac{2}{l} \cdot \int_0^l f_2(x) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} dx$$

Пример 1.2

Разложим в тригонометрический ряд функцию $f(x)$, заданную на промежутке $(-2; 2)$.

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 < x < 0 \\ 3, & 0 < x < 2 \end{cases}$$

Решение.

Условия Дирихле выполнены; $l = 2$.

$$a_0 = \frac{1}{2} \cdot \int_{-2}^2 f(x) dx = \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-2}^0 2 dx + \int_0^2 3 dx \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(2x \Big|_{-2}^0 + 3x \Big|_0^2 \right) = 5$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-2}^0 2 \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} dx + \int_0^2 3 \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot 2}{n \cdot \pi} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{3 \cdot 2}{n \cdot \pi} \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} \Big|_0^2 \right) = \\ &= \frac{2}{n \cdot \pi} \cdot (-\sin(-n \cdot \pi)) + \frac{3}{n \cdot \pi} \cdot \sin n \cdot \pi = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{2} \cdot \left(\int_{-2}^0 2 \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} dx + \int_0^2 3 \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} dx \right) = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2 \cdot (-2)}{n \cdot \pi} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} \Big|_{-2}^0 + \frac{3 \cdot (-2)}{n \cdot \pi} \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} \Big|_0^2 \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot n \cdot \pi} \cdot (-4 \cdot (1 - \cos(n \cdot \pi)) - 6 \cdot (\cos(n \cdot \pi) - 1)) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot n \cdot \pi} \cdot 2 \cdot (1 - \cos(n \cdot \pi)) = \frac{1 - \cos(n \cdot \pi)}{n \cdot \pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n \cdot \pi} = \begin{cases} 0, n: 2k \\ \frac{2}{n \cdot \pi}, n: 2k+1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{2} = \frac{5}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1) \cdot \pi} \cdot \sin \frac{(2k-1) \pi \cdot x}{2}$$

График суммы полученного ряда представлен на рисунке 1.3.

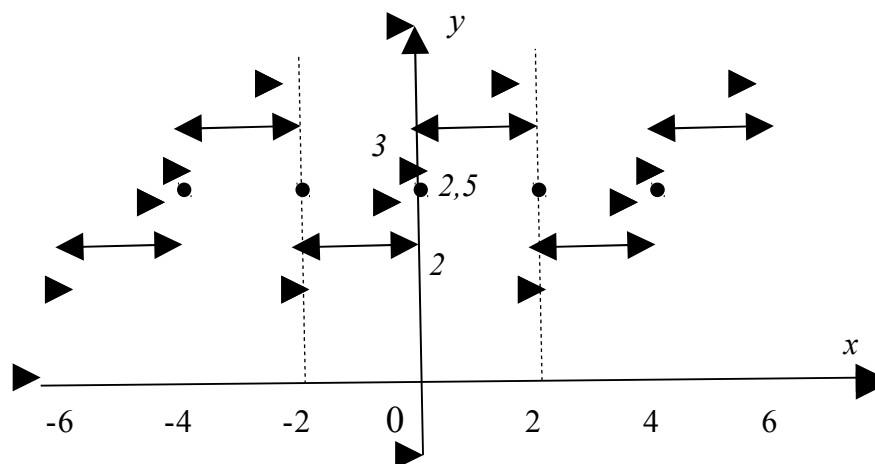
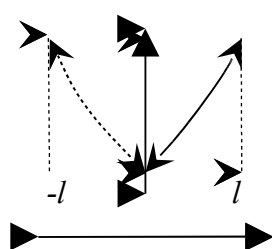


Рисунок 1.3 - График суммы полученного ряда

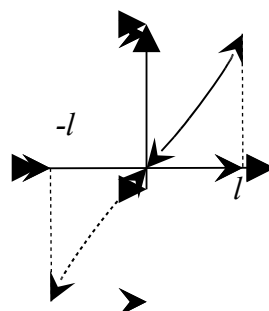
При разложении в неполные ряды Фурье на отрезках $[0; l]$ поступают следующим образом.

Пусть $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле на $[0; l]$; $l > 0$.

Такую функцию можно разложить в неполные ряды Фурье по косинусам или по синусам. Для этого, в первом случае, ее достраивают на отрезке $[-l; 0]$ четным способом, а во втором случае – нечетным способом, и применяют формулы (1.11), (1.12). Примеры продолжения функции представлены на рисунке 1.4.



а) четным способом



б) нечетным способом

Рисунок 1.4 - Примеры продолжения функции $f(x)$

1.6 Разложение в ряд Фурье на произвольном отрезке

Произвольному отрезку $[a; b]$ соответствует ортогональная система функций

$$\left\{ 1, \sin \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{n\pi x}{l}, \cos \frac{n\pi x}{l}, \dots \right\},$$

где $b = a + 2l$, то есть $l = \frac{b-a}{2}$. Пример представлен на рисунке 1.5.

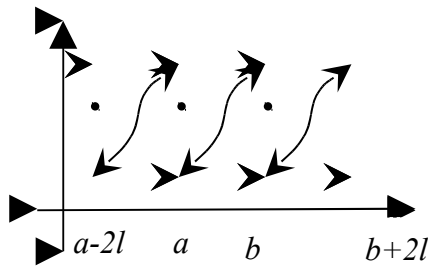


Рисунок 1.5 – Сумма ряда Фурье функции, заданной на отрезке $[a; b]$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} \right), \quad (1.13)$$

где

$$a_0 = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \cos \frac{n\pi x}{l} dx$$

$$b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_a^b f(x) \cdot \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

1.7 Комплексная запись ряда Фурье

Пусть функция $f(x)$ удовлетворяет достаточным условиям разложимости в ряд Фурье. Тогда на отрезке $[-\pi; \pi]$ ее можно представить рядом вида:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)) \quad (1.14)$$

Используя формулы Эйлера

$$e^{inx} = \cos(n \cdot x) + i \cdot \sin(n \cdot x), \quad e^{-inx} = \cos(n \cdot x) - i \cdot \sin(n \cdot x),$$

найдем $\cos(n \cdot x) = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}$ и $\sin(n \cdot x) = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2 \cdot i} = i \cdot \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2}$. Подставляя эти

выражения в ряд (2.1), получаем

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2} + i \cdot b_n \cdot \frac{e^{-inx} - e^{inx}}{2} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n - i \cdot b_n}{2} \cdot e^{inx} + \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} \cdot e^{-inx} \right) \end{aligned} \quad (1.15)$$

Введем следующие обозначения: $\frac{a_0}{2} = c_0$, $\frac{a_n - i \cdot b_n}{2} = c_n$, $\frac{a_n + i \cdot b_n}{2} = c_{-n}$

Ряд (2.2) принимает вид:

$$\begin{aligned} f(x) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n \cdot e^{inx} + c_{-n} \cdot e^{-inx}) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{inx} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \cdot e^{-inx} = \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{inx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} c_n \cdot e^{inx} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{inx} \end{aligned}$$

Таким образом, ряд Фурье представлен в комплексной форме:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{inx} \quad (1.16)$$

Найдем выражения коэффициентов c_n и c_{-n} через интегралы:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(n \cdot x) \cdot dx - i \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(n \cdot x) \cdot dx \right) = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot (\cos(n \cdot x) - i \cdot \sin(n \cdot x)) \cdot dx = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} \cdot dx \end{aligned}$$

$$\text{Аналогично } c_{-n} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{inx} \cdot dx.$$

Таким образом, комплексные коэффициенты Фурье вычисляются по формуле:

$$c_n = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot e^{-inx} \cdot dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.17)$$

Для периодической функции $f(x)$ с периодом $2 \cdot l$ комплексная форма ряда Фурье примет вид:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{i \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}} \quad (1.18)$$

где коэффициенты c_n вычисляются по формулам:

$$c_n = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int_{-l}^l f(x) \cdot e^{-i \cdot \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l}} dx, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Замечание:

сходимость рядов (1.16) и (1.18) понимается так: ряды являются сходящимися для

данного значения x , если существуют пределы: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{ikx}$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=-n}^n c_k \cdot e^{i \cdot \frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}}$.

Последовательность $\{c_n\}$ коэффициентов разложения (1.16) или (1.18) называется спектральной последовательностью функции $f(x)$, так как с помощью членов этой последовательности получаются характеристики всех гармоник, на которые разложено соответствующее периодическое колебание: возьмем сумму двух членов разложения (1.16) с противоположными номерами:

$$c_{-n} \cdot e^{-inx} + c_n \cdot e^{inx} = \frac{a_n + i \cdot b_n}{2} \cdot (\cos(n \cdot x) - i \cdot \sin(n \cdot x)) + \\ + \frac{a_n - i \cdot b_n}{2} \cdot (\cos(n \cdot x) + i \cdot \sin(n \cdot x)) = a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x)$$

Сумма таких двух членов воспроизводит n -ю гармонику. Выразим характеристики n -ой гармоники через коэффициенты разложения (1.16):

$$a_n = \delta_n \cdot \sin(\varphi_0)_n, \quad b_n = \delta_n \cdot \cos(\varphi_0)_n. \text{ Откуда } \delta_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \operatorname{tg}(\varphi_0)_n = \frac{a_n}{b_n}.$$

$$a_n \cdot \cos(n \cdot x) + b_n \cdot \sin(n \cdot x) = \delta_n \cdot \sin(n \cdot x + (\varphi_0)_n),$$

где δ_n - амплитуда гармоники, n - частота, $(\varphi_0)_n$ - начальная фаза.

Следовательно, амплитуда δ_n равна модулю $|c_n| = |a_n - i \cdot b_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$.

Если рассмотреть угол $(\psi_0)_n = \frac{\pi}{2} - (\varphi_0)_n$, то $\operatorname{tg}((\psi_0)_n) = \operatorname{ctg}((\varphi_0)_n) = \frac{b_n}{a_n}$. Следовательно

$$\arg \bar{c}_n = \operatorname{arctg} \frac{b_n}{a_n} = (\psi_0)_n, \text{ где } \bar{c}_n = a_n + i \cdot b_n. \text{ Таким образом, последовательность } \{|c_n|\}$$

образует амплитудный спектр функции $f(x)$, а последовательность $\left\{ \arg \bar{c}_n \right\}$ образует фазовый спектр.

1.8 Указания к решению задач по теме «Тригонометрические ряды» в системе MathCAD

Перед началом исследования следует выбрать в панели математических инструментов кнопки «Арифметические инструменты», «Операторы математического анализа», «Символические операторы», «Символы греческого алфавита» открыть соответствующие панели и разместить их в удобном месте на рабочем столе (см. рисунок 1.6).

Для определения функции, заданной разными аналитическими выражениями на различных промежутках числовой оси, - ввести имя функции f переменной x , щелкнуть в панели калькулятора по кнопке «Присвоить значение» в панели «Арифметические инструменты» или ввести с клавиатуры знак двоеточия, выбрать в панели «Программирование» кнопку «Add Line».

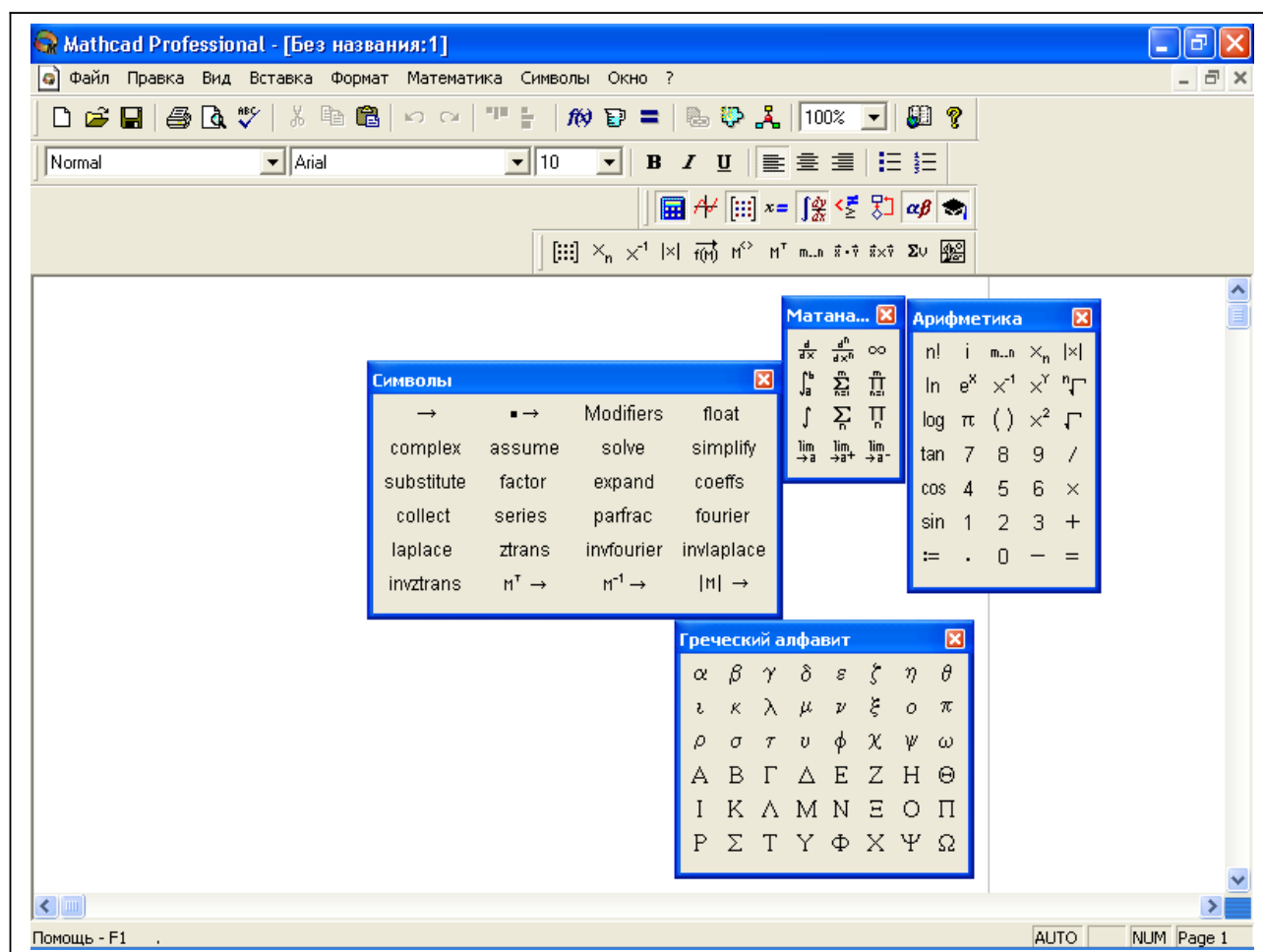


Рисунок 1.6 – Рабочий лист MathCAD

В рабочем документе справа от знака присваивания появится вертикальная черта с двумя строками ввода (если в дальнейшем вам понадобится более двух строк ввода, то можно добавить их, нажав дополнительно кнопку «Add Line»). Выбрать первую строку и щелкнуть по кнопке «if», ввести слева от «if» выражение, а справа – ограничение на аргумент. Аналогично следует поступить для второй строки.

Далее следует ввести выражения для коэффициентов Фурье в виде векторов a и b , для чего определить размерность вектора n , определить k - диапазон изменения номера компонент векторов a и b от 0 до n , определить выражения для коэффициентов Фурье a_k - ввести с клавиатуры символ « a », знак нижнего индекса - « $[$ » (или выбрать соответствующей кнопкой в панели «Арифметика»), ввести в позиции нижнего индекса « k », вернуться в основную строку, ввести знак присваивания и выражение для коэффициента. Аналогично - для b_k .

Частичную сумму ряда следует определить как функцию двух переменных $S(x, n)$.

Для построения графиков частичных сумм необходимо задать диапазон значений аргумента x на отрезке $[-\pi; \pi]$ с некоторым шагом (в нашем примере шаг равен $\frac{\pi}{100}$), для чего используйте кнопку «Задать диапазон дискретной величины» в панели «Арифметические инструменты».

Вставка графика в рабочий лист осуществляется кнопкой «Декартов график» (Shift+2) в панели «Графики», для ввода нескольких функций они определяются через запятую.

Численное исследование частичных сумм состоит в сравнении значений частичных сумм для различных n со значениями функции на концах отрезка, в точке разрыва и в точке непрерывности.

Введя имя частичной суммы S , в скобках значения аргументов, и нажав клавишу « $=$ », получим на экране значение в точке.

1.9 Примеры решения задач

Задача 1

$$\text{Функцию } f(x) = \begin{cases} -1, & \text{при } -\pi < x \leq 0 \\ 1, & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$$

разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$, определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала, графически исследовать сходимость частичных сумм полученного ряда.

Решение

Функция $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{при } -\pi < x < 0 \\ 1 & \text{при } 0 < x < \pi \end{cases}$ является нечетной, поэтому используем

формулы для разложения в неполный ряд Фурье. График функции представлен на рисунке 1.7.

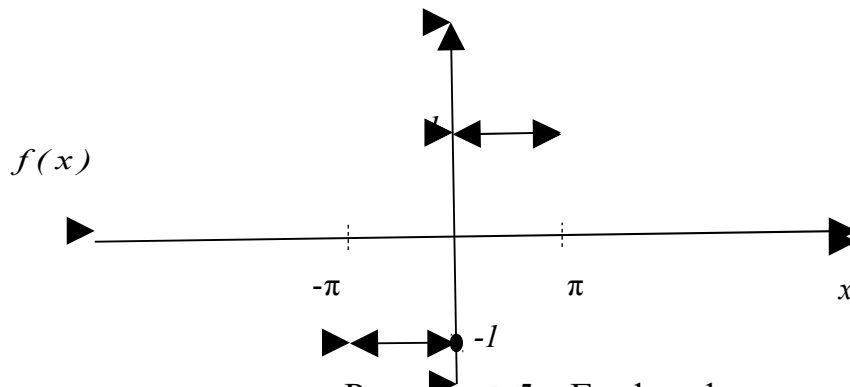


Рисунок 1.7 – График функции

$$b_k = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1 \cdot \sin(k \cdot x) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left(-\frac{\cos(k \cdot \pi)}{k} + \frac{1}{k} \right) = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2 \cdot l \\ \frac{4}{k \cdot \pi} & \text{при } k = 2 \cdot l - 1 \end{cases}$$

$$k = 2 \cdot l - 1 = \begin{cases} 0 & \text{при } k = 2 \cdot l \\ \frac{4}{\pi \cdot (2 \cdot l - 1)} & \text{при } k = 2 \cdot l - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} S(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} b_k \cdot \sin(k \cdot x) = \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4}{(2 \cdot l - 1) \cdot \pi} \cdot \sin((2 \cdot l - 1) \cdot x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\sin((2 \cdot l - 1) \cdot x)}{2 \cdot l - 1} = \\ &= \frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + \frac{1}{5} \cdot \sin 5x + \dots \right) \end{aligned}$$

Таким образом, аналитически получили разложение данной функции в ряд

Фурье: $\frac{4}{\pi} \cdot \left(\sin x + \frac{1}{3} \cdot \sin 3x + \frac{1}{5} \cdot \sin 5x + \dots \right).$

В случае если аналитически вычислить коэффициенты ряда Фурье сложно, следует использовать символьные вычисления в MathCad.

Поскольку сходимость ряда Фурье характеризуется законом среднего арифметического, в точке разрыва $x_0 = 0$ ряд Фурье данной функции будет

сходиться к $\frac{1}{2} \cdot (\lim_{x \rightarrow 0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow 0+0} f(x)) = 0$; в точках $x = -\pi; x = \pi$ ряд Фурье будет

сходиться к $\frac{1}{2} \cdot (\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) + \lim_{x \rightarrow \pi} f(x)) = 0$

Сумма ряда Фурье определена на всей числовой оси и является периодической функцией с периодом 2π :

$$S(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = -\pi + 2\pi \cdot m \\ -1, & \text{при } -\pi + 2\pi \cdot m < x < 0 + 2\pi \cdot m \\ 0, & \text{при } x = 0 + 2\pi \cdot m \\ 1, & \text{при } 0 + 2\pi \cdot m < x < \pi + 2\pi \cdot m \end{cases}, \quad m \in \mathbb{N}$$

График полученной суммы ряда представлен на рисунке 1.8.

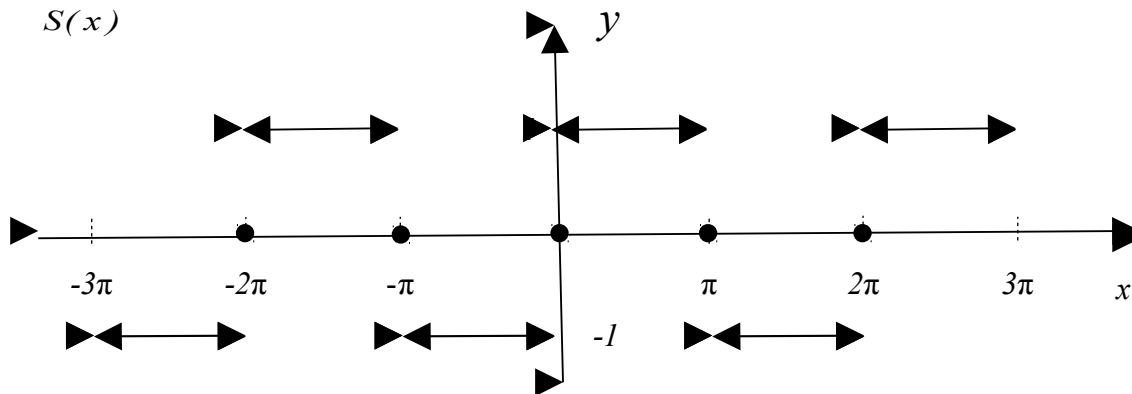


Рисунок 1.8 – График суммы ряда

Используя MathCad, исследуем графически поведение частичных сумм полученного ряда Фурье. (См. ниже листинг 1.1 рабочего документа MathCad).

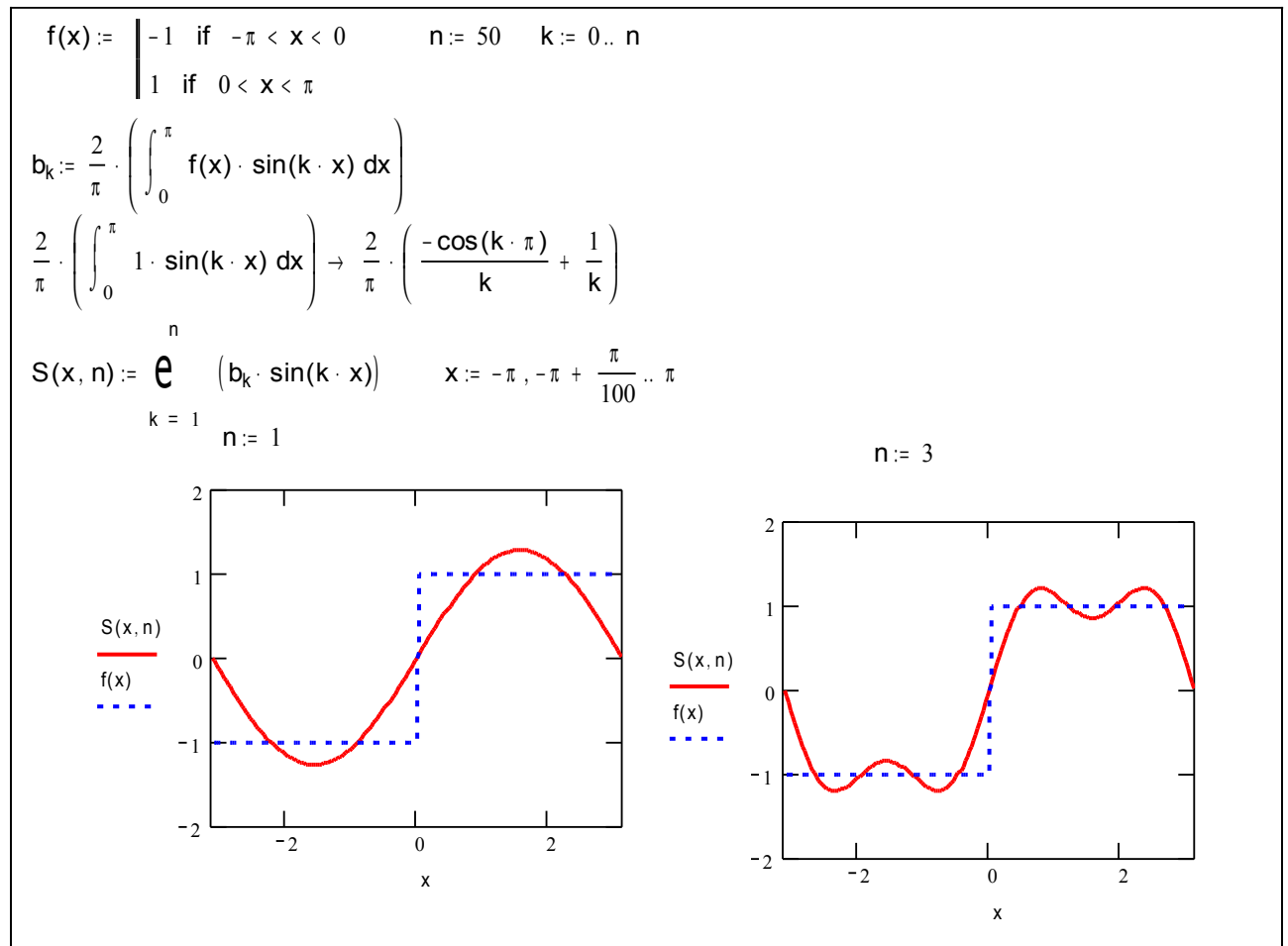
График на листинге 1.2 иллюстрирует сходимость частичных сумм ряда Фурье в точке непрерывности функции.

На графиках видно, что при приближении к точкам разрыва x_0 разность $|S_n(x) - f(x)|$ увеличивается. Это объясняется тем, что, хотя

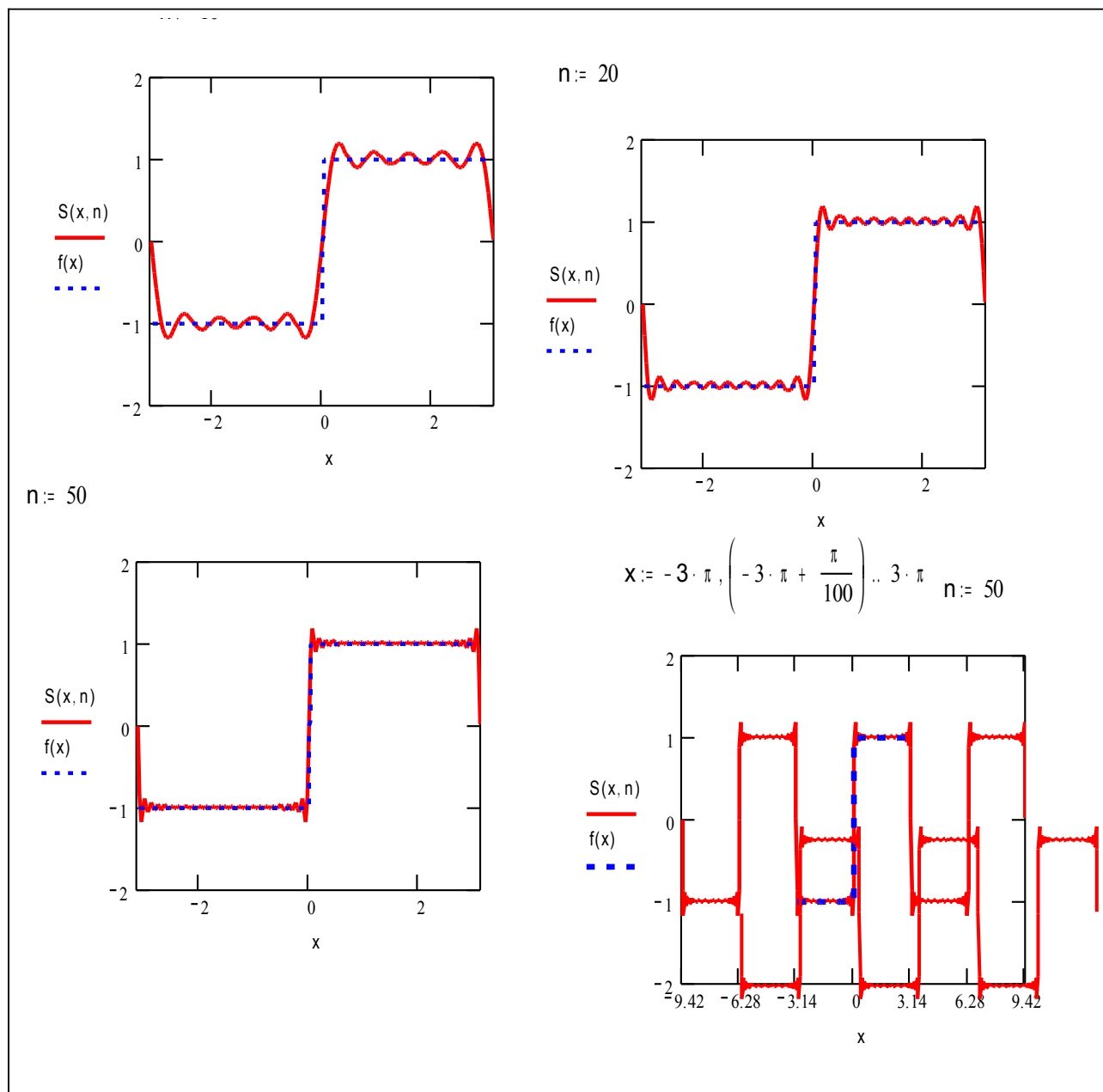
$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0) = S(x_0) = \frac{1}{2} \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x))$, существуют такие последовательности $u_n \rightarrow x_0 + 0$ и $v_n \rightarrow x_0 - 0$, что пределы $S_n(u_n)$ и $S_n(v_n)$ при $n \rightarrow \infty$ различны и оба отличаются от $S(x_0)$.

Эта особенность поведения частичных сумм Фурье в окрестности точек разрыва называется явлением Гиббса. Явление Гиббса состоит в том, что для некоторых функций $f(x)$ в точке x_0 их скачка существуют такие значения a , что

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x_0 \pm \frac{a}{n}) \neq S(x_0).$$



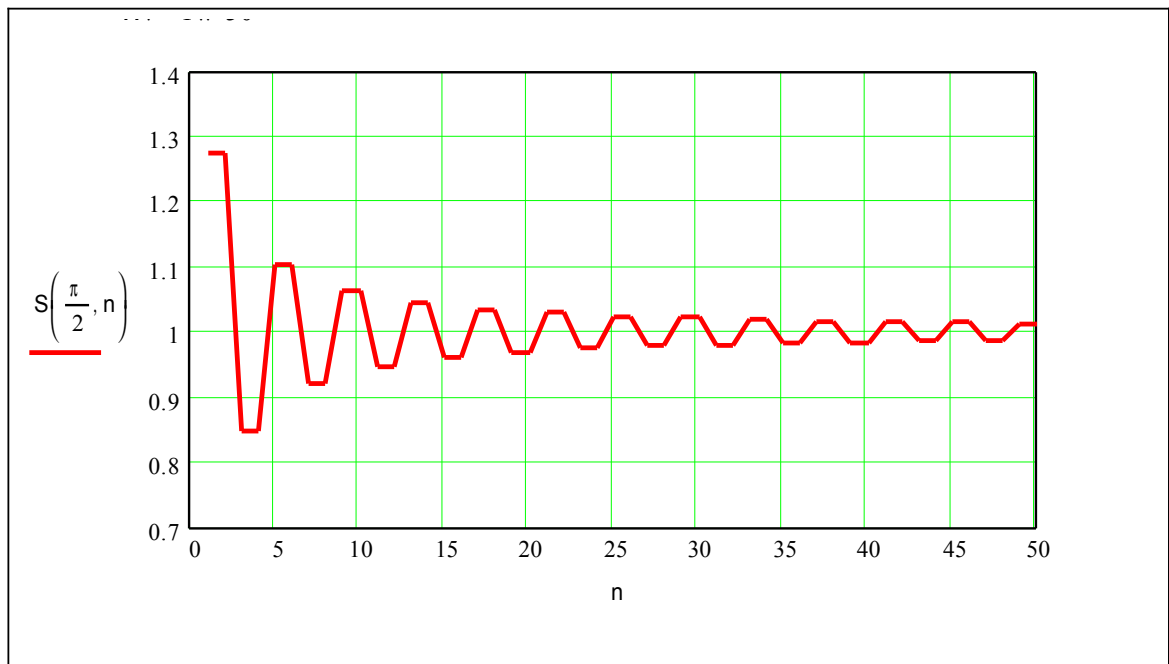
Листинг 1.1 Лист 1



Вычислим значения частичных сумм ряда Фурье для $n=10, 20, 50$ в точках $x=-\pi$, $x=0$, $x=\pi/2$, $x=\pi$.

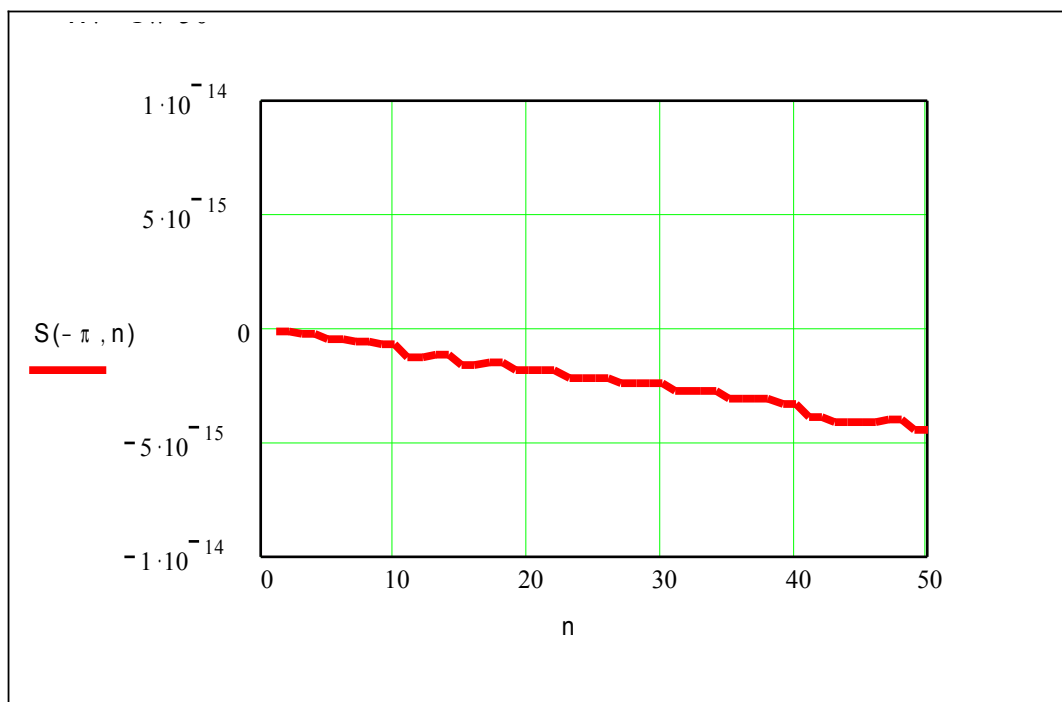
$S(-\pi, 10) = 0.000$	$S(0, 10) = 0.000$	$S\left(\frac{\pi}{2}, 10\right) = 1.063$	$S(\pi, 10) = 0.000$
$S(-\pi, 20) = -1.896 \times 10^{-15}$	$S(0, 20) = 0.000$	$S\left(\frac{\pi}{2}, 20\right) = 0.968$	$S(\pi, 20) = 1.896 \times 10^{-15}$
$S(-\pi, 50) = -4.502 \times 10^{-15}$	$S(0, 50) = 0.000$	$S\left(\frac{\pi}{2}, 50\right) = 1.013$	$S(\pi, 50) = 4.502 \times 10^{-15}$

Листинг 1.1 Лист 2



Листинг 1.2

Исследуем поведение частичных сумм построенного ряда Фурье в точке $x_0 = -\pi$ (см. листинг 1.3).



Листинг 1.3

Задача 2

Для функции $f(x) = |\sin(x + 1)|$, заданной в интервале $(-\pi; \pi)$, найти тригонометрический многочлен наилучшего приближения наименьшей степени со среднеквадратическим отклонением, меньшим 0.01. Построить график зависимости среднеквадратического отклонения от степени многочлена.

Решение

Последовательность решения:

1. Вычисляются коэффициенты Эйлера-Фурье - a_k, b_k .
2. Вычисляются частичные суммы ряда Фурье - $S(x, n)$.
3. Вычисляется среднеквадратическое отклонение - $\sigma(n)$.
4. Создается вектор P , элементы которого равны соответствующим значениям среднеквадратического отклонения - $P_k = \sigma(k)$.
5. Анализ элементов вектора P и графика зависимости $\sigma = \sigma(k)$ позволяет определить наименьшее количество слагаемых тригонометрического многочлена, удовлетворяющего заданной точности.

Ответ: $n = 20$.

Ниже приведен листинг 1.4 рабочего документа MathCad.

$$f(x) := |\sin(x+1)| \quad n := 50 \quad k := 0..n$$

$$a_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \cos(k \cdot x) dx$$

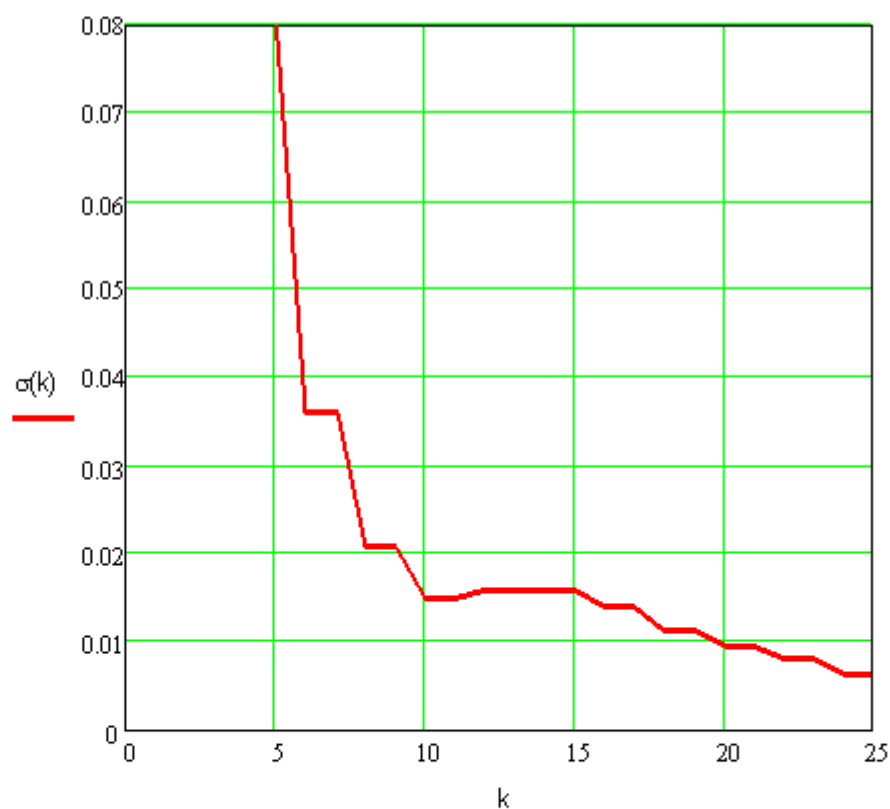
$$b_k := \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(k \cdot x) dx$$

$$S(x, n) := \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cdot \cos(k \cdot x) + b_k \cdot \sin(k \cdot x)) \quad \alpha(n) := \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} (f(x) - S(x, n))^2 dx}$$

$$k := 0..n \quad P_k := \alpha(k)$$

	0
0	3.283
1	0.771
2	0.171
3	0.171
4	0.081
5	0.081
6	0.036
7	0.036
8	0.021
9	0.021
10	0.015
11	0.015
12	0.016
13	0.016
14	0.016
15	0.016
16	0.014
17	0.014
18	0.011
19	0.011

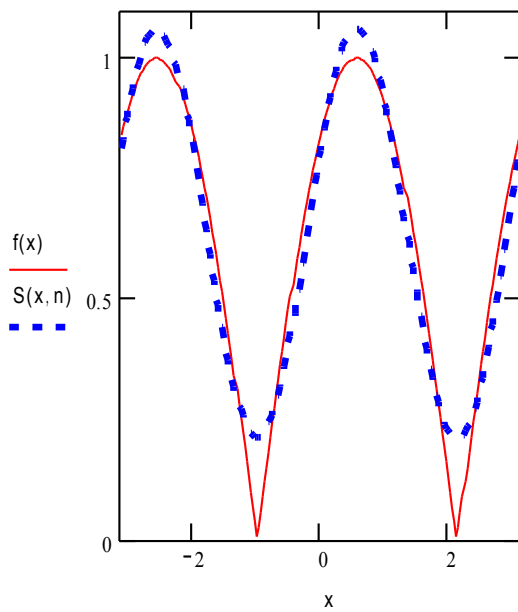
P=



Листинг 1.4 Лист 1

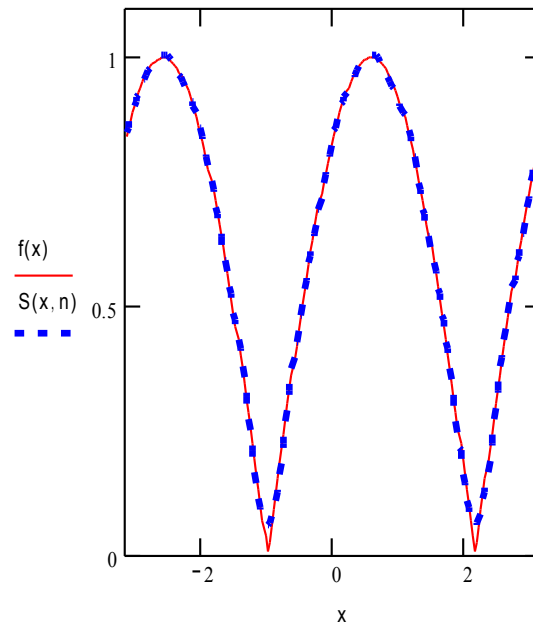
$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} \dots \pi$

$n := 2$



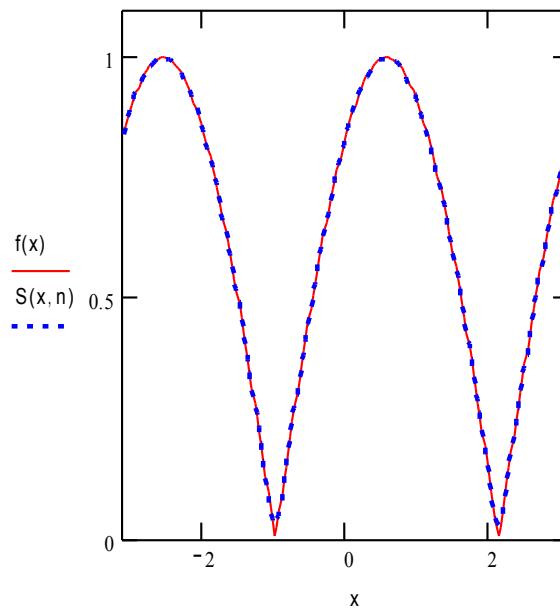
$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} \dots \pi$

$n := 10$



$x := -\pi, -\pi + \frac{\pi}{100} \dots \pi$

$n := 20$



Листинг 1.4 Лист 2

Задача 3

Разложить в интервале (2;6) в неполный ряды Фурье по синусам кратных

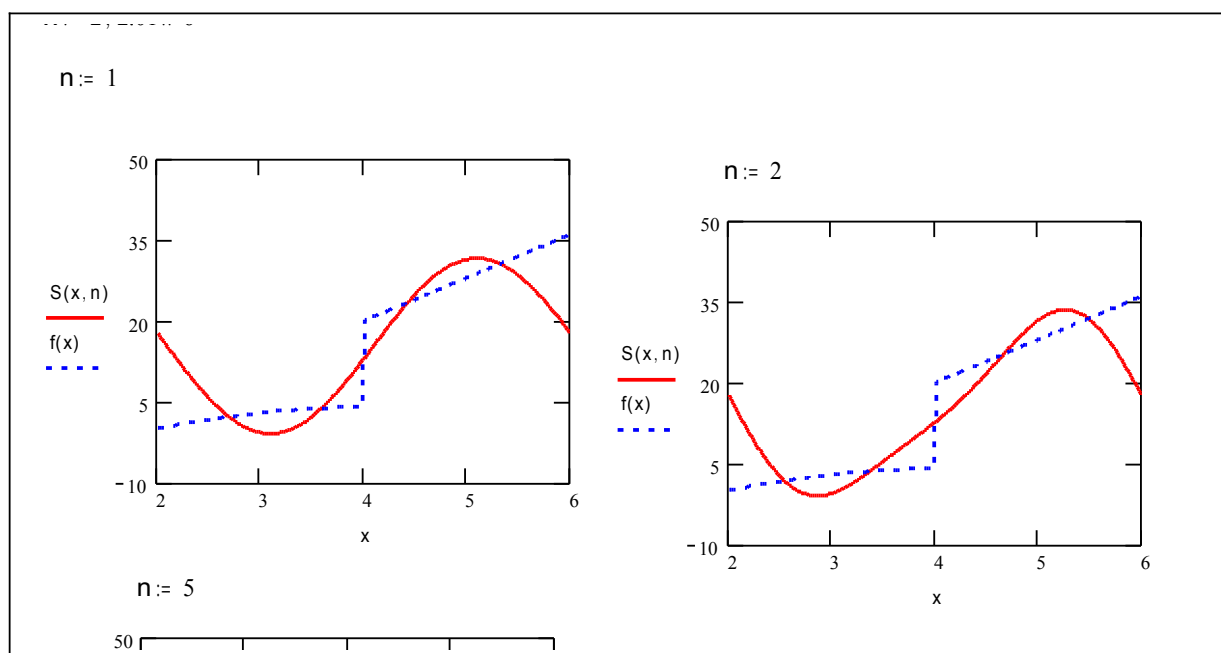
дуг функцию $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 8 \cdot x - 12 & \text{при } 2 < x < 4 \\ 8 \cdot x - 12 & \text{при } 4 < x < 6 \end{cases}$

Построить график самой функции и частичных сумм ряда Фурье при $n = 1, 2, 5, 10, 20$ (также и вне интервала (2;6)). При $n=20$ вычислить $S_n(3)$, $S_n(4)$ и $S_n(5)$.

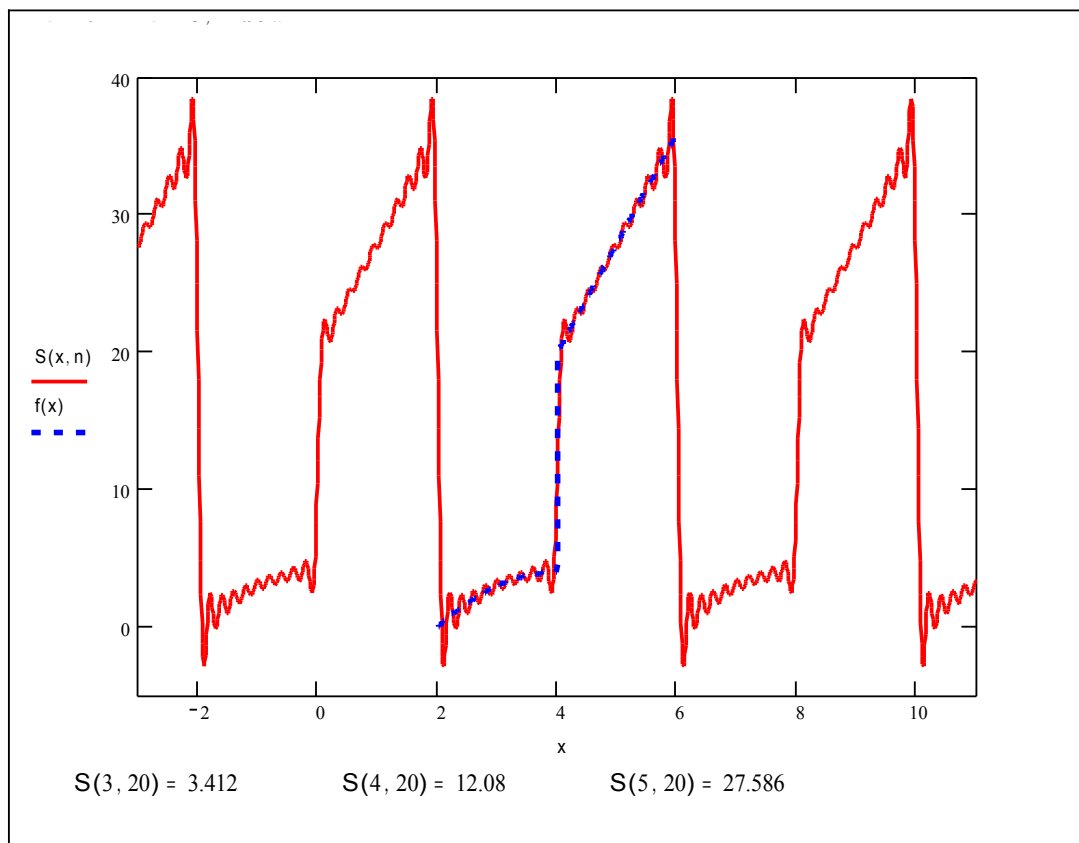
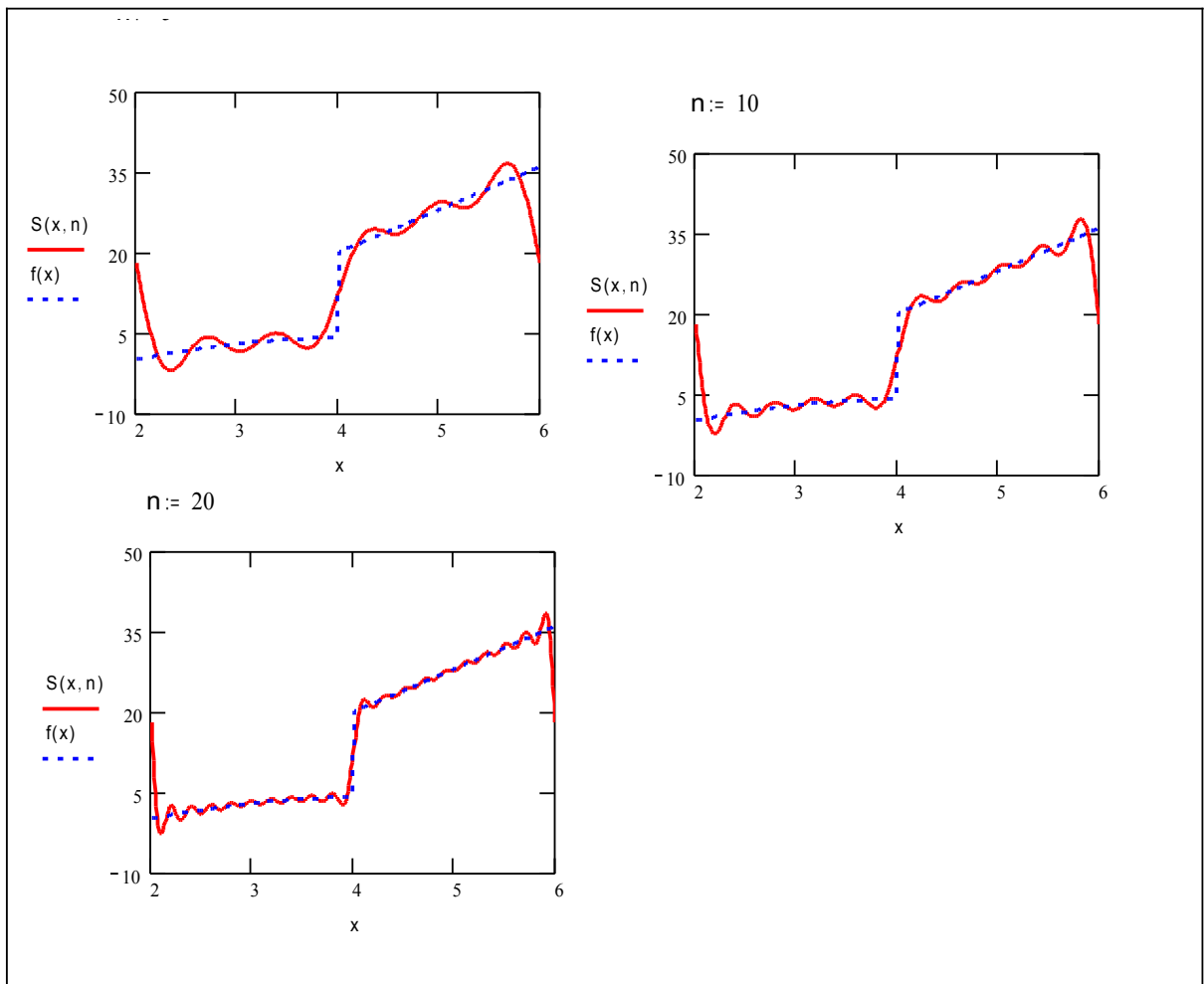
Решение

Приведен листинг 1.5 рабочего документа MathCad.

$$\begin{aligned}
 l &:= \frac{x-2}{2} & l &= 2 \\
 f(x) &:= \begin{cases} -x^2 + 8 \cdot x - 12 & \text{if } 2 < x < 4 \\ 8 \cdot x - 12 & \text{if } 4 < x < 6 \end{cases} \\
 n &:= 50 & k &:= 0..n \\
 a_k &:= \frac{1}{l} \cdot \int_2^6 f(x) \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) dx & b_k &:= \frac{1}{l} \cdot \left(\int_2^6 f(x) \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) dx \right) \\
 S(x, n) &:= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k \cdot \pi \cdot x}{l}\right) \right)
 \end{aligned}$$



Листинг 1.5 Лист 1



Листинг 1.5 Лист 2

2 Преобразование Фурье

2.1 Интеграл Фурье

Как было показано выше, всякую функцию $f(x)$, удовлетворяющую на отрезке $-l \leq x \leq l$ условиям Дирихле (раздел 1.2 данного пособия), можно разложить в ряд Фурье:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} \right), \quad (2.1)$$

$$\text{где } a_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt, \quad b_n = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(t) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt$$

Это разложение справедливо на всей числовой оси, если $f(x)$ - периодическая функция с периодом $2 \cdot l$.

Рассмотрим предельный случай $l \rightarrow \infty$, т.е. случай непериодической функции $f(x)$, заданной на всей оси x .

Будем предполагать, что на всяком конечном отрезке оси x , функция $f(x)$ удовлетворяет условиям Дирихле, кроме того, $f(x)$ абсолютно интегрируема, то есть существует конечный интеграл:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = c \quad (2.2)$$

Замечая, что:

$$\begin{aligned} a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} &= \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + \\ &+ \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(t) \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot t}{l} dt \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} = \frac{1}{l} \cdot \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot (x-t)}{l} dt \end{aligned}$$

Запишем разложение (2.1) в виде:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int_{-l}^l f(t) dt + \frac{1}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot (x-t)}{l} dt \quad (2.3)$$

Первое слагаемое полученного разложения (2.3) стремится к нулю при $l \rightarrow \infty$,

$$\text{т.к. } \left| \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int_{-l}^l f(t) dt \right| \leq \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int_{-l}^l |f(t)| dt \leq \frac{1}{2 \cdot l} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt = \frac{c}{2 \cdot l}$$

Для выяснения предела второго слагаемого при $l \rightarrow \infty$ введем новую переменную α , принимающую значения, образующие бесконечную арифметическую прогрессию: $\alpha_n = \frac{n \cdot \pi}{l}$, $n=1, 2, \dots$

$$\Delta \alpha_n = \alpha_n - \alpha_{n-1} = \frac{\pi}{n}$$

$$\frac{1}{l} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot (x-t)}{l} dt = \frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \Delta \alpha_n \cdot \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos(\alpha_n \cdot (x-t)) dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \cdot \Delta \alpha_n$$

где $F(\alpha_n) = \int_{-l}^l f(t) \cdot \cos(\alpha_n \cdot (x-t)) dt$.

Примем без доказательства, что при $l \rightarrow \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} F(\alpha_n) \cdot \Delta \alpha_n \rightarrow \int_0^{\infty} F(\alpha) d\alpha,$$

где $F(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot (x-t)) dt$.

Таким образом, разложение (2.1) при $l \rightarrow \infty$ преобразуется к виду:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot (x-t)) dt \quad (2.4)$$

Формула (2.4) называется формулой Фурье, а интеграл в правой части формулы (2.4) называется интегралом Фурье.

Замечания:

1. зная характер сходимости ряда Фурье при конечном l , отмечаем, что если x - точка разрыва функции $f(x)$, то под $f(x)$ в формуле Фурье следует

понимать $\frac{f(x-0) + f(x+0)}{2}$;

2. внутренний интеграл в формуле Фурье является четной функцией от α ,

поэтому $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot (x-t)) dt \quad (2.4')$

3. вышеперечисленные условия не являются единственными достаточными условиями представления функции интегралом Фурье, другое достаточное условие:

- $f(x)$ абсолютно интегрируема на каждом конечном отрезке оси x ;
- существует положительное число H такое, что при $|x| \geq H$ функция $f(x)$ монотонна и $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$.

2.2 Интеграл Фурье четной и нечетной функций

Преобразуем интеграл Фурье, развернув выражение $\cos$ под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot (x - t)) dt = \\ & = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (\cos(\alpha \cdot x) \cdot \cos(\alpha \cdot t) + \sin(\alpha \cdot x) \cdot \sin(\alpha \cdot t)) dt \end{aligned}$$

Формула Фурье (2.4) принимает вид:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} (A(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) + B(\alpha) \cdot \sin(\alpha \cdot x)) d\alpha, \quad (2.5)$$

$$\text{где } A(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt, \quad B(\alpha) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt$$

Если $f(x)$ - четная функция, то

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt, \text{ а } B(\alpha) = 0 \quad (2.6)$$

Если $f(x)$ - нечетная функция, то

$$A(\alpha) = 0, \quad B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt \quad (2.7)$$

Замечание:

в случае, когда функция $f(x)$ определена лишь на полуоси $(0; +\infty)$, то, продолжая $f(x)$ на полуось $(-\infty; 0)$ четным или нечетным способом, получаем представление $f(x)$ двумя различными интегралами Фурье.

Ряд Фурье осуществляет разложение периодического колебания на гармоники.

Общий член ряда Фурье представляется в виде:

$$a_n \cdot \cos \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} + b_n \cdot \sin \frac{n \cdot \pi \cdot x}{l} = c_n \cdot \sin \left(\frac{n \cdot \pi}{l} \cdot x + (\varphi_0)_n \right),$$

где $a_n = c_n \cdot \sin(\varphi_0)_n$, а $b_n = c_n \cdot \cos(\varphi_0)_n$, и, следовательно, $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$,

и определяет гармонику с частотой $\frac{n \cdot \pi}{l}$, амплитудой c_n и с начальной фазой $(\varphi_0)_n$. Таким образом, ряд Фурье разлагает периодическое колебание на бесконечное множество гармоник, частоты которых образуют арифметическую прогрессию: $\frac{\pi}{l}, \frac{2 \cdot \pi}{l}, \dots, \frac{n \cdot \pi}{l}, \dots$

Условно рассматривая интеграл Фурье (2.5) как бесконечную сумму и представляя коэффициенты $A(\alpha)$ и $B(\alpha)$, как выше были представлены коэффициенты a_n и b_n тригонометрического ряда, придадим формуле Фурье механический смысл: формула Фурье осуществляет разложение непериодического колебания на непрерывное бесконечное множество гармоник, частоты которых непрерывно изменяются от $\alpha = 0$ до $\alpha = \infty$.

Пример 2.1

Представить интегралом Фурье функцию:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \text{при } |x| < 1 \\ 0 & , \text{при } |x| > 1 \\ 1/2 & , \text{при } |x| = 1 \end{cases}$$

Решение

График функции представлен на рисунке 2.1.

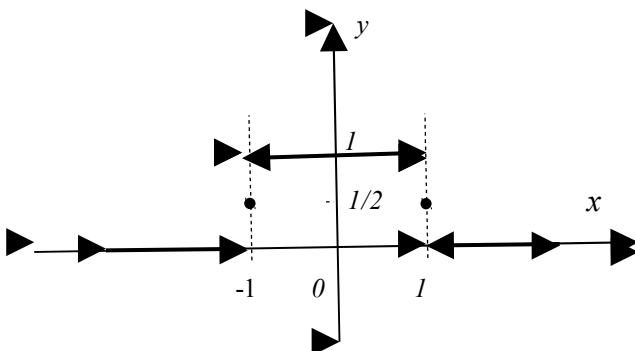


Рисунок 2.1 – График функции

Функция $f(x)$ четная, применим формулу (2.6):

$$A(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^1 1 \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

$$f(x) = \int_0^{+\infty} A(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha$$

Замечание:

полученное разложение можно использовать для вычисления несобственного («неберущегося») интеграла.

$$f(0) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha}{\alpha} d\alpha, \text{ но } f(0) = 1. \text{ Отсюда } \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

2.3 Косинус- и синус-преобразования Фурье

Положим в формулах (2.6), (2.7) $A(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot a(\alpha)$ и $B(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot b(\alpha)$. Получим

формулу Фурье в симметричной форме записи:

$$\text{- в случае четной функции } f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} a(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha, \quad (2.8)$$

где $a(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt$ - косинус-преобразование Фурье.

$$\text{- в случае нечетной функции } f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} b(\alpha) \cdot \sin(\alpha \cdot x) d\alpha, \quad (2.9)$$

где $b(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt$ - синус-преобразование Фурье.

Принята следующая терминология $f(x)$ - оригинал, $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ - изображение.

Пример 2.2

Найти косинус- и синус-преобразования функции $f(x) = e^{-x}$, $x \geq 0$.

Решение

График функции представлен на рисунке 2.2.

Найдем косинус-преобразование:

$$a(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \cos(\alpha \cdot t) dt = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{\alpha^2 + 1}.$$

Найдем синус-преобразование:

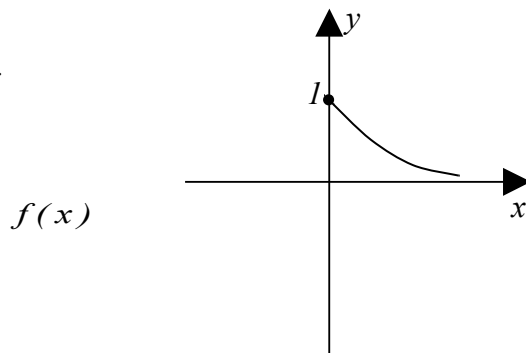


Рисунок 2.2 – График функции

Таким образом, получили следующие представления функции e^{-x} интегралом Фурье, графики представлений – на рисунке 2.3.

$$e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} a(\alpha) \cdot \cos(\alpha \cdot x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$$

$$e^{-x} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \int_0^{+\infty} b(\alpha) \cdot \sin(\alpha \cdot x) d\alpha = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$$

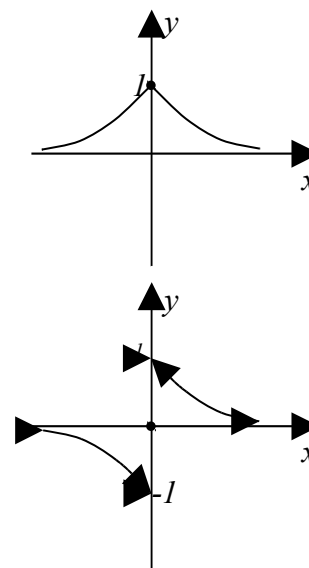


Рисунок 2.3 – Графики представлений функции

Замечания:

1. представление данной функции интегралом Фурье неединственно, так как она задана при $x \geq 0$. Косинус-преобразование мы получили, продолжив данную функцию четным образом, а синус-преобразование – нечетным образом. При $x > 0$

оба интеграла $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ и $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ равны функции e^{-x} . При $x < 0$

$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = e^x$, а $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = -e^x$. При $x = 0$ несобственный интеграл

$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$ сходится к $f(0) = 1$, а несобственный интеграл $\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha$

сходится к 0.

2. полученные представления используются в математике под названием интегралов Лапласа:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{\alpha^2 + 1} d\alpha = \frac{\pi}{2} \cdot e^{-x}, \quad \text{при } x > 0.$$

2.4 Комплексная форма записи интеграла Фурье

Согласно равенству (2.4') $f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \cos(\alpha \cdot (x - t)) dt$.

Кроме того, справедливо равенство $0 = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot \sin(\alpha \cdot (x - t)) dt$, так как, внутренний интеграл есть нечетная функция от α . Сложим эти два равенства, умножив предварительно второе на i , получаем:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot (\cos(\alpha \cdot (x - t)) + i \cdot \sin(\alpha \cdot (x - t))) dt = \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{i \cdot \alpha \cdot (x - t)} dt \end{aligned}$$

Получаем интеграл Фурье в комплексной форме:

$$f(x) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha \cdot x \cdot i} d\alpha \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha \cdot t \cdot i} \cdot f(t) dt \quad (2.10)$$

$$\text{Положим } c(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-\alpha \cdot t \cdot i} dt, \quad (2.11)$$

$$\text{тогда } f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\alpha) \cdot e^{\alpha \cdot x \cdot i} d\alpha \quad (2.12)$$

Комплексная функция $c(\alpha)$ действительной переменной называется трансформантой Фурье функции $f(x)$, переход от $f(x)$ к $c(\alpha)$ называется преобразованием Фурье. Формулы (2.11) и (2.12) осуществляют прямое и обратное преобразование Фурье.

По аналогии с рядом Фурье (1.16) и спектральной последовательностью (1.17), осуществляющей дискретный спектр функции $f(x)$, комплексная функция $c(\alpha)$ называется спектральной функцией для функции $f(x)$, осуществляющей непрерывный спектр (α непрерывно изменяется от $-\infty$ до $+\infty$). Модуль $|c(\alpha)|$ спектральной функции называется амплитудным спектром функции $f(x)$, а аргумент сопряженной функции $\arg \overline{c(\alpha)}$ - фазовым спектром.

Свойства трансформант Фурье:

1) если $f(x)$ абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty; \infty)$, то функция $c(\alpha)$ непрерывна при $\alpha \in R$ и стремится к нулю при $\alpha \rightarrow \pm \infty$;

2) если для некоторого натурального числа n функция $x^n \cdot f(x)$ абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty; \infty)$, то функция $c(\alpha)$ n -раз дифференцируема и все производные $c'(\alpha)$, ..., $c^{(n)}(\alpha)$ стремятся к нулю при $\alpha \rightarrow \pm \infty$;

3) если $f(x)$ и первые ее $n - 1$ производных стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$, а n -я производная $f^{(n)}(x)$ в интервале $(-\infty; \infty)$ абсолютно интегрируема, то $\lim_{\alpha \rightarrow \pm \infty} \alpha^n \cdot c(\alpha) = 0$.

Разнообразные применения преобразования Фурье в теории вероятностей, при решении краевых задач и интегральных уравнений, а также в электродинамике и других технических областях обуславливаются главным образом следующими теоремами.

Теорема о свертке

Трансформанта Фурье свертки двух функций $(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cdot g(x - y) \cdot dy$ равна с точностью до $\sqrt{2\pi}$ произведению трансформант Фурье отдельных сомножителей:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} (f * g)(x) \cdot e^{ix\alpha} \cdot dx = \sqrt{2\pi} \cdot c_f(\alpha) \cdot c_g(\alpha) \quad (2.13)$$

Теорема непрерывности

Если $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$, тогда также $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n(\alpha) = c(\alpha)$.

На практике обычно важнее обратное:

если трансформанты Фурье $c_n(\alpha)$ последовательности функций $f_n(x)$ сходятся к непрерывной функции $c(\alpha)$, то существует функция $f(x)$ такая, что $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ и $c(\alpha)$ есть трансформанта Фурье функции $f(x)$.

Теорема о дифференцировании

Во множестве значений преобразования Фурье операция дифференцирования преобразуется в сущности в умножение на независимую переменную, т.е. если $c_{f'}(\alpha)$ есть трансформанта Фурье функции $f'(x)$, то:

$$c_{f'}(\alpha) = -i \cdot \alpha \cdot c_f(\alpha),$$

где $c_f(\alpha)$ - трансформанта Фурье функции $f(x)$.

2.5 Указания к решению задач по теме «Преобразование Фурье» в системе MathCAD

При представлении функции через интеграл Фурье приходится вычислять несобственные интегралы. Для вычисления несобственных интегралов в системе MathCAD используется панель «Операторы математического анализа». Щелкните по кнопке «Определенный интеграл» (или используйте сочетание клавиш Shift+7), введите в отмеченных позициях пределы интегрирования, один из которых бесконечен (символ бесконечности в той же панели или клавиши Ctrl+Shift+Z), подынтегральную функцию и переменную интегрирования, выделите интеграл и щелкните по кнопке «Символическая оценка» (Ctrl+Shift+.) в панели «Символические операторы».

При помощи символьного процессора MathCad можно осуществить прямое и обратное преобразование Фурье, для этого используются операторы *fourier* и *infourier* панели «Символические операторы». При решении задачи выделите функцию, щелкните по кнопке «fourier» (или «infourier») и укажите переменную, по которой совершается преобразование.

Аналогично большинству операций символьного процессора MathCAD интегральные преобразования Фурье можно проводить и при помощи команд меню «Символы/Преобразования», для чего выделите переменную, по которой совершается преобразование, и выберите в меню строку «Символы/Преобразования/Фурье».

Следует иметь в виду, что результаты, получаемые в MathCad, могут содержать обобщенные функции. Например, дельта-функция Дирака ($Dirac(x)$ или $\Delta(x)$), которая равна нулю при всех значениях x , отличных от нуля, и принимает

значение бесконечность при нулевом значении x :

$$\Delta(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ +\infty & x = 0 \end{cases} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(x) dx = 1$$

Пример использования этих символьных операторов приводится в листинге 2.3.

2.6 Примеры решения задач

Задача 1

Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$, продолжив предварительно ее нечетным способом.

Решение

Функция – нечетная, поэтому используем формулу (2.7):

$B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt$. Для вычисления несобственного интеграла

используем MathCAD (листинг № 2.1). Получим $B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$. Следовательно

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{\alpha \cdot \sin(\alpha \cdot x)}{1 + \alpha^2} d\alpha.$$

$$\frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} e^{-t} \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt \rightarrow \frac{2}{\left[\pi \cdot (1 + \alpha^2) \right]} \cdot \alpha$$

Листинг 2.1

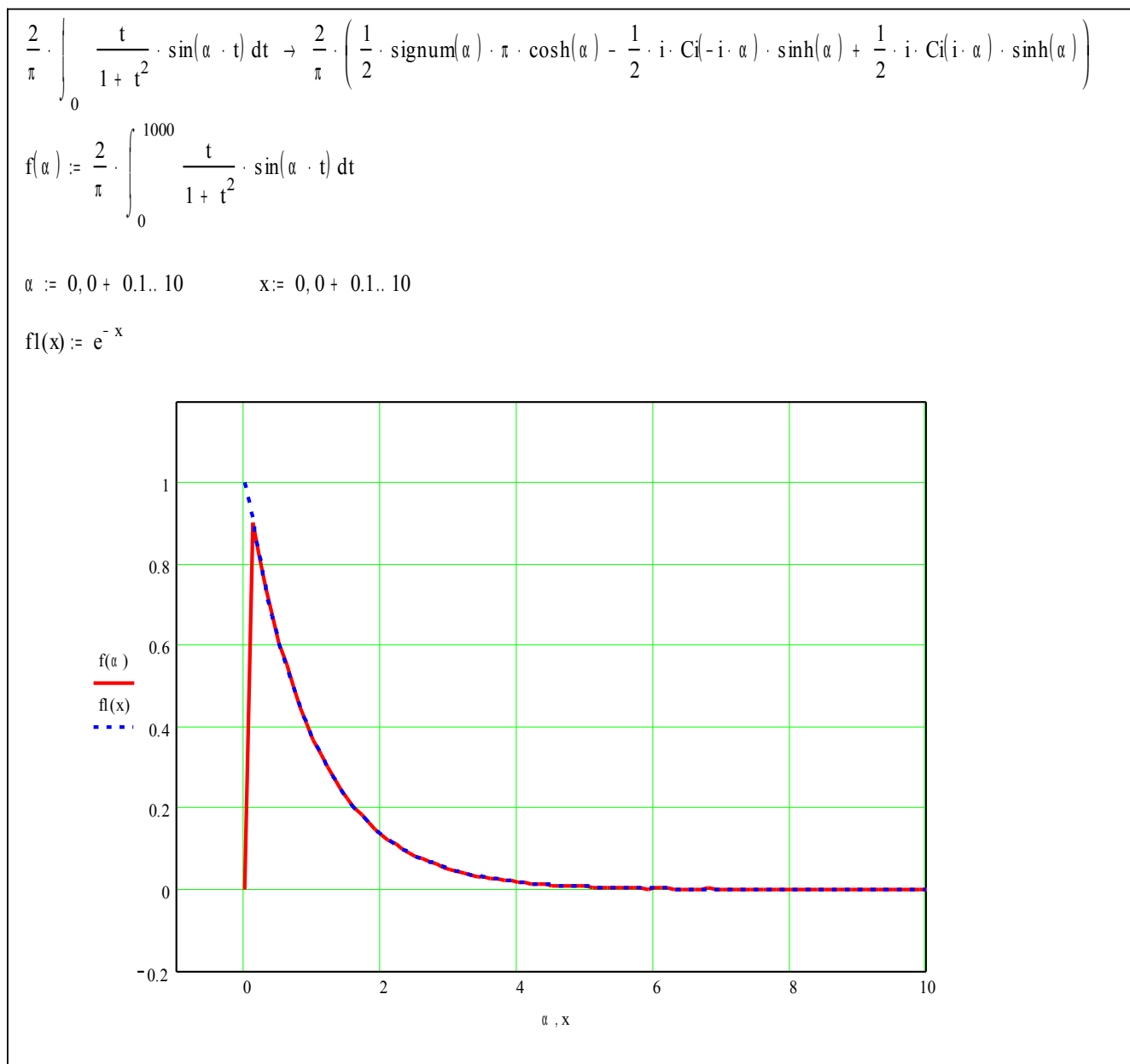
Задача 2

Представить интегралом Фурье функцию $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$.

Решение

Функция – нечетная, по формуле (2.7) получаем $B(\alpha) = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \frac{t}{1 + t^2} \cdot \sin(\alpha \cdot t) dt$.

Пользуясь результатом задачи №1, данный интеграл равен $e^{-\alpha}$, $\alpha > 0$. Если $B(\alpha)$ вычислять при помощи MathCAD, то внешний вид функции $B(\alpha)$ будет отличаться от $e^{-\alpha}$. Это связано с тем, что по умолчанию операции MathCAD совершаются с комплексными числами (листинг 2.2).



Листинг 2.2

Задача 3

Найти преобразование Фурье функции $f(x) = \sin(x)$.

Решение

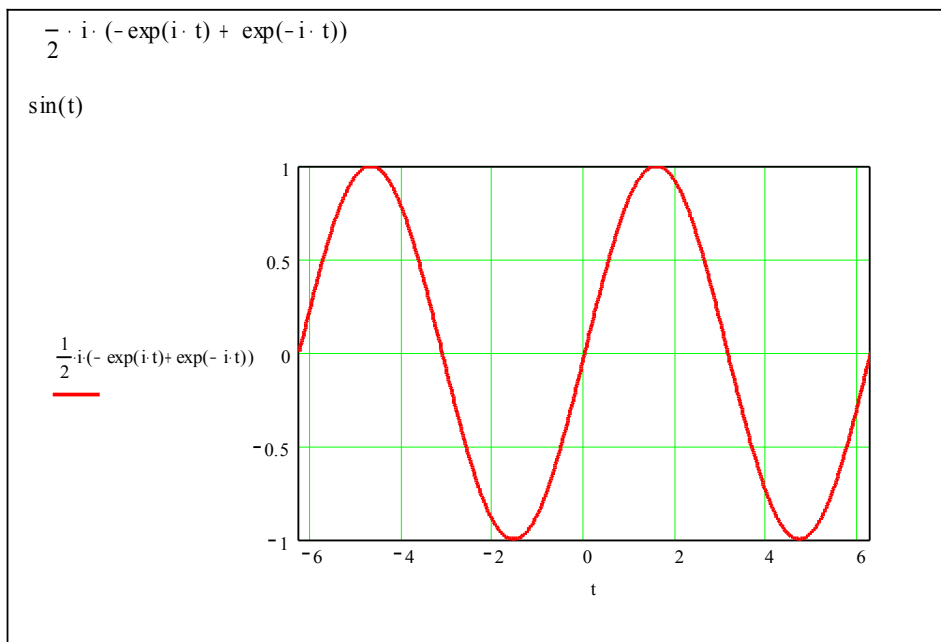
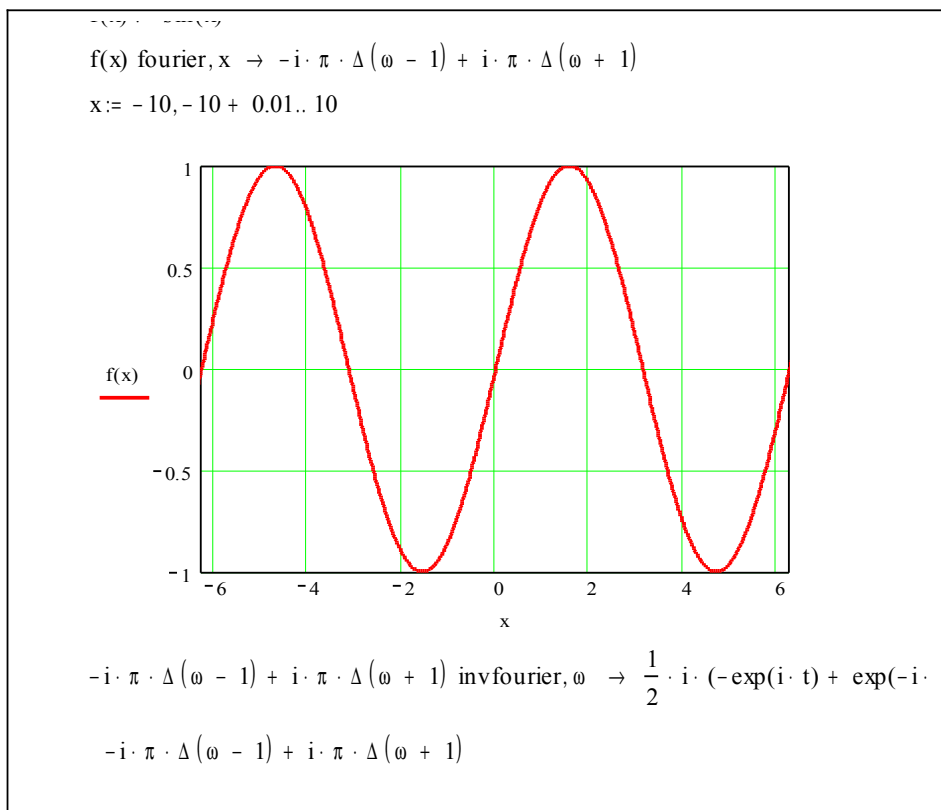
По формуле (2.11) $C(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(x) \cdot e^{-\alpha \cdot t \cdot i} dt$. При решении задачи в

MathCAD используем оператор *fourier* (см. листинг 2.3). Получаем $C(\alpha) = -i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega - 1) + i \cdot \pi \cdot \Delta(\omega + 1)$, где $\Delta(x)$ - дельта-функция Дирака.

Совершим обратное преобразование Фурье: $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\alpha) \cdot e^{\alpha \cdot x \cdot i} d\alpha$. При

решении задачи в MathCAD используем оператор *infourier*. Получаем:

$f(t) = \frac{1}{2} \cdot i \cdot (-e^{i \cdot t} + e^{-i \cdot t})$. Используя команду меню «Символы/Упростить», получаем $f(t) = \sin(t)$.



Листинг 2.3

3 Задачи для самостоятельного решения

1 Указанные ниже функции разложить в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$, определить сумму ряда на концах интервала, графически исследовать сходимость частичных сумм полученного ряда:

1.1. $f(x) = x^2 + 2x$	1.6. $f(x) = \cos 2x + x$
1.2. $f(x) = \sqrt{x} + x$	1.7. $f(x) = \sin 2x - x$
1.3. $f(x) = \sqrt[3]{x} - x$	1.8. $f(x) = x^2 + \cos x$
1.4. $f(x) = e^{2x}$	1.9. $f(x) = \ln(x + 5)$
1.5. $f(x) = x + e^x$	1.10. $f(x) = e^{-x} + x$

2 Разложить в интервале $(0;1)$ в неполные ряды Фурье: а) по синусам кратных дуг; б) по косинусам кратных дуг следующие функции. Построить график самой функции и частичных сумм рядов Фурье при $n = 1, 2, 5, 10, 20$ (также и вне интервала $(0;1)$).

2.1. $f(x) = x^2 + 2x$	2.6. $f(x) = \cos 2x + x$
2.2. $f(x) = \sqrt{x} + x$	2.7. $f(x) = \sin 2x - x$
2.3. $f(x) = \sqrt[3]{x} - x$	2.8. $f(x) = x^2 + \cos x$
2.4. $f(x) = e^{2x}$	2.9. $f(x) = \ln(x + 5)$
2.5. $f(x) = x + e^x$	2.10. $f(x) = e^{-x} + x$

3 Указанные ниже функции разложить в ряд Фурье на области определения, определить сумму ряда в точках разрыва и на концах интервала, графически исследовать сходимость частичных сумм полученного ряда:

3.1. $f(x) = \begin{cases} -2 & \text{при } -3 < x < -1 \\ 2+x & \text{при } -1 < x < 1 \end{cases}$	3.6. $f(x) = \begin{cases} 1-x & \text{при } 1 < x < 2 \\ x+1 & \text{при } 2 < x < 3 \end{cases}$
3.2. $f(x) = \begin{cases} -2x+1 & \text{при } -1 < x < 1 \\ 2 & \text{при } 1 < x < 2 \end{cases}$	3.7. $f(x) = \begin{cases} 3x+2 & \text{при } -1 < x < 0 \\ 5-x & \text{при } 0 < x < 2 \end{cases}$
3.3. $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{при } 1 < x < 2 \\ 1 & \text{при } 2 < x < 3 \end{cases}$	3.8. $f(x) = \begin{cases} 5 & \text{при } 1 < x < 5 \\ x+1 & \text{при } 5 < x < 7 \end{cases}$
3.4. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -3 < x < -1 \\ x+1 & \text{при } -1 < x < 1 \end{cases}$	3.9. $f(x) = \begin{cases} -x & \text{при } -3 < x < -2 \\ x & \text{при } -2 < x < 1 \end{cases}$
3.5. $f(x) = \begin{cases} 2x-1 & \text{при } -2 < x < -1 \\ 1+x & \text{при } -1 < x < 2 \end{cases}$	3.10. $f(x) = \begin{cases} 2-x & \text{при } -1 < x < 1 \\ 2+x & \text{при } 1 < x < 3 \end{cases}$

4 Для заданной в интервале $(-\pi; \pi)$ функции найти тригонометрический многочлен наилучшего приближения наименьшей степени со среднеквадратическим отклонением, меньшим 0.02. Построить график зависимости среднеквадратического отклонения от степени многочлена.

4.1. $f(x) = \sin(x) + x $	4.6. $f(x) = x - 2 \cdot \sin(x) $
4.2. $f(x) = \sin(x) + 2 \cdot x $	4.7. $f(x) = \left \frac{1}{2} \cdot x + \sin(x) \right $
4.3. $f(x) = \sin(x) - x $	4.8. $f(x) = \left \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \right $
4.4. $f(x) = \sin(x) - 2 \cdot x $	4.9. $f(x) = \left \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) + x \right $
4.5. $f(x) = 2 \cdot \sin(x) + x $	4.10. $f(x) = \left x - \sin\left(\frac{1}{2} \cdot x\right) \right $

5 Построить графики данных функций и представить их интегралами Фурье:

5.1. $f(x) = \begin{cases} \sin(x), & x < \pi \\ 0, & x \geq \pi \end{cases}$	5.6. $f(x) = \begin{cases} \cos(x), & x \leq \pi \\ 0, & x > \pi \end{cases}$
5.2. $f(x) = \begin{cases} 1+x, & -1 < x \leq 0 \\ 1-x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$	5.7. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \sin x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x \geq \pi \end{cases}$
5.3. $f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \cos x, & 0 < x < \pi \\ 0, & x \geq \pi \end{cases}$	5.8. $f(x) = \begin{cases} 2-x, & -1 < x < 0 \\ x-2, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$
5.4. $f(x) = \begin{cases} 3-x, & -1 < x < 0 \\ x-3, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$	5.9. $f(x) = \begin{cases} x-2, & -1 < x < 0 \\ 2-x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$
5.5. $f(x) = \begin{cases} 1-x, & -1 < x \leq 0 \\ 1+x, & 0 < x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$	5.10. $f(x) = \begin{cases} x-3, & -1 < x < 0 \\ 3-x, & 0 \leq x < 1 \\ 0, & x \geq 1 \end{cases}$

Список использованных источников

- 1 Вся высшая математика: учебник / М.Л. Краснов [и др.]. 2-е изд. – М.: Едиториал УРСС, 2005. – 240 с.
- 2 Бронштейн, И.Н. Справочник по математике для инженеров и учащихся втузов / И.Н. Бронштейн, К.А. Семендяев. 13-е изд. -М.: Наука, 1986. – 544 с.
- 3 Ильин, В.А. Математический анализ. Продолжение курса / В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Бл.Х. Сендов; под ред. А.Н. Тихонова. – М.: Изд-во МГУ, 1987. – 358 с.
- 4 Кирьянов, Д.В. Самоучитель MathCAD 13 / Д.В. Кирьянов – СПб.: БХВ-Петербург, 2006. – 528 с.
- 5 Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа : в 3 т. : учебник / Л.Д. Кудрявцев.- М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – Т.3 : Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ. - 424 с.
- 6 Плис, А.И. MathCAD: математический практикум для экономистов и инженеров: учеб.пособие / А.И. Плис, Н.А. Сливина – М.: Финансы и статистика, 1999. – 656 с.

Приложение А
Таблица трансформант Фурье

Косинус - преобразования Фурье	
$f(x)$	$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \cos(xy) dx$
$\begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(ay)}{y}$
$\begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2-x, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	$4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\cos y \sin^2 \frac{y}{2} \right) y^{-2}$
$\begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{1}{x}, & x > a \end{cases}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} Ci(ay)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\frac{2Ci(ay)}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > a \end{cases}$	$\frac{1 - 2Ci(ay)}{\sqrt{y}}$
$(a+x)^{-1} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} [-si(ay) \sin(ay) - Ci(ay) \cos(ay)]$
$(a-x)^{-1} \quad (a > 0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\cos(ay) Ci(ay) + \sin(ay) \left(\frac{\pi}{2} + Si(ay) \right) \right]$
$(a^2 + x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ay}}{a}$
$(a^2 - x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(ay)}{y}$
$\frac{b}{b^2 + (a-x)^2} + \frac{b}{b^2 + (a+x)^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-by} \cos(ay)$

$\frac{a+x}{b^2+(a+x)^2} + \frac{a-x}{b^2+(a-x)^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-by} \sin(ay)$
$(a^2 + x^2)^{-1/2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} K_0(ay)$
$\begin{cases} (a^2 - x^2)^{-1/2} \\ \text{npu } 0 < x < a \\ 0 \\ \text{npux} > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(ay)$
$x^{-v}, \quad 0 < \operatorname{Re} v < 1$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin\left(\frac{\pi v}{2}\right) \Gamma(1-v) y^{v-1}$
e^{-ax}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + y^2}$
$\frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln\left(\frac{a^2 + y^2}{b^2 + y^2}\right)$
$\sqrt{x} e^{-ax}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (a^2 + y^2)^{-3/4} \cos\left(\frac{3}{2} \arctg \frac{y}{a}\right)$
$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}$	$\left(\frac{a + (a^2 + y^2)^{1/2}}{a^2 + y^2}\right)^{1/2}$
$x^n e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} n! a^{n+1} (a^2 + y^2)^{-(n+1)} \sum_{0 \leq 2m \leq n+1} (-1)^m C_{n+1}^{2m} \left(\frac{y}{a}\right)^{2m}$
$x^{v-1} e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(v) (a^2 + y^2)^{-v/2} \cos\left(v \arctg \frac{y}{a}\right)$
$\frac{1}{x} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{x} + \frac{1}{e^x - 1}\right)$	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln(1 - e^{-2\pi y})$
e^{-ax^2}	$\frac{\sqrt{2}}{2} a^{-1/2} e^{-y^2/4a}$
$x^{-1/2} e^{-a/x}$	$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\sqrt{2ay}} (\cos\sqrt{2ay} - \sin\sqrt{2ay})$
$x^{-3/2} e^{-a/x}$	$\sqrt{\frac{2}{a}} e^{-\sqrt{2ay}} \cos\sqrt{2ay}$

$\begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Si(y)}{y}$
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$-\frac{1}{\sqrt{y}} \left(C + \frac{\pi}{2} + \ln(4y) \right)$
$(x^2 - a^2)^{-1} \ln \frac{x}{a}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} (\sin(ay) Ci(ay) - \cos(ay) si(ay))$
$(x^2 - a^2)^{-1} \ln bx$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} \{ \sin(ay) [Ci(ay) - \ln(ab)] - \cos(ay) si(ay) \}$
$\frac{1}{x} \ln(1+x)$	$\sqrt{2\pi} [(Ci(y))^2 + (si(y))^2]$
$\ln \left \frac{a+x}{b-x} \right $	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{y} \cdot \left(\frac{\pi}{2} \cdot (\cos by - \cos ay) + \cos by \cdot Si(by) + \right.$ $\left. + \cos ay \cdot Si(ay) - \sin ay \cdot Ci(ay) - \sin by \cdot Ci(by) \right)$
$e^{-ax} \ln x$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^2 + y^2} \left[aC + \frac{a}{2} \ln(a^2 + y^2) + y \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{a} \right) \right]$
$\ln \left(\frac{a^2 + x^2}{b^2 + x^2} \right)$	$\frac{\sqrt{2\pi}}{y} (e^{-by} - e^{-ay})$
$\ln \left \frac{a^2 + x^2}{b^2 - x^2} \right $	$\frac{\sqrt{2\pi}}{y} (\cos(by) - e^{-ay})$
$\frac{1}{x} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2$	$-2\sqrt{2\pi} si(ay)$
$\frac{\ln(a^2 + x^2)}{\sqrt{a^2 + x^2}}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\left(C + \ln \left(\frac{2y}{a} \right) \right) K_0(ay) \right]$
$\ln \left(1 + \frac{a^2}{x^2} \right)$	$\sqrt{2\pi} \frac{1 - e^{-ay}}{y}$
$\ln \left 1 - \frac{a^2}{x^2} \right $	$\sqrt{2\pi} \frac{1 - \cos(ay)}{y}$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & y < a, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & y = a, \\ 0, & y = 0 \end{cases}$
$\frac{x \sin(ax)}{x^2 + b^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ab} ch(by), & y < a, \\ -\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-by} sh(ab), & y > a \end{cases}$

$\frac{\sin(ax)}{x(x^2 + b^2)}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} b^{-2} (1 - e^{-ab} \operatorname{ch}(by)), & y < a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} b^{-2} e^{-by} \operatorname{sh}(ab), & y > a \end{cases}$
$e^{-bx} \sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{a+y}{b^2 + (a+y)^2} + \frac{a-y}{b^2 + (a-y)^2} \right]$
$\frac{e^{-x} \sin x}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \operatorname{arctg} \left(\frac{2}{y^2} \right)$
$\frac{\sin^2(ax)}{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \ln \left 1 - 4 \frac{a^2}{y^2} \right $
$\frac{\sin(ax) \sin(bx)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln \left \frac{(a+b)^2 - y^2}{(a-b)^2 - y^2} \right $
$\frac{\sin^2(ax)}{x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(a - \frac{1}{2} y \right), & y < 2a, \\ 0, & y > 2a \end{cases}$
$\frac{\sin^3(ax)}{x^2}$	$\frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \cdot ((y+3a) \ln(y+3a) + (y-3a) \ln y-3a - (y+a) \ln(y+a) - (y-a) \ln y-a)$
$\frac{\sin^3(ax)}{x^3}$	$\begin{cases} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (3a^2 - y^2), & 0 < y < a, \\ \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}} y^2, & y = a, \\ \frac{1}{8} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (3a - y)^2, & a < y < 3a, \\ 0, & y > 3a \end{cases}$
$\frac{1 - \cos(ax)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln \left 1 - \frac{a^2}{y^2} \right $
$\frac{1 - \cos(ax)}{x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (a - y), & y < a, \\ 0, & y > a \end{cases}$
$\frac{\cos(ax)}{b^2 + x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ab} \operatorname{ch}(by)}{b}, & y < a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-by} \operatorname{ch}(ab)}{b}, & y > a \end{cases}$
$e^{-bx} \cos(ax)$	$\frac{b}{\sqrt{2\pi}} \left[\frac{1}{b^2 + (a-y)^2} + \frac{1}{b^2 + (a+y)^2} \right]$
$e^{-bx^2} \cos(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-(a^2+y^2)/(4b)} \operatorname{ch} \left(\frac{ay}{2b} \right)$

$\frac{x}{b^2 + x^2} tg(ax)$	$\sqrt{2\pi} ch(by)(1 + e^{2ab})^{-1}$
$\frac{x}{b^2 + x^2} ctg(ax)$	$\sqrt{2\pi} ch(by)(e^{2ab} - 1)^{-1}$
$\sin(ax^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}} \left(\cos\left(\frac{y^2}{4a}\right) - \sin\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right)$
$\sin[a(1 - x^2)]$	$-\frac{1}{\sqrt{2a}} \cos\left(a + \frac{\pi}{4} + \frac{y^2}{4a}\right)$
$\frac{\sin(ax^2)}{x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} y \left[S\left(\frac{y^2}{4a}\right) - C\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right] + \sqrt{2a} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{y^2}{4a}\right)$
$\frac{\sin(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \left\{ \frac{1}{2} - \left[C\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right]^2 - \left[S\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right]^2 \right\}$
$e^{-ax^2} \sin(bx^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (a^2 + b^2)^{-1/4} e^{-\frac{1}{4}ay^2(a^2+b^2)^{-1}} \sin\left[\frac{1}{2} arctg\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{by^2}{4(a^2 + b^2)}\right]$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}} \left[\cos\left(\frac{y^2}{4a}\right) + \sin\left(\frac{y^2}{4a}\right) \right]$
$\cos[a(1 - x^2)]$	$\frac{1}{\sqrt{2a}} \sin\left(a + \frac{\pi}{4} + \frac{y^2}{4a}\right)$
$e^{-ax^2} \cos(bx^2)$	$\frac{1}{\sqrt{2}} (a^2 + b^2)^{-1/4} e^{-\frac{1}{4}ay^2(a^2+b^2)^{-1}} \cos\left[\frac{by^2}{4(a^2 + b^2)} - \frac{1}{2} arctg\left(\frac{b}{a}\right)\right]$
$\frac{1}{x} \sin\left(\frac{a}{x}\right)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} J_0(2\sqrt{ay})$
$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{y}} [\sin(2\sqrt{ay}) + \cos(2\sqrt{ay}) - e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \sin\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}} [\sin(2\sqrt{ay}) + \cos(2\sqrt{ay}) + e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\frac{1}{\sqrt{x}} \cos\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{y}} [\cos(2\sqrt{ay}) - \sin(2\sqrt{ay}) + e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3 \cos\left(\frac{a}{x}\right)$	$\frac{1}{2\sqrt{a}} [\cos(2\sqrt{ay}) - \sin(2\sqrt{ay}) + e^{-2\sqrt{ay}}]$
$\frac{1}{\sqrt{x}} \sin(a\sqrt{x})$	$\frac{2}{\sqrt{y}} \left[C\left(\frac{a^2}{4y}\right) \sin\left(\frac{a^2}{4y}\right) - S\left(\frac{a^2}{4y}\right) \cos\left(\frac{a^2}{4y}\right) \right]$
$e^{-bx} \sin(a\sqrt{x})$	$\frac{a}{\sqrt{2}} (b^2 + a^2)^{3/4} e^{-\frac{1}{4}a^2b(b^2+y^2)^{-1}} \cos\left[\frac{a^2y}{4(b^2 + y^2)} - \frac{3}{2} arctg\left(\frac{y}{b}\right)\right]$
$\frac{\sin(a\sqrt{x})}{x}$	$\sqrt{2\pi} \left[S\left(\frac{a^2}{4y}\right) + C\left(\frac{a^2}{4y}\right) \right]$

$\frac{1}{\sqrt{x}} \cos(a\sqrt{x})$	$\sqrt{\frac{2}{y}} \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{a^2}{4y}\right)$
$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}} \cos(b\sqrt{x})$	$\sqrt{2}(a^2 + y^2)^{-1/4} e^{-\frac{1}{4}ab^2(a^2 + b^2)^{-1}} \cos\left[\frac{b^2 y}{4(a^2 + y^2)} - \frac{1}{2} \arctg\left(\frac{y}{a}\right)\right]$
$e^{-a\sqrt{x}} \cos(a\sqrt{x})$	$a\sqrt{2}(2y)^{-3/2} e^{-a^2/(2y)}$
$\frac{e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} [\cos(a\sqrt{x}) - \sin(a\sqrt{x})]$	$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-a^2/(2y)}$
Синус – преобразование Фурье	
$f(x)$	$F(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(x) \sin(xy) dx$
$\begin{cases} 1, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos(ay)}{y}$
$\begin{cases} x, & 0 < x < 1, \\ 2 - x, & 1 < x < 2, \\ 0, & x > 2 \end{cases}$	$4 \sqrt{\frac{2}{\pi}} y^{-2} \sin y \sin^2\left(\frac{y}{2}\right)$
$\frac{1}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$
$\begin{cases} \frac{1}{x}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} Si(ay)$
$\begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{1}{x}, & x > a \end{cases}$	$-\sqrt{\frac{2}{\pi}} si(ay)$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}}, & 0 < x < a, \\ 0, & x > a \end{cases}$	$\frac{2S(ay)}{\sqrt{y}}$
$\begin{cases} 0, & 0 < x < a, \\ \frac{1}{\sqrt{x}}, & x > a \end{cases}$	$\frac{1 - 2S(ay)}{\sqrt{y}}$
$\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^3$	$2\sqrt{y}$

$(a+x)^{-1} (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} [\sin(ay) Ci(ay) - \cos(ay) si(ay)]$
$(a-x)^{-1} (a>0)$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\sin(ay) Ci(ay) - \cos(ay) \left(\frac{\pi}{2} + Si(ay) \right) \right]$
$\frac{x}{a^2+x^2}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-ay}$
$(a^2-x^2)^{-1}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a} [\sin(ay) Ci(ay) - \cos(ay) Si(ay)]$
$\frac{b}{b^2+(a-x)^2} - \frac{b}{b^2+(a+x)^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-by} \sin(ay)$
$\frac{a+x}{b^2+(a+x)^2} - \frac{a-x}{b^2+(a-x)^2}$	$\sqrt{2\pi} e^{-by} \cos(ay)$
$\frac{x}{a^2-x^2}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} \cos(ay)$
$\frac{1}{x(a^2-x^2)}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos(ay)}{a^2}$
$\frac{1}{x(a^2+x^2)}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{-ay}}{a^2}$
$x^{-v}, 0 < Re v < 2$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos\left(\frac{\pi v}{2}\right) \Gamma(1-v) y^{v-1}$
e^{-ax}	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{y}{a^2+y^2}$
$\frac{e^{-ax}}{x}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \operatorname{arctg} \frac{y}{a}$
$\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x^2}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \left[\frac{1}{2} y \ln \left(\frac{b^2+y^2}{a^2+y^2} \right) + b \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{b} \right) - a \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{a} \right) \right]$
$\sqrt{x} e^{-ax}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} (a^2+y^2)^{-3/4} \sin \left[\frac{3}{2} \operatorname{arctg} \frac{y}{a} \right]$
$\frac{e^{-ax}}{\sqrt{x}}$	$\left(\frac{(a^2+y^2)^{1/2} - a}{a^2+y^2} \right)^{1/2}$

$x^n e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} n! a^{n+1} (a^2 + y^2)^{-(n+1)} \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{1}{2}n \rfloor} (-1)^m C_{n+1}^{2m+1} \left(\frac{y}{a}\right)^{2m+1}$
$x^{v-1} e^{-ax}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \Gamma(v) (a^2 + y^2)^{-\frac{1}{2}v} \sin \left[v \arctg \frac{y}{a} \right]$
$e^{-\frac{1}{2}x} (1 - e^{-x})^{-1}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} th(\pi y)$
$x e^{-ax^2}$	$\sqrt{\frac{2}{a}} \frac{y}{4a} e^{-y^2/(4a)}$
$x^{-1/2} e^{-a/x}$	$\frac{1}{\sqrt{y}} e^{-\sqrt{2ay}} [\cos \sqrt{2ay} + \sin \sqrt{2ay}]$
$x^{-3/2} e^{-a/x}$	$\sqrt{\frac{2}{a}} e^{-\sqrt{2ay}} \sin \sqrt{2ay}$
$\begin{cases} \ln x, & 0 < x < 1, \\ 0, & x > 1 \end{cases}$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Ci(y) - C - \ln y}{y}$
$\frac{\ln x}{x}$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} (C + \ln y)$
$\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$	$\frac{1}{\sqrt{y}} \left[\frac{\pi}{2} - C - \ln(4y) \right]$
$x(x^2 - a^2)^{-1} \ln(bx)$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\cos(ay) (\ln(ab) - Ci(ay)) - \sin(ay) si(ay)]$
$x(x^2 - a^2)^{-1} \ln\left(\frac{x}{a}\right)$	$-\sqrt{\frac{\pi}{2}} [\cos(ay) Ci(ay) + \sin(ay) si(ay)]$
$e^{ax} \ln x$	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{a^2 + y^2} \left[a \arctg\left(\frac{y}{a}\right) - Cy - \frac{1}{2} y \ln(a^2 + y^2) \right]$
$\ln \left \frac{a+x}{b-x} \right $	$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{1}{y} \cdot (\ln \frac{a}{b} + \cos by \cdot Ci(by) - \cos ay \cdot Ci(ay) +$ $+ \sin by \cdot Si(by) - \sin ay \cdot Si(ay) + \frac{\pi}{2} \cdot (\sin by + \sin ay))$
$\ln \left \frac{a+x}{a-x} \right $	$\frac{\sqrt{2\pi}}{y} \sin(ay)$
$\frac{1}{x^2} \ln \left(\frac{a+x}{a-x} \right)^2$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{a} [1 - \cos(ay) - ay si(ay)]$
$\ln \left(\frac{a^2 + x^2 + x}{a^2 + x^2 - x} \right)$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{y} e^{-y\sqrt{a^2-1/4}} \sin\left(\frac{y}{2}\right)$

$\ln \left 1 - \frac{a^2}{x^2} \right $	$\frac{2}{y} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [C + \ln(ay) - \cos(ay) Ci(ay) - \sin(ay) Si(ay)]$
$\ln \left(\frac{a^2 + (b+x)^2}{a^2 + (b-x)^2} \right)$	$\frac{2\sqrt{2\pi}}{y} e^{-ay} \sin(by)$
$\frac{1}{x} \ln 1 - a^2 x^2 $	$-\sqrt{2\pi} Ci\left(\frac{y}{a}\right)$
$\frac{1}{x} \ln \left 1 - \frac{a^2}{x^2} \right $	$\sqrt{2\pi} [C + \ln(ay) - Ci(ay)]$
$\frac{\sin(ax)}{x}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \ln \left \frac{y+a}{y-a} \right $
$\frac{\sin(ax)}{x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} y, & 0 < y < a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} a, & y > a \end{cases}$
$\frac{\sin(\pi x)}{1-x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin y, & 0 \leq y \leq \pi, \\ 0, & y \geq \pi \end{cases}$
$\frac{\sin(ax)}{b^2 + x^2}$	$\begin{cases} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-ab}}{b} sh(by), & 0 < y < a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{e^{-by}}{b} sh(ab), & y > a \end{cases}$
$e^{-bx} \sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} b \left[\frac{1}{b^2 + (a-y)^2} - \frac{1}{b^2 + (a+y)^2} \right]$
$\frac{e^{-bx} \sin(ax)}{x}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \ln \left(\frac{b^2 + (y+a)^2}{b^2 + (y-a)^2} \right)$
$e^{-bx^2} \sin(ax)$	$\frac{1}{\sqrt{2b}} e^{-(a^2+y^2)/(4b)} sh\left(\frac{ay}{2b}\right)$
$\frac{\sin^2(ax)}{x}$	$\begin{cases} \frac{1}{4} \sqrt{2\pi}, & 0 < y < 2a, \\ \frac{1}{8} \sqrt{2\pi}, & y = 2a, \\ 0, & y > 2a \end{cases}$
$\frac{\sin^2(ax)}{x^2}$	$\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} [(y+2a) \ln(y+2a) + (y-2a) \ln y-2a - 2y \ln y]$

$\frac{\sin^2(ax)}{x^3}$	$\begin{cases} \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}y\left(2a - \frac{y}{2}\right), & 0 < y < 2a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}a^2, & y > 2a \end{cases}$
$\frac{\cos(ax)}{x}$	$\begin{cases} 0, & 0 < y < a, \\ \frac{1}{4}\sqrt{2\pi}, & y = a \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}, & y > a \end{cases}$
$\frac{x\cos(ax)}{b^2 + x^2}$	$\begin{cases} -\sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-ab}sh(by), & 0 < y < a, \\ \sqrt{\frac{\pi}{2}}e^{-by}ch(ab), & y > a \end{cases}$
$\sin(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\cos\left(\frac{y^2}{4a}\right)C\left(\frac{y^2}{4a}\right) + \sin\left(\frac{y^2}{4a}\right)S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\frac{\sin(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[C\left(\frac{y^2}{4a}\right) - S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\cos(ax^2)$	$\frac{1}{\sqrt{a}}\left[\sin\left(\frac{y^2}{4a}\right)C\left(\frac{y^2}{4a}\right) - \cos\left(\frac{y^2}{4a}\right)S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$\frac{\cos(ax^2)}{x}$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}}\left[C\left(\frac{y^2}{4a}\right) + S\left(\frac{y^2}{4a}\right)\right]$
$e^{-a\sqrt{x}}\sin(a\sqrt{x})$	$\frac{a}{2y\sqrt{y}}e^{-a^2/(2y)}$

Преобразование Фурье	
$f(x)$	$F(y) = \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{ixy} dx$
$\begin{cases} A, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a \text{ и } x > b \end{cases}$	$\frac{iA}{y\sqrt{2\pi}} (e^{ia y} - e^{ib y})$
$\begin{cases} x^n, & 0 \leq x \leq b, \\ 0, & x < 0 \text{ и } x > b \end{cases} \quad (n=1,2,3,\dots)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[n! (-iy)^{-(n+1)} - e^{ib y} \sum_{m=0}^n \frac{n!}{m!} (-iy)^{m-n-1} b^m \right]$
$\frac{1}{(a+ix)^v}, \operatorname{Re} v > 0$	$\begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(v)} y^{v-1} e^{-ay}, & y > 0, \\ 0, & y < 0 \end{cases}$
$\frac{1}{(a-ix)^v}, \operatorname{Re} v > 0$	$\begin{cases} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(v)} (-y)^{v-1} e^{-ay}, & y < 0, \\ 0, & y > 0 \end{cases}$

Обозначения, используемые в приложение:

$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \operatorname{Re} z > 0$ гамма-функция

$J_v(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \left(\frac{1}{2}z\right)^{v+2n}}{n! \Gamma(v+n+1)}$ функция Бесселя

$K_v(z) = \frac{1}{2} \pi (\sin(\pi v))^{-1} [I_{-v}(z) - I_v(z)]$, где $I_v = e^{-\frac{iv\pi}{2}} J_v(ze^{\frac{i\pi}{2}})$

интегралы Френеля:

$$C(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt$$

$$S(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$$

$$\left. \begin{aligned} Si(x) &= \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \\ si &= - \int_x^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = Si(x) - \frac{\pi}{2} \end{aligned} \right\} \text{интегральный синус}$$

$Ci(x) = - \int_x^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$ интегральный косинус

C – постоянная Эйлера ($C = 0,57721 \dots$)