Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра прикладной математики

В.В. Рисковец

НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Методические указания

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 517.31(07)
ББК 22.161.1я7
Р 54

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук О.А. Пихтилькова

Рисковец, В. В.
Р 54 Неопределенный интеграл: методические указания / В. В. Рисковец; - Оренбургский гос. ун-т - Оренбург: ОГУ, 2010. – 44 с.

Методические указания составлены для студентов специальностей 020208 Биохимия, 020701 Почвоведение, а также могут быть рекомендованы студентам других специальностей, изучающих раздел математики «Неопределенный интеграл».

УДК 517.31(07)
ББК 22.161.1я7

Содержание

Введение

Понятие неопределённого интеграла является одним из основных в математическом анализе. Задачи из различных областей знаний (экономики, техники и естествознания) решаются с помощью неопределённого интеграла.

Методические указания предназначены для самостоятельной работы студентов в аудитории и при выполнении домашних заданий. Они состоят из девяти частей. В первых восьми частях приведены необходимые теоретические сведения, рассмотрены типовые задачи с подробными решениями. Даны задания для самостоятельного выполнения, ответы к которым приведены в конце методических указаний. В девятой части приведены варианты контрольной работы (15 вариантов по 7 задач). Методические указания будут полезны студентам очно-заочной и дистанционной формы обучения. Могут быть использованы преподавателями для организации самостоятельной работы студентов.

1 Первообразная и неопределенный интеграл

Пусть дана функция $f(x)$. Рассмотрим задачу отыскания функции $F(x)$, для которой заданная функция является производной, т.е.

$$F'(x)=f(x).$$

Определение 1. Функция $F(x)$ называется первообразной для функции $f(x)$ на интервале (a,b), если во всех точках этого интервала выполняется равенство $F'(x)=f(x)$.

Пример.

Проверить, является ли $F=x^3$ первообразной для функции $f(x)=x^2$.

Из определения первообразной следует, что функция $F(x)=x^3/3$ является первообразной, так как $\left(x^3/3\right)'=x^2$.

Легко видеть, что если для данной функции $f(x)$ существует первообразная, то эта первообразная не является единственной. Так, в предыдущем примере можно было взять в качестве первообразной следующие функции: $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+1, F(x)=\dfrac{x^3}{3}-7$ или вообще $F(x)=\dfrac{x^3}{3}+C$, так как

$$\left(\frac{x^3}{3}+C\right)'=x^2,$$

где C – произвольная постоянная.

С другой стороны, можно доказать, что функциями вида $\dfrac{x^3}{3}+C$ исчерпываются все первообразные для функции x^2. Это вытекает из следующей теоремы.

Теорема. Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ - две первообразные для функции $f(x)$ на интервале (a,b), то разность между ними равна постоянному числу.

Доказательство. В силу определения первообразной имеем:

$$\begin{cases} F_1'(x) = f(x), \\ F_2'(x) = f(x) \end{cases} \qquad (1)$$

при любом значении x на интервале (a,b).

Обозначим:

$$F_1(x) - F_2(x) = \varphi(x). \qquad (2)$$

Тогда на основании равенства (1) будет:

$$F_1'(x) - F_2'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

или

$$\varphi'(x) = \left[F_1(x) - F_2(x)\right]' \equiv 0$$

при любом значении x на интервале (a,b). Но из равенства $\varphi'(x) = 0$ следует, что $\varphi(x)$ есть постоянная.

Действительно, применим теорему Лагранжа к функции $\varphi(x)$, которая, очевидно, непрерывна и дифференцируема на интервале (a,b). Какова бы ни была точка x на интервале (a,b), мы имеем в силу теоремы Лагранжа

$$\varphi(x) - \varphi(a) = (x - a)\varphi'(\xi),$$

где $a < \xi < x$.

Так как $\varphi'(\xi) = 0$, то

$$\varphi(x) - \varphi(a) = 0$$

или

$$\varphi(x) = \varphi(a). \qquad (3)$$

Таким образом, функция $\varphi(x)$ в любой точке x интервала (a,b) сохраняет значение $\varphi(a)$, а это и значит, что функция $\varphi(x)$ является постоянной на интервале (a,b). Обозначая постоянную $\varphi(a)$ через C, из равенств (2) и (3) получаем:

$$F_1(x)-F_2(x)=C.$$

Из доказанной теоремы следует, что если для данной функции $f(x)$ найдена какая-нибудь одна первообразная $F(x)$, то любая другая первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x)+C$, где $C-const$.

Определение 2. Если функция $F(x)$ является первообразной для $f(x)$, то множество функций $\{F(x)+C|, \text{где } C-const\}$ называется ***неопределенным интегралом*** от функции $f(x)$ и обозначается символом $\int f(x)dx$.

Таким образом, по определению,

$$\int f(x)dx=F(x)+C,$$

если

$$F'(x)=f(x).$$

При этом функцию $f(x)$ называют ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, знак $\int$ – ***знаком интеграла***.

Таким образом, неопределенный интеграл представляет собой семейство функций $\{F(x)+C|, \text{где } C-const\}$.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой совокупность (семейство) кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз, т.е. вдоль оси Oy.

Возникает вопрос: для всякой ли функции $f(x)$ существуют первообразные (а значит, и неопределенный интеграл)? Оказывается, что не для всякой. Заметим, без доказательства, что ***если функция*** $f(x)$ ***непрерывна на интервале*** (a,b), ***то для этой функции существует первообразная*** (а значит, и ***неопределенный интеграл***).

Рассмотрению методов, с помощью которых находятся первообразные (и неопределенные интегралы) от некоторых классов элементарных функций, посвящены данные методические указания.

Нахождение первообразной для данной функции $f(x)$ называется ***интегрированием функции*** $f(x)$.

Заметим следующее: если производная для элементарной функции всегда является элементарной функцией, то первообразная от элементарной функции может оказаться и непредставимой с помощью конечного числа элементарных функций. К этому вопросу мы вернемся в конце данного раздела.

Из определения 2 следует:

1. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции, т.е. если $F'(x) = f(x)$, то и

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x) + C\right)' = f(x). \qquad (4)$$

Последнее равенство понимается в том смысле, что производная от любой первообразной равна подынтегральной функции.

2. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx. \qquad (5)$$

Это получается на основании формулы (4).

3. Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен сумме этой функции и произвольной постоянной

$$\int dF(x) = F(x) + C.$$

Справедливость последнего равенства легко проверить дифференцированием (дифференциалы от обеих частей равенства равны $dF(x)$).

2 Таблица интегралов

Прежде чем приступить к изучению методов интегрирования, приведем таблицу интегралов от простейших функций.

Непосредственно из определения 2 п.1 и таблицы производных вытекает таблица интегралов. (Справедливость написанных в ней равенств легко проверить дифференцированием, т.е. установить, что производная от правой части равняется подынтегральной функции).

1. $\int 0 \cdot dx = C$. (Здесь и в последующих формулах под C понимается произвольная постоянная).

2. $\int 1 \cdot dx = x + C.$

3. $\int \sin x dx = -\cos x + C.$

4. $\int \cos x dx = \sin x + C.$

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C.$

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C.$

7. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C.$

8. $\int ctgx\, dx = \ln|\sin x| + C.$

9. $\int e^x dx = e^x + C.$

10. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C.$

11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctgx + C.$

11´. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C; a \neq 0.$

12. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C.$

13. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$

13′. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C.$

14. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C.$

3 Некоторые свойства неопределенного интеграла

Теорема 1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы двух или нескольких функций равен алгебраической сумме их интегралов

$$\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx. \tag{6}$$

Для доказательства найдем производные от левой и правой частей этого равенства. На основании (1) п.1 находим:

$$\left(\int [f_1(x) + f_2(x)]dx\right)' = f_1(x) + f_2(x),$$

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x) + f_2(x).$$

Таким образом, производные от левой и правой части равенства (6) равны между собой, т.е. производная от любой первообразной, стоящей в левой части, равняется производной от любой функции, стоящей в правой части равенства. Следовательно, по теореме (п.1) любая функция, стоящая в левой части равенства (6), отличается от любой функции, стоящей в правой части равенства (6), на постоянное слагаемое. В этом смысле и нужно понимать равенство (6).

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, т.е. если $a = const$, то

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx. \tag{7}$$

Для доказательства равенства (7) найдем производные от левой и правой его части:

$$\left(\int af(xdx)\right)' = af(x), \quad \left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x).$$

Производные от правой и левой частей равны, следовательно, как и в равенстве (6), разность двух любых функций, стоящих слева и справа, есть постоянная. В этом смысле и следует понимать равенство (7).

При вычислении неопределенных интегралов бывает полезно иметь в виду следующие правила:

1. Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax) + C. \qquad (8)$$

Действительно, дифференцируя левую и правую части равенства (8), получим:

$$\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax),$$

$$\left(\frac{1}{a}F\left(ax\right)\right)' = \frac{1}{a}\left(F(ax)\right)'_x = \frac{1}{a}F'(ax)a = F'(ax) = f(ax).$$

Производные от правой и левой частей равны, ч.т.д.

2. Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(x+b)dx = F(x+b) + C. \qquad (9)$$

3. Если

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

то

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C. \qquad (10)$$

Равенства (9) и (10) доказываются дифференцированием правой и левой частей равенств.

Пример 1.

$$\int (2x^3 - 3\sin x + 5\sqrt{x})dx = \int 2x^3 dx - \int 3\sin x dx + \int 5\sqrt{x} dx = 2\int x^3 dx - 3\int \sin x dx + 5\int x^{1/2} dx =$$

$$= 2\frac{x^{3+1}}{3+1} - 3(-\cos x) + 5\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{1}{2}x^4 + 3\cos x + \frac{10}{3}x\sqrt{x} + C.$$

Пример 2.

$$\int \left(\frac{3}{\sqrt[3]{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} + x\sqrt[4]{x} \right) dx = 3\int x^{-1/3} dx + \frac{1}{2}\int x^{-1/2} dx + \int x^{5/4} dx =$$

$$= 3\frac{x^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \frac{1}{2}\frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{(-\frac{1}{2}+1)} + \frac{x^{\frac{5}{4}+1}}{\frac{5}{4}+1} + C = \frac{9}{2}\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{x} + \frac{4}{9}x^2\sqrt[4]{x} + C.$$

Пример 3.

$$\int \frac{dx}{x+3} = \ln|x+3| + C.$$

Пример 4.

$$\int \cos 7x dx = \frac{1}{7}\sin 7x + C.$$

Пример 5.

$$\int \sin(2x-6)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x-6) + C.$$

Задания для самостоятельной работы студентов

1) $\int x^5 dx$; 2) $\int (x+\sqrt{x})dx$; 3) $\int \left(\frac{3}{\sqrt{x}} - \frac{x\sqrt{x}}{4} \right) dx$; 4) $\int \left(\frac{x^2}{\sqrt{x}} \right) dx$;

5) $\int\left(\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x\sqrt{x}}+2\right)dx;$ 6) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{x}};$ 7) $\int\left(x^2+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\right)^2dx.$

4 Интегрирование методом замены переменного или способом подстановки

Пусть требуется найти интеграл

$$\int f(x)dx,$$

причем непосредственно подобрать первообразную для $f(x)$ мы не можем, но нам известно, что она существует.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(t)$ определены соответственно на промежутках Δ_x и Δ_t, причем $\varphi\left(\Delta_t\right)\subset\Delta_x$. Сделаем замену переменной в подынтегральном выражении, положив

$$x=\varphi(t), \tag{11}$$

где $\varphi(t)$ - непрерывная функция с непрерывной производной, имеющая обратную функцию. Тогда $dx=\varphi'(t)dt$; докажем, что в этом случае имеет место следующее равенство:

$$\int f(x)dx=\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt. \tag{12}$$

Здесь подразумевается, что после интегрирования в правой части равенства вместо t будет поставлено его выражение через x на основании равенства (11).

Для того, чтобы установить, что выражения, стоящие справа и слева, одинаковы в указанном выше смысле, нужно доказать, что их производные по x равны между собой. Находим производную от левой части

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

Правую часть равенства (12) будем дифференцировать по x как сложную функцию, где t – промежуточный аргумент. Зависимость t от x выражается равенством (11), при этом $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ и по правилу дифференцирования обратной функции

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}.$$

Таким образом, имеем:

$$\left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f\left[\varphi(t)\right] = f(x).$$

Следовательно, производные по x от правой и левой части равенства (12) равны.

Функцию $x = \varphi(t)$ следует выбирать так, чтобы можно было вычислить неопределенный интеграл, стоящий в правой части равенства (12).

Замечание. При интегрировании иногда целесообразнее подбирать замену переменного не в виде $x = \varphi(t)$, а $t = \psi(x)$. Пусть нужно вычислить интеграл, имеющий вид

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}.$$

Здесь удобно положить

$$\psi(x) = t,$$

тогда

$$\psi'(x)dx = dt,$$

$$\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|\psi(x)| + C.$$

Приведем несколько приемов на интегрирование с помощью замены переменной.

Вычислить интегралы:

Пример 1. Найти $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx.$

Сделаем подстановку $t = \sin x$; тогда $dt = \cos x dx$ и, следовательно, $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx = \int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2t^{3/2}}{3} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$

Пример 2. Найти $\int \frac{xdx}{1+x^2}.$

Полагаем $t = 1 + x^2$; тогда $dt = 2xdx$ и $\int \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2} \ln t + C = \frac{1}{2} \ln\left(1 + x^2\right) + C.$

Пример 3. Найти $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}.$

Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = adt$, $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{1 + (x/a)^2}.$

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{adt}{1+t^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{a} arctg\, t + C = \frac{1}{a} arctg \frac{x}{a} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$

Полагаем $t = \frac{x}{a}$; тогда $dx = adt$, $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{(1 - x/a)^2}}.$

$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{a\,dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t + C = \arcsin \frac{x}{a} + C$ (предполагается, что $a>0$).

В примерах 3 и 4 выведены формулы, приведенные в таблице интегралов под номерами 11´ и 13´ (см. выше п.2).

Пример 5. Найти $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x}.$

Полагаем $t = \ln x$; тогда $dt = \frac{dx}{x}$, $\int (\ln x)^3 \frac{dx}{x} = \int t^3 dt = \frac{t^4}{4} + C = \frac{1}{4} (\ln x)^4 + C.$

Пример 6. Найти $\int \frac{xdx}{1+x^4}$.

Полагаем $t = x^2$; тогда $dt = 2xdx$,

$$\int \frac{xdx}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{1+t^2} = \frac{1}{2}arctgt + C = \frac{1}{2}arctgx^2 + C.$$

Метод замены переменной является одним из основных методов вычисления неопределенных интегралов. Даже в тех случаях, когда мы интегрируем каким-либо другим методом, нам часто приходится в промежуточных вычислениях прибегать к замене переменных. Успех интегрирования зависит в значительной степени от того, сумеем ли мы подобрать такую удачную замену переменных, которая упростила бы данный интеграл. По существу говоря, изучение методов интегрирования сводится к выяснению того, какую надо сделать замену переменного при том или ином виде подынтегрального выражения.

Задания для самостоятельной работы студентов

8) $\int e^{5x}\,dx$; 9) $\int \cos 5x\,dx$; 10) $\int \sin ax\,dx$; 11) $\int \frac{\ln x}{x}\,dx$;

12) $\int \frac{dx}{\sin^2 3x}$; 13) $\int \frac{dx}{\cos^2 7x}$; 14) $\int \frac{dx}{3x-7}$; 15) $\int \frac{dx}{1-x}$;

16) $\int \frac{dx}{5-2x}$; 17) $\int tg 2x\,dx$; 18) $\int ctg(5x-7)\,dx$; 19) $\int \frac{dy}{ctg 3y}$;

20) $\int ctg\frac{x}{3}\,dx$; 21) $\int tg\varphi \cdot \sec^2\varphi d\varphi$; 22) $\int (ctge^x)e^x\,dx$; 23) $\int \left(tg4x - ctg\frac{x}{4}\right)dx$;

24) $\int \sin^2 x\cos x\,dx$; 25) $\int \sin x\cos^3 x\,dx$; 26) $\int \sqrt{x^2+1}x\,dx$;

27) $\int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+3}}$; 28) $\int \frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+1}}$; 29) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x}$; 30) $\int \frac{\sin xdx}{\cos^3 x}$;

31) $\int \frac{tgx dx}{\cos^2 x}$;32) $\int \frac{ctgx dx}{\sin^2 x}$; 33) $\int \frac{dx}{\cos^2 x\sqrt{tgx-1}}$; 34) $\int \frac{\ln(x+1)dx}{(x+1)}$;

35) $\int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}}$; 36) $\int \frac{\sin 2x dx}{(1+\cos 2x)^2}$;

37) $\int \frac{\sin 2x dx}{\sqrt{1+\sin^2 x}}$; 38) $\int \frac{\sqrt{tgx+1}dx}{\cos^2 x}$; 39) $\int \frac{\cos 2x dx}{(2+3\sin 2x)^3}$;

40) $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 3x}}$; 41) $\int \frac{\ln^2 x dx}{x}$; 42) $\int \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 43) $\int \frac{arctgx dx}{1+x^2}$;

44) $\int \frac{\arccos^2 x dx}{\sqrt{1-x^2}}$; 45) $\int \frac{arcctgx dx}{1+x^2}$; 46) $\int \frac{x dx}{1+x^2}$; 47) $\int \frac{x+1dx}{x^2+2x+3}$;

48) $\int \frac{\cos x dx}{3+2\sin x}$; 49) $\int \frac{dx}{x\ln x}$; 50) $\int 2x(x^2+1)^4\, dx$; 51) $\int tg^4 x dx$;

52) $\int \frac{dx}{(1+x^2)arcctgx}$; 53) $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3tgx+1)}$; 54) $\int \frac{tg^3 x dx}{\cos^2 x}$; 55) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}\arcsin x}$;

56) $\int \frac{\cos 2x dx}{(2+3\sin 2x)}$; 57) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x} dx$; 58) $\int \cos(a+bx)\, dx$; 59) $\int e^{2x}\, dx$;

60) $\int e^{x/3}\, dx$; 61) $\int e^{\sin x}\cos x\, dx$; 62) $\int a^{x^2} x\, dx$; 63) $\int e^{x/a}\, dx$;

64) $\int (e^{2x})^2\, dx$; 65) $\int e^x 3^x\, dx$; 66) $\int e^{-3x}\, dx$; 67) $\int (e^{5x}+a^{5x})\, dx$;

68) $\int e^{x^2+4x+3}(x+2)dx$; 69) $\int \frac{(a^x-b^x)^2}{a^x b^x}dx$; 70) $\int \frac{e^x dx}{3+4e^x}$; 71) $\int \frac{e^{2x}dx}{2+e^{2x}}$;

72) $\int \frac{dx}{1+2x^2}$; 73) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-3x^2}}$; 74) $\int \frac{dx}{\sqrt{16-9x^2}}$; 75) $\int \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$;

76) $\int \frac{dx}{4+x^2}$; 77) $\int \frac{dx}{9x^2+4}$; 78) $\int \frac{dx}{4-9x^2}$; 79) $\int \frac{dx}{\sqrt{9+x^2}}$;

80) $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2x^2-a^2}}$; 81) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2x^2+b^2}}$; 82) $\int \frac{dx}{a^2x^2-c^2}$; 83) $\int \frac{x^2 dx}{5-x^6}$;

84) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}}$; 85) $\int \frac{x dx}{x^4+a^4}$; 86) $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{1-e^{2x}}}$; 87) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-5x^2}}$;

$$88)\int\frac{\cos xdx}{a^2+\sin^2 x};\quad 89)\int\frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}};\quad 90)\int\frac{\arccos x-xdx}{\sqrt{1-x^2}};$$

$$91)\int\frac{x-arcctgxdx}{1+x^2};\ 92)\int\frac{\sqrt{1+\ln x}dx}{x};\quad 93)\quad\int\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}dx}{\sqrt{x}};\quad 94)\int\frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}};$$

$$95)\int\frac{e^x dx}{1+e^{2x}};\quad 96)\int\frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin^2 x}};\quad 97)\int\sqrt{1+3\cos^2 x}\sin 2xdx.$$

5 Интегрирование по частям

Пусть u и υ - две дифференцируемые функции от x. Тогда, как известно, дифференциал произведения $(u\cdot\upsilon)$ вычисляется по следующей формуле:

$$d(u\upsilon)=ud\upsilon+\upsilon du.$$

Отсюда, интегрируя, получаем:

$$u\upsilon=\int ud\upsilon+\int\upsilon du$$

или

$$\int ud\upsilon=u\upsilon-\int\upsilon du. \tag{13}$$

Последняя формула называется ***формулой интегрирования по частям.*** Эта формула чаще всего применяется к интегрированию выражений, которые можно так представить в виде произведения двух сомножителей u и $d\upsilon$, чтобы отыскание функции υ по ее дифференциалу $d\upsilon$ и вычисление интеграла $\int\upsilon du$ составляли в совокупности задачи более простую, чем непосредственное вычисление интеграла $\int ud\upsilon$. Умение разбивать разумным образом данное подынтегральное выражение на множители u и $d\upsilon$ вырабатывается в процессе решения задач, и мы покажем на ряде примеров, как это делается.

Пример 1.

Вычислить интеграл $\int x\sin xdx.$

Положим $u=x, d\upsilon=\sin xdx;$ тогда $du=dx, \upsilon=-\cos x.$

Следовательно,

$\int x\sin xdx=-x\cos x+\int\cos xdx=-x\cos x+\sin x+C.$

Замечание. При определении функции υ по дифференциалу $d\upsilon$ мы можем брать любую произвольную постоянную, так как в конечный результат она не входит (что легко проверить, подставив в равенство (13) вместо υ выражение $\upsilon+C$). Поэтому удобно считать эту постоянную равной нулю.

Правило интегрирования по частям применяется во многих случаях. Так, например, интегралы вида

$$\int x^k\sin axdx, \qquad \int x^k\cos axdx,$$
$$\int x^k e^{ax}dx, \qquad \int x^k\ln xdx,$$

и некоторые интегралы, содержащие обратные тригонометрические функции, вычисляются с помощью интегрирования по частям.

Пример 2.

Требуется вычислить $\int arctgxdx$. Положим $u=arctgx, d\upsilon=dx$; тогда $du=\dfrac{dx}{1+x^2}, \upsilon=x$. Следовательно,

$$\int arctgxdx=xarctgx-\int\frac{xdx}{1+x^2}=xarctgx-\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|+C.$$

Пример 3.

Требуется вычислить $\int x^2e^xdx$. Положим $u=x^2, d\upsilon=e^xdx$; тогда $du=2xdx, \upsilon=e^x$, $\int x^2e^xdx=x^2e^x-2\int xe^xdx.$

Последний интеграл снова интегрируем по частям, полагая

$u_1=x, \quad du_1=dx,$

$d\upsilon_1=e^xdx, \quad \upsilon_1=e^x.$

Тогда $\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$

Окончательно будем иметь:

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2\left(xe^x - e^x\right) + C = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C = e^x(x^2 - 2x + 2) + C.$$

Пример 4.

Требуется вычислить $\int\left(x^2 + 7x - 5\right)\cos 2x dx$. Положим $u = x^2 + 7x - 5,\, d\upsilon = \cos 2x dx$; тогда

$$du = (2x+7)dx,\ \upsilon = \frac{\sin 2x}{2},$$

$$\int\left(x^2 + 7x - 5\right)\cos 2x dx = \left(x^2 + 7x - 5\right)\frac{\sin 2x}{2} - \int\left(2x+7\right)\frac{\sin 2x}{2}dx.$$

Применим интегрирование по частям к последнему интегралу, принимая $u_1 = \frac{2x+7}{2},\, d\upsilon_1 = \sin 2x dx$; тогда

$$du_1 = dx,\ \upsilon_1 = -\frac{\cos 2x}{2};$$

$$\int\frac{2x+7}{2}\sin 2x dx = \frac{2x+7}{2}\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right) - \int\left(-\frac{\cos 2x}{2}\right)dx = -\frac{(2x+7)\cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Поэтому окончательно

$$\int\left(x^2 + 7x - 5\right)\cos 2x dx = \left(x^2 + 7x - 5\right)\frac{\sin 2x}{2} + \left(2x+7\right)\frac{\cos 2x}{4} - \frac{\sin 2x}{4} + C =$$

$$= \left(2x^2 + 14x - 11\right)\frac{\sin 2x}{4} + \left(2x+7\right)\frac{\cos 2x}{4} + C.$$

Пример 5.

Вычислить интеграл $I = \int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$

Произведем тождественные преобразования. Умножим и разделим подынтегральную функцию на $\sqrt{a^2 - x^2}$:

$$\int\sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \int\frac{a^2 - x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}}dx = a^2\int\frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} - \int\frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} =$$

$$= a^2 \arcsin\frac{x}{a} - \int x\frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$

Последний интеграл проинтегрируем по частям, полагая

$$u = x, \quad du = dx,$$

$$d\upsilon = \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad \upsilon = -\sqrt{a^2 - x^2};$$

тогда

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int x \frac{xdx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -x\sqrt{a^2 - x^2} + \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Подставляя последний результат в полученное ранее выражение данного интеграла, будем иметь:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = a^2 \arcsin\frac{x}{a} + x\sqrt{a^2 - x^2} - \int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx.$$

Перенося интеграл справа налево и выполнив элементарные преобразования, окончательно получим:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Пример 6.

Вычислить интегралы $I_1 = \int e^{ax} \cos bxdx$ и $I_2 = \int e^{ax} \sin bxdx.$

Применяя метод интегрирования по частям к первому интегралу, получим:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}dx,$$

$$d\upsilon = \cos bxdx, \quad \upsilon = \frac{1}{b}\sin bx,$$

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{1}{b} e^{ax} \sin bx - \frac{a}{b}\int e^{ax} \sin bxdx.$$

К последнему интегралу снова применим метод интегрирования по частям:

$$u = e^{ax}, \quad du = ae^{ax}dx,$$

$$d\upsilon = \sin bxdx, \quad \upsilon = -\frac{1}{b}\cos bx,$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = -\frac{1}{b} e^{ax} \cos bx + \frac{a}{b}\int e^{ax} \cos bxdx.$$

Подставляя полученное выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\int e^{ax}\cos bxdx = \frac{1}{b}e^{ax}\sin bx + \frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx - \frac{a^2}{b^2}\int e^{ax}\cos bxdx.$$

Найдем из последнего равенства I_1:

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\int e^{ax}\cos bxdx = e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx + \frac{a}{b^2}\cos bx\right) + C\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right),$$

откуда

$$I_1 = \int e^{ax}\cos bxdx = \frac{e^{ax}\left(b\sin bx + a\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$$

Аналогично находим:

$$I_2 = \int e^{ax}\sin bxdx = \frac{e^{ax}\left(a\sin bx - b\cos bx\right)}{a^2+b^2} + C.$$

Задания для самостоятельной работы студентов

98) $\int x\cos xdx$; 99) $\int x\sin xdx$; 100) $\int xe^{-x}dx$; 101) $\int xe^{5x}dx$;

102) $\int \ln xdx$; 103) $\int x\ln xdx$; 104) $\int \arcsin xdx$; 105) $\int xarctgxdx$;

106) $\int x\ln(3x+2)dx$; 107) $\int (x^2+3x+2)\ln xdx$; 108) $\int (x+1)\cos 3xdx$;

109) $\int arctg\sqrt{7x-1}dx$; 110) $\int \frac{\arcsin xdx}{\sqrt{1+x}}$; 111) $\int \frac{xdx}{\sin^2 x}$; 112) $\int \frac{xdx}{\cos^2 x}$;

113) $\int \ln^2 xdx$; 114) $\int \ln(x^2+2)dx$; 115) $\int x^2\cos xdx$; 116) $\int x^2\sin xdx$.

6 Интегрирование рациональных функций

Важный класс функций, интегралы от которых всегда выражаются через элементарные функции, образуют рациональные функции, т.е. функции, которые можно представить в виде дроби

$$\frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x), Q(x)$ - многочлены.

Если степень многочлена в числителе равна или больше степени многочлена в знаменателе, то, выполнив деление, получим

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{14}$$

где $W(x)$ – некоторый многочлен, а $R(x)$ – многочлен степени ниже, чем $Q(x)$.

Примеры:

1) $\dfrac{x^5 + x^3 - x^2 + 1}{x^3 - 2x + 1} = x^2 + 3 - \dfrac{2x^2 - 6x + 2}{x^3 - 2x + 1}$;

2) $\dfrac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1} = x + \dfrac{1}{x^2 + 1}$.

В высшей алгебре доказывается, что каждый многочлен $Q(x)$ может быть представлен в виде произведения

$$Q(x) = A(x-\alpha)(x-\beta)...(x-\gamma),$$

где A – коэффициент при старшей степени многочлена $Q(x)$, а $\alpha, \beta, ...\gamma$ - корни уравнения $Q(x)=0$. Множители $(x-\alpha)(x-\beta)...(x-\gamma)$ называются *элементарными множителями*. Если среди них существуют совпадающие, то, собирая их, получим представление

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s ...(x-\gamma)^t, \tag{15}$$

где $r, s, ..., t$ - целые числа, которые называются кратностями, соответствующими корнями $\alpha, \beta, ...\gamma$, причем $r + s + ... + t = n, n$ означает степень многочлена $Q(x)$.

Среди корней представления (15) могут быть и комплексные. В алгебре доказывается, что если $\alpha = a + bi$ - комплексный корень многочлена с вещественными коэффициентами кратности r, то он имеет также сопряженный с ним r – кратный корень $\bar{\alpha} = a - bi$. Другими словами, если в представление (15) входит множитель $(x-\alpha)^r$, то оно содержит также и множитель $(x-\bar{\alpha})^r$.

Перемножим их:

$$(x-\alpha)^r (x-\bar{\alpha})^r = \left\{ \left[x-(a+bi) \right] \left[x-(a-bi) \right] \right\}^r = \left[x^2 - x(a+bi) - x(a-bi) + a^2 + b^2 \right]^r =$$

$$= \left[x^2 - 2ax + a^2 + b^2 \right]^r = (x^2 + 2px + q)^r,$$

где $p = -a, q = a^2 + b^2, p^2 - q < 0.$

Поступая аналогично с остальными комплексными корнями, представление (15) запишем в виде

$$Q(x) = A(x-\alpha)^r (x-\beta)^s \ldots (x^2 + 2px + q)^t (x^2 + 2ux + \upsilon)^\eta \ldots \qquad (16)$$

В высшей алгебре доказывается

Теорема. Если рациональная функция $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ в соотношении (14) имеет степень многочлена в числителе меньше степени многочлена в знаменателе, а многочлен $Q(x)$ представлен в виде (16), то эту функцию можно единственным образом представить в виде

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{(x-\alpha)} + \frac{A_2}{(x-\alpha)^2} + \ldots + \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \ldots + \frac{M_1 x + N_1}{x^2 + 2px + q} + \\ + \frac{M_2 x + N_2}{(x^2 + 2px + q)^2} + \ldots + \frac{M_t x + N_t}{(x^2 + 2px + q)^t} + \ldots, \end{aligned} \qquad (17)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, M_2, N_2, \ldots, M_t, N_t, \ldots$ – некоторые числа.

Разложение (17) называется *разложением рациональной функции на элементарные дроби*.

Равенство (17) имеет место для всех x, не являющихся вещественными корнями многочлена $Q(x)$.

Чтобы определить числа $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots,$ умножим обе части разложения (17) на $Q(x)$. Поскольку равенство между многочленом $R(x)$ и многочленом, который получится в правой части, будет справедливо для всех x, то коэффициенты, стоящие при равных степенях x, равны между собой. Получим, таким образом, ряд уравнений первой степени, из которых найдем неизвестные числа $A_1, A_2, \ldots, A_r, \ldots, M_1, N_1, \ldots, M_t, N_t, \ldots$

Пример 1.

Разложить на сумму простейших правильную дробь

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)}.$$

Убедившись в том, что квадратный трёхчлен x^2+x+1 имеет комплексные корни, будем искать разложение дроби в виде

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{B_1}{x-1} + \frac{B_2}{\left(x-1\right)^2} + \frac{Mx+N}{x^2+x+1}.$$

Приводя последнее равенство к общему знаменателю, получим

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{B_1(x^3-1)+B_2(x^2+x+1)+(Mx+N)(x^2-2x+1)}{\left(x-1\right)^2\left(x^2+x+1\right)}.$$

Сравнивая в числителях коэффициенты при x^0, x^1, x^2 и $x^3,$ придём к системе уравнений

$$\begin{cases} B_1+M=2, \\ B_2+N-2M=4, \\ B_2+M-2N=1, \\ -B_1+B_2+N=2. \end{cases}$$

Решая эту систему, найдём $B_1=2, \quad B_2=3, \quad M=0, \quad N=1.$

Окончательно получим

$$\frac{2x^3+4x^2+x+2}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{2}{x-1} + \frac{3}{\left(x-1\right)^2} + \frac{1}{x^2+x+1}.$$

Рассмотренный метод разложения правильной рациональной дроби на простейшие называется *методом неопределённых коэффициентов*.

Пример 2.

Разложить рациональную функцию $\dfrac{2x-1}{x^2-5x+6}$ на элементарные дроби.

Решение. Так как $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)$, то по формуле (17) имеем

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-3}+\frac{B}{x-2}.$$

Отсюда, умножая обе части равенства на x^2-5x+6, получаем

$$2x-1=A(x-2)+B(x-3);$$

поэтому

$$2x-1=(A+B)x-2A-3B.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получаем уравнения первой степени: $\begin{cases} A+B=2, \\ 2A+3B=1, \end{cases}$

откуда A=5, B=–3.

Таким образом,

$$\frac{2x-1}{x^2-5x+6}=\frac{5}{x-3}-\frac{2}{x-2}.$$

Из изложенного следует, что задача интегрирования рациональной функции (14) сводится к интегрированию рациональной функции $\omega(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+...+a_m$,

$$\int\omega(x)dx=a_0\frac{x^{m+1}}{m+1}+a_1\frac{x^m}{m}+...+a_mx+C,$$

и интегрированию рациональной функции $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$, сводится к нахождению интегралов четырех типов:

1) $\displaystyle\int\frac{A}{x-\alpha}dx=A\ln|x-\alpha|+C;$

2) $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx = -\frac{A}{(r-1)(x-\alpha)^{r-1}} + C(r>1);$

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx;$

4) $\int \frac{Ax+B}{(x^2+2px+q)^r}dx(r>1).$

При этом многочлен $x^2+2px+q$ не имеет вещественных корней, так что $p^2-q<0$.

Покажем вычисление интегралов типа 1) и 2).

1) $\int \frac{Adx}{x-\alpha}.$

Полагаем $t = x-\alpha$; тогда $dt = dx$,

$$\int \frac{Adx}{x-\alpha} = \int \frac{Adt}{t} = A\ln|t| + C = A\ln|x-\alpha| + C.$$

2) $\int \frac{A}{(x-\alpha)^r}dx.$

Полагаем $t = x-\alpha$; тогда $dt = dx$,

$$\int \frac{Adx}{(x-\alpha)^r} = \int \frac{Adt}{t^r} \int At^{-r}dt = \frac{At^{(-r+1)}}{(-r+1)} + C = \frac{-A}{(r-1)t^{(r-1)}} + C = \frac{-A}{(r-1)(x-\alpha)^{(r-1)}} + C.$$

Займемся вычислением интеграла типа 3), который принадлежит к числу интегралов, часто встречающихся на практике.

Выделим из трехчлена в знаменателе полный квадрат:

$$x^2+2px+q = (x+p)^2 + q - p^2.$$

Это разложение подсказывает нам подстановку

$$x+p=t, \quad x=t-p, \quad dx=dt.$$

Положим далее $q - p^2 = h > 0$ и перейдем к переменной t.

В результате интеграл преобразуется к виду

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+2px+q}dx = \int \frac{At+B-Ap}{t^2+h}dt = \frac{1}{2}A\int \frac{2tdt}{t^2+h} + \left(B - A\cdot p\right)\int \frac{dt}{t^2+h}.$$

Первый интеграл в правой части берется непосредственно:

$$\int \frac{2tdt}{t^2+h} = \ln\left|t^2+h\right| + C = \ln\left|x^2+2px+q\right| + C.$$

Второй интеграл вычисляется по формуле 11′ таблицы основных интегралов.

Пример 3.

Вычислить интеграл $\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx.$

Решение.

Выделим в знаменателе полный квадрат $x^2+4x+9=(x+2)^2+5.$ Сделаем подстановку: $x+2=t, x=t-2, dx=dt.$ которая дает

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9}dx = \int \frac{6x+5}{(x+2)^2+5}dx = \int \frac{6(t-2)+5}{t^2+5}dt = \int \frac{6t-7}{t^2+5}dt =$$

$$= 3\int \frac{2tdt}{t^2+5} - 7\int \frac{dt}{t^2+5} = 3\ln\left(t^2+5\right) - \frac{7}{\sqrt{5}}arctg\frac{t}{\sqrt{5}} + C.$$

Возвращаясь к переменной x, получим

$$\int \frac{6x+5}{x^2+4x+9} - dx = 3\ln(x^2+4x+9) - \frac{7}{\sqrt{5}}arctg\frac{x+2}{\sqrt{5}} + C.$$

Задания для самостоятельной работы студентов

117) $\int \frac{(2x-1)dx}{(x-1)(x-2)}$; 118) $\int \frac{xdx}{(x+1)(x+3)(x+5)}$; 119) $\int \frac{x^5+x^4-8}{x^3-4x}dx$;

120) $\int \frac{x^4}{(x^2-1)(x+2)}dx$; 121) $\int \frac{dx}{(x-1)^2(x-2)}$; 122) $\int \frac{x-8}{x^3-4x^2+4x}dx$;

123) $\int \frac{(3x+2)dx}{x(x+1)^3}$; 124) $\int \frac{x^2dx}{(x+2)^2(x+4)^2}$; 125) $\int \frac{dx}{x(x^2+1)}$;

126) $\int \frac{(2x^2-3x-3)dx}{(x-1)(x^2-2x+5)}$; 127) $\int \frac{(x^3-6)dx}{x^4+6x^2+8}$; 128) $\int \frac{dx}{x^3+1}$;

129) $\int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4}dx$.

7 Интегрирование некоторых классов тригонометрических функций

До сих пор мы систематически изучали интегралы только от алгебраических функций (рациональных и иррациональных). В настоящем пункте мы рассмотрим интегралы от некоторых классов неалгебраических, в первую очередь тригонометрических, функций. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left(\sin x, \cos\right)dx. \tag{18}$$

Покажем, что этот интеграл с помощью подстановки

$$tg\frac{x}{2}=t \tag{19}$$

всегда сводится к интегралу от рациональной функции. Выразим $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$, а следовательно, и через t:

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{1} = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{1} = \frac{\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Далее,

$$x = 2arctgt, \quad dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Таким образом, sin *x,* cos *x* и *dx* выразились рационально через *t.* Так как рациональная функция от рациональных функций есть функция рациональная, то, подставляя полученные выражения в интеграл (18), получим интеграл от рациональной функции:

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Пример 1.

Рассмотрим интеграл $\int \frac{dx}{\sin x}$.

На основании написанных выше формул имеем:

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|tg\frac{x}{2}\right| + C.$$

Рассмотренная подстановка дает возможность проинтегрировать всякую функцию вида $R(\cos x, \sin x)$. Поэтому ее иногда называют «универсальной тригонометрической подстановкой». Однако на практике она часто приводит к слишком сложным рациональным функциям. Поэтому наряду с «Универсальной» подстановкой бывает полезно знать также другие подстановки, которые в некоторых случаях быстрее приводят к цели.

1) Если интеграл имеет вид $\int R(\sin x)\cos x dx$, то подстановка $\sin x = t, \cos x dx = dt$ приводит этот интеграл к виду $\int R(t)dt.$

2) Если интеграл имеет вид $\int R(\cos x)\sin x dx$, то он приводится к интегралу от рациональной функции заменой $\cos x = t, \sin x dx = -dt.$

3) Если подынтегральная функция зависит только от *tgx*, то замена $tgx = t,\ x = arctgt,\ dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$ приводит этот интеграл к интегралу от рациональной функции:

$$\int R(tgx)dx = \int R(t)\frac{dt}{1+t^2}.$$

4) Если подынтегральная функция имеет вид $R(\sin x, \cos x)$, но sin*x* и cos*x* входят только в *четных* степенных, то применяется та же подстановка:

$$tgx = t, \tag{20}$$

так как $\sin^2 x$ и $\cos^2 x$ выражаются рационально через *tgx*:

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2 x} = \frac{1}{1+t^2},$$

$$\sin^2 x = \frac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1+t^2}.$$

После подстановки мы получим интеграл от рациональной функции.

Пример 2.

Вычислить интеграл $\int \dfrac{\sin^3 x}{2+\cos x} dx.$

Решение.

Этот интеграл легко привести к виду $\int R(\cos x)\sin x dx$. Действительно,

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{\sin^2 x \sin x dx}{2+\cos x} = \int \frac{1-\cos^2 x}{2+\cos x}\sin x dx.$$

Сделаем замену $\cos x = z$, Тогда $\sin x dx = -dz$:

$$\int \frac{\sin^3 x}{2+\cos x}dx = \int \frac{1-z^2}{2+z}(-dz) = \int \frac{z^2-1}{z+2}dz = \int \left(z-2+\frac{3}{z+2} \right) dz =$$

$$= \frac{z^2}{2} - 2z + 3\ln\left(z+2\right) + C = \frac{\cos^2 x}{2} - 2\cos x + 3\ln(\cos x + 2) + C.$$

Пример 3.

Вычислить $\int \frac{dx}{2-\sin^2 x}$. Сделаем замену $tgx = t$:

$$\int \frac{dx}{2-\sin^2 x} = \int \frac{dt}{\left(2-\frac{t^2}{1+t^2}\right)\left(1+t^2\right)} = \int \frac{dt}{2+t^2} = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg \frac{1}{\sqrt{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{2}} arctg\left(\frac{tgx}{\sqrt{2}}\right) + C.$$

5) Рассмотрим теперь еще один интеграл вида $\int R\left(\sin x, \cos x\right) dx$ - именно интеграл, под знаком которого стоит произведение $\sin^m x \cos^n x dx$ (где m и n - целые числа). Здесь рассмотрим три случая.

а) $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m и n таковы, что по крайней мере одно из них *нечетное* число. Допустим для определенности, что n нечетное. Положим $n = 2p+1$ и преобразуем интеграл:

$$\int \sin^m x \cos^{2p+1} x dx = \int \sin^m x \cos^{2p} x \cos dx = \int \sin^m x \left(1-\sin^2 x\right)^p \cos x dx.$$

Сделаем замену переменного:

$\sin x = t, \quad \cos x dx = dt.$

Подставляя новую переменную в данный интеграл, получим:

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \int t^m \left(1-t^2\right)^p dt,$$

а это и есть интеграл от рациональной функции от t.

Пример 4.

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\cos^2 x \cos x dx}{\sin^4 x} = \int \frac{\left(1-\sin^2 x\right)\cos x dx}{\sin^4 x}.$$

Обозначая $\sin x = t, \cos x dx = dt,$ получим:

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx = \int \frac{\left(1-t^2\right)dt}{t^4} = \int \frac{dt}{t^4} - \int \frac{dt}{t^2} = -\frac{1}{3t^3} + \frac{1}{t} + C = -\frac{1}{3\sin^3 x} + \frac{1}{\sin x} + C.$$

б) $\int \sin^m x \cos^n x dx,$ где m и n - числа неотрицательные и четные.

Положим $m = 2p$, $n = 2q$. Из тригонометрии известно:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x, \quad \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x. \qquad (21)$$

Подставляя в интеграл, получим:

$$\int \sin^{2p} x \cos^{2q} x dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x\right)^p \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x\right)^q dx.$$

Возводя в степень и раскрывая скобки, получим члены, содержащие cos2x в нечетных и четных рядах. Члены с нечетными степенями интегрируются, как указано в случае а). Четные показатели степеней снова понижаем по формуле (21). Продолжая так, дойдем до членов вида $\int \cos kx dx$, которые легко интегрируются.

Пример 5.

$$\int \sin^4 x dx = \frac{1}{2^2}\int \left(1-\cos 2x\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int \left(1-\cos 2x + \cos^2 2x\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\left[x - \sin 2x + \frac{1}{2}\int \left(1+\cos 4x\right)dx\right] = \frac{1}{4}\left[\frac{3}{2}x - \sin 2x + \frac{\sin 4x}{8}\right] + C.$$

в) Если оба показателя четные, причем хоты бы один из них отрицателен, то предыдущий прием не приводит к цели. Здесь следует сделать замену $tgx = t$ (или $ctgx = t$).

Пример 6.

$$\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^6 x} = \int \frac{\sin^2 x\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)^2}{\cos^6 x} dx = \int tg^2 x\left(1+tg^2 x\right)^2 dx.$$

Положим $tgx = t$; тогда $x = arctgt, dx = \dfrac{dt}{1+t^2}$, и мы получаем:

$$\int \frac{\sin^2 x}{\cos^6 x} dx = \int t^2 \left(1+t^2\right)^2 \frac{dt}{1+t^2} = \int t^2 \left(1+t^2\right) dt = \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \frac{tg^3 x}{3} + \frac{tg^5 x}{5} + C.$$

6) Рассмотрим в заключении интегралы вида

$$\int \cos mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \cos nx dx, \quad \int \sin mx \sin nx dx.$$

Они берутся при помощи следующих формул $(m \neq n)$:

$$\cos mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\cos(m+n)x \cos(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \cos nx = \frac{1}{2}\left[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x\right],$$

$$\sin mx \sin nx = \frac{1}{2}\left[-\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right].$$

Подставляя и интегрируя, получим:

$$\int \cos mx \cos nx dx = \frac{1}{2}\int \left[\cos(m+n)x + \cos(m-n)x\right] dx = \frac{\sin(m+n)x}{2(m+n)} + \frac{\sin(m-n)x}{2(m-n)} + C.$$А

налогично вычисляются и два других интеграла.

Пример 7.

$$\int \sin 5x \sin 3x dx = \frac{1}{2}\int \left[-\cos 8x + \cos 2x\right] dx = -\frac{\sin 8x}{16} + \frac{\sin 2x}{4} + C.$$

Задания для самостоятельной работы студентов

130) $\int \sin^3 x dx$; 131) $\int \sin^5 x dx$; 132) $\int \cos^4 x \sin^3 x dx$;

132) $\int \dfrac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx$; 134) $\int \cos^2 x dx$; 135) $\int \sin^4 x dx$; 136) $\int \cos^6 x dx$;

137) $\int \cos^4 x \sin^4 x dx$; 138) $\int tg^3 x dx$; 139) $\int ctg^5 x dx$;

140) $\int ctg^3 x dx$; 141) $\int tg^4 x \sec^4 x dx$; 142) $\int \dfrac{dx}{\cos^4 x}$;

143) $\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}$; 144) $\int \frac{\sin^3 x dx}{\sqrt[3]{\cos^4 x}}$; 145) $\int \sin 3x \sin x dx$;

146) $\int \cos 4x \cos 7x dx$; 147) $\int \cos 2x \sin 4x dx$; 148) $\int \cos \frac{3}{4} x \sin \frac{x}{4} dx$;

149) $\int \frac{dx}{4-5\sin x}$; 150) $\int \frac{dx}{5-3\cos x}$; 151) $\int \frac{\sin x dx}{1+\sin x}$;

152) $\int \frac{\cos x dx}{1+\cos x}$.

8 Интегралы от иррациональных функций

Не от всякой иррациональной функции интеграл выражается через элементарные функции. В данном параграфе мы рассмотрим те иррациональные функции, интегралы от которых с помощью постановок приводятся к интегралам от рациональных функций и, следовательно, интегрируются до конца.

1. Рассмотрим интеграл $\int R\left(x, x^{m/n}, ..., x^{r/s}\right) dx$, где $R-$рациональная функция своих аргументов.

Пусть k- общий знаменатель дробей $m/n, ..., r/s$. Сделаем подстановку:

$$x = t^k, \quad dx = kt^{k-1} dt.$$

Тогда каждая дробная степень x, выразится через целую степень t и, следовательно, подынтегральная функция преобразуется в рациональную функцию от t.

Пример 1. Требуется вычислить интеграл $\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4}+1}$.

Решение. Общий знаменатель дробей ½, ¾ есть 4; поэтому делаем подстановку $x = t^4, dx = 4t^3 dt$; тогда

$$\int \frac{x^{1/2} dx}{x^{3/4}+1} = 4\int \frac{t^2}{t^3+1} t^3 dt = 4\int \frac{t^5}{t^3+1} dt = 4\int \left(t^2 - \frac{t^2}{t^3+1} \right) dt =$$

$$= 4\int t^2 dt - 4\int \frac{t^2}{t^3+1} dt = 4\frac{t^3}{3} - \frac{4}{3}\ln\left|t^3+1\right| + C =$$

$$= \frac{4}{3}\left[x^{3/4} - \ln\left|x^{3/4}+1\right| \right] + C$$

2. Рассмотрим интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{m/n}, \ldots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{r/s}\right] dx.$$

Этот интеграл сводится к интегралу от рациональной функции с помощью подстановки $\dfrac{ax+b}{cx+d} = t^k$, где k - общий знаменатель дробей $m/n,\ \ldots, r/s$.

Пример 2. Требуется вычислить интеграл $\displaystyle\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx$.

Решение. Делаем подстановку $x + 4 = t^2, \quad x = t^2 - 4, \quad dx = 2tdt;$ тогда

$$\int \frac{\sqrt{x+4}}{x} dx = 2\int \frac{t^2}{t^2-4} dt = 2\int \left(1 + \frac{4}{t^2-4}\right) dt = 2\int dt + 8\int \frac{dt}{t^2-4} =$$

$$= 2t + \ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right| + C = 2\sqrt{x+4} + 2\ln\left|\frac{\sqrt{x+4}-2}{\sqrt{x+4}+2}\right| + C.$$

9 Контрольная работа по теме «Неопределенный интеграл»

Вариант 1

1) $\int \frac{x^2+\ln x dx}{x};$

2) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}};$

3) $\int \cos(4x+8)dx;$

4) $\int x\ln x dx;$

5) $\int \cos^2 x \sin^2 x dx;$

6) $\int \frac{dx}{1+\cos x};$

7) $\int \frac{\left(x^3+1\right)dx}{x^2-x}.$

Вариант 2

1) $\int \frac{dx}{\cos^2\left(1-5x\right)};$

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^2}};$

3) $\int \frac{dx}{(x+2)(\ln(x+2))};$

4) $\int x^2 \sin x;$

5) $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^2 x};$

6) $\int \frac{\sin xdx}{5+3\sin x};$

7) $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

Вариант 3

1) $\int x 7^{x^2} dx;$

2) $\int \frac{x+\cos xdx}{x^2+2\sin x};$

3) $\int \sqrt{arctgx}\,\frac{dx}{1+x^2};$

4) $\int (x+2)\sin 3xdx;$

5) $\int \cos^2 x\cdot\sin^3 xdx;$

6) $\int \frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x};$

7) $\int \frac{(x^3-17)}{x^2-4x+3}dx.$

Вариант 4

1) $\int \frac{xdx}{\sqrt{1+x^4}};$

2) $\int x\cdot\cos x^2 dx;$

3) $\int \frac{2+\ln(x+1)}{x+1}dx;$

4) $\int x\cdot e^{3x}dx;$

5) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^2 x};$

6) $\int \frac{dx}{1+\sin x};$

7) $\int \left(\frac{2x^3+5}{x^2-x-2}\right)dx.$

Вариант 5

1) $\int e^{x-x^2}(2x-1)dx;$

2) $\int \frac{xdx}{\sqrt{x^4+6}};$

3) $\int \frac{(tgx+1)dx}{\cos^2 x};$

4) $\int x^5 \ln xdx;$

5) $\int \frac{dx}{\sin x};$

6) $\int \frac{\sin^2 xdx}{\cos^2 x};$

7) $\int \frac{2x^3-1dx}{x^2+x-6}.$

Вариант 6

1) $\int \frac{dx}{16x^2+25};$

2) $\int \frac{\cos xdx}{1+\sin^2 x};$

3) $\int e^{x^{2+1}}\cdot xdx;$

4) $\int (x^2+4)\sin xdx;$

5) $\int \sin^4 xdx;$

6) $\int \frac{dx}{2\cos x+\sin x};$

7) $\int \left(\frac{3x^3+25}{x^2+3x+2}\right)dx.$

Вариант 7

1) $\int 10^{3x+2}dx;$

2) $\int \frac{x^4 dx}{\cos^2 x^5};$

3) $\int \frac{dx}{(x+2)(\ln(x+2))};$

4) $\int \arccos xdx;$

5) $\int \frac{\cos^2 xdx}{\sin^4 x};$

6) $\int \frac{\cos xdx}{5+4\cos x};$

Вариант 8

1) $\int \frac{dx}{\left(7x+100\right)^2};$

2) $\int \frac{e^x dx}{4+e^{2x}};$

3) $\int ctg^5 x\,\frac{dx}{\sin^2 x};$

4) $\int \ln(x^2+1)dx;$

5) $\int tg4xdx;$

6) $\int \frac{dx}{\sin x-2\cos x};$

Вариант 9

1) $\int \left(3x+5\right)^{50} dx;$

2) $\int \frac{\sin xdx}{\sqrt{9-\cos^2 x}};$

3) $\int x\sin(x^2+4)dx;$

4) $\int \frac{\ln^2 x}{x^2}dx;$

5) $\int \sin^7 xdx;$

6) $\int \frac{dx}{5-4\cos 2x};$

7) $\int \frac{(x^3-3x^2-12)dx}{(x-4)(x-3)}$.

7) $\int \frac{(3x^3-2)dx}{(x^3-x}$.

7) $\int \frac{(x^3-3x^2-12)dx}{(x-3)(x-4)(x-2)}$.

Вариант 10

1) $\int \frac{dx}{\cos^2(9x-11)}$;

2) $\int \frac{x^2dx}{x^6+9}$;

3) $\int \frac{x\ln(x^2-1)dx}{x^2-1}$;

4) $\int arctgxdx$;

5) $\int \sin^4 x\cos^3 xdx$;

6) $\int \frac{dx}{3+2\cos x}$;

7) $\int \frac{x-1}{x(x^2+5)}dx$.

Вариант 11

1) $\int 5^{2x-8}dx$;

2) $\int \frac{e^x dx}{1+e^x}$;

3) $\int \sqrt{tgx}\frac{dx}{\cos^2 x}$;

4) $\int (x^2+1)\cos xdx$;

5) $\int tg3xdx$;

6) $\int \frac{dx}{2+\sin x+\cos x}$;

7) $\int \frac{3x^3-2}{x^3-x}dx$.

Вариант 12

1) $\int \frac{dx}{16x^2+9}$;

2) $\int e^{\sin x}\cos xdx$;

3) $\int \frac{x^3dx}{\sqrt{1-x^8}}$;

4) $\int e^{5x}x^2dx$;

5) $\int \frac{\cos xdx}{\sin^3 x}$;

6) $\int \frac{dx}{1+tgx}$;

7) $\int \frac{dx}{(x^2+4)(x+1)}$.

Вариант 13

1) $\int \frac{\cos xdx}{\sqrt[3]{\sin^5 x}}$;

2) $\int \frac{3^x dx}{\sqrt{1-9^x}}$;

3) $\int (2x-5)^4 dx$;

4) $\int arctgxdx$;

5) $\int \cos x\cdot\sin xdx$;

6) $\int \frac{dx}{-\sin x+\cos x}$;

7) $\int \frac{x^5+3x^3-1}{x^2+x}dx$.

Вариант 14

1) $\int \frac{dx}{\sin^2(5x-10)}$;

2) $\int x^4\sqrt{25+x^5}dx$;

3) $\int \frac{e^x dx}{1-e^{2x}}$;

4) $\int \ln(2+x)dx$;

5) $\int \sin x\cdot\sin 3xdx$;

6) $\int \frac{1+\cos xdx}{1+\sin x}$;

7) $\int \frac{2x^5-8x^3+3}{x^2-2x}dx$.

Вариант 15

1) $\int e^{2-3x}dx$;

2) $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;

3) $\int \frac{x^2dx}{x^3+1}$;

4) $\int \arcsin xdx$;

5) $\int tg^2xdx$;

6) $\int \frac{dx}{5+4\sin x}$;

7) $\int \frac{x^5-x^3+1}{x^2-x}dx$.

Список использованных источников

1 **Пискунов, Н.С.** Дифференциальное и интегральное исчисления: учебное пособие для технических вузов. В 2-х т. Т.1: / Н.С. Пискунов. – М.: Интеграл-Пресс, 2007. – 416 с.

2 **Шипачев, В.С.** Высшая математика: учебник для вузов. /В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2003. – 479 с.

3 **Шипачев, В.С.** Задачник по высшей математике: учебное пособие./ В.С. Шипачев. – М.: Высшая школа, 2005. – 304 с.

4 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч.2.: учебное пособие для вузов/ П.Е. Данко, А.Г. Попов. Т. А. Кожевникова. -6-е изд. – М.: Издательский дом «Оникс 21 век»: Мир и образование, 2003. - 215 с.

5 **Виноградова, И.А.** Задачи и упражнения по математическому анализу. В 2 кн. Кн. 1. Дифференциальное и интегральное исчисление функций одной переменной: учебное пособие для университетов, пед. вузов. / С. Н. Олехник, В.А. Садовничий. / Под ред. В. А. Садовничего. – 2-е изд., перераб. и доп.- М.: Высш. шк., 2000.- 725с.: ил.

6 **Кузнецов, Л.А.** Сборник заданий по высшей математике: учебное пособие для вузов. / Л.А. Кузнецов. – СПб.: Лань, 2005. -240 с.

Приложение А

(справочное)

Ответы к задачам

1) $\frac{x^6}{6}+C;$ 2) $\frac{x^2}{2}+\frac{2x\sqrt{x}}{3}+C;$ 3) $6\sqrt{x}-\frac{x^2\sqrt{x}}{10}+C;$

4) $\frac{2x^2\sqrt{x}}{5}+C;$ 5) $-\frac{1}{x}-\frac{8}{\sqrt{x}}+2x+C;$ 6) $\frac{4}{3}\sqrt[4]{x^3}+C;$

7) $\frac{x^5}{5}+\frac{3}{4}x^2\sqrt[3]{x^2}+3\sqrt[3]{x}+C;$ 8) $\frac{1}{5}e^{5x}+C;$ 9) $\frac{\sin 5x}{5}+C;$

10) $-\frac{\cos ax}{a}+C;$ 11) $\frac{1}{2}\ln^2 x+C;$ 12) $-\frac{ctg 3x}{3}+C;$

13) $\frac{tg 7x}{7}+C;$ 14) $\frac{1}{3}\ln|3x-7|+C;$ 15) $-\ln|1-x|+C;$

16) $-\frac{1}{2}\ln|5-2x|+C;$ 17) $-\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|+C;$ 18) $\frac{1}{5}\ln|\sin(5x-7)|+C;$

19) $-\frac{1}{3}\ln|\cos 3y|+C;$ 20) $3\ln\left|\sin\frac{x}{3}\right|+C;$ 21) $\frac{1}{2}tg^2\varphi+C;$

22) $\ln\left|\sin e^x\right|+C;$ 23) $-\frac{1}{4}\ln|\cos 4S|-4\ln\left|\sin\frac{S}{4}\right|+C;$ 24) $\frac{\sin^3 x}{3}+C;$

25) $-\frac{\cos^4 x}{4}+C;$ 26) $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C;$ 27) $\frac{1}{2}\sqrt{2x^2+3}+C;$

28) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3+1}+C;$ 29) $-\frac{1}{\sin x}+C;$ 30) $\frac{1}{2\cos^2 x}+C;$

31) $\frac{tg^2 x}{2}+C;$ 32) $-\frac{ctg^2 x}{2}+C;$ 33) $2\sqrt{tgx-1}+C;$

34) $\frac{\ln^2(x+1)}{2}+C;$ 35) $\sqrt{2\sin x+1}+C;$ 36) $\frac{1}{2(1+\cos 2x)}+C;$

37) $2\sqrt{\sin^2 x+1}+C;$ 38) $\frac{2}{3}\sqrt{(tgx+1)^3}+C;$ 39) $-\frac{1}{12}\frac{1}{(2+3\sin 2x)^2}+C;$

40) $\frac{1}{\sqrt[3]{\cos 3x}}+C$; 41) $\frac{\ln^3 x}{3}+C$; 42) $\frac{\arcsin^2 x}{2}+C$;

43) $\frac{arctg^2 x}{2}+C$; 44) $-\frac{\arccos^3 x}{3}+C$; 45) $-\frac{arcctg^2 x}{2}+C$;

46) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$; 47) $\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+3)+C$; 48) $\frac{1}{2}\ln(2\sin x+3)+C$;

49) $\ln|\ln x|+C$; 50) $\frac{(x^2+1)^5}{5}+C$; 51) $\frac{tg^3 x}{3}-tgx+x+C$;

52) $\ln|arctgx|+C$; 53) $\frac{1}{3}\ln|3tgx+1|+C$; 54) $\frac{tg^4 x}{4}+C$;

55) $\ln|\arcsin x|+C$; 56) $\frac{1}{6}\ln|2+3\sin 2x|+C$; 57) $\sin|\ln x|+C$;

58) $\frac{1}{b}\sin(a+bx)+C$; 59) $\frac{1}{2}e^{2x}+C$; 60) $3e^{x/3}+C$;

61) $e^{\sin x}+C$; 62) $\frac{a^{x^2}}{2\ln a}+C$; 63) $ae^{x/a}+C$;

64) $\frac{1}{4}e^{4x}+C$; 65) $\frac{3^x e^x}{\ln 3+1}+C$; 66) $-\frac{1}{3}e^{-3x}+C$;

67) $\frac{1}{5}\left(e^{5x}+\frac{a^{5x}}{\ln a}\right)+C$; 68) $\frac{1}{2}e^{x^2+4x+3}+C$; 69) $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+C$;

70) $\frac{1}{4}\ln(3+4e^x)+C$; 71) $\frac{1}{2}\ln(2+e^{2x})+C$; 72) $\frac{1}{\sqrt{2}}arctg(\sqrt{2}x)+C$;

73) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin(\sqrt{3}x)+C$; 74) $\frac{1}{3}\arcsin\left(\frac{3x}{4}\right)+C$; 75) $\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)+C$;

76) $\frac{1}{2}arctg\left(\frac{x}{2}\right)+C$; 77) $\frac{1}{6}arctg\frac{3x}{2}+C$; 78) $\frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3x}{2-3x}\right|+C$;

79) $\ln\left|x+\sqrt{x^2+9}\right|+C$; 80) $\frac{1}{b}\ln\left|bx+\sqrt{b^2x^2-a^2}\right|+C$; 81) $\frac{1}{a}\ln\left|ax+\sqrt{b^2+a^2x^2}\right|+C$;

82) $\frac{1}{2ac}\ln\left|\frac{ax-c}{ax+c}\right|+C$; 83) $\frac{1}{6\sqrt{5}}\ln\left|\frac{x^3+\sqrt{5}}{x^3-\sqrt{5}}\right|+C$; 84) $\frac{1}{2}\arcsin x^2+C$;

85) $\frac{1}{2a^2}\,arctg\,\frac{x^2}{a^2}+C$; 86) $\arcsin e^x+C$; 87) $\frac{1}{\sqrt{5}}\arcsin\sqrt{\frac{5}{3}}x+C$;

88) $\frac{1}{a}\,arctg\,\frac{\sin x}{a}+C$; 89) $\arcsin(\ln x)+C$; 90) $-\frac{1}{2}(\arccos x)^2+\sqrt{1-x^2}+C$;

91) $\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\frac{1}{2}(arctgx)^2+C$; 92) $\frac{2}{3}\sqrt{(1+\ln x)^3}+C$; 93) $\frac{4}{3}\sqrt{(1+\sqrt{x})^3}+C$;

94) $4\sqrt{(1+\sqrt{x})}+C$; 95) $arctge^x+C$;

96) $3\sqrt[3]{\sin x}+C$; 97) $-\frac{2}{9}\sqrt{(1+3\cos^2 x)^3}+C$; 98) $x\sin x+\cos x+C$;

99) $\sin x-x\cos x+C$; 100) $-e^{-x}(x+1)+C$; 101) $\frac{e^{5x}}{25}(5x-1)+C$;

102) $x(\ln x-1)+C$; 103) $\frac{x^2}{2}\ln x-\frac{x^2}{4}+C$; 104) $x\arcsin x+\sqrt{1-x^2}+C$;

105) $\frac{x^2+1}{2}arctgx-\frac{x}{2}+C$; 106) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{2}{9}\right)\ln(3x+2)-\frac{x^2}{4}+\frac{x}{3}+C$;

107) $\left(\frac{x^3}{3}+\frac{3}{2}x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^3}{9}-\frac{3x^2}{4}-2x+C$; 108) $\frac{x+1}{3}\sin 3x+\frac{\cos 3x}{9}+C$;

109) $x\,arctg\sqrt{7x-1}-\frac{1}{7}\sqrt{7x-1}+C$; 110) $2\sqrt{1+x}\arcsin x+4\sqrt{1-x}+C$;

111) $\ln|\sin x|-xctgx+C$; 112) $\ln|\cos x|+xtgx+C$; 113) $x\left[1+(\ln x-1)^2\right]+C$;

114) $x\ln(x^2+2)-2x+\frac{4}{\sqrt{2}}\,arctg\,\frac{x}{\sqrt{2}}+C$; 115) $(x^2-2)\sin x+2x\cos x+C$;

116) $-x^2\cos x+2(x\sin x+\cos x)+C$; 117) $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right|+C$;

118) $\frac{1}{8}\ln\frac{(x+3)^6}{|x+5|^5|x+1|}+C$; 119) $\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+4x+\ln\left|\frac{x^2(x-2)^5}{(x+2)^3}\right|+C$;

120) $\frac{x^2}{2}-2x+\frac{1}{6}\ln\frac{|x-1|}{|x+1|^3}+\frac{16}{3}\ln|x+2|+C;$ 121) $\frac{1}{x-1}+\ln\left|\frac{(x-2)}{(x-1)}\right|+C;$

122) $\frac{3}{x-2}+\ln\frac{(x-2)^2}{x^2}+C;$ 123) $\frac{4x+3}{2(x+1)^2}+\ln\frac{x^2}{(x+1)^2}+C;$

124) $-\frac{5x+12}{x^2+6x+8}+\ln\left(\frac{x+4}{x+2}\right)^2+C;$ 125) $\ln\frac{|x|}{\sqrt{x^2+1}}+C;$

126) $\ln\frac{(x^2-2x+5)^{\frac{3}{2}}}{|x-1|}+\frac{1}{2}arctg\frac{x-1}{2}+C;$

127) $\ln\frac{x^2+4}{\sqrt{x^2+2}}+\frac{3}{2}arctg\frac{x}{2}-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C;$

128) $\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1}+\frac{1}{\sqrt{3}}arctg\frac{2x-1}{\sqrt{3}}+C;$ 129) $\ln\frac{(x^2+4)}{(x+1)^2}+\frac{1}{2}arctg\frac{x}{2}+C;$

130) $\frac{1}{3}\cos^3 x-\cos x+C;$ 131) $-\cos x+\frac{2}{3}\cos^3 x-\frac{\cos^5 x}{5}+C;$

132) $-\frac{1}{5}\cos^5 x+\frac{\cos^7 x}{7}+C;$ 133) $\cos ecx-\frac{\cos ec^3 x}{3}+C;$

134) $\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x+C;$ 135) $\frac{3x}{8}-\frac{\sin 2x}{4}+\frac{\sin 4x}{32}+C;$

136) $\frac{1}{16}\left(5x+4\sin 2x-\frac{\sin^3 2x}{3}+\frac{3}{4}\sin 4x\right)+C;$

137) $\frac{1}{128}\left(3x-\sin 4x+\frac{\sin 8x}{8}\right)+C;$ 138) $\frac{tg^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C;$

139) $-\frac{ctg^4 x}{4}+\frac{ctg^2 x}{2}+\ln|\sin x|+C;$ 140) $-\frac{ctg^2 x}{2}-\ln|\sin x|+C;$

141) $\frac{tg^7 x}{7}+\frac{tg^5 x}{5}+C;$ 142) $tgx+\frac{1}{3}tg^3 x+C;$ 143) $C-\cos ecx;$

144) $\frac{3}{5}(\cos^{5/3} x)+3(\cos^{-1/3} x)+C;$ 145) $\frac{\sin 2x}{4}-\frac{\sin 4x}{8}+C;$

146) $\frac{\sin 11x}{22}+\frac{\sin 3x}{6}+C$; 147) $-\frac{\cos 6x}{12}-\frac{\cos 2x}{4}+C$;

148) $-\frac{\cos x}{2}+\cos\frac{1}{2}x+C$; 149) $\frac{1}{3}\ln\left|\frac{tg\frac{x}{2}-2}{2tg\frac{x}{2}-1}\right|+C$; 150) $\frac{1}{2}arctg\left|2tg\frac{x}{2}\right|+C$;

151) $\frac{2}{1+tg\frac{x}{2}}+x+C$; 152) $x-tg\frac{x}{2}+C$.