Министерство образования и науки Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

И.В.Крючкова

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ТРЕТИЙ СЕМЕСТР – ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Методические указания

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2011

УДК 517.9 (07)
ББК 22.161.6 Я7
К85

Рецензент - кандидат физико-математических наук Г.А. Ивашкина

Крючкова, И.В.

К85 Математический анализ. Третий семестр - Дифференциальные уравнения : методические указания / И.В. Крючкова; Оренбургский гос.ун-т – Оренбург: ОГУ, 2011. - 80 с.

Методические указания содержат необходимый теоретический материал по разделу «Дифференциальные уравнения», входящему в курс математического анализа, с большим количеством примеров, подробное решение типового варианта задач, предлагаемых для самостоятельного решения, а также 20 вариантов типовых задач.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

УДК 517.9 (07)
ББК 22.161.6 (Я7)

Содержание

Введение

При решении различных задач физики, химии, различных технических наук часто пользуются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Этим объясняется важное значение изучения дифференциальных уравнений при подготовке будущих инженеров. В условиях постоянного сокращения аудиторных часов курса математического анализа, в рамках которого изучаются дифференциальные уравнения на инженерных специальностях, данные методические указания являются актуальными.

Методические указания содержат необходимый теоретический материал (при достаточном уровне строгости изложения), с большим количеством примеров, подробное решение типового варианта задач, предлагаемых для самостоятельного решения, а также 20 вариантов типовых задач, которые могут быть использованы в качестве домашних заданий, расчетно-графической работы, а также контрольной работы для студентов заочной формы обучения.

Методические указания предназначены для студентов инженерных специальностей, обучающихся по программам высшего профессионального образования, и преподавателей, ведущих занятия по данному разделу курса математического анализа.

1 Простейшие дифференциальные уравнения и методы их интегрирования

1.1 Понятие о дифференциальном уравнении

Определение*:* дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее искомую функцию, ее производные (или дифференциалы) и независимую переменную. Наивысший порядок производной (дифференциала) в записи дифференциального уравнения называется порядком этого уравнения.

Дифференциальное уравнение *n*-го порядка имеет в общем случае вид

$$F(x, y, y', y'', .., y^{(n)}) = 0 \tag{1.1}$$

или в форме, разрешенной относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', .., y^{(n-1)}) \tag{1.2}$$

где x – независимая переменная (аргумент), y – искомая функция этого аргумента, $y', .., y^{(n)}$ – ее производные.

Определение: решением дифференциального уравнения называется всякая функция $y = y(x)$, обращающая уравнение в тождество при подстановке в уравнение этой функции и ее производных.

Пример 1.1

Функция $y = \dfrac{1}{x}$ является решением уравнения $x \cdot y' + y = 0$ в области $x \neq 0$, функция $y = 5 + 2 \cdot \sin x$ является решением уравнения $y''' + y' = 0$.

1.2 Дифференциальные уравнения первого порядка

Рассмотрим дифференциальные уравнения первого порядка разрешенные относительно производной, т.е. уравнений вида:

$$y' = f(x, y) \tag{1.3}$$

Рассматривая *x* и *y* как координаты точки плоскости *xOy*, сопоставим каждому решению *y=φ(x)* уравнения (1.3) кривую на плоскости *xOy* – график этого решения. Кривые, являющиеся графиками решений уравнения (1.3), называются интегральными кривыми этого уравнения. Поскольку при этом y' равен угловому коэффициенту касательной к интегральной кривой в точке *M(x;y),* то мы приходим к следующему геометрическому истолкованию дифференциального уравнения первого порядка: дифференциальное уравнение (1.3) устанавливает связь между координатами точек интегральных кривых и угловым коэффициентом касательной в этих точках, т.е. определяет в каждой точке плоскости xOy, принадлежащей к области существования функции $f(x,y)$, направление интегральной кривой, проходящей через эту точку, иными словами, уравнение (1.3) определяет поле направлений интегральных кривых [1].

Задача отыскания решения дифференциального уравнения (1.3), удовлетворяющего начальным условиям $y = y_0$, при $x = x_0$, называется задачей Коши.

Геометрически начальные условия означают указание точки $M_0\ (x_0\ ;\ y_0)$, через которую должна пройти искомая интегральная кривая. Задача Коши истолковывается как задача отыскания среди всех интегральных кривых той кривой, которая проходит через эту точку M_0 (см.рисунок 1.1).

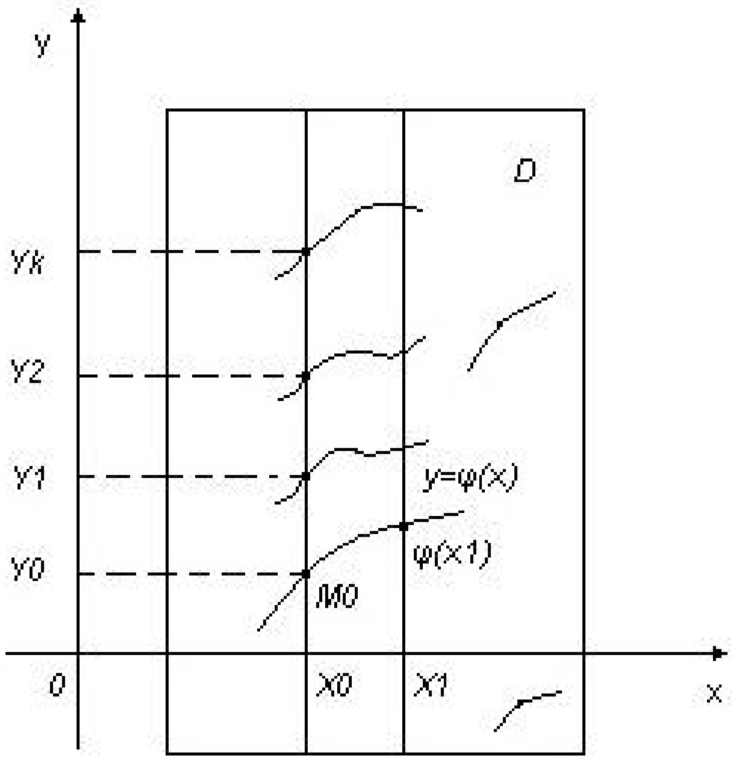

Рисунок 1.1 - Геометрическая иллюстрация теоремы Коши

1.2.1 Основная теорема существования и единственности решения

Существование и единственность решения задачи Коши для уравнения определяется следующей теоремой [2]:

Теорема

Если функция $f(x,y)$ – правая часть дифференциального уравнения (1.3) – непрерывна в некоторой замкнутой области D плоскости xOy и удовлетворяет условию Липшица по переменной y, то есть существует постоянная K такая, что неравенство $|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \le K \cdot |y_1 - y_2|$ выполняется для любой пары точек (x,y_1) и (x,y_2) из области D, то каждой внутренней точке M_0 (x_0 ; y_0) области D соответствует, и притом единственное, решение y=φ(x) уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)), \quad \varphi(x_0) = y_0 \tag{1.4}$$

Условие Липшица выражает ограниченность относительного роста функции по переменной y :

$$\frac{|f(x,y_1) - f(x,y_2)|}{|y_1 - y_2|} \le K$$

На практике условие Липшица заменяют более удобным требованием ограниченности частной производной по y , в этом случае за постоянную K можно принять $\sup |f'_y|$, потому что по теореме Лагранжа о конечных приращениях

$$|f(x,y_2) - f(x,y_1)| = |f'_y(x,\eta)| \cdot |y_2 - y_1| \ ,$$

где $y_1 < \eta < y_2$.

1.2.2 Теорема Коши

На практике пользуются частным случаем основной теоремы – теоремой Коши.

Если функция *f (x,y)* – правая часть дифференциального уравнения (1.3) – непрерывна в некоторой замкнутой области D плоскости xOy и имеет в этой области ограниченную частную производную $f'_y(x,y)$, то каждой внутренней точке M_0 (x_0 ;

y_0) области D соответствует, и притом единственное, решение $y=\varphi(x)$ уравнения (1.3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))\,,\quad \varphi(x_0)=y_0$$

Геометрически это означает, что через каждую внутреннюю точку области *D* проходит, и притом единственная, интегральная кривая (см.рисунок 1.1).

Согласно теореме Коши, интегральные кривые уравнения (1.3) покрывают область *D* так, что через каждую внутреннюю точку области *D* проходит, и притом единственная, интегральная кривая. Они образуют **семейство** кривых, зависящее от одного параметра (**однопараметрическое семейство**), который изменяется в определенных пределах.

Пусть

$$y=\Phi(x, C) \tag{1.5}$$

есть уравнение этого семейства. Это означает, что любую из этих кривых можно выделить в составе семейства, задав определенное числовое значение C_0 параметра C. Возьмем, например, в качестве параметра C начальную ординату y, задаваемую при какой-нибудь начальной абсциссе x_0 в области D. Тогда каждому значению y_0, y_1, y_2 ...(см.рисунок 1.1) начальной ординаты будет соответствовать единственная интегральная кривая семейства (1.5) и, стало быть, каждая из этих кривых может быть выделена с помощью задания числового значения ординаты в точке с абсциссой $x=x_0$.

Каждая функция $y=\Phi(x,C_0)$, получающаяся из формулы (1.5) при любом допустимом значении C_0 параметра C, является одной из интегральных кривых семейства (1.5). Отсюда следует, что функция $y=\Phi(x,C)$, где C – свободно изменяющийся (в определенных пределах) параметр, также есть решение этого уравнения. Таким образом, дифференциальное уравнение первого порядка, удовлетворяющее условию теоремы Коши, допускает решение, зависящее от одной произвольной постоянной, или, что тоже, допускает однопараметрическое семейство решений [1].

Определение: общим решением дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ в области *D*, в которой выполнены условия теоремы Коши, называется решение $y = \Phi(x, C)$ этого уравнения, непрерывно зависящее от произвольной постоянной *C* и такое, что всяким начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$, где точка $(x_0; y_0)$ принадлежит области *D*, соответствует удовлетворяющее этим условиям решение $y = \Phi(x, C_0)$ уравнения $y' = f(x, y)$, получаемое из формулы $y = \Phi(x, C)$ при определенном значении $C = C_0$.

Решение $y = \varphi(x, C_0)$ называется частным решением уравнения $y' = f(x, y)$, соответствующим заданным начальным условиям $x = x_0$, $y = y_0$.

Пример 1.2

Функция $y = C \cdot e^x$ является общим решением дифференциального уравнения $y' = y$. Из формулы $y = C \cdot e^x$ можно получить решение любой задачи Коши. Пусть, например, надо найти решение, которое при $x = x_0$ принимает значение $y = y_0$: $y_0 = C \cdot e^{x_0}$, отсюда $C = y_0 \cdot e^{-x_0}$. Частное решение удовлетворяющее начальным условиям $y = y_0 \cdot e^{x - x_0}$

Определение: изоклинами дифференциального уравнения первого порядка называется геометрическое место точек плоскости *xOy*, в которых интегральные кривые уравнения имеют одно и то же направление.

Так, задавая угловой коэффициент интегральных кривых уравнения (1.3) равенством $y' = k$, находим по уравнению, что такое направление будут иметь интегральные кривые в точках плоскости, удовлетворяющих уравнению

$$f(x, y) = k \tag{1.6}$$

Таким образом, уравнение (1.6) является уравнением изоклины, соответствующей заданному направлению $y' = k$, а считая здесь число *k* произвольной постоянной, приходим к заключению, что это же уравнение определяет **семейство изоклин** для дифференциального уравнения (1.6). Пусть теперь на плоскости построена последовательность изоклин, соответствующих значениям $k = k_1, k_2, \dots, k_n, \dots$ (см.рисунок 1.2), причем соседние значения *k* достаточно близки друг к другу.

Выберем на изоклине $k=k_1$ ряд точек и проведем из них отрезки прямых с угловым коэффициентом k_1 до пересечения с изоклиной $k=k_2$; из полученных точек пересечения проведем отрезки прямых с угловым коэффициентом $k=k_3$ и т.д.

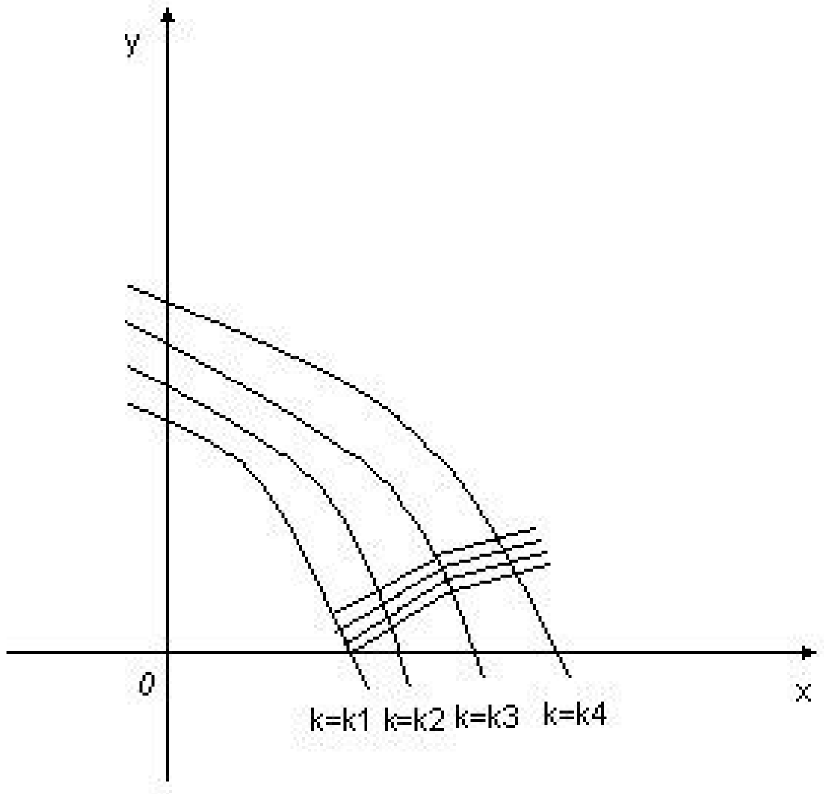

Рисунок 1.2 – Изображение интегральных кривых при помощи изоклин

Отрезки эти образуют ряд ломаных, которые являются приближенным изображением интегральных кривых данного уравнения. В самом деле, каждый отрезок любой из ломаных является отрезком касательной к некоторой интегральной кривой уравнения, и поэтому на малом участке аппроксимирует эту кривую.

1.2.3 Понятие об особых точках и особых решениях дифференциальных уравнений первого порядка

Теорема Коши гарантирует существование единственной интегральной кривой уравнения $y'=f(x,y)$, проходящей через точку M_0 $(x_0; y_0)$, если в некоторой окрестности этой точки выполнены условия этой теоремы:

а) непрерывность $f(x,y)$;

б) существование и ограниченность $y'=f(x,y)$.

Нарушение хотя бы одного из этих условий может привести к тому, что либо не будет существовать ни одной интегральной кривой уравнения, проходящей через точку M_0 $(x_0; y_0)$, либо таких кривых будет не одна (в частности, их может быть бесчисленное множество).

Если нарушение условий теоремы Коши имеет место в отдельных изолированных точках, то такие точки называют особыми точками дифференциального уравнения. Поведение интегральных кривых в окрестности особой точки может быть весьма различным.

Пример 1.3

Дифференциальное уравнение $y'\cdot x-y=0$ имеет общее решение $y=C\cdot x$. Точка $O(0;0)$ является особой точкой этого дифференциального уравнения, т.к. в ней нарушаются условия теоремы Коши. Все частные решения проходят через точку $O(0;0)$.

Если же нарушение условий теоремы Коши имеет место вдоль целого геометрического места точек, это геометрическое место может само оказаться интегральной кривой данного уравнения; такую интегральную кривую называют особой, а соответствующее ей решение исходного уравнения – особым решением.

Точное определение особого решения следующее: решение дифференциального уравнения первого порядка называется особым, если через каждую точку изображающей его интегральной кривой проходит по крайней мере еще одна интегральная кривая того же уравнения, имеющая в этой точке ту же касательную.

Замечание:

- могут быть особые решения, входящие в состав общего решения; с другой стороны, решение, не получаемое из общего, может и не быть особым. Особое решение характеризуется тем, что через каждую точку его графика, помимо его самого, проходят графики еще других решений данного дифференциального уравнения.

Пример 1.4

Дифференциальное уравнение $y' = \sqrt{1-y^2}$ имеет общее решение $y = \sin(x+C)$, $-\frac{\pi}{2} \le x+C \le \frac{\pi}{2}$. Кроме того, есть особые решения $y=1$ и $y=-1$, не получаемые из общего ни при каком значении C, они являются особыми решениями.

1.3 Уравнения с разделяющими переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка называется уравнением с разделяющимися переменными, если, разрешив его относительно производной, мы получим для нее выражение, равное произведению функции, зависящей только от аргумента, на функцию, зависящую только от искомой функции:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \tag{1.7}$$

Функции *f(x)* и *φ(y)* предполагаются непрерывными при рассматриваемых значениях *x* и *y*, причем $\varphi(y) \neq 0$. Умножим обе части уравнения (1.7) на dx и разделим на $\varphi(y)$. Тогда мы получим уравнение с разделенными переменными:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx, \tag{1.8}$$

где в левую часть отнесены члены, зависящие от *y* и *dy*; в правую – члены, зависящие от *x* и *dx*.

В левой части уравнения (1.8) стоит дифференциал функции, зависящей от *y*, а в правой – дифференциал функции от *x*. Из равенства этих дифференциалов заключаем, что сами функции могут отличаться друг от друга лишь произвольным постоянным слагаемым. Поэтому, интегрируя равенство (1.8) (левую часть по *y*, правую по *x*) и вводя произвольную постоянную *C*, получаем общее решение уравнения (1.7) в виде, не разрешенном относительно y (т.е. в виде общего интеграла):

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)\,dx + C \tag{1.9}$$

Отметим, что уравнение с разделяющимися переменными может быть также задано в виде

$$f_1(x)\varphi_1(y)y' + f_2(x)\varphi_2(y) = 0, \tag{1.10}$$

или в виде

$$f_1(x)\varphi_1(y)dy + f_2(x)\varphi_2(y)dx = 0, \tag{1.11}$$

где $f_1(x), f_2(x), \varphi_1(y), \varphi_2(y)$ – непрерывные функции; $f_1(x) \neq 0$ и $\varphi_2(y) \neq 0$.

Общий интеграл уравнения (1.10) запишется следующим образом:

$$\int \frac{f_2(x)}{f_1(x)}dx + \int \frac{\varphi_1(y)}{\varphi_2(y)}dy = C \tag{1.12}$$

Пример 1.5

$y' = \sqrt{1-y^2}$, уравнение задано лишь при $|y| \leq 1$.

Разделяем переменные и интегрируем: $\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = dx$; $\int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \int dx + C$; $\arcsin y = x + C$. Общее решение: $y = \sin(x+C)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x + C \leq \frac{\pi}{2}$. Кроме того, так как $\varphi(y) = \sqrt{1-y^2}$ обращается в ноль при $y = \pm 1$, имеется еще два решения, не получаемых из общего: $y=1$ и $y=-1$. Это особые решения.

Возвращаясь к исходному уравнению (1.7), заметим следующее: деля левую и правую часть на $\varphi(y)$, мы могли «потерять» некоторые решения исходного уравнения. В самом деле, если уравнение $\varphi(y)=0$ имеет действительные корни $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то функции, определяемые равенствами

$$y = y_1,\ y = y_2, \ldots,\ y = y_k, \tag{1.13}$$

являются решениями уравнениями (1.7) , так как обращают это уравнение в тождество.

В разобранном выше примере функции $x = \pm 1$; $y = \pm 1$ являются решениями, но эти решения не были потеряны при интегрировании, поскольку содержатся в общем интеграле и получаются из него при $C = 0$.

1.4 Однородные уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **однородным**, если, разрешив его относительно производной, мы получаем для нее выражение, являющееся функцией только отношения искомой функции к ее аргументу:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{1.14}$$

где f – непрерывная функция при рассматриваемых значениях x и y; $x \neq 0$.

Уравнение вида (1.14) преобразуется в уравнение с разделяющимися переменными при помощи подстановки

$$\frac{y}{x} = u, \tag{1.15}$$

В самом деле, в силу этой подстановки, $y' = x \cdot u' + u,$ а уравнение (1.14) преобразуется к виду $x \cdot u' + u = f(u),$ или $x \cdot \frac{du}{dx} = f(u) - u,$

т.е. к уравнению с разделяющимися переменными. Найдя его общее решение, и заменив в нем u на $\frac{y}{x},$ мы найдем общее решение исходного уравнения.

Пример 1.6

Решить уравнение: $y' = \frac{y}{x} + \sin\frac{y}{x}.$

Полагая $y=ux$, приходим к уравнению

$$u'x + u = u + \sin u,$$

или $x\frac{du}{dx} = \sin u.$

Разделяем переменные: $\frac{du}{\sin u} = \frac{dx}{x}.$ Интегрируя, находим $\ln tg\frac{u}{2} = \ln x + \ln C,$ или $u = 2\,arctgCx,$ откуда, подставляя $u = \frac{y}{x},$ получаем общее решение исходного уравнения: $y = 2\,xarctgCx.$

Однородные уравнения часто задаются в виде

$$M(x, y)\,dy + N(x, y)\,dx = 0, \tag{1.16}$$

где $M(x, y)$ и $N(x, y)$ – **однородные функции одного и того же измерения *k*,** т.е. удовлетворяющие следующему условию:

$$M(tx, ty) = t^k M(x, y),$$

$$N(tx, ty) = t^k N(x, y), \tag{1.17}$$

где t – произвольный множитель.

Пример 1.7

Проинтегрировать уравнение $(x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0.$

Это уравнение однородное, поскольку коэффициентами при dx и dy служат однородные функции второго измерения: $x^2 - y^2$ и $2xy$. Полагаем $y=ux$, тогда $dy=u\,dx +x\,du$. После подстановки в исходное уравнение, сокращения на x^2 и приведения подобных членов приходим к уравнению

$$(1+u^2)dx + 2uxdu = 0.$$

Разделяя в нем переменные и интегрируя, находим

$$\ln x + \ln(1+u^2) = \ln C,$$

или
$$x(1+u^2) = C.$$

Наконец, полагая $u = \frac{y}{x}$, получаем общий интеграл исходного уравнения:

$$x^2 + y^2 = Cx.$$

1.5 Линейное уравнение первого порядка

Дифференциальное уравнение первого порядка называется **линейным**, если оно является уравнением первой степени относительной искомой функции и ее производной:

$$y' = P(x)y + Q(x), \tag{1.18}$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – заданные непрерывные функции.

Рассмотрим метод Бернулли интегрирования линейного уравнения (1.18).

Следуя методу Бернулли, будем искать неизвестную искомую функцию y в виде произведения двух неизвестных функций, полагая в уравнении (1.18)

$$y = u \cdot v. \tag{1.19}$$

Преобразование (1.22) приводит уравнение (1.18) к виду:

$$u'v + v'u - P \cdot uv - Q = 0,$$

$$v[u' - P \cdot u] + [v' \cdot u - Q] = 0. \tag{1.20}$$

Интегрируя уравнение с разделяющимися переменными $u' - P(x) \cdot u = 0,$ выберем какое-нибудь его частное решение $u = u_1(x)$. Интегрируя затем другое уравнение с разделяющимися переменными $v' \cdot u_1(x) - Q(x) = 0,$ найдем его общее решение $v = v_1(x, C)$, где C – произвольная постоянная. Мы видим, что при $u = u_1(x), v = v_1(x, C)$ уравнение (1.20) обращается в тождество (при всяком числовом значении C). Следовательно, обращается в тождество и уравнение (1.18) при $y = u_1(x) \cdot v_1(x, C)$, т.е. $y = u_1(x) \cdot v_1(x, C)$ есть искомое общее решение этого уравнения.

В качестве примера проинтегрируем линейное уравнение $xy' = y + x \cdot \ln x$.

Совершая преобразование, приводим это уравнение к виду $x(u'v + uv') = u \cdot v + x \cdot \ln x$ или $v(x \cdot u' - u) + (x \cdot u \cdot v' - x \cdot \ln x) = 0.$

Интегрируем уравнение $x \cdot u' - u = 0$ и выбираем частное решение $u_1 = x$. Интегрируя затем уравнение $x \cdot x \cdot v' - x \cdot \ln x = 0,$ находим его общее решение $v_1 = \frac{1}{2} \ln^2 x + C.$

Перемножая u_1 и v_1, получаем общее решение исходного уравнения:

$$y = u_1 \cdot v_1 = \frac{x}{2} \ln^2 x + C \cdot x.$$

В области непрерывности коэффициентов *P(x)* и *Q(x)* линейного уравнения (1.18) правая часть этого уравнения удовлетворяет условию теоремы Коши (см. п. 1.2).

В самом деле, если функции *P (x)* и *Q (x)* непрерывны на некотором отрезке, $a \le x \le b,$ то в любой замкнутой области D плоскости xOy, проектирующейся на отрезок $[a, b]$ оси Ox, $f(x, y) = P(x) \cdot y + Q(x)$ и $f'_y = P(x)$ будут непрерывными и ограниченными функциями.

Значит, в области непрерывности коэффициентов, линейное уравнение не допускает особых решений и поэтому его общее решение содержит все вообще решения этого уравнения.

1.6 Дифференциальные уравнения в полных дифференциалах

Дифференциальными уравнения в полных дифференциалах называются дифференциальные уравнения вида:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0, \qquad (1.21)$$

где P и Q – функции с непрерывными частными производными, причем

$$\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Левая часть этого уравнения представляет собой полный дифференциал некоторой функции *u (x, y).* Уравнение (1.21) можно записать в виде

$$du(x, y) = 0. \tag{1.22}$$

Общий интеграл уравнения (1.22) запишется, очевидно, так:

$$u(x, y) = C,$$

где C – произвольная постоянная.

Пример 1.8

Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$(x^2 + y^2 + x)dx + (2xy + e^y + 1)dy = 0.$$

Здесь $P = x^2 + y^2 + x, Q = 2xy + e^y + 1.$ Функции P и Q имеют непрерывные частные производные. Условие $\frac{\partial P}{\partial y} \equiv \frac{\partial Q}{\partial x}$ полного дифференциала выполнено. Следовательно, мы имеем уравнение в полных дифференциалах.

$$u = \int_0^x (x^2 + x)dx + \int_0^y (2xy + e^y + 1)dy = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + xy^2 + e^y + y.$$

Приравнивая *u (x, y)* произвольной постоянной, получаем общий интеграл уравнения: $\frac{x^3}{3} + xy^2 + \frac{x^2}{2} + y + e^y = C$

1.7 Интегрирование с помощью степенных рядов

Пусть требуется проинтегрировать дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ с начальными условиями: $y = y_0$ при $x = x_0$ с помощью степенных рядов.

1-й способ. Будем искать решение *y (x)* в виде суммы степенного ряда:

$$y(x) = a_0 + a_1 \cdot (x - x_0) + a_2 \cdot (x - x_0)^2 + \dots.$$

Подставляя в дифференциальное уравнение ряды, изображающие *y (x)* и его производную $y'(x)$, мы получаем тождество, из которого последовательно находим коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \dots$ ряда. Этот способ применяется преимущественно при интегрировании линейных уравнений.

Пример 1.9

Найти частное решение *y (x)* дифференциального уравнения $y' = 3y + x^2$ соответствующее начальным условиям $y = 5$ при $x = 0$.

Полагаем $y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + ...,$ откуда $y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ...$

Подставляя в первый ряд начальные условия, находим $a_0 = 5$. Подставив оба ряда в дифференциальное уравнение, приходим к тождеству

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + ... \equiv 15 + 3a_1 x + (3a_2 + 1)x^2 + ...$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x,* последовательно находим $a_1 = 15, a_2 = \frac{45}{2}, a_3 = \frac{137}{6}, ...$

Следовательно, искомое решение является суммой ряда

$$y(x) = 5 + 15x + \frac{45}{2}x^2 + \frac{137}{6}x^3 + ...$$

2-й способ. Разлагаем искомое решение в ряд Тейлора:

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + ...$$

Свободный член $y(x_0)$ нам известен из начальных условий: $y(x_0) = y_0$. Значение $y'(x_0)$ мы получаем, подставив начальные условия в дифференциальное уравнение.

Значение $y''(x_0)$ найдем, подставив x_0, $y\ (x_0)$, $y'(x_0)$ в результат дифференцирования нашего дифференциального уравнения и т.д.

Пример 1.10

Найти частное решение *y (x)* дифференциального уравнения $y' = x^2 + y^2$, соответствующее начальным условиям $x_0 = 0, y_0 = 1$.

Полагаем $y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}x + \frac{y''(x_0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}x^3 + ...$

Из начальных условий $y(x_0) = y_0 = 1$. Далее из дифференциального уравнения находим $y'(x_0) = 0^2 + 1^2 = 1$. Дифференцируем теперь наше уравнение: $y'' = 2x + 2yy'$. Подставляя сюда $x_0, y(x_0), y'(x_0),$ получим $y''(x_0) = 2$. Дифференцируя еще раз и подставляя в уравнение $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$ значения $x_0, y(x_0), y'(x_0)$ и $y''(x_0),$ найдем $y'''(x_0) = 8$ и т.д. Подставляя полученные значения $y(x_0), y'(x_0), y''(x_0),...$ в ряд

Тейлора, получим выражение искомого частного решения в виде суммы ряда: $y(x) = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{2}{2!}x^2 + \frac{8}{3!}x^3 + \frac{28}{4!}x^4 + \ldots$.

2 Дифференциальные уравнения второго порядка

2.1 Общие понятия о дифференциальных уравнениях второго порядка

Дифференциальное уравнение второго порядка имеет в общем случае следующий вид:

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{2.1}$$

или в форме, разрешенной относительно старшей производной:

$$y'' = f(x, y, y') \tag{2.2}$$

Начальные условия для дифференциального уравнения второго порядка имеют следующий вид:

$$y = y_0, y' = y'_0 \text{ при } x = x_0 \tag{2.3}$$

и заключается, следовательно, в указании при некотором (начальном) значении аргумента x начальных значений искомой функции y и ее производной y' (геометрически – в задании точки, через которую должна пройти искомая интегральная кривая, и углового коэффициента касательной к ней в этой точке). Задача отыскания решения дифференциального уравнения (2.1) или (2.2), удовлетворяющего начальным условиям (2.3), называется задачей Коши [1].

Для дифференциальных уравнений второго порядка (2.2) имеет место теорема существования и единственности решения [2].

При ее формулировке будем пользоваться условием Липшица ограниченности роста функции $f(x, y, y')$ по переменным y и y':

$$\left| f(x, y_1, y_1') - f(x, y_2, y_2') \right| \le K \cdot \left(|y_1 - y_2| + |y_1' - y_2'| \right),$$

где K - некая постоянная, (x, y_1, y_1') и (x, y_2, y_2') - произвольные точки трехмерной замкнутой области D пространства Oxyy'.

2.1.1 Теорема существования и единственности решения

Если функция $f(x, y, y')$ - правая часть дифференциального уравнения (2.2) – непрерывна в некоторой трехмерной замкнутой области D пространства Oxyy' ее аргумента и удовлетворяет в этой области условию Липшица, то каждой внутренней точке $P_0(x_0; y_0; y'_0)$ этой области D соответствует, и притом единственное, решение $y=\square(x)$ дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющее начальным условиям (2.3): $\square''(x) \equiv f(x, \square(x), \square'(x)); \square(x_0)=y_0, \square'(x_0)=y'_0$.

Также как и в случае уравнений первого порядка, условие Липшица можно заменить условием ограниченности частных производных f'_y и $f'_{y'}$. Т.е. справедлива теорема Коши.

2.1.2 Теорема Коши

Если функция $f(x, y, y')$ - правая часть дифференциального уравнения (2.2) – непрерывна в некоторой трехмерной замкнутой области D пространства Oxyy' ее аргумента и имеет в этой области ограниченные частные производные f'_y и $f'_{y'}$ то каждой внутренней точке $P_0(x_0; y_0; y'_0)$ этой области D соответствует, и притом единственное, решение $y=\square(x)$ дифференциального уравнения (2.2), удовлетворяющее начальным условиям (2.3):

$$\square''(x) \equiv f(x, \square(x), \square'(x)); \square(x_0)=y_0, \square'(x_0)=y'_0 .$$

Определение

Общим решением дифференциального уравнения $y''=f(x, y, y')$ (2.2), соответствующим области D, в которой выполнены условия теоремы Коши, называется решение $y=\square(x, C_1, C_2)$ этого уравнения, непрерывно зависящее от двух произвольных постоянных C_1 и C_2 и такое, что всяким начальным условиям $x=x_0, y=y_0, y'=y'_0$ (2.3), где точка $(x_0; y_0; y'_0)$ принадлежит области D, соответствует удовлетворяющее этим условиям решение $y=\square(x, C_1^0, C_2^0),$ получаемое из формулы $y=\square(x, C_1, C_2)$ при определенных значениях $C_1=C_1^0, C_2=C_2^0.$

Решение $y=\square(x, C_1^0, C_2^0),$ называется частным решением уравнения $y''=f(x, y, y')$, соответствующим заданным начальным условиям $x=x_0, y=y_0, y'=y'_0$.

Определение

Общее решение дифференциального уравнения (2.2) в виде, не разрешенном относительно искомой функции (в неявной форме):

$$\psi(x, y, C_1, C_2)=0,$$

называется общим интегралом этого уравнения.

Пример 2.1

Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' = x - y$, соответствующее начальным условиям: $y = 2, y' = 5$ при $x = 0$, зная общее решение $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x$.

Область *D* существования и единственности (область начальных условий) – все пространство $Oxyy'$ и, следовательно, область *G* расположения интегральных кривых есть вся плоскость *xOy*.

Запишем систему (2.4):

$$\begin{cases} y = C_1 \cos x + C_2 \sin x + x, \\ y' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x + 1. \end{cases}$$

Подставляем в нее начальные условия:

$$\begin{cases} 2 = C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0 + 0, \\ 5 = -C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0 + 1 \end{cases}$$

и находим числовые значения постоянных $C_1^0 = 2, C_2^0 = 4$.

Подставляя найденные значения C_1 и C_2 в формулу общего решения, получаем искомое частное решение

$$y = 2\cos x + 4\sin x + x.$$

2.2 Интегрирование простейших типов уравнений второго порядка методом понижения порядка

Рассмотрим два простейших типа уравнений второго порядка, допускающих понижение порядка.

1-й тип

Уравнения вида:

$$F(x, y', y'') = 0, \tag{2.5}$$

не содержащие в своей записи символа искомой функции *y*.

Введем новую неизвестную функцию $y' = p$,

тогда
$$y'' = \frac{dy'}{dx} = p'$$

Уравнение (2.5) преобразуется тогда в уравнение первого порядка

$$F(x, p, p') = 0 \tag{2.6}$$

Пусть найден общий интеграл этого уравнения

$$\Omega\,(x, p, C_1) = 0 \tag{2.7}$$

Заменяя в этом соотношении *p* на y', мы приходим к новому дифференциальному уравнению первого порядка

$$\Omega\,(x, y', C_1) = 0 \tag{2.8}$$

Его общее решение (или общий интеграл) будет искомым общим решением (или общим интегралом) уравнения (2.5):

$$y = \varphi\,(x, C_1, C_2) \quad [\psi\,(x, y, C_1, C_2) = 0] \tag{2.9}$$

Изложенный метод интегрирования уравнения (2.5) (метод понижения порядка) относится также и к частным случаям этого уравнения:

$$F(y', y'') = 0, F(x, y'') = 0, F(y'') = 0 \tag{2.10}$$

Пример 2.2

Проинтегрировать уравнение $y'' = y' + x$ при начальных условиях: *y =3, y'=0* при *x=0.*

Полагая $y' = p$, заменяем данное уравнение уравнением:

$$p' = p + x.$$

Это линейное уравнение, интегрируя которое, находим его общее решение: $p = C_1 e^x - x - 1$. Так как требуется найти лишь частное решение исходного уравнения, определяем по начальным условиям постоянную C_1, полагая $x = 0, p = y' = 0; C_1 = 1$.

Для определения *y* приходим к уравнению:

$$y' = e^x - x - 1,$$

откуда находим $y = e^x - \frac{x^2}{2} - x + C_2$; в силу начальных условий $C_2 = 2$.

Таким образом, окончательно находим

$$y = e^x - \frac{x^2}{2} - x + 2.$$

Пример 2.3

Найти общее решение уравнения $x y'' \ln x = y'$.

Полагая $y' = p$, приходим к уравнению

$$x p' \ln x = p.$$

Это уравнение с разделяющимися переменными, общее решение которого $p = C_1 \ln x$. Таким образом, полагая $p = y'$, для определения *y* приходим к уравнению $y' = C_1 \ln x$, интегрирование которого дает окончательный ответ:

$$y = C_1 (x \ln x - x) + C_2.$$

2-й тип

Уравнения вида:

$$F(y, y', y'') = 0, \tag{2.11}$$

не содержащие в своей записи символа аргумента x.

Применяя подстановку $y' = p(y)$, производим понижение порядка. Выражение для y'' получается с помощью правила дифференцирования сложной функции:

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot y' = \frac{dp}{dy} \cdot p.$$

Этот метод интегрирования относится и к частному случаю уравнения (2.11):

$$F(y, y'') = 0 \tag{2.12}$$

Пример 2.4

Проинтегрировать уравнение: $3 y' y'' = e^y$ при начальных условиях: $y = 0, y' = 1$ при $x = -3$.

Полагая $y' = p, y'' = p \frac{dp}{dy}$, приходим к уравнению: $3p^2 \frac{dp}{dy} = e^y$, общий интеграл которого имеет вид $p^3 = e^y + C_1$.

Определяем C_1 из начальных условий, полагая в найденном интеграле $y=0, p=y'=1$; отсюда $C_1 = 0$.

Таким образом, $p^3=e^y$, или $p=e^{\frac{y}{3}}$.

Заменяя p на y', для определения y приходим к уравнению $y'=e^{\frac{y}{3}}$, интегрируя которое, находим $x+C_2=-3e^{-\frac{y}{3}}$.

Снова используя начальные условия ($y = 0$ при $x = -3$), находим $C_2 = 0$.

Таким образом, искомое решение исходного уравнения:

$$x=-3e^{-\frac{y}{3}}\,(x<0), \qquad y=3\cdot\ln\left|\frac{3}{x}\right|.$$

3 Линейные дифференциальные уравнения второго и высших порядков

3.1 Общие понятия о линейных дифференциальных уравнениях второго и высших порядков

Линейное дифференциальное уравнение *n*-го порядка имеет следующий вид:

$$y^{(n)}+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}(x)\cdot y'+p_n(x)\cdot y=f(x), \qquad (3.1)$$

где *y* – искомая функция аргумента *x*, а $p_k(x)$ и *f (x)* – заданные функции, определенные на некотором отрезке $a\le x\le b$ и непрерывные на этом отрезке.

Линейное уравнение (3.1) называется неоднородным при *f (x)* $\not\equiv$0; при $f(x)\equiv 0$ уравнение называется однородным:

$$y^{(n)}+p_1(x)\cdot y^{(n-1)}+\ldots+p_{n-1}\cdot y'+p_n(x)\cdot y=0 \qquad (3.2)$$

Для дифференциальных уравнений *n*-го порядка, разрешенных относительно старшей производной:

$$y^{(n)}=f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}), \qquad (3.3)$$

существует теорема о существовании и единственности решения [2].

Вначале сформулируем условие Липшица ограниченности роста функции $f(x,y,y',\ldots,y^{(n-1)})$ по переменным $y,y',\ldots,y^{(n-1)}$ в некоторой (*n*+1)-мерной замкнутой области D пространства $x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}$:

- существует постоянная K такая, что неравенство:

$$|f(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n-1)})-f(x,y_2,y_2',\ldots,y_2^{(n-1)})|\le$$
$$\le K\cdot\left(|y_1-y_2|+|y_1'-y_2'|+\ldots+|y_1^{(n-1)}-y_2^{(n-1)}|\right)$$

выполняется для любой пары точек $(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n-1)})$ и $(x,y_2,y_2',\ldots,y_2^{(n-1)})$ из области D.

Теорема существования и единственности решения

Если правая часть дифференциального уравнения (3.3) является непрерывной функцией в некоторой *(n+1)*-мерной замкнутой области D пространства $x,y,y',\ldots,y^{(n-1)}$ и удовлетворяет в этой области условию Липшица то каждой внутренней точке $P_0(x_0;y_0;y_0';\ldots;y_0^{(n-1)})$ этой области D соответствует, и притом единственное, решение $y=\varphi(x)$ уравнения (3.3), удовлетворяющее начальным условиям:

$$y = y_0, y' = y'_0, ..., y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x = x_0, \qquad (3.4)$$

Частным случаем этой теоремы является **теорема Коши**:

Если правая часть дифференциального уравнения (3.3) есть непрерывная функция ее аргументов в некоторой *(n+1)*-мерной замкнутой области *D* пространства $x, y, y', ..., y^{(n-1)}$ и имеет в этой области ограниченные частные производные $f'_y, f'_{y'}, ..., f'_{y^{(n-1)}}$, то каждой внутренней точке $P_0(x_0; y_0; y'_0; ...; y_0^{(n-1)})$ этой области D соответствует, и притом единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (3.3), удовлетворяющее начальным условиям (3.4), т.е.

$$\begin{aligned} &\varphi^{(n)}(x) \equiv f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)); \\ &\varphi(x_0) = y_0; \varphi'(x_0) = y'_0, ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{aligned} \qquad (3.5)$$

Можно показать [4], что при изменении начальных условий (3.4) в пределах области *D* дифференциальное уравнение (3.3), удовлетворяющее условию теоремы Коши, имеет бесконечное множество решений, образующих *n*-параметрическое семейство, т.е. что дифференциальное уравнение *n*-го порядка (3.3) допускает решение, зависящее от *n* произвольных постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n). \qquad (3.6)$$

Функция φ имеет непрерывные частные производные по *x* до *n*-го порядка включительно.

Такое решение называется **общим решением** уравнения (3.3), соответствующим области *D* существования и единственности.

Все решения, получающиеся из общего при определенных числовых значениях $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ постоянных $C_1, C_2, ..., C_n$:

$$y = \varphi(x, C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0), \qquad (3.7)$$

называются **частными решениями**.

Если решить линейное дифференциальное уравнение (3.1) относительно старшей производной:

$$y^{(n)} = -p_1(x) \cdot y^{(n-1)} - ... - p_{n-1} \cdot y' - p_n(x) \cdot y + f(x) = F(x, y, y', ..., y^{(n-1)}),$$

то легко заметить, что это уравнение всегда удовлетворяет условию теоремы Коши.

Следовательно, линейное уравнение (3.1) имеет единственное решение при любых начальных условиях (3.4), где x_0 принадлежит области непрерывности коэффициентов уравнения, а $y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ - произвольные числа.

Однородное линейное уравнение (3.2) допускает нулевое решение

$$y \equiv 0, \tag{3.8}$$

так как эта функция обращает уравнение (3.2) в тождество. Нулевое решение (3.8) соответствует нулевым начальным условиям:

$$y(x_0) = 0, y'(x_0) = 0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = 0,$$

где x_0 – любое значение x на отрезке $[a, b]$, а в силу сказанного выше о единственности решения нулевые начальные условия определяют только нулевое решение (3.8).

Введем для сокращения записей так называемый **линейный дифференциальный оператор** L, применение которого к функции $y\ (x)$ (называемое «умножением» на эту функцию) дает левую часть линейных дифференциальных уравнений (3.1) и (3.2):

$$\begin{gathered} L = \left\{ \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x) \cdot \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + ... + p_{n-1}(x) \cdot \frac{d}{dx} + p_n(x) \right\}, \\ L(y) = \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x) \cdot \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + ... + p_{n-1}(x) \cdot \frac{dy}{dx} + p_n(x) \cdot y. \end{gathered} \tag{3.9}$$

Дифференциальные уравнения (3.1) и (3.2) запишутся теперь так:

$$L(y) = f(x) \text{ и } L(y) = 0 \tag{3.10}$$

Если функция $y_1\ (x)$ является частным решением, то мы имеем тождества:

$$L(y_1) \equiv f(x) \text{ или } L(y_1) \equiv 0 \tag{3.11}$$

Оператор L обладает следующими двумя основными свойствами (**свойства линейности):**

$$\begin{gathered} L(u + v) = L(u) + L(v), \\ L(a \cdot u) = a \cdot L(u). \end{gathered} \tag{3.12}$$

Следствием этих двух свойств является **свойство линейной комбинации**:

$$L(a_1 u_1 + ... + a_k u_k) = a_1 \cdot L(u_1) + ... + a_k \cdot L(u_k).$$

Доказательство этих свойств рекомендуем провести самостоятельно, используя известные правила дифференцирования суммы и произведения.

Теорема о частных решениях однородного линейного уравнения

Любая линейная комбинация $a_1y_1 + ... + a_ky_k$ частных решений $y_1,...,y_k$ линейного однородного дифференциального уравнения (3.2) также является частным решением этого уравнения.

Доказательство

В силу соотношений (3.12) имеем: $L(y_1) \equiv 0,...,L(y_k) \equiv 0.$ Тогда по свойству оператора L получим

$$L(a_1y_1 + ... + a_ky_k) \equiv a_1L(y_1) + ... + a_kL(y_k) \equiv 0 + ... + 0 = 0,$$

а это означает, что функция $a_1y_1 + ... + a_ky_k$ является решением уравнения (3.2).

Теорема (о наложении частных решений неоднородного линейного уравнения)

Если правая часть линейного неоднородного дифференциального уравнения (3.1) представляет собой сумму двух функций $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и если известны частное решение $y_1(x)$ уравнения $L(y) = f_1(x)$ и частное решение $y_2(x)$ уравнения $L(y) = f_2(x),$ то сумма $y_1(x) + y_2(x)$ этих частных решений есть частное решение уравнения (3.1).

Доказательство

Согласно формулам (3.12), $L(y_1) \equiv f_1(x)$, $L(y_2) \equiv f_2(x).$ Тогда, используя свойство линейности (3.13) оператора L, имеем $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2) \equiv f_1(x) + f_2(x) \equiv f(x).$

Теорема (о связи частных решений неоднородного и однородного линейных уравнений)

Разность $y_2 - y_1$ любых двух частных решений y_q и y_2 неоднородного линейного дифференциального уравнения есть частное решение соответствующего (т.е. с той же левой частью) однородного линейного уравнения.

Доказательство

Используя свойство линейности (3.12) оператора L и формулы (3.11), имеем

$$L(y_2 - y_1) = L(y_2) - L(y_1) \equiv f(x) - f(x) \equiv 0.$$

Полученное равенство доказывает теорему.

Линейные дифференциальные уравнения имеют единую, детально разработанную теорию, на основе которой построены методы интегрирования этих уравнений. Мы сначала подробно рассмотрим линейные уравнения второго порядка, а затем все полученные результаты распространим на общий случай.

3.2 Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет следующий вид:

$$y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = 0, \text{ или сокращенно } L(y) = 0 \tag{3.13}$$

Функции $p_1(x)$ и $p_2(x)$ предполагаются непрерывными на некотором отрезке $a \le x \le b$.

Начальные условия для уравнения (3.13) записываются так:

$$y = y_0, y' = y_0' \text{ при } x = x_0; x_0 \in [a, b], \tag{3.14}$$

где y_0 и y_0' – произвольные числа. Каждым начальным условиям (3.14) соответствует единственное решение уравнения (3.13).

Введем понятие линейной независимости частных решений уравнения (3.13), необходимое при построении общего решения этого уравнения.

Определение 1: два частных решения y_1 и y_2 уравнения (3.13) называются линейно независимыми, если всякая их линейная комбинация, в которой не все коэффициенты равны нулю, есть решение, отличное от нулевого*:*

$$\alpha_1 \cdot y_1 + \alpha_2 \cdot y_2 \not\equiv 0 \tag{3.15}$$

Если же хотя бы одна такая линейная комбинация является нулевым решением, т.е. если

$$\bar{\alpha}_1 \cdot y_1 + \bar{\alpha}_2 \cdot y_2 \equiv 0, \tag{3.16}$$

то частные решения y_1 и y_2 называются **линейно зависимыми.**

Для выяснения вопроса о линейной зависимости или зависимости частных решений y_1 *и* y_2 уравнения (3.13) на отрезке [*a*, *b*] удобно пользоваться функциональным определителем Вронского (вронскианом):

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(x) \tag{3.17}$$

Вронскиан обладает следующими замечательными свойствами, благодаря которым он широко используется в теории однородных линейных дифференциальных уравнений.

Теорема

Вронскиан (3.17) либо не равен нулю ни в одной точке отрезка [a, b], либо тождественно равен нулю на всем этом отрезке. Первое имеет место тогда и только тогда, когда частные решения y_1 и y_2 уравнения (3.13) – линейно независимые, а второе – тогда и только тогда, когда решения y_1 и y_2 линейно зависимые.

Пример 3.1

Известны две пары частных решений дифференциального уравнения $y'' + \frac{y'}{x} = 0$ ($x > 0$):

$$y_1 = 3 + \ln\sqrt{x}, y_2 = 5 + \ln\sqrt[3]{x}; \bar{y}_1 = \ln\sqrt{x}, \bar{y}_2 = \ln\sqrt[3]{x}.$$

Выяснить, для каждой пары решений, являются они линейно зависимыми или независимыми.

Частные решения y_1 и y_2 линейно независимы между собой, так как

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} 3 + \ln\sqrt{x} & 5 + \ln\sqrt[3]{x} \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{3x} \end{vmatrix} = -\frac{3}{2x} \neq 0$$

ни при каком значении x.

Частные решения y_1 и y_2 - линейно зависимые:

$$W(\bar{y}_1, \bar{y}_2) = \begin{vmatrix} \ln\sqrt{x} & \ln\sqrt[3]{x} \\ \frac{1}{2x} & \frac{1}{3x} \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Введем теперь понятие фундаментальной системы частных решений.

Определение:

Фундаментальной системой частных решений однородного линейного дифференциального уравнения второго порядка (3.13) называется любая система двух линейно независимых частных решений этого уравнения.

Например, функция $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ образуют фундаментальную систему для уравнения $y'' + y = 0$, а функции $y_1 = 1$ и $y_2 = \ln x$ - для уравнения $y'' + \dfrac{y'}{x} = 0$ $(x \neq 0)$.

Из изложенного ранее следует, что, во-первых, нулевое решение уравнения (3.13) не может входить в фундаментальную систему, и что, во-вторых, вронскиан решений, образующих фундаментальную систему, не равен нулю ни при каком значении аргумента $x \in [a, b]$.

Справедлива следующая **теорема**:

Всякое однородное линейное дифференциальное уравнение (3.13) имеет фундаментальную систему частных решений.

Теорема (о структуре общего решения)

Общее решение однородного линейного дифференциального уравнения есть линейная комбинация любой фундаментальной системы частных решений этого уравнения, в которой коэффициентами служат произвольные постоянные:

$$y = C_1 \cdot y_1(x) + C_2 \cdot y_2(x) \tag{3.18}$$

Пример 3.2

Функции $y_1 = 1$ и $y_2 = \ln x$ являются частными решениями уравнения $y'' + \dfrac{y'}{x} = 0$. Эти частные решения – линейно независимые, так как $\begin{vmatrix} 1 & \ln x \\ 0 & \dfrac{1}{x} \end{vmatrix} = \dfrac{1}{x} \neq 0.$

Следовательно, они образуют фундаментальную систему. Тогда $y = C_1 + C_2 \ln x$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, есть общее решение этого уравнения.

Пример 3.3

Функции $y_1 = \sin x$ и $y_2 = \cos x$ являются линейно независимыми частными решениями уравнения $y'' + y = 0$.Следовательно, они образуют фундаментальную систему и $y = C_1 \sin x + C_2 \cos x$, где C_1 и C_2 – произвольные постоянные, есть общее решение этого уравнения.

Пример 3.4

$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{5x}$ - есть общее решение уравнения $y'' - 8y' + 15y = 0$, так как $y_1 = e^{3x}$ и $y_2 = e^{5x}$ - линейно независимые частные решения этого уравнения и, следовательно, образуют фундаментальную систему.

3.3 Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка

Линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка имеет следующий вид: $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) \cdot y = f(x)$, или сокращенно

$$L(y) = f(x) \tag{3.19}$$

Функции $p_1(x)$, $p_2(x)$, $f(x)$ предполагаются непрерывными на некотором отрезке $a \le x \le b$.

Назовем соответствующим однородным уравнением уравнение, имеющее такую же левую часть: $y'' + p_1(x) \cdot y' + p_2(x) y = 0$, или сокращенно $L(y) = 0$.

Теорема (о структуре общего решения неоднородного линейного дифференциального уравнения)

Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения есть сумма какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего однородного уравнения:

$$y = y(x) + Y(x, C_1, C_2) = \bar{y}(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 \tag{3.20}$$

Здесь $\bar{y}(x)$ - частное решение уравнения (3.28), $Y(x, C_1, C_2)$ - общее решение уравнения (3.13), y_1 и y_2 - фундаментальная система решений уравнения (3.13), C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример 3.5

Найдем общее решение уравнения $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = x \quad (x \ne 0)$. Общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = 0$ имеет вид $Y = \frac{A}{x} + B \cdot x$. В качестве одного из частных решений неоднородного уравнения возьмем функцию $\bar{y} = \frac{x^3}{8}$. Следовательно, $y = \frac{x^3}{8} + \frac{A}{x} + Bx$ есть искомое общее решение данного неоднородного уравнения.

В случаях, когда правая часть неоднородного уравнения (3.19) представляет собой алгебраическую сумму функций, можно использовать теорему о наложении частных решений, что обычно позволяет упростить задачу.

Пример 3.6

Найдем общее решение уравнения $y'' - 4y = 1 + e^x$. Ищем общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 4y = 0$. Нетрудно убедиться в том, что функции e^{2x} и e^{-2x} являются частными решениями этого уравнения, так как $(e^{2x})'' = 4e^{2x}$ и $(e^{-2x})'' = 4e^{-2x}$. Эти два решения – линейно независимые и образуют, следовательно, фундаментальную систему; тогда $Y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x}$ будет общим решением этого однородного уравнения. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения, рассмотрим отдельно два вспомогательных уравнения: $y'' - 4y = 1$ и $y'' - 4y = e^x$. Легко проверить, что первое из них допускает частное решение $\bar{y}_1 = -\dfrac{1}{4}$, а второе $\bar{y}_2 = 5e^x$. Применяя теорему о наложении решений, получаем:

$$y = Y + \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{-2x} - \frac{1}{4} + 5e^x.$$

Это есть искомое общее решение.

Рассмотрим еще один метод интегрирования неоднородного линейного уравнения (3.19) при наличии общего решения соответствующего однородного уравнения (3.13).

Метод Лагранжа вариации постоянных

Пусть нам известно общее решение соответствующего однородного уравнения (3.13):

$$y = C_1 \cdot y_1 + C_2 \cdot y_2, \tag{3.21}$$

где y_1, y_2 – одна из фундаментальных систем решений этого уравнения, а C_1 и C_2 – произвольные постоянные.

Предположим, что, заменяя в формуле (3.21) произвольные постоянные C_1 и C_2 функциями $u_1(x)$ и $u_2(x)$, можно их выбрать такими, чтобы функция

$$y = u_1(x) \cdot y_1 + u_2(x) \cdot y_2 \tag{3.22}$$

оказалась решением уравнения (3.19).

Вычислим первую и вторую производные от предполагаемого решения (3.22), приравняв нулю в выражении первой производной сумму членов, содержащих $u_1'(x)$ и $u_2'(x)$; это есть произвольное дополнительное требование, которое мы учтем при определении функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$:

$$\begin{aligned} &y' = u_1(x)\cdot y_1' + u_2(x)\cdot y_2'; \quad y_1\cdot u_1'(x) + y_2\cdot u_2'(x) = 0 \\ &y'' = [u_1'(x)\cdot y_1' + u_2'(x)\cdot y_2'] + [u_1(x)\cdot y_1'' + u_2(x)\cdot y_2'']. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Подставив выражения y, y' и y'', потребуем, чтобы это уравнение обратилось в тождество:

$$\begin{aligned} &[u_1'(x)\cdot y_1' + u_2'(x)\cdot y_2'] + [u_1(x)\cdot y_1'' + u_2(x)\cdot y_2''] + p_1(x)\cdot[u_1(x)\cdot y_1' + u_2(x)\cdot y_2'] + \\ &\qquad + p_2(x)\cdot[u_1(x)\cdot y_1 + u_2(x)\cdot y_2] \equiv f(x) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} &[u_1'(x)\cdot y_1' + u_2'(x)\cdot y_2'] + u_1(x)\cdot[y_1'' + p_1\cdot y_1' + p_2\cdot y_1] + \\ &\qquad + u_2(x)\cdot[y_2'' + p_1 y_2' + p_2 y_2] \equiv f(x) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Выражения во второй и в третьей скобках в последней записи тождества равны нулю, так как y_1 и y_2 - частные решения уравнения (3.13). Тогда, окончательно тождество (3.24):

$$u_1'(x)\cdot y_1' + u_2'(x)\cdot y_2' \equiv f(x) .$$

Объединяя это требование, налагаемое на функции $u_1(x)$ и $u_2(x)$, с требованием (3.23), удовлетворяя обоим этим требованиям, приходим к системе уравнений для определения функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$:

$$\begin{cases} y_1\cdot u_1' + y_2\cdot u_2' = 0, \\ y_1'\cdot u_1' + y_2'\cdot u_2' = f(x). \end{cases} \tag{3.25}$$

Система (3.25) однозначно разрешима относительно u_1' и u_2', так как ее определитель является вронскианом фундаментальной системы решений y_1, y_2 и, следовательно, не равен нулю ни при каких значениях $x \in [a, b]$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = W(y_1, y_2) \neq 0 .$$

Решая систему, находим $u_1'(x)=\varphi_1(x)$, $u_2'(x)=\varphi_2(x)$. Интегрируя эти функции, получим $u_1(x)=\int\varphi_1(x)dx=\Phi_1(x)+K_1$; $u_2(x)=\int\varphi_2(x)dx=\Phi_2(x)+K_2$,

где K_1 и K_2 - произвольные постоянные.

Следовательно, доказано существование функций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ таких, что соотношение (3.22) дает решение неоднородного уравнения (3.19). Подставляя найденные выражения $u_1(x)$ и $u_2(x)$ в формулу (3.22), получаем решение неоднородного уравнения (3.19) в виде

$$\begin{aligned} y &= (\Phi_1(x)+K_1)\cdot y_1+(\Phi_2(x)+K_2)\cdot y_2 = \\ &= [\Phi_1(x)\cdot y_1+\Phi_2(x)\cdot y_2]+[K_1\cdot y_1+K_2\cdot y_2] \end{aligned} \tag{3.26}$$

где K_1 и K_2 - произвольные постоянные.

Положим, например, $K_1=K_2=0$. Мы получим соответствующее частное решение $\Phi_1(x)\cdot y_1+\Phi_2(x)\cdot y_2$ этого уравнения. При произвольных же значениях K_1 и K_2, $K_1\cdot y_1+K_2\cdot y_2$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения (3.13). Следовательно, правая часть формулы (3.26) есть сумма частного решения неоднородного уравнения (3.19) и общего решения соответствующего однородного уравнения (3.13). По теореме о структуре общего решения неоднородного линейного уравнения формула (3.26) определяет, следовательно, общее решение неоднородного уравнения (3.19).

Сформулируем практическое правило интегрирования неоднородных уравнений по **методу вариации постоянных**.

Находим общее решение соответствующего однородного уравнения: $y=C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2$. Не вводя новых обозначений для $C_1(x)$ и $C_2(x)$, составляем систему (3.25) в виде:

$$\begin{cases} y_1\cdot C_1'+y_2\cdot C_2'=0, \\ y_1'\cdot C_1'+y_2'\cdot C_2'=f(x). \end{cases} \tag{3.27}$$

Решаем эту систему относительно C_1' и C_2': $C_1'=\varphi_1(x)$, $C_2'=\varphi_2(x)$. Интегрируя полученные выражения, находим: $C_1(x)=\int\varphi_1(x)dx+K_1$, $C_2(x)=\int\varphi_2(x)dx+K_2$. Подставляя эти выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ вместо произвольных постоянных C_1 и C_2 в общее решение однородного уравнения (3.13), получаем искомое общее решение неоднородного уравнения (3.19).

Пример 3.7

Найти общее решение уравнения $y'' + \frac{y'}{x} - \frac{y}{x^2} = x \quad (x \neq 0)$, зная общее решение $Y = C_1 x + \frac{C_2}{x}$ соответствующего однородного уравнения.

Запишем систему: $\begin{cases} x \cdot C_1' + \frac{1}{x} \cdot C_2' = 0, \\ 1 \cdot C_1' - \frac{1}{x^2} \cdot C_2' = x. \end{cases}$ Решая, найдем $C_1' = \frac{x}{2}$, $C_2' = -\frac{x^3}{2}$. Интегрируя полученные выражения, получим $C_1(x) = \frac{x^2}{4} + K_1$, $C_2(x) = -\frac{x^4}{8} + K_2$, где K_1 и K_2 - произвольные постоянные. Подставляя эти выражения $C_1(x)$ и $C_2(x)$ в формулу общего решения однородного уравнения, получим искомое общее решение неоднородного уравнения: $y = \frac{x^3}{4} + K_1 x - \frac{x^3}{8} + \frac{K_2}{x} = \frac{x^3}{8} + K_1 x + \frac{K_2}{x}$.

Замечание: из рассмотренной теории линейных дифференциальных уравнений видно, что успех практического их интегрирования зависит от умения находить линейно независимые между собой частные решения однородных линейных уравнений, так как общее решение однородного уравнения является их линейной комбинацией, а тогда общее решение неоднородного уравнения можно получить методом вариации постоянных или с помощью нахождения одного частного решения этого неоднородного уравнения.

Однако не существует общего приема для нахождения этих частных решений. Приходится ограничиваться поисками, основанными на догадке и сообразительности. Дело осложняется дополнительно еще и тем обстоятельством, что многие линейные дифференциальные уравнения (с переменными коэффициентами) вообще не интегрируются в элементарных функциях. Одно из исключений составляют линейные однородные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Эти уравнения всегда интегрируются в элементарных функциях и для них существует простое правило нахождения линейно независимых частных решений.

3.4 Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид: $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$,

или сокращенно:

$$L(y) = 0 \tag{3.28}$$

(однородное уравнение)

или $y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$,

или сокращенно:

$$L(y) = f(x) \tag{3.29}$$

где a_1, a_2 - действительные числа, $f(x)$ - функция, непрерывная на некотором отрезке $a \le x \le b$,

$$L = \left\{ \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_2 \right\} \tag{3.30}$$

- линейный дифференциальный оператор второго порядка.

Уравнения (3.28) и (3.29) являются частным случаем уравнений (3.13) и (3.19), где коэффициенты были переменные. Оператор (3.30) есть частный случай оператора (3.9).

Поэтому все определения, теоремы и методы интегрирования, установленные нами, переносятся и на уравнения (3.28) и (3.29). Но эти уравнения обладают и рядом дополнительных (специфических) свойств.

3.4.1 Однородные уравнения

Отметим, прежде всего, одно новое свойство оператора (3.30), не имевшее места у оператора (3.10):

$$L(e^{kx}) = e^{kx} \cdot P(k) \tag{3.31}$$

где k - постоянная величина, $P(k)$- алгебраический многочлен второй степени с теми же коэффициентами, что и в дифференциальном уравнении (3.28):

$$P(k) = k^2 + a_1k + a_2 . \qquad (3.32)$$

Многочлен $P(k)$ называется **характеристическим многочленом** однородного дифференциального уравнения (3.28).

Справедливость равенства (3.31) доказывается:

$$L(e^{kx}) = (e^{kx})'' + a_1 \cdot (e^{kx})' + a_2 \cdot e^{kx} = k^2e^{kx} + a_1ke^{kx} + a_2e^{kx} =$$
$$= e^{kx}(k^2 + a_1k + a_2) = e^{kx} \cdot P(k)$$

С помощью равенства (3.31) легко доказывается теорема, имеющая решающее значение во всей теории однородных линейных уравнений с постоянными коэффициентами и в практике интегрирования этих уравнений.

Теорема

Если k_0 есть корень характеристического многочлена (3.30), то функция e^{k_0x} есть частное решение однородного дифференциального уравнения (3.28).

Доказательство. По условию теоремы, $P(k_0)=0$. Тогда по формуле (3.31) $L(e^{kx})=e^{k_0x}\cdot P(k_0)=e^{k_0x}\text{¿}0\equiv 0$, т.е. функция $y=e^{k_0x}$ есть решение уравнения (3.28).

Справедлива и обратная теорема.

Теорема (обратная)

Если функция e^{k_0x} является решением дифференциального уравнения (3.28), то число k_0 есть корень характеристического многочлена этого уравнения.

Доказательство. По условию, $L(e^{kx})\equiv 0$. Тогда по формуле (3.31) $e^{k_0x}P(k_0)\equiv 0$. Но $e^{k_0x}\neq 0$. Следовательно, $P(k_0)=0$.

Перейдем теперь непосредственно к построению фундаментальной системы решений и общего решения уравнения (3.28) с помощью корней характеристического многочлена.

3.4.1.1 Случай действительных различных корней характеристического многочлена

Пусть k_1 и k_2 - действительные корни многочлена $P(k)$ и пусть $k_1 \neq k_2$. Тогда, по теореме, функции $y_1=e^{k_1x}$ и $y=e^{k_2x}$ являются частными решениями уравнения (3.28). Эти два решения линейно независимые, так как вронскиан $W(y_1, y_2)$ не равен нулю:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} ¿ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ k_1 & k_2 \end{vmatrix} = e^{(k_1+k_2)x} ¿ (k_2 - k_1) \neq 0$$

Поэтому y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений уравнения (3.28):

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x} \tag{3.33}$$

Общее решение этого уравнения имеет вид:

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}, \tag{3.34}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример 3.8

Найти общее решение уравнения $y'' - 7y' + 12y = 0$.

Характеристический многочлен $k^2 - 7k + 12$ имеет различные корни $k_1 = 3$, $k_2 = 4$. Частные решения $y_1 = e^{3x}$ и $y_2 = e^{4x}$ образуют фундаментальную систему. Искомое общее решение запишется в виде:

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{4x}.$$

3.4.1.2 Случай действительных равных корней характеристического многочлена

Пусть корни k_1 и k_2 характеристического многочлена $P(k)$ равны между собой. Обозначим их общее значение через k. Тогда k есть двукратный действительный корень многочлена $P(k)$. Согласно теореме 1, функция $y_1 = e^{kx}$ является решением уравнения (3.28). Найдем недостающее второе решение, образующее вместе с y_1 фундаментальную систему:

$$y_2 = e^{kx} \cdot \int \frac{dx}{e^{2kx} \cdot e^{\int a_1 \cdot dx}} = e^{kx} \cdot \int \frac{dx}{e^{2kx} \cdot e^{\int -2k dx}} = x \cdot e^{kx},$$

поскольку коэффициент a_1 характеристического многочлена равен $-(k_1 + k_2) = -2k$ по известному свойству корней квадратного уравнения (теорема Виета).

Таким образом, фундаментальная система решений уравнения (3.28) имеет вид:

$$y_1 = e^{kx},\ y_2 = x \cdot e^{kx} \tag{3.35}$$

и, следовательно, общее решение:

$$y = C_1 e^{kx} + C_2 x e^{kx} = e^{kx} \cdot (C_1 + C_2 x), \tag{3.36}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример 3.9

Найти общее решение уравнения $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Характеристический многочлен $k_2 - 6k + 9$ имеет двукратный корень $k = 3$. Решения $y_1 = e^{3x}$ и $y_2 = x \cdot e^{3x}$ образуют фундаментальную систему. По формуле (3.36) искомое общее решение запишется так: $y = e^{3x} \cdot (C_1 + C_2 x)$.

3.4.1.3 Случай комплексных корней характеристического многочлена

Пусть $k_1 = \alpha + \beta i$, $k_2 = \alpha - \beta i$ - сопряженные корни многочлена $P(k)$. Согласно теореме 1, мы имеем два частных решения уравнения (3.28):

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{\beta x i} \text{ и } y_2 = e^{(\alpha - \beta i)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-\beta x i}.$$

Они образуют фундаментальную систему, так как вронскиан $W(y_1, y_2)$ не равен нулю:

$$W(y_1, y_2) = \begin{vmatrix} e^{(\alpha + \beta i)x} & e^{(\alpha - \beta i)x} \\ (\alpha + \beta i) \cdot e^{(\alpha + \beta i)x} & (\alpha - \beta i) \cdot e^{(\alpha - \beta i)x} \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \alpha + \beta i & \alpha - \beta i \end{vmatrix} = e^{2\alpha x} \cdot (-2\beta i) \neq 0,$$

поскольку $e^{2\alpha x} \neq 0$ и $\beta \neq 0$. Эта фундаментальная система имеет мнимый вид. Перейдем к другой фундаментальной системе $\bar{y}_1$, $\bar{y}_2$, которая будет иметь действительный вид. Положим для этого

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \frac{y_1 + y_2}{2} = e^{\alpha x} \cdot \frac{e^{\beta x i} + e^{-\beta x i}}{2} = e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x, \\ \bar{y}_2 &= \frac{y_1 - y_2}{2i} = e^{\alpha x} \cdot \frac{e^{\beta x i} - e^{-\beta x i}}{2i} = e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Общее решение уравнения (3.28) получит при этом также действительный вид:

$$y = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin \beta x = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x), \tag{3.38}$$

где C_1 и C_2 - произвольные постоянные.

Пример 3.10

Найти общее решение уравнения $y'' - 4y' + 29y = 0$.

Характеристический многочлен $k^2 - 4k + 29$ имеет сопряженные корни $2 \pm 5i$. Фундаментальная система (3.37) запишется так: $y_1 = e^{2x} \cdot \cos 5x$, $y_2 = e^{2x} \cdot \sin 5x$. Общее решение, согласно формуле (3.38), будет иметь следующий вид: $y = e^{2x} \cdot (C_1 \cos 5x + C_2 \sin 5x)$.

3.4.2 Неоднородные уравнения

Рассмотрим следующие два метода интегрирования неоднородных уравнений.

3.4.2.1 Метод вариации постоянных

При любом виде непрерывной функции $f(x)$ неоднородное уравнение:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x), \qquad (3.39)$$

как и всякое неоднородное линейное уравнение, допускает интегрирование методом Лагранжа вариации постоянных, если предварительно найдено общее решение соответствующего однородного уравнения (3.28)

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0.$$

Пример 3.11

Найти общее решение уравнения $y'' + y = tgx$.

Характеристический многочлен $k^2 + 1$ соответствующего однородного уравнения $y'' + y = 0$ имеет корни $\pm i$. По формуле (3.38) общее решение однородного уравнения запишется в виде $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Применим теперь метод вариации постоянных. Составим систему:

$$\begin{cases} \cos x \cdot C_1' + \sin x \cdot C_2' = 0, \\ -\sin x \cdot C_1' + \cos x \cdot C_2' = tgx. \end{cases}$$

Из системы находим $C_1' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$, $C_2' = \sin x$. Интегрируя эти выражения, получаем $C_1 = \sin x - \ln\left|tg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right| + K_1$, $C_2 = -\cos x + K_2$. Подставляя выражения C_1 и C_2 в формулу общего решения однородного уравнения, получаем искомое общее решение неоднородного уравнения:

$$y = -\cos x \cdot \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + K_1 \cos x + K_2 \sin x,$$

где K_1 и K_2 - произвольные постоянные.

3.4.2.2 Метод подбора частного решения или метод неопределенных коэффициентов

Пусть правая часть неоднородного уравнения (3.29) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [p_k(x) \cdot \cos\beta x + q_l(x) \cdot \sin\beta x], \qquad (3.40)$$

где α и β - действительные числа, $p_k(x)$ и $q_l(x)$ - многочлены с действительными коэффициентами, имеющие соответственно степени $k \ge 0$ и $l \ge 0$; будем считать $k = 0$ или $l = 0$ тогда, когда $p_k(x)$ или $q_l(x)$ представляют собой просто числа и, в частности, когда они тождественно равны нулю.

Например,

если $f(x) = e^x \cdot x^2 \cdot \sin 2x$, то $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $k = 0$, $l = 2$;

если $f(x) = 3x \cdot e^{-x}$, то $\alpha = -1$, $\beta = 0$, $k = 1$, $l = 0$ (вообще говоря, l можно здесь придать произвольное числовое значение, поскольку $\sin\beta x = 0$, но всегда следует выбирать наименьшее из подходящих значений).

Можно доказать, что при такой правой части $f(x)$ уравнение (3.29) допускает частное решение $\bar{y}(x)$ следующего вида:

$$\bar{y}(x) = x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot [P_s(x) \cdot \cos\beta x + Q_s(x) \cdot \sin\beta x], \qquad (3.41)$$

где α и β - те же числа, что и в формуле (3.40); $m \ge 0$ - кратность корня $\alpha + \beta i$ для характеристического многочлена соответствующего однородного уравнения (3.28), причем $m = 0$ в случае, когда $\alpha + \beta i$ не является корнем многочлена; s - большее из чисел k и l, т.е. большая из степеней многочленов $p_k(x)$ и $q_i(x)$ в формуле (3.40); $P_s(x)$ и $Q_s(x)$ - многочлены степени s с неопределенными коэффициентами, подлежащими численному определению.

Для нахождения числовых значений неопределенных коэффициентов, т.е. для определения частного решения $\bar{y}(x)$ в формуле (3.41) - дифференцируем $\bar{y}(x)$ дважды и подставляем выражения $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'(x)$ и $\bar{y}''(x)$ в дифференциальное уравнение (3.29). Результат этой подстановки будем рассматривать как тождество. С помощью этого тождества мы и находим численные значения всех неопределенных коэффициентов многочленов $P_s(x)$ и $Q_s(x)$, подобно тому, как находятся неопределенные коэффициенты при разложении рациональной дроби на элементарные в интегральном исчислении.

Получив окончательное выражение $\bar{y}(x)$ в виде (3.41), находим общее решение $Y(x, C_1, C_2)$ соответствующего однородного уравнения (3.28). Сумма

$$y = \bar{y}(x) + Y(x, C_1, C_2)$$

дает искомое общее решение неоднородного уравнения (3.40).

Пример 3.12

Найти общее решение уравнения $y'' + 4y = (x+1)\cdot\cos x$.

Находим сначала общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' + 4y = 0$. его характеристический многочлен $k^2 + 4$ имеет корни $\pm 2i$. Согласно формуле (3.38), общее решение запишется так: $Y = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$.

Находим теперь частное решение $\bar{y}(x)$ заданного неоднородного уравнения. Его правая часть представима по формуле (3.40); здесь $\alpha = 0$, $\beta = 1$, $k = 1$, $l = 0$. Согласно формуле (3.41), это уравнение допускает частное решение вида:

$$\bar{y}(x) = (Ax + B)\cdot\cos x + (Cx + D)\cdot\sin x;$$

здесь $m = 0$, поскольку $\alpha + \beta i = 0 + i = i$ не является корнем характеристического многочлена, а $s = 1$, поскольку $k = 1$, $l = 0$.

Дифференцируем $\bar{y}(x)$ дважды и подставляем выражения $\bar{y}(x)$ и $\bar{y}''(x)$ в заданное неоднородное уравнение:

$$\begin{aligned}&[(2C - B - Ax)\cos x - (2A + D + Cx)\sin x] + 4[(Ax + B)\cos x + (Cx + D)\sin x] \equiv \\ &\equiv (x+1)\cdot\cos x\end{aligned}$$

или $(3Ax + 3B + 2C)\cdot\cos x + (3Cx - 2A + 3D)\cdot\sin x \equiv (x+1)\cdot\cos x$.

Отсюда

$$\begin{cases} 3Ax + 3B + 2C \equiv x + 1, \\ 3Cx - 2A + 3D \equiv 0. \end{cases}$$

Из первого тождества находим $A = \frac{1}{3}$, $3B + 2C = 1$, а из второго тождества получаем $C = 0$, $-2A + 3D = 0$. Из этой системы четырех уравнений находим числовые значения всех неопределенных коэффициентов: $A = \frac{1}{3}$, $B = \frac{1}{3}$, $C = 0$, $D = \frac{2}{9}$. Частное решение $\bar{y}(x)$ найдено:

$$\bar{y}(x) = \frac{x+1}{3}\cos x + \frac{2}{9}\sin x.$$

Суммируя Y и $\bar{y}$, получаем искомое общее решение неоднородного уравнения:

$$y = Y + \bar{y} = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x + \frac{x+1}{3}\cos x + \frac{2}{9}\sin x.$$

Пример 3.13

Найти частное решение уравнения $y'' - 5y' + 6y = 2x + e^x$ при заданных начальных условиях: $y_0 = \frac{16}{9}$, $y_0' = \frac{5}{6}$ при $x_0 = 0$.

Находим общее решение соответствующего однородного уравнения $\bar{y}'' - 5y' + 6y = 0$. Характеристический многочлен этого уравнения $k^2 - 5k + 6$ имеет корни $k_1 = 2$, $k_2 = 3$. Тогда, согласно формуле (3.34), общее решение этого уравнения $Y = C_1e^{2x} + C_2e^{3x}$.

Ищем, далее, частное решение $\bar{y}(x)$ неоднородного уравнения. Его правая часть $2x + e^x$ не представима по формуле (3.40), но является суммой двух функций $2x$ и e^x, порознь представимых по этой формуле. Поэтому мы будем искать $\bar{y}(x)$ как сумму двух частных решений $\bar{y}_1(x)$ и $\bar{y}_2(x)$, первое из которых есть решение уравнения $\bar{y}'' - 5y' + 6y = 2x$, а второе – решение уравнения $\bar{y}'' - 5y' + 6y = e^x$. Для правой части первого уравнения $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 1$, $l = 0$. Следовательно, $m = 0$, поскольку $\alpha + \beta i = 0 + 0 = 0$ не является корнем характеристического многочлена $k^2 - 5k + 6$; $s = 1$. По формуле (3.41) $\bar{y}_1(x) = Ax + B$.

Для правой части второго уравнения $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k = 0$, $l = 0$. Следовательно, $m = 0$, т.к. $\alpha + \beta i = 1 + 0 = 1$ не является корнем характеристического многочлена $k^2 - 5k + 6$; $s = 0$. По формуле (3.41) $\bar{y}_2(x) = C \cdot e^x$.

Суммируя, $\bar{y}(x) = Ax + B + Ce^x$.

Дифференцируем $\bar{y}(x)$ и подставляем выражения $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'(x)$ и $\bar{y}''(x)$ в заданное неоднородное уравнение:

$$(Ce^x) - 5(A + Ce^x) + 6(Ax + B + Ce^x) \equiv 2x + e^x,$$

или
$$2Ce^x + 6Ax - 5A + 6B \equiv e^x + 2x.$$

Отсюда $2Ce^x \equiv e^x$ и $C = \frac{1}{2}$, $6Ax - 5A + 6B \equiv 2x$. Решая систему

$$\begin{cases} 6A = 2, \\ -5A + 6B = 0, \end{cases}$$

находим $A = \dfrac{1}{3}$, $B = \dfrac{5}{18}$.

$$\bar{y}(x) = \frac{1}{3}x + \frac{5}{18} + \frac{1}{2}e^x$$

и, следовательно, общее решение заданного неоднородного уравнения имеет вид:

$$y = Y + \bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{5}{18} + \frac{1}{2}e^x .$$

Ищем теперь частное решение $\tilde{y}(x)$, удовлетворяющее заданным начальным условиям:

$$\begin{cases} \tilde{y}(x) = \tilde{C}_1 e^{2x} + \tilde{C}_2 e^{3x} + \dfrac{1}{3}x + \dfrac{5}{18} + \dfrac{1}{2}e^x, \\ \tilde{y}'(x) = 2\tilde{C}_1 e^{2x} + 3\tilde{C}_2 e^{3x} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}e^x. \end{cases}$$

Подставляя $x = 0$, получаем:

$$\frac{16}{9} = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 + \frac{5}{18} + \frac{1}{2},$$
$$\frac{5}{6} = 2\tilde{C}_1 + 3\tilde{C}_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{2}.$$

Решая эту систему, находим $\tilde{C}_1 = 3$, $\tilde{C}_2 = -2$.

Подставляя числовые значения $\tilde{C}_1$ и $\tilde{C}_2$ в формулу общего решения, получаем искомое частное решение $\tilde{y}(x)$:

$$\bar{y}(x) = 3e^{2x} - 2e^{3x} + \frac{1}{3}x + \frac{5}{18} + \frac{1}{2}e^x .$$

Пример 3.14

Найти общее решение уравнения $y'' - 2y' + y = e^x$.

Общее решение соответствующего однородного уравнения $y'' - 2y' + y = 0$ имеет вид $Y = e^x(C_1 + C_2 x)$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные, поскольку решения $y_1 = e^x$ и $y_2 = xe^x$ образуют фундаментальную систему.

Правая часть неоднородного уравнения $f(x) = e^x$ представима по формуле (3.40) при $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $k = l = 0$. Формула (3.41) показывает, что заданное неоднородное уравнение допускает решение вида $\bar{y}(x) = Ax^2e^x$, поскольку $m = 2$, $s = 0$.

Дифференцируем $\bar{y}(x)$ дважды и подставляем выражения $\bar{y}(x)$, $\bar{y}'(x)$ и $\bar{y}''(x)$ в заданное уравнение:

$$Ae^x(x^2 + 4x + 2) - 2Axe^x(2 + x) + Ax^2e^x \equiv e^x$$

или, сокращая на e^x,

$$x^2(A - 2A + A) + x(4A - 4A) + 2A \equiv 1.$$

Отсюда, $A = \frac{1}{2}$. Следовательно, $\bar{y}(x) = \frac{1}{2}x^2e^x$. Искомое общее решение запишется так: $y = \bar{y} + Y = \frac{1}{2}x^2e^x + e^x(C_1 + C_2x)$.

3.5 Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

3.5.1 Линейные однородные уравнения высших порядков

Линейное однородное уравнение n-го порядка имеет следующий вид:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0,$$

или

$$L(y) = 0 \tag{3.42}$$

Для уравнения (3.42) линейная независимость частных решений формулируется следующим образом:

Определение

Частные решения y_1, y_2, …, y_n уравнения (3.42) называются линейно независимыми, если всякая их линейная комбинации, в которой не все коэффициенты равны нулю, есть решение, отличное от нулевого:

$$\alpha_1y_1 + \alpha_2y_2 + \ldots + \alpha_ny_n \not\equiv 0. \tag{3.43}$$

Если же хотя бы одна такая линейная комбинация является нулевым решением, т.е. если

$$\bar{\alpha}_1y_1 + \bar{\alpha}_2y_2 + \ldots + \bar{\alpha}_ny_n \equiv 0,$$

то частные решения y_1, y_2, …, y_n называются **линейно зависимыми**.

Вронскиан системы частных решений y_1, y_2, …, y_n уравнения (3.42) имеет вид:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ y_1' & y_2' & \ldots & y_n' \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} = W(x) \qquad (3.44)$$

Данный вронсикан обладает теми же свойствами, что и вронскиан (3.17).

Определение

Фундаментальной системой частных решений уравнения (3.42) называется любая система *n* линейно независимых частных решений этого уравнения.

Теорема о существовании фундаментальной системы имеет место и в общем случае.

Основная теорема о структуре общего решения сохраняет свою формулировку. Общее решение уравнения (3.42) имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3.45)$$

где y_1, y_2, …, y_n - любая фундаментальная система решений этого уравнения, а C_1, C_2, …, C_n - произвольные постоянные.

3.5.2 Линейные неоднородные уравнения высших порядков

Линейное неоднородное уравнение *n*-го порядка имеет следующий вид:

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x),$$

или

$$L(y) = f(x) \qquad (3.46)$$

Теорема о структуре общего решения сохраняет свою формулировку. Общее решение уравнения (3.46) будет записано:

$$y = \bar{y}(x) + C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n, \qquad (3.47)$$

где $\bar{y}(x)$ - некоторое частное решение уравнения (3.46), а $C_1y_1 + C_2y_2 + ... + C_ny_n$ есть общее решение соответствующего однородного уравнения.

Следовательно, для уравнения (3.46) сохраняет силу **метод подбора частного решения**.

Метод Лагранжа вариации постоянных также переносится на общий случай неоднородного уравнения n-го порядка (3.46): используя общее решение соответствующего однородного уравнения (3.42), можно получить общее решение неоднородного уравнения (3.46) путем вычисления n неопределенных интегралов. Система (3.27) для нахождения C_1', C_2', …, C_n' запишется теперь в таком виде:

$$\begin{cases} y_1C_1' + y_2C_2' + ... + y_nC_n' = 0, \\ y_1'C_1' + y_2'C_2' + ... + y_n'C_n' = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n-2)}C_1' + y_2^{(n-2)}C_2' + ... + y_n^{(n-2)}C_n' = 0, \\ y_1^{(n-1)}C_1' + y_2^{(n-1)}C_2' + ... + y_n^{(n-1)}C_n' = f(x). \end{cases} \tag{3.48}$$

Решая систему относительно C_1', C_2', …, C_n' и интегрируя затем полученные выражения, подставляем выражения для $C_1(x)$, $C_2(x)$, …, $C_n(x)$ в формулу (3.45) общего решения соответствующего однородного уравнения (вместо произвольных постоянных) и получаем искомое общее решение неоднородного уравнения (3.46).

3.5.3 Линейные уравнения с постоянными коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение n-го порядка с постоянными коэффициентами имеет следующий вид:

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = 0,$$

или

$$L[y] = 0, \tag{3.49}$$

(однородное уравнение)

или

$$y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + a_2y^{(n-2)} + ... + a_{n-1}y' + a_ny = f(x),$$

или

$$L[y] = f(x) \tag{3.50}$$

(неоднородное уравнение).

Здесь a_1, a_2, …, a_n - действительные числа, $f(x)$ - непрерывная на некотором отрезке $a \le x \le b$ функция.

Однородные уравнения

Характеристический многочлен $P(k)$ (3.32) принимает теперь вид:

$$P(k) = k^n + a_1 k^{(n-1)} + a_2 k^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}k + a_n. \qquad (3.51)$$

Остается справедливой теорема о связи между корнями характеристического многочлена и частными решениями однородного линейного уравнения с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим правило построения фундаментальной системы и общего решения уравнения (3.49).

Случай простых корней характеристического многочлена

Если k_1, k_2, …, k_n - простые (т.е. однократные) корни $P(k)$, то функции $y_1 = e^{k_1 x}$, $y_2 = e^{k_2 x}$, …, $y_n = e^{k_n x}$ являются частными решениями уравнения (3.51) и притом линейно независимыми. Действительно, вронскиан такой системы решений

$$W(y_1,\ldots,y_n) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & \ldots & e^{k_n x} \\ k_1 e^{k_1 x} & \ldots & k_n e^{k_n x} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{n-1} e^{k_1 x} & \ldots & k_n^{n-1} e^{k_n x} \end{vmatrix} = e^{(k_1+\ldots+k_n)x} \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & \ldots & k_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

поскольку $e^{(k_1+\ldots+k_n)x} \neq 0$ ни при каком значении x и числовой определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ k_1 & \ldots & k_n \\ k_1^2 & \ldots & k_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ k_1^{n-1} & \ldots & k_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

- определитель Вандермонда – также не равен нулю.

Тем самым решения y_1, y_2, …, y_n образуют фундаментальную систему.

Если среди корней k_1, …, k_n имеются мнимые, то они встречаются только сопряженными парами, поскольку $P(k)$ есть многочлен с действительными коэффициентами. Заменяя тогда каждую пару мнимых частных решений $y_p = e^{(\alpha+\beta i)x}$ и $y_q = e^{(\alpha-\beta i)x}$, соответствующих паре сопряженных корней $\alpha \pm \beta i$, их полусуммой и их полуразностью, поделенной на i, получаем новую пару частных решений, имеющих уже действительный вид:

$$\bar{y}_p = \frac{y_p + y_q}{2} = e^{ax}\cos\beta x,\ \bar{y}_q = \frac{y_p - y_q}{2i} = e^{ax}\sin\beta x.$$

Таким образом, если k_1, k_2, …, k_r - простые действительные корни характеристического многочлена $P(k)$, а $(\alpha_1 \pm \beta_1 i)$, …, $(\alpha_s \pm \beta_s i)$ - пары простых сопряженных мнимых корней, то фундаментальная система решений уравнения (3.51) имеет следующий вид:

$$e^{k_1 x},\ \ldots,\ e^{k_r x};\ e^{\alpha_1 x}\cdot\cos\beta_1 x,\ \ldots,\ e^{\alpha_s x}\cdot\cos\beta_s x;\ e^{\alpha_1 x}\cdot\sin\beta_1 x,$$
$$\ldots,\ e^{\alpha_s x}\cdot\sin\beta_s x, \tag{3.52}$$

где $r + 2s = n$.

Общее решение уравнения запишется так:

$$\begin{aligned} y = C_1 e^{k_1 x} + \ldots + C_r e^{k_r x} + e^{\alpha_1 x}(C_{r+1}\cos\beta_1 x + C_{r+2}\sin\beta_1 x) + \\ + \ldots + e^{\alpha_s x}(C_{n-1}\cos\beta_s x + C_n \sin\beta_s x) \end{aligned} \tag{3.53}$$

где C_i - произвольные постоянные ($i = 1, 2, \ldots, n$).

Пример 3.15

Найти общее решение уравнений $y^{(\mathrm{IV})} - 5y'' + 4y = 0$ и $y''' - y'' + y' - y = 0$.

Характеристический многочлен $k^4 - 5k^2 + 4$ первого уравнения имеет корни $y_1 = 1$, $y_2 = -1$, $y_3 = 2$, $y_4 = -2$, а характеристический многочлен $k^3 - k^2 + k - 1$ второго уравнения имеет корни $y_1 = 1$, $y_2 = i$, $y_3 = -i$. По формуле (3.53) получаем общее решение первого уравнения в виде:

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x} + C_3 e^{2x} + C_4 e^{-2x},$$

а общее решение второго уравнения – в виде

$$y = C_1 e^{x} + C_2\cos x + C_3 \sin x.$$

Случай кратных корней характеристического многочлена

Теорема

Корню k_0 кратности *n* характеристического многочлена $P(k)$ соответствует *n* линейно независимых частных решений уравнения (3.49) следующего вида:

$$y_1 = e^{k_0 x},\ y_2 = xe^{k_0 x},\ y_3 = x^2 e^{k_0 x},\ \ldots,\ y_n = x^{n-1} e^{k_0 x}. \tag{3.54}$$

Если $k = \alpha + \beta i$ есть мнимый *m*-кратный корень характеристического многочлена $P(k)$, то сопряженный ему корень $k = \alpha - \beta i$ будет иметь ту же кратность. Этой паре *m*-кратных корней будут соответствовать в фундаментальной системе решений уравнения (3.49) следующие 2*m* решений:

$$y_1 = e^{(\alpha + \beta i)x},\ y_2 = xe^{(\alpha + \beta i)x},\ \ldots,\ y_m = x^{m-1} e^{(\alpha + \beta i)x},$$

$$y_{m+1} = e^{(\alpha - \beta i)x},\ y_{m+2} = xe^{(\alpha - \beta i)x},\ \ldots,\ y_{2m} = x^{m-1} e^{(\alpha - \beta i)x}.$$

После замены мнимых решений их полусуммами $\frac{y_k + y_{k+m}}{2}$ и полуразностями $\frac{y_k - y_{k+m}}{2i}$, поделенными на i, мы получим, используя формулы Эйлера, новые 2*m* линейно независимых решений, имеющие уже действительный вид:

$$\tilde{y}_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \tilde{y}_2 = xe^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\tilde{y}_3 = x^2 e^{\alpha x}\cos\beta x,\ \ldots,\ \tilde{y}_m = x^{m-1} e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$\tilde{y}_{m+1} = e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \tilde{y}_{m+2} = xe^{\alpha x}\sin\beta x,$$

$$\tilde{y}_{m+3} = x^2 e^{\alpha x}\sin\beta x,\ \ldots,\ \tilde{y}_{2m} = x^{m-1} e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{3.55}$$

Итак, каждому действительному *m*-кратному корню k_0 характеристического многочлена соответствует в фундаментальной системе решений уравнения (3.49) *m* решений вида (3.54), а каждой паре сопряженных мнимых *m*-кратных корней $\alpha \pm \beta i$ соответствует 2*m* решений вида (3.55).

Пример 3.16

Найти общие решения уравнений $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ и $y^{(IV)} + 2y'' + y = 0$.

Характеристический многочлен $k^3 + 3k^2 + 3k + 1$ первого уравнения имеет трехкратный корень $k = -1$, а характеристический многочлен $k^4 + 2k^2 + 1$ второго уравнения имеет двукратные корни i и $-i$. Общее решение первого уравнения будет иметь вид:

$$y = C_1 e^{-x} + C_2 xe^{-x} + C_3 x^2 e^{-x} = e^{-x}(C_1 + C_2 x + C_3 x^2),$$

а общее решение второго уравнения:

$$y = C_1 \cos x + C_2 x \cos x + C_3 \sin x + C_4 x \sin x = (C_1 + C_2 x)\cos x + (C_3 + C_4 x)\sin x.$$

В случае, когда правая часть уравнения является суммой двух или нескольких слагаемых, порознь представимых этой формулой, следует использовать теорему о наложении частных решений.

Пример 3.17

Найти общее решение уравнения $y''' + y'' = 5 + xe^{2x}$ методом подбора частного решения.

Находим сначала общее решение Y соответствующего однородного уравнения $y''' + y'' = 0$. Его характеристический многочлен $k^3 + k^2$ имеет следующие корни: 0 – двукратный и (-1) – простой. Получим $Y = C_1 + C_2 x + C_3 e^{-x}$.

Применяя теорему о наложении частных решений, ищем сначала частное решение $\bar{y}_1(x)$ первого вспомогательного уравнения $y''' + y'' = 5$. Параметры формулы (3.40) здесь таковы: $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $k = 0$, $l = 0$. В формуле (3.41) имеем: $\alpha + \beta i = 0$, $m = 2$, $s = 0$ и, следовательно, $\bar{y}_1(x) = Ax^2$. Подставляя $\bar{y}_1(x)$ и его производные в первое вспомогательное уравнение, находим $A = \frac{5}{2}$ и, следовательно,

$$\bar{y}_1(x) = \frac{5}{2}x^2.$$

Ищем теперь частное решение $\bar{y}_2(x)$ второго вспомогательного уравнения $y''' + y'' = xe^{2x}$. Параметры формулы (3.40): $\alpha = 2$, $\beta = 0$, $k = 1$, $l = 0$. Параметры формулы (3.41): $m = 0$, поскольку $\alpha + \beta i = 2$ не является корнем характеристического многочлена $k^3 + k^2$, $s = 1$ и, следовательно, $\bar{y}_2(x) = (Bx + C)e^{2x}$. Подставляя $\bar{y}_2(x)$ и его производные во второе вспомогательное уравнение, после сокращения на e^{2x}, приходим к тождеству $12Bx + 16B + 12C \equiv x$. Отсюда: $B = \frac{1}{12}$, $C = -\frac{1}{9}$ и $\bar{y}_2(x) = \left(\frac{x}{12} - \frac{1}{9}\right)e^{2x}$.

Сумма $\bar{y}_1(x)$ и $\bar{y}_2(x)$ по теореме о наложении решений дает частное решение $\bar{y}(x)$ заданного неоднородного уравнения: $\bar{y}(x) = \bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \frac{5}{2}x^2 + \left(\frac{x}{12} - \frac{1}{9}\right)e^{2x}$.

Суммируя $\bar{y}(x)$ и Y, находим искомое общее решение заданного уравнения:

$$y(x) = \frac{5}{2}x^2 + \left(\frac{x}{12} - \frac{1}{9}\right)e^{2x} + C_1 + C_2x + C_3e^{-x}.$$

Пример 3.18

Найти общее решение уравнения $y''' + y' = tgx$ методом вариации постоянных и частное решение при начальных условиях: $x = 0$, $y = y' = 3$, $y'' = -3$.

Находим общее решение Y соответствующего однородного уравнения $y''' + y' = 0$. Его характеристический многочлен $k^3 + k$ имеет простые корни 0 и $\pm\, i$. Согласно формуле (3.53) имеем $Y = C_1 + C_2\cos x + C_3\sin x$. Составляем систему (3.48), используя фундаментальную систему решений однородно уравнения $y_1 = 1$, $y_2 = \cos x$, $y_3 = \sin x$:

$$\begin{cases} 1\cdot C_1' + \cos xC_2' + \sin xC_3' = 0, \\ -\sin xC_2' + \cos xC_3' = 0, \\ -\cos xC_2' - \sin xC_3' = tgx. \end{cases}$$

Из системы $C_1' = tgx$, $C_2' = -\sin x$, $C_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}$.

Интегрируя, получаем

$$C_1(x) = -\ln\cos x + K_1,$$

$$C_2(x) = \cos x + K_2,$$

$$C_3(x) = \sin x - \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + K_3,$$

где K_1, K_2, K_3 - произвольные постоянные.

Найденные выражения $C_1(x)$, $C_2(x)$, $C_3(x)$ подставляем в формулу общего решения однородного уравнения (вместо произвольных постоянных C_1, C_2, C_3) и получаем искомое общее решение заданного нам однородного уравнения:

$$y = -\ln\cos x - \sin x\ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + \bar{K} + K_2\cos x + K_3\sin x,$$

где положено $\bar{K} = K_1 + 1$.

Находим теперь частное решение $\bar{y}$. Для этого находим выражения y' и y'' из полученной формулы общего решения:

$$y' = -\cos x \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - K_2 \sin x + K_3 \cos x \ ,$$

$$y'' = \sin x \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) - 1 - K_2 \cos x + K_3 \sin x$$

и подставляем в выражения y , y' , y'' начальные значения x, y , y' и y'' .

Получаем систему уравнений для определения числовых значений произвольных постоянных: $3 = \bar{K}_1 + K_2$, $3 = K_3$, $-3 = -1 - K_2$.

Тогда $\bar{K}_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = 3$.

Искомое частное решение получится после подстановки этих числовых значений $\bar{K}_1$, K_2 , K_3 в формулу общего решения:

$$\bar{y} = -\ln\cos x - \sin x \ln tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + 1 + 2\cos x + 3\sin x \ .$$

4 Задачи для самостоятельного решения расчетно-графического задания (РГЗ)

Предлагается 10 задач (20 вариантов) для самостоятельного решения [3,5].

4.1 Примеры решения задач

Задача 1 Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M : $y' = x$, $M(2,1)$.

Решение

Чтобы построить поле направлений (см. п. 1.1) дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$, нужно через каждую точку (x, y) плоскости провести прямую с угловым коэффициентом $k = f(x, y)$. В данной задаче $k = x$.

Получившиеся изоклины $k = x$ являются касательными к интегральным кривым. На рисунке 4.1 приведен пример построения поля направлений и интегральной кривой, проходящей через точку $M(2,1)$.

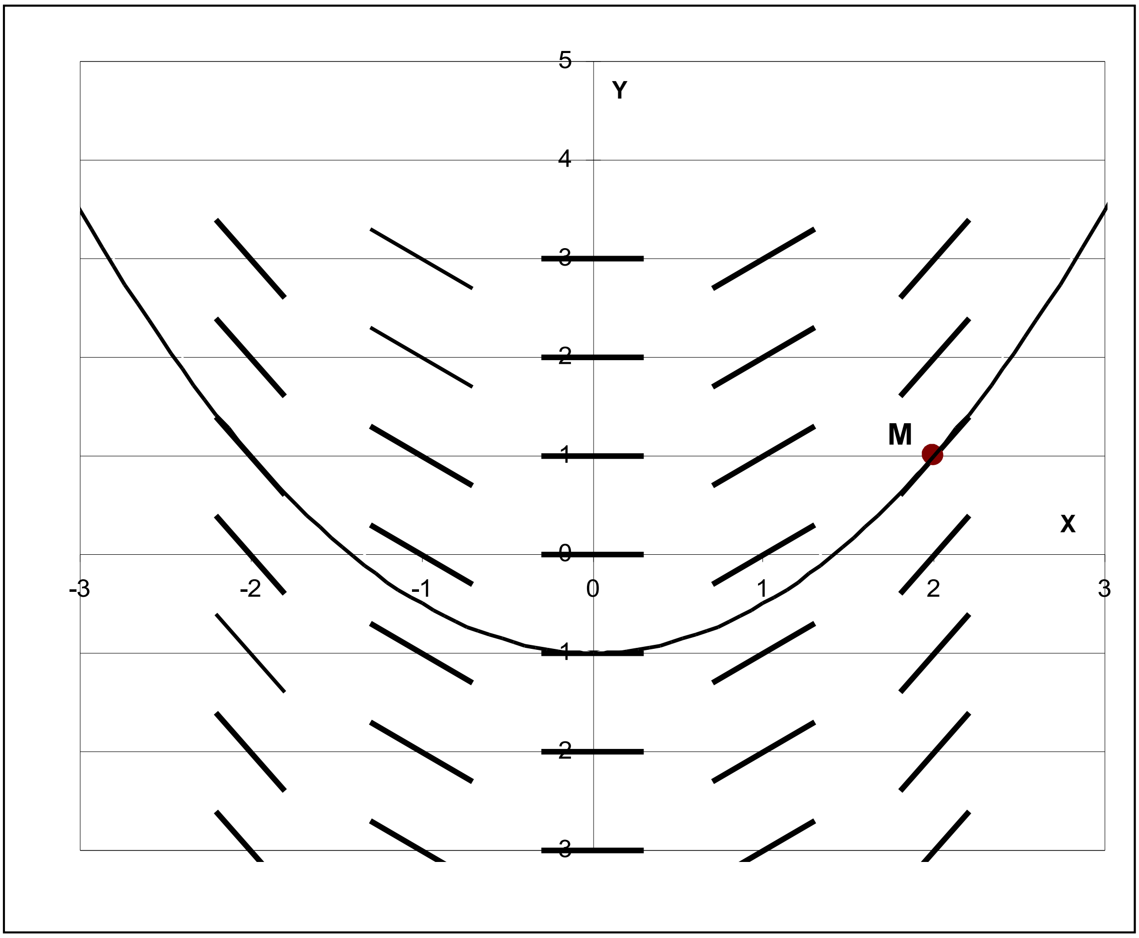

Рисунок 4.1 – Приближенное построение интегральной кривой

Задача 2

Найти общий интеграл дифференциального уравнения: $6xdx - 2ydy = 2yx^2dy - 3xy^2dx.$ Ответ представить в виде $\psi\left(x, y\right) = C$.

Решение

Это уравнение с разделяющимися переменными (см. п.1.3). Приведя подобные слагаемые, получим: $3xdx(2+y^2) = 2ydy(x^2+1)$.

Разделим переменные: $\dfrac{3xdx}{x^2+1} = \dfrac{2ydy}{2+y^2}$.

Интегрируем: $\int \dfrac{3xdx}{x^2+1} = \int \dfrac{2ydy}{2+y^2}$.

Отсюда: $\dfrac{3}{2} \cdot \ln(x^2+1) = \ln(y^2+2) + \ln C, \quad C > 0$

$$(x^2+1)^3 = C \cdot (y^2+2)^2$$

Ответ: $(x^2+1)^3 = C \cdot (y^2+2)^2$.

Задача 3

Найти общий интеграл дифференциального уравнения: $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 12.$

Решение

Это однородное уравнение (см. п. 1.4). Для его решения нужно сделать подстановку $u = \dfrac{y}{x}$, тогда $y' = u + xu'$.

Получаем: $xu' + u = u^2 + 8u + 12$.

Отсюда: $xu' = u^2 + 7u + 12$.

Чтобы разделить переменные, нужно левую и правую части уравнения разделить на $u^2 + 7u + 12$.

Проверим, не будут ли потеряны при этом решения: $u^2 + 7u + 12 = 0$, если $u = -3$ или $u = -4$. Подставляем $u = -3$ в уравнение $xu' = u^2 + 7u + 12$, получаем тождество $0 \equiv 0$, следовательно $u = -3$ - решение. Аналогично показывается, что $u = -4$ - решение.

Разделив переменные получаем $\dfrac{du}{u^2+7u+12}=\dfrac{dx}{x}$. Интегрируем $\int\dfrac{du}{u^2+7u+12}=\int\dfrac{dx}{x}$.

Отсюда: $\ln\left|\dfrac{u+3}{u+4}\right|=\ln|x|+\ln C_1$, $C_1>0$

или $\dfrac{u+3}{u+4}=Cx$, где $C=\pm C_1$.

Если расширить область возможных значений константы C: $C\in R$, то из получившейся формулы при $C=0$ будет получаться решение $u=-3$.

Решение $u=-4$ объединить с общей формулой решений не удается.

Сделаем обратную подстановку $u=\dfrac{y}{x}$.

Получаем: $\dfrac{y+3x}{y+4x}=Cx$, $C\in R$, $y=-4x$.

Ответ: $\dfrac{y+3x}{y+4x}=Cx$, $C\in R$, $y=-4x$.

Задача 4

Найти решение задачи Коши: $y'+\dfrac{xy}{2\left(1-x^2\right)}=\dfrac{x}{2}$, $y\left(0\right)=\dfrac{2}{3}$.

Решение

Это линейное уравнение первого порядка (см. п .1.5).

Для решения сделаем подстановку $y=uv$, тогда $y'=u'v+uv'$. Подставив, получаем уравнение: $u'v+u(v'+\dfrac{vx}{2(1-x^2)})=\dfrac{x}{2}$.

Решим сначала уравнение относительно v:

$$v'+\frac{vx}{2(1-x^2)}=0$$

$$\frac{dv}{dx}=\frac{vx}{2(x^2-1)}$$

$$\frac{dv}{v}=\frac{xdx}{2(x^2-1)}$$

$$\int\frac{dv}{v}=\int\frac{xdx}{2(x^2-1)}$$

$$\ln|v|=\frac{1}{4}\ln\left|x^2-1\right|$$

$$v=\sqrt[4]{1-x^2}$$

Т.к. в этой задаче требуется найти решение задачи Коши $y(0)=\dfrac{2}{3}$, то $\left|x^2-1\right|=1-x^2$.

Теперь найдем u, подставив найденное v в уравнение $u'v+u(v'+\frac{vx}{2(1-x^2)})=\frac{x}{2}$:

$$u'\cdot\sqrt[4]{1-x^2}=\frac{x}{2}$$

$$du=\frac{xdx}{2\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}$$

$$\int du=\int\frac{xdx}{2\cdot\sqrt[4]{1-x^2}}$$

Отсюда:

$$u=-\frac{1}{3}\cdot(1-x^2)^{3/4}+C\ ,\ C\in R$$

$$y=uv$$

$$y=(-\frac{1}{3}\cdot(1-x^2)^{3/4}+C)\cdot\sqrt[4]{1-x^2}$$

Определим значение константы C исходя из условия задачи Коши: $y(0)=\frac{2}{3}$

$$\frac{2}{3}=(-\frac{1}{3}\cdot(1-0^2)^{3/4}+C)\cdot\sqrt[4]{1-0^2}$$

$$C=1$$

Получаем частное решение, удовлетворяющее задаче Коши:

$$y=\frac{1}{3}\cdot\left(x^2-1\right)+\sqrt[4]{1-x^2}$$

Ответ: $y=\frac{1}{3}\cdot\left(x^2-1\right)+\sqrt[4]{1-x^2}$.

Задача 5

Найти решение задачи Коши: $y''=50\sin^3 y\cos y,\quad y(1)=\pi/2,\quad y'(1)=5.$

Решение

Это уравнение второго порядка, не содержащее в своей записи символа аргумента x (см. п. 2.2).

Применяем подстановку: $y'=p(y)$, тогда $y''=\frac{dp}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'\cdot p$.

Получаем уравнение: $p'\cdot p=50\sin^3 y\cos y$ - это уравнение с разделяющимися переменными.

$$\int pdp=\int 50\sin^3 y\cos y dy$$

$$\frac{p^2}{2} = \frac{50}{4}\sin^4 y + C_1$$

Из условия задачи Коши $y = \frac{\pi}{2}$, $p = y' = 5$.

Получаем: $\frac{5^2}{2} = \frac{50}{4}\sin^4\frac{\pi}{2} + C_1$.

Отсюда: $C_1 = 0$.

$$p^2 = 25\sin^4 y$$

Т.к. из условия задачи Коши $p = y' = 5 > 0$, то $p = 5\sin^2 y$.

Делаем обратную подстановку $p = y'$: $y' = 5\sin^2 y$

Разделяем переменные $\frac{dy}{\sin^2 y} = 5dx$

Интегрируем $\int\frac{dy}{\sin^2 y} = \int 5dx$

Получаем $-ctgy = 5x + C_2$

C_2 находим исходя из начальных условий:

$-ctg\frac{\pi}{2} = 5\cdot 1 + C_2 \quad\Rightarrow\quad C_2 = -5$

Получаем частное решение, удовлетворяющее задачи Коши:

$-ctgy = 5x - 5$ или $y = arcctg(5 - 5x)$.

Ответ: $y = arcctg(5 - 5x)$.

Задача 6

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y'''\,\mathrm{th}\,7x = 7y''$.

Решение

Произведем замену: $y'' = p$,

где $p = p(x)$,

тогда $y''' = p'$.

Уравнение приобретает вид: $p'th7x = 7p$ - это уравнение с разделяющимися переменными. Прежде чем делить обе части уравнения на p, проверим является ли $p = 0$ решением. Подставим $p = 0$ в уравнение $p'th7x = 7p$, получаем тождество $0 \equiv 0$, значит $p = 0$ - решение.

$$\frac{dp}{p} = 7\frac{dx}{th7x}$$

$$\int\frac{dp}{p} = \int 7\frac{ch7xdx}{sh7x}$$

$\ln|p| = \ln|sh7x| + \ln C$, где $C > 0$

$p = C_1 \cdot sh7x$, где $C_1 = \pm C$

Полученное множество решений объединим с решением $p = 0$, расширив множество допустимых значений константы C_1: $C_1 \in R$.

Таким образом, $p = C_1 \cdot sh7x$, $C_1 \in R$.

Делаем обратную замену $p = y''$: $y'' = C_1 \cdot sh7x$

$y' = \frac{C_1}{7}ch7x + C_2$, $C_2 \in R$

$y = \frac{C_1}{49}sh7x + C_2x + C_3$, $C_3 \in R$

$y = \overline{C} \cdot sh7x + C_2x + C_3$, где $\overline{C} = \frac{C_1}{49}$

Ответ: $y = \overline{C} \cdot sh7x + C_2x + C_3$, $\overline{C}, C_2, C_3 \in R$

Задача 7

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения $y' = x + y$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно).

Решение

Задача Коши поставлена при $x = 0$, поэтому решение будем искать в виде степенного ряда (см. п.1.7):

$$y(x) = y(x_0) + \frac{y'(x_0)}{1!}\cdot(x - x_0) + \frac{y''(x_0)}{2!}\cdot(x - x_0)^2 + \frac{y'''(x_0)}{3!}\cdot(x - x_0)^3 + \\ + \frac{y^{(IV)}(x_0)}{4!}\cdot(x - x_0)^4 + \ldots$$

при $x_0 = 0$, т.е. в виде:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}\cdot x + \frac{y''(0)}{2!}\cdot x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}\cdot x^3 + \frac{y^{(IV)}(0)}{4!}\cdot x^4 + \ldots$$

По условию $y(0) = 1$.

Подставляем $y(0) = 1$ в дифференциальное уравнение, получаем:

$y'(0) = 0 + y(0)$

$y'(0) = 1$

Дифференцируем данное дифференциальное уравнение: $y'' = 1 + y'$.

Отсюда $y''(0) = 1 + y'(0)$

$y''(0) = 2$

Еще раз дифференцируем уравнение: $y''' = y''$ и $y'''(0) = y''(0) = 2$

Еще раз дифференцируем: $y^{(IV)} = y'''$ и $y^{(IV)}(0) = y'''(0) = 2$

Подставляем коэффициенты в степенной ряд:

$$y(x) = 1 + \frac{1}{1!} \cdot x + \frac{2}{2!} \cdot x^2 + \frac{2}{3!} \cdot x^3 + \frac{2}{4!} \cdot x^4 + \ldots$$

$$y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{12} \cdot x^4 + \ldots$$

Ответ: $y(x) = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{12} \cdot x^4 + \ldots$

Замечание: в задаче 7 можно получить точную сумму ряда.

Так как $y^{(n)}(0) = 2$, при $n \geq 2$, то $y(x) = 1 + x + 2 \cdot (\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots)$

$$y(x) = 2 \cdot (1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots) - 1 - x$$

$$y(x) = 2 \cdot e^x - 1 - x$$

Задача 8

Найти общее решение дифференциального уравнения:

$$y'' + 6y' + 13y = -e^{3x} \cos 5x.$$

Решение

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (см. п.3.3).

В начале решим соответствующее ему однородное уравнение (см. п.3.4): $y'' + 6y' + 13y = 0$.

Составим характеристический многочлен: $P(k) = k^2 + 6k + 13$

Найдем корни характеристического многочлена: $k^2 + 6k + 13 = 0$

Вычислим дискриминант: $D = 36 - 52 = -16$

$D < 0$, следовательно, имеем дело со случаем комплексно сопряженных корней.

$k_{1,2} = \frac{-6 \pm 4i}{2} = -3 \pm 2i$

По формуле (3.38) $y(x) = C_1 e^{\alpha x} \cdot \cos\beta x + C_2 e^{\alpha x} \cdot \sin\beta x = e^{\alpha x} \cdot (C_1 \cos\beta x + C_2 \sin\beta x)$

получаем общее решение однородного уравнения (при $\alpha = -3$, $\beta = 2$):

$y_0(x) = e^{-3x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x)$, $C_1, C_2 \in R$.

Найдем частное решение данного неоднородного уравнения методом подбора частного решения (см. п.3.4.2.2).

Правая часть $f(x) = -e^{3x} \cdot \cos 5x$ имеет вид (формула 3.40)):

$f(x) = e^{\alpha x} \cdot [p_k(x) \cdot \cos\beta x + q_l(x) \cdot \sin\beta x]$:

$\alpha = 3$, $\beta = 5$, $p_k(x) = -1$, $q_l(x) = 0 \Rightarrow k = l = 0$

(числа -1 и 0 можно рассматривать как многочлены нулевой степени).

Частное решение будем искать в виде (формула (3.41)):

$\bar{y}(x) = x^m \cdot e^{\alpha x} \cdot [P_s(x) \cdot \cos\beta x + Q_s(x) \cdot \sin\beta x]$.

Так как $\alpha \pm i \cdot \beta = 3 \pm i \cdot 5$ - не являются корнями характеристического многочлена, то $m = 0$; $s = \max\{k.l\} = 0 \Rightarrow P_s(x) = a$, $Q_s(x) = b$

($P_s(x), Q_s(x)$ - неизвестные числа, которые будем искать методом неопределенных коэффициентов).

Таким образом, частное решение будем искать в виде:

$\bar{y}(x) = e^{3x} \cdot (a \cdot \cos 5x + b \cdot \sin 5x)$.

Тогда $\bar{y}'(x) = e^{3x} \cdot ((3a + 5b) \cdot \cos 5x + (3b - 5a) \cdot \sin 5x)$

$\bar{y}'' = e^{3x} \cdot ((30b - 16a) \cdot \cos 5x + (-30a - 16b) \cdot \sin 5x)$.

Найденные значения производных и функцию подставляем в данное неоднородное дифференциальное уравнение и, после приведения подобных слагаемых, получаем:

$$e^{3x} \cdot ((60b + 15a) \cdot \cos 5x + (15b - 60a) \cdot \sin 5x) = -e^{3x} \cdot \cos 5x.$$

$e^{3x} \neq 0$, функции $\cos 5x$ и $\sin 5x$ - линейно независимы, поэтому данное равенство является тождеством по x только при условии: $\begin{cases} 60b + 15a = -1 \\ 15b - 60a = 0 \end{cases}$.

Решая систему, получаем: $\begin{cases} a = \dfrac{-1}{255} \\ b = \dfrac{-4}{255} \end{cases}$.

Таким образом, найдено частное решение: $\bar{y}(x) = \dfrac{-e^{3x}}{255} \cdot (\cos 5x + 4 \cdot \sin 5x)$.

По теореме о структуре общего решения (см. формулу (3.20)): $y = \bar{y}(x) + y_0(x)$ получаем общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = \frac{-e^{3x}}{255} \cdot (\cos 5x + 4 \cdot \sin 5x) + e^{-3x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x),\ C_1, C_2 \in R.$$

Ответ: $y = \dfrac{-e^{3x}}{255} \cdot (\cos 5x + 4 \cdot \sin 5x) + e^{-3x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x),\ C_1, C_2 \in R$.

Задача 9

Найти решение задачи Коши $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 1/2$ дифференциального уравнения $y'' + \dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{4} \cdot ctg(\dfrac{x}{2})$.

Решение

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка (см. п.3.3).

В начале решим соответствующее ему однородное уравнение: $y'' + \dfrac{y}{4} = 0$.

Составим характеристический многочлен: $P(k) = k^2 + \dfrac{1}{4}$.

Корни многочлена $P(k)$: $k = \pm \dfrac{1}{2} i \Rightarrow \alpha = 0,\ \beta = 1/2$.

Следовательно, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$$y_0(x) = C_1 \cdot \cos\frac{1}{2}x + C_2 \cdot \sin\frac{1}{2}x,\ C_1, C_2 \in R.$$

Найдем общее решение данного неоднородного уравнения методом Лагранжа вариации постоянных (см. п.3.3):

будем искать общее решение в виде:

$$y = C_1(x) \cdot \cos\frac{1}{2}x + C_2(x) \cdot \sin\frac{1}{2}x,$$

$y_1 = \cos\dfrac{1}{2}x$, $y_2 = \sin\dfrac{1}{2}x$ - фундаментальная система решения однородного уравнения.

Составим систему (см. формулу 3.27):

$$\begin{cases} y_1 \cdot C_1' + y_2 \cdot C_2' = 0, \\ y_1' \cdot C_1' + y_2' \cdot C_2' = f(x). \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos\frac{1}{2}x \cdot C_1' + \sin\frac{1}{2}x \cdot C_2' = 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{1}{2}x \cdot C_1' + \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{1}{2}x \cdot C_2' = \frac{1}{4} ctg\frac{x}{2} \end{cases}$$

Решим эту систему, воспользуясь формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & \sin\frac{x}{2} \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} & \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \cos^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & \sin\frac{x}{2} \\ \frac{1}{4} \cdot ctg\frac{x}{2} & \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{4} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \cos\frac{x}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} & \frac{1}{4} \cdot ctg\frac{x}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{4} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot ctg\frac{x}{2}$$

$$C_1' = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

$$C_2' = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} \cdot ctg\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}$$

$$C_1(x) = \int C_1' dx = \int -\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} dx = -\sin\frac{x}{2} + \overline{C}_1, \ \overline{C}_1 \in R$$

$$C_2(x) = \int C_2' dx = \int \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{1 - \sin^2\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} dx = \int \frac{d\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}} - \int \sin\frac{x}{2} d\frac{x}{2} =$$

$$= \ln\left|tg\frac{x}{4}\right| + \cos\frac{x}{2} + \overline{C}_2, \quad \overline{C}_2 \in R$$

Получили общее решение данного уравнения:

$$y(x) = (\overline{C}_1 - \sin\frac{x}{2}) \cdot \cos\frac{x}{2} + (\ln\left|tg\frac{x}{4}\right| + \cos\frac{x}{2} + \overline{C}_2) \cdot \sin\frac{x}{2}$$

$y(x) = \overline{C}_1 \cdot \cos\frac{x}{2} + (\ln\left|tg\frac{x}{4}\right| + \overline{C}_2) \cdot \sin\frac{x}{2}$, $\overline{C}_1, \overline{C}_2 \in R$.

Найдем частное решение, удовлетворяющее задаче Коши: $y(\pi) = 2$, $y'(\pi) = 1/2$.

Так как, требуется найти частное решение при $x = \pi$, то $tg\frac{x}{4} > 0$ и $\left|tg\frac{x}{4}\right| = tg\frac{x}{4}$.

Вычислим производную общего решения:

$$y'(x) = -\frac{\overline{C}_1}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} + \frac{\overline{C}_2}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{tg\frac{x}{4}} \cdot \frac{1}{\cos^2\frac{x}{4}} \cdot \sin\frac{x}{2} + \ln\left(tg\frac{x}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

$$y'(x) = \overline{C}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{x}{2} + \overline{C}_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2} + \frac{1}{2} + \ln(tg\frac{x}{4}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{x}{2}$$

Из начальных условий получаем систему:

$$\begin{cases} \overline{C}_1 \cdot \cos\frac{\pi}{2} + (\ln(tg\frac{\pi}{4}) + \overline{C}_2) \cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2 \\ \overline{C}_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sin\frac{\pi}{2} + \overline{C}_2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \ln(tg\frac{\pi}{4}) \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{C}_2 = 2 \\ \overline{C}_1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{C}_2 = 2 \\ \overline{C}_1 = 0 \end{cases}$$

Подставляя найденные значения в формулу общего решения, получаем частное решение, удовлетворяющее задаче Коши: $\bar{y}(x) = (\ln(tg\frac{x}{4}) + 2) \cdot \sin\frac{x}{2}$.

Ответ: $\bar{y}(x) = (\ln(tg\frac{x}{4}) + 2) \cdot \sin\frac{x}{2}$.

Задача 10

Найти общее решение дифференциального уравнения: $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.

Решение

Это линейное неоднородное уравнение третьего порядка (см. п. 3.5).

Решим соответствующее однородное уравнение: $y''' + y'' = 0$.

Для этого составим характеристический многочлен: $P(k) = k^3 + k^2 = 0$.

Его корни: $k = 0$ - корень кратности 2;

$k=-1$ - простой корень.

В случае кратных корней характеристического многочлена линейно независимое частное решение находится по формуле (3.54): $y_1=e^{0x}$, $y_2=x\cdot e^{0x}$:

$y_1=1$, $y_2=x$.

Для простых корней решение имеет вид: $y=e^{kx}$. Следовательно $y_3=e^{-x}$.

Таким образом, общее решение однородного уравнения имеет вид:

$y_0(x)=C_1\cdot y_1+C_2\cdot y_2+C_3\cdot y_3=C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot e^{-x}$, $C_1,C_2,C_3\in R$.

Найдем частное решение данного неоднородного уравнения методом подбора частного решения (см. п.3.4.2.2).

Правая часть $f(x)=49-24x^2$ имеет вид (формула 3.40)):

$f(x)=e^{\alpha x}\cdot[p_k(x)\cdot\cos\beta x+q_l(x)\cdot\sin\beta x]$ при $\alpha=0$, $\beta=0$, $p_k(x)=49-24x^2$, $k=2$

Частное решение будем искать в виде (формула (3.41)):

$\bar{y}(x)=x^m\cdot e^{\alpha x}\cdot[P_s(x)\cdot\cos\beta x+Q_s(x)\cdot\sin\beta x]$.

Так как, $\alpha+i\cdot\beta=0$ - корень кратности 2 характеристического многочлена, то $m=2$;

$s=k=2 \quad\Rightarrow\quad P_s(x)=ax^2+bx+c$.

$\bar{y}(x)=x^2\cdot(ax^2+bx+c)=ax^4+bx^3+cx^2$

Неизвестные числа a,b,c найдем методом неопределенных коэффициентов, для этого в начале вычислим производные частного решения:

$\bar{y}'(x)=4ax^3+3bx^2+2cx$

$\bar{y}''(x)=12ax^2+6bx+2c$

$\bar{y}'''(x)=24ax+6b$

Подставляем в данное уравнение:

$24ax+6b+12ax^2+6bx+2c=49-24x^2$.

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\begin{cases}12a=-24\\24a+6b=0\\6b+2c=49\end{cases}$$

Отсюда: $a=-2$, $b=8$, $c=1/2$.

Таким образом, частное решение данного уравнения имеет вид:

$\bar{y}(x)=-2x^4+8x^3+\frac{1}{2}x^2$.

По теореме о структуре общего решения (см. формулу (3.20)): $y=\bar{y}(x)+y_0(x)$ получаем общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y=-2x^4+8x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot e^{-x}\ ,\ C_1, C_2, C_3\in R\ .$$

Ответ: $y=-2x^4+8x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1+C_2\cdot x+C_3\cdot e^{-x}\ ,\ C_1, C_2, C_3\in R\ .$

4.2 Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Для данного дифференциального уравнения методом изоклин построить интегральную кривую, проходящую через точку M :

1. $yy' + x = 0,\quad M(-2,\ -3).$
2. $y' = 3 + y^2,\quad M(1,\ 2).$
3. $xy' = 2y,\quad M(2,\ 3).$
4. $y' = y - x,\quad M(9/2,\ 1).$
5. $y' = x^2 - y,\quad M(1,\ 1/2).$
6. $y' = xy,\quad M(0,\ -1).$
7. $y' = xy,\quad M(0,\ 1).$
8. $yy' = -\dfrac{x}{2},\quad M(4,\ 2).$
9. $2(y + y') = x + 3,\quad M(1,\ 1/2).$
10. $y' = x + 2y,\quad M(3,\ 0).$
11. $xy' = 2y,\quad M(1,\ 3).$
12. $3yy' = x,\quad M(-3,\ -2).$
13. $y' = y - x^2,\quad M(-3,\ 4).$
14. $y' = x^2 - y,\quad M(2,\ 3/2).$
15. $y' = y - x,\quad M(2,\ 1).$
16. $yy' = -x,\quad M(2,\ 3).$
17. $y' = y - x,\quad M(4,\ 2).$
18. $3yy' = x,\quad M(1,\ 1).$
19. $y' = x^2 - y,\quad M(0,\ 1).$
20. $y' = 3y^{2/3},\quad M(1,\ 3).$

Задача 2

Найти общий интеграл дифференциального уравнения. Ответ представить в виде $\psi\ (x, y) = C$.

1. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx.$
2. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0.$

3. $\sqrt{4+y^2}\,dx-ydy=x^2ydy.$

4. $\sqrt{3+y^2}\,dx-ydy=x^2ydy.$

5. $6xdx-6ydy=2x^2ydy-3xy^2dx.$

6. $x\sqrt{3+y^2}\,dx+y\sqrt{2+x^2}\,dy=0.$

7. $\left(e^{2x}+5\right)dy+ye^{2x}\,dx=0.$

8. $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0.$

9. $6xdx-6ydy=3x^2ydy-2xy^2dx.$

10. $x\sqrt{5+y^2}\,dx+y\sqrt{4+x^2}\,dy=0.$

11. $y\left(4+e^x\right)dy-e^x\,dx=0.$

12. $\sqrt{4-x^2}\,y'+xy^2+x=0.$

13. $2xdx-2ydy=x^2ydy-2xy^2dx.$

14. $x\sqrt{4+y^2}\,dx+y\sqrt{1+x^2}\,dy=0.$

15. $\left(e^x+8\right)dy-ye^x\,dx=0.$

16. $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0.$

17. $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx.$

18. $y\ln y+xy'=0.$

19. $\left(1+e^x\right)y'=ye^x.$

20. $\sqrt{1-x^2}\,y'+xy^2+x=0.$

Задача 3

Найти общий интеграл дифференциального уравнения:

1. $y'=\dfrac{y^2}{x^2}+4\dfrac{y}{x}+2.$

2. $xy'=\dfrac{3y^3+2yx^2}{2y^2+x^2}.$

3. $y'=\dfrac{x+y}{x-y}.$

4. $xy'=\sqrt{x^2+y^2}+y.$

5. $2y'=\dfrac{y^2}{x^2}+6\dfrac{y}{x}+3.$

6. $xy'=\dfrac{3y^3+4yx^2}{2y^2+2x^2}.$

7. $y'=\dfrac{x+2y}{2x-y}.$

8. $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}+y.$

9. $3y'=\dfrac{y^2}{x^2}+8\dfrac{y}{x}+4.$

10. $xy'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}.$

11. $y'=\dfrac{x^2+xy-y^2}{x^2-2xy}.$

12. $xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y.$

13. $y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 6\dfrac{y}{x} + 6.$

14. $xy' = \dfrac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$

15. $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$

16. $xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

17. $2y' = \dfrac{y^2}{x^2} + 8\dfrac{y}{x} + 8.$

18. $xy' = \dfrac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$

19. $y' = \dfrac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$

20. $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$

Задача 4

Найти решение задачи Коши:

1. $y' - y/x = x^2, \quad y(1) = 0.$

2. $y' - y\operatorname{ctg} x = 2x\sin x, \quad y(\pi/2) = 0.$

3. $y' + y\cos x = \dfrac{1}{2}\sin 2x, \quad y(0) = 0.$

4. $y' + y\operatorname{tg} x = \cos^2 x, \quad y(\pi/4) = 1/2.$

5. $y' - \dfrac{y}{x+2} = x^2 + 2x, \quad y(-1) = 3/2.$

6. $y' - \dfrac{1}{x+1}y = e^x(x+1), \quad y(0) = 1.$

7. $y' - \dfrac{y}{x} = x\sin x, \quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1.$

8. $y' + \dfrac{y}{x} = \sin x, \quad y(\pi) = \dfrac{1}{\pi}.$

9. $y' + \dfrac{y}{2x} = x^2, \quad y(1) = 1.$

10. $y' + \dfrac{2x}{1+x^2}y = \dfrac{2x^2}{1+x^2}, \quad y(0) = \dfrac{2}{3}.$

11. $y' - \dfrac{2x-5}{x^2}y = 5, \quad y(2) = 4.$

12. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x+1}{x}e^x, \quad y(1) = e.$

13. $y' - \dfrac{y}{x} = -2\dfrac{\ln x}{x}, \quad y(1) = 1.$

14. $y' - \dfrac{y}{x} = -\dfrac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4.$

15. $y' + \dfrac{2}{x}y = x^3, \quad y(1) = -5/6.$

16. $y' + \dfrac{y}{x} = 3x, \quad y(1) = 1.$

17. $y' - \dfrac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3.$

18. $y' + \dfrac{1-2x}{x^2}y = 1, \quad y(1) = 1.$

19. $y' + \frac{3y}{x} = \frac{2}{x^3}, \quad y(1) = 1.$

20. $y' + 2xy = -2x^3, \quad y(1) = e^{-1}.$

Задача 5

Найти решение задачи Коши:

1. $4y^3y'' = y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/(2\sqrt{2}).$

2. $y'' = 128y^3, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 8.$

3. $y''y^3 + 64 = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 2.$

4. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

5. $y'' = 32\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 4.$

6. $y'' = 98y^3, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 7.$

7. $y''y^3 + 49 = 0, \quad y(3) = -7, \quad y'(3) = -1.$

8. $4y^3y'' = 16y^4 - 1, \quad y(0) = \sqrt{2}/2, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

9. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$

10. $y'' = 72y^3, \quad y(2) = 1, \quad y'(2) = 6.$

11. $y''y^3 + 36 = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 2.$

12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 3.$

13. $4y^3y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = 1/\sqrt{2}.$

14. $y'' = 50y^3, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 5.$

15. $y''y^3 + 25 = 0, \quad y(2) = -5, \quad y'(2) = -1.$

16. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$

17. $y'' = 8\sin^3 y\cos y, \quad y(1) = \pi/2, \quad y'(1) = 2.$

18. $y'' = 32y^3, \quad y(4) = 1, \quad y'(4) = 4.$

19. $y''y^3+16=0,\quad y(1)=2,\quad y'(1)=2.$

20. $y''+32\sin y\cos^3 y=0,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=4.$

Задача 6

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y'''x\ln x=y''.$
2. $xy'''+y''=1.$
3. $2xy'''=y''.$
4. $xy'''+y''=x+1.$
5. $\mathrm{tg}\,x\cdot y''-y'+\dfrac{1}{\sin x}=0.$
6. $x^2y''+xy'=1.$
7. $y'''\,\mathrm{ctg}\,2x+2y''=0.$
8. $x^3y'''+x^2y''=1.$
9. $\mathrm{tg}\,x\cdot y'''=2y''.$
10. $y'''\,\mathrm{cth}\,2x=2y''.$
11. $x^4y''+x^3y'=1.$
12. $xy'''+2y''=0.$
13. $(1+x^2)y''+2xy'=x^3.$
14. $x^5y'''+x^4y''=1.$
15. $xy'''-y''+\dfrac{1}{x}=0.$
16. $xy'''+y''+x=0.$
17. $\mathrm{th}\,x\cdot y^{IV}=y'''.$
18. $xy'''+y''=\sqrt{x}.$
19. $y'''\,\mathrm{tg}\,x=y''+1.$
20. $y'''\,\mathrm{tg}\,5x=5y''.$

Задача 7

Найти в виде степенного ряда решение дифференциального уравнения, удовлетворяющее данным начальным условиям. Вычислить несколько первых коэффициентов ряда (до коэффициента при x^4 включительно).

1. $y'=y^2-x \qquad y(0)=1$
2. $y'=x+\dfrac{1}{y} \qquad y(0)=1$
3. $y'=y+x\cdot e^y \qquad y(0)=0$
4. $y'=2x+\cos y \qquad y(0)=0$
5. $y'=x^2+y^3 \qquad y(1)=1$
6. $y''=xy'-y^2 \qquad y(0)=1,\ y'(0)=2$
12. $y''=xy \qquad y(0)=1,\ y'(0)=1$
13. $y'=x-2y \qquad y(0)=0$
14. $y'=x^2y+y^3 \qquad y(0)=1$
15. $y'=x+2y^2 \qquad y(0)=0$
16. $y''=xy^2 \qquad y(0)=1,\ y'(0)=1$
17. $y'=2x-y \qquad y(0)=2$

7. $y''=y^{2}$¿xy $\quad y(0)=4\,,\; y'(0)=-2$

8. $y'=x^2+y \quad y(0)=-2$

9. $y'=2y+x-1 \quad y(1)=1$

10. $y'=y^2+x^3 \quad y(0)=1/2$

11. $y'=x^2-y^2 \quad y(0)=0$

18. $y'=y^2+x \quad y(0)=1$

19. $y''=(2x-1)\cdot y-1 \quad y(0)=0\,,\; y'(0)=1$

20. $y''=-x^2 y \quad y(0)=0\,,\; y'(0)=1$

Задача 8

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y''+2y'=4e^x(\sin x+\cos x)$. 2. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\sin 6x$.

3. $y''+2y'=-2e^x(\sin x+\cos x)$. 4. $y''+y=2\cos 7x+3\sin 7x$.

5. $y''+2y'+5y=-\sin 2x$. 6. $y''-4y'+8y=e^x(5\sin x-3\cos x)$.

7. $y''+2y'=e^x(\sin x+\cos x)$. 8. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 3x$.

9. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos 4x$. 10. $y''+y=2\cos 3x-3\sin 3x$.

11. $y''+2y'+5y=-2\sin x$. 12. $y''-4y'+8y=e^x(-3\sin x+4\cos x)$.

13. $y''+2y'=10e^x(\sin x+\cos x)$. 14. $y''-4y'+4y=e^{2x}\sin 5x$.

15. $y''+y=2\cos 5x+3\sin 5x$. 16. $y''+2y'+5y=-17\sin 2x$.

17. $y''+6y'+13y=e^{-3x}\cos x$. 18. $y''-4y'+8y=e^x(3\sin x+5\cos x)$.

19. $y''+2y'=6e^x(\sin x+\cos x)$. 20. $y''-4y'+4y=-e^{2x}\sin 4x$.

Задача 9

Найти решение задачи Коши:

1. $y''+\pi^2 y=\pi^2/\cos\pi x,\; y(0)=3,\; y'(0)=0.$

2. $y''+3y'=9e^{3x}/(1+e^{3x}),\quad y(0)=\ln 4,\quad y'(0)=3(1-\ln 2).$

3. $y''+4y=8\operatorname{ctg}2x,\quad y(\pi/4)=5,\quad y'(\pi/4)=4.$

4. $y''-6y'+8y=4/(1+e^{-2x}),\quad y(0)=1+2\ln 2,\quad y'(0)=6\ln 2.$

5. $y''-9y'+18y=9e^{3x}/(1+e^{-3x}),\quad y(0)=0,\quad y'(0)=0.$

6. $y'' + \pi^2 y = \pi^2/\sin\pi x = 1, \quad y(1/2), \quad y'(1/2) = \pi^2/2.$

7. $y'' + \dfrac{1}{\pi^2} y = \dfrac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$

8. $y'' - 3y' = \dfrac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 4\ln 4, \quad y'(0) = 3(3\ln 4 - 1).$

9. $y'' + y = 4\operatorname{ctg} x, \quad y(\pi/2) = 4, \quad y'(\pi/2) = 4.$

10. $y'' - 6y' + 8y = 4/(2 + e^{-2x}), \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 10\ln 3.$

11. $y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x}/(2 + e^{2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

12. $y'' + 9y = 9/\sin 3x, \quad y(\pi/6) = 4, \quad y'(\pi/6) = 3\pi/2.$

13. $y'' + 9y = 9/\cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

14. $y'' - y' = e^{-x}/(2 + e^{-x}), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = \ln 9 - 1.$

15. $y'' + 4y = 4ctg 2x, \quad y(\pi/4) = 3, \quad y'(\pi/4) = 2.$

16. $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{1}{3 + e^{-x}}, \quad y(0) = 1 + 8\ln 2, \quad y'(0) = 14\ln 2.$

17. $y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$

18. $y'' + 16y = 16/\sin 4x, \quad y(\pi/8) = 3, \quad y'(\pi/8) = 2\pi.$

19. $y'' + 16y = 16/\cos 4x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$

20. $y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$

Задача 10

Найти общее решение дифференциального уравнения:

1. $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2.$

2. $y''' - y'' = 6x^2 + 3x.$

3. $y''' - y' = x^2 + x.$

4. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x.$

5. $y^{IV} - y''' = 5(x + 2)^2.$

6. $y^{IV} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x).$

7. $y^{IV} + 2y''' + y'' = x^2 + x - 1.$

8. $y^{V} - y^{IV} = 2x + 3.$

9. $3y^{IV} + y''' = 6x - 1.$

10. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 4x^2.$

11. $y''' + y'' = 5x^2 - 1.$

12. $y^{IV} + 4y''' + 4y'' = x - x^2.$

13. $7y''' - y'' = 12x.$

14. $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x.$

15. $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1.$

16. $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2.$

17. $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3.$

18. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 12x^2 - 6x.$

19. $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2.$

20. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2.$

Список использованных источников

1 Вся высшая математика: учебник/ М.Л. Краснов [и др.]. - 2-е изд. - М.: Едиториал УРСС, 2005. – 240 с.

2 Камке, Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям: пер. с нем. / Э. Камке.- М.: Наука, 1971. – 576 с.

3 Кузнецов, Л.А. Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для втузов / Л.А. Кузнецов. – СПб.: Лань, 2005. – 174 с.

4 Понтрягин, Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения: учебник / Л.С. Понтрягин. – М.: Наука, 1982. – 331 с.

5 Филиппов, А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям / А.Ф. Филиппов. – М.: Интеграл-Пресс, 1998. – 208 с.