МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Оренбургский государственный университет»

Кафедра сопротивления материалов

О.А. ФРОЛОВА, В.С. ГАРИПОВ

ЦЕНТРАЛЬНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ СТЕРЖНЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 539.38 (07)
ББК 30.121 я 7
Ф 91

Рецензент
доцент П.Н. Ельчанинов

Фролова О.А.
Ф 91 **Центральное растяжение и сжатие стержня: методические указания к выполнению расчетно-проектировочной работы /О.А. Фролова, В.С. Гарипов. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. - 26 с.**

В методических указаниях по сопротивлению материалов приведены основные сведения из теории, варианты задания к расчетно-проектировочной работе и пример решения типовой задачи с пояснениями.

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-проектировочной работы для студентов инженерных специальностей, изучающих курс сопротивление материалов по сокращенной программе.

ББК 30.121 я 7

Содержание

1. Основные сведения из теории

Центральное растяжение (сжатие) – такой вид нагружения стержня, при котором в его поперечных сечениях из шести внутренних силовых факторов (ВСФ) возникают только **продольные (нормальные) силы N_z,** а остальные ВСФ равны нулю.

Статическая сторона задачи

Продольная сила N_z – это внутреннее усилие; представляет собой равнодействующую элементарных внутренних нормальных сил ($dN=\sigma dA$ – элементарная внутренняя сила, приходящаяся на площадь dA), равномерно распределенных по площади поперечного сечения, т.е. равнодействующую нормальных напряжений:

$$N_z = \int_A \sigma \, d A, \tag{1}$$

где σ **-** нормальное напряжение в произвольной точке поперечного сечения, принадлежащая элементу площадью dA;

dA **-** площадь элементарной площадки.

Продольная сила направлена вдоль оси стержни и расположена перпендикулярно к плоскости поперечного сечения.

Для определения продольной силы N_z применяется метод сечений. Мысленно рассекаем стержень плоскостью α, перпендикулярной к его оси, на две части и рассматриваем равновесие одной из них (рисунок 1.1).

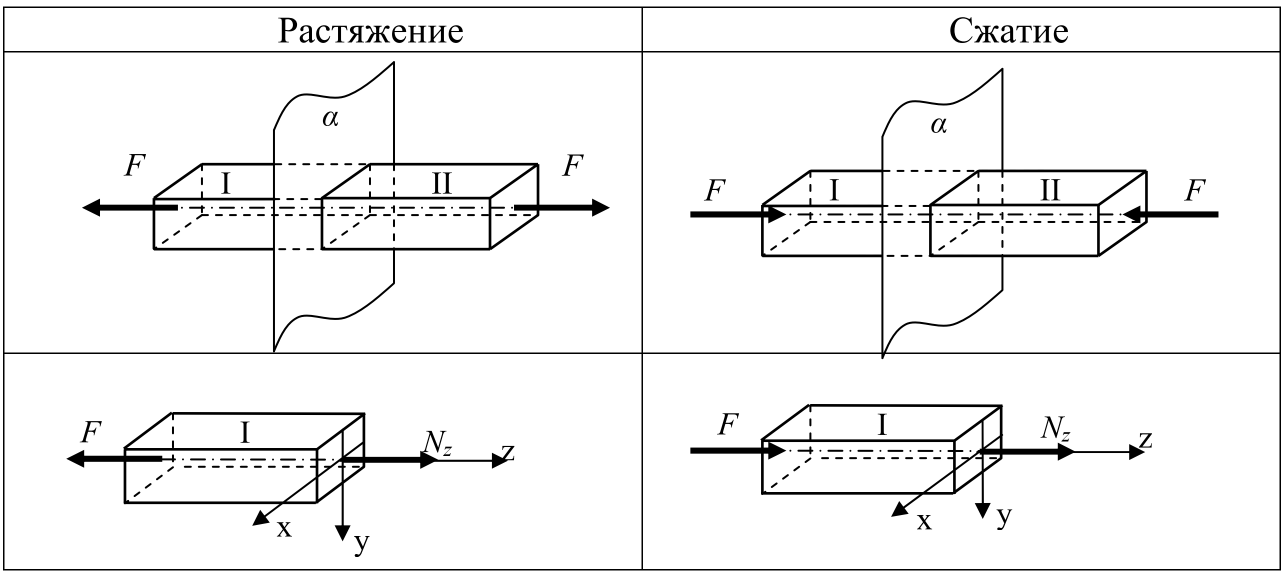


Рисунок 1.1 – Определение продольной силы N_z в поперечном сечении стержня

Продольная сила N_z в произвольном поперечном сечении стержня численно равна алгебраической сумме проекций на его продольную ось, всех действующих внешних сил, приложенных по одну сторону от рассматриваемого поперечного сечения , и определяется из уравнения равновесия статики по формуле:

$$N_z = \sum_{i=1}^{n} F_i. \tag{2}$$

Внешние нагрузки F_i необходимо подставлять в формулу (1) в соответствии со следующим правилом: если внешняя сила F направлена от рассматриваемого сечения, то ее необходимо подставлять со знаком «+»; если внешняя сила F направлена к рассматриваемому сечению, то ее необходимо подставлять со знаком «-».

График, показывающий изменение продольной силы N_z по длине оси стержня, называется эпюрой продольной силы. Для построения эпюры проводится ось (нулевая линия) параллельная оси стержня и перпендикулярно к ней откладываются в определенном масштабе ординаты, изображающие величины продольных сил в поперечных сечениях стержня. Каждая такая линия в принятом масштабе дает величину продольной силы в соответствующем поперечном сечении.

Геометрическая сторона задачи

После приложения внешних нагрузок стержень деформируется, в результате чего изменяются его продольные и поперечные размеры (рисунок 1.2).

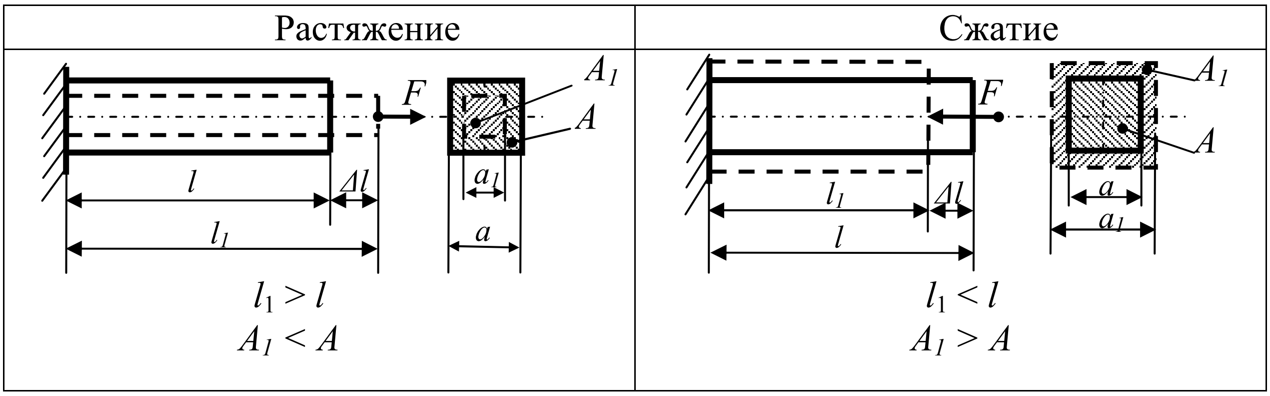


Рисунок 1.2 – Деформация стержня при растяжении и сжатии

Величина, на которую изменяется первоначальная длина стержня, называется **абсолютной продольной деформацией** Δl, *м:*

$$\Delta l = l_1 - l, \tag{3}$$

где l_1 - длина стержня после деформации, *м;*

l - длина стержня до деформации, *м.*

Величина, на которую изменяется поперечный размер поперечного сечения стержня, называется **абсолютной поперечной деформацией** Δa, *м:*

$$\Delta a = a_1 - a, \tag{4}$$

где a_1 – поперечный размер поперечного сечения стержня после деформации, *м*;

a – поперечный размер поперечного сечения стержня до деформации, *м*.

Отношение абсолютной продольной деформации стержня к первоначальной длине называется **относительной продольной деформацией ε:**

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}. \tag{5}$$

Отношение абсолютной поперечной деформации стержня к первоначальному поперечному размеру поперечного сечения называется **относительной поперечной деформацией ε'**:

$$\varepsilon' = \frac{\Delta a}{a}. \tag{6}$$

Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной деформации, взятое по абсолютной величине при растяжении или сжатии, называется **коэффициентом Пуассона υ:**

$$\upsilon = \left|\frac{\varepsilon'}{\varepsilon}\right|. \tag{7}$$

Коэффициента Пуассона *ν* определяется опытным путем и зависит от материала.

Согласно гипотезе плоских сечений (мысленно проведенные до деформации стержня плоские поперечные сечения остаются плоскими и после деформации), все волокна, параллельные оси стержня, получают одинаковые абсолютные деформации Δl и одинаковые относительные деформации ε.

Таким образом, во всех точках поперечного сечения ε = const.

Физическая сторона задачи

В пределах упругих деформаций **нормальное напряжение *σ*,** $\frac{Н}{м^2} = Па$ *(1 МПа = 10^6 Па)* прямо пропорционально относительной продольной деформации. Эта зависимость выражает **закон Гука при** растяжении и сжатии стержня**:**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \tag{8}$$

где *E* – **модуль нормальной упругости** (модуль упругости первого рода или модуль Юнга), *Па*.

Модуль нормальной упругости определяется опытным путем и зависит от материала; характеризует способность материала сопротивляться упругим деформациям.

Для однородного стержня с учетом принимаемой гипотезы плоских сечений внутренние усилия распределены равномерно по площади поперечного сечения.

Решим совместно формулы (1) и (8), получим:

$$N_z = \int_A E\varepsilon dA = E\varepsilon \int_A dA = \sigma A, \tag{9}$$

где $E = const$;
$\varepsilon = const$.

$\varepsilon = const$ принимаются на основании гипотезы плоских сечений: два любых поперечных сечения остаются плоскими и параллельными между собой после деформации, но удлиняются (или сближаются) друг от друга на некоторую величину; на такую же величину удлиняется (укорачивается) каждое продольное волокно стержня.

Из формулы (9) определим **нормальное напряжение σ,** $\frac{H}{м^2} = Па$:

$$\sigma = \frac{N_z}{A}, \tag{10}$$

где N_z - продольна сила, возникающая в поперечном сечении стержня, в котором определяется нормальное напряжение, H;

A - площадь поперечного сечения стержня, в котором определяется напряжение, $м^2$.

Таким образом, в любой точке поперечного сечения стержня возникает нормальное напряжение σ**,** расположенное перпендикулярно к плоскости поперечного сечения. Знак нормального напряжения совпадает со знаком продольной силы в этом поперечном сечении. Нормальные напряжения равномерно распределены по площади поперечного сечения и одинаковы по величине и знаку. Следовательно, все точки поперечного сечения равноопасны (рисунок 1.3).

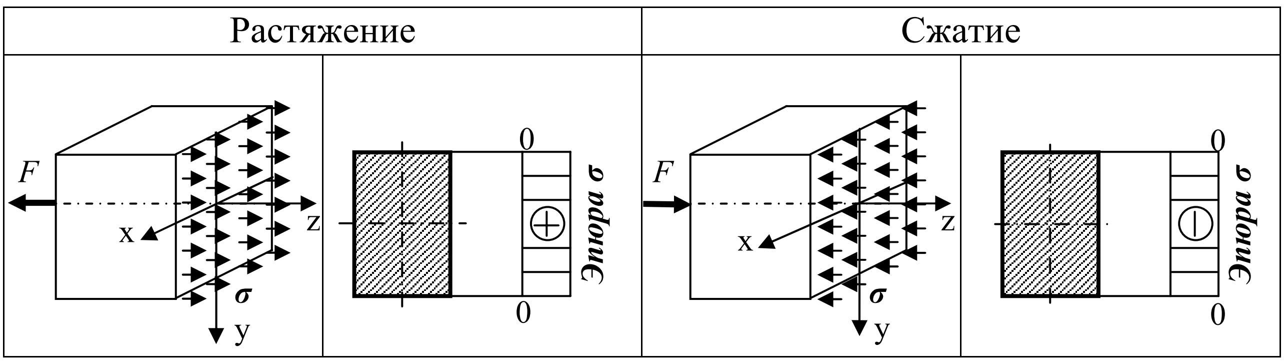


Рисунок 1.3 - Нормальные напряжения σ в поперечном сечении стержня

Для участка стержня с постоянным поперечным сечением и постоянным законом изменения продольной силы нормальные напряжения остаются постоянными по площади поперечного сечения и по длине участка.

Следовательно, нормальные напряжения сохраняются неизменными для всех точек объема, занимаемого участком бруса. Такое напряженное состояние называется однородным.

Закон распределения нормальных напряжений в поперечном сечении стержня изображается графиком, показывающем изменением их по высоте поперечного сечения. Такой график называется эпюрой нормальных напряжений (рисунок 1.3).

Деформация стержня при растяжении и сжатии выражается в изменении его длины и поперечных размеров. Интенсивность деформации при растяжении или сжатии характеризуется относительным удлинением или укорочением.

С учетом формул (7) и (10) получаем:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{N_Z}{EA}. \tag{11}$$

Произведение EA - называется **жесткостью** поперечного сечения стержня при растяжении и сжатии. Жесткость характеризует способность сечения сопротивляться упругим деформациям.

Абсолютную деформацию $\boldsymbol{\Delta\ l}$ стержня или участка стержня длиной l (абсолютное удлинение или укорочение) получим, просуммировав по всей длине относительные удлинения его элементарных длин.

Рассмотрим стержень, жестко закрепленный с одной стороны, длиной l. Стержень нагружен сосредоточенной растягивающей силой F.

Выделим *участок ab* длиной *dz,* расположенный на расстоянии z от жесткой заделки. В результате деформации участок длиной dz удлинится на величину Δdz (рисунок 1.4).

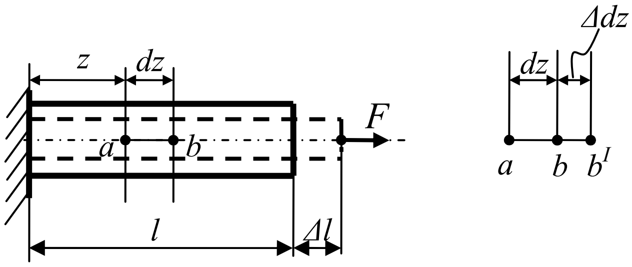


Рисунок 1.4 – Абсолютная деформация стержня при растяжении

Вследствие равномерного распределения напряжений по сечению удлинение для всех элементарных отрезков, взятых на участке dz, оказывается одинаковым.

Абсолютная деформация участка стержня длиной dz равна:

$$\Delta dz = \varepsilon dz. \tag{12}$$

Тогда **абсолютная деформация стержня** $\boldsymbol{\Delta\ l}$**,** *м* определяется по формуле**:**

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon d z = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA_z}, \tag{13}$$

где N_z – продольна сила, возникающая в любом поперечном сечении стержня на рассматриваемом участке, *Н*;

l – длина рассматриваемого участка стержня, *м*;

E – модуль продольной упругости (модуль упругости первого рода или модуль Юнга), *Па*;

A – площадь поперечного сечения стержня на рассматриваемом участке, $м^2$.

Если в пределах участка стержня длиной длины l усилие N_z и жесткость поперечного сечения EA постоянны, то абсолютное удлинение участка Δl, *м* определяется как:

$$\Delta l = \frac{N_Z\, l}{E\, A}. \tag{14}$$

Абсолютная деформация стержня Δl, *м*, состоящего из несколько участков, равна алгебраической сумме перемещений (абсолютных деформаций) отдельных участков стержня и определяется по формуле:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{N_z dz}{EA_z}, \tag{15}$$

где n – количество участков.

Для обеспечения надежной работы и долговечности деталей машин, конструкций и сооружений проводятся различные расчеты. Наиболее распространенными являются **расчеты на прочность и жесткость**.

Расчет на прочность

Напряжение, при котором материал разрушается или в нем возникают заметные пластические деформации, называется **предельным напряжением *(*$\sigma_{пред}$*)***. Предельное напряжение выбирается в зависимости от материала и требований к конструкциям:

- для пластичных материалов предельным напряжением при растяжении (сжатии) является предел текучести (физический σ_T или условный $\sigma_{0,2}$);

- для хрупких материалов - предел прочности при растяжении $\sigma_в^p$ и предел прочности при сжатии $\sigma_в^c$ (при этом $\sigma_в^c > \sigma_в^p$).

Отношение предельного напряжения $\sigma_{пред}$ к максимальному расчетному напряжению σ_{max}, возникающему в элементе конструкции при его нагружении, называется **коэффициентом запаса *(n)*** и определяется по формуле:

$$n = \frac{\sigma_{пред}}{\sigma_{\max}}. \tag{16}$$

Из условия надежности работы деталей и конструкций величину максимального напряжения, возникающего в опасном (наиболее напряженном) сечении бруса, необходимо ограничивать некоторыми значениями. Напряжение, при котором обеспечивается безопасная работа конструкции, называется **допускаемым напряжением *(σ_{adm})*.** Допускаемое напряжение зависит от вида материала.

Допускаемое напряжение равно отношению предельного напряжения к нормативному коэффициенту запаса прочности

$$\sigma_{adm} = \frac{\sigma_{пред}}{n_{adm}}, \tag{17}$$

где n_{adm} – нормативный (допускаемый) коэффициент запаса прочности, зависящий от вида рассчитываемой конструкции, условий ее работы, точности расчета, свойств материала

Условие прочности выражается неравенством:

$$\sigma_{\max} \le \sigma_{adm}, \tag{18}$$

где σ_{max} - наибольшее расчетное нормальное напряжение;

σ_{adm} - допускаемое нормальное напряжение.

Для пластичных материалов:

- наибольшие нормальные напряжения при растяжении и сжатии соответственно равны между собой:

$$\sigma_{\max} = \sigma^{p}_{\max} = \sigma^{c}_{\max}. \tag{19}$$

- допускаемое нормальное напряжение при растяжении и сжатии одинаково по величине:

$$\sigma_{adm} = \sigma^{p}_{adm} = \sigma^{c}_{adm} = \frac{\sigma_T}{n^T_{adm}}, \tag{20}$$

где σ_T – предел текучести материала;

$n^T{}_{adm}$ – нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу текучести (1,5…2,5).

Для хрупких материалов:

$$\sigma^{p}_{\max} \le \sigma^{p}_{adm}, \tag{21}$$

$$\sigma^{c}_{\max} \le \sigma^{c}_{adm}, \tag{22}$$

где σ^p_{max}, σ^c_{max} – наибольшие расчетные растягивающие и сжимающие нормальные напряжения соответственно;

σ^p_{adm}, σ^c_{adm} – допускаемые нормальные напряжения при растяжении и сжатии соответственно.

Причем,

$$\sigma^p_{adm} = \frac{\sigma^p_в}{n^в_{adm}}, \qquad (23)$$

$$\sigma^c_{adm} = \frac{\sigma^c_в}{n^в_{adm}}, \qquad (24)$$

где $\sigma^p_в$ - предел прочности при растяжении;

$\sigma^c_в$ - предел прочности при сжатии;

$n^в_{adm}$ - нормативный коэффициент запаса прочности по отношению к пределу прочности (2,5…5).

Прочность элемента конструкции обеспечивается, если наибольшее напряжение, возникающее в нем, не превышает допускаемого. Наибольшее расчетное нормальное напряжение σ_{max} считается неопасным, если оно превышает допускаемое не более чем на 5 %. Если расчетное напряжение значительно ниже допускаемого, то это свидетельствует о нерациональности конструкции.

В зависимости от поставленной задачи различают следующие **виды расчета на прочность:**

- проверочный расчет (проверка расчетного напряжения в стержне)

$$\sigma_{\max} = \frac{N_{z\max}}{A} \le \sigma_{adm}; \qquad (25)$$

- **проектный расчет (**подбор размеров поперечного сечения стержня)

$$A \ge \frac{|N_{z\max}|}{\sigma_{adm}}; \qquad (26)$$

- **определение допускаемого значения продольной силы**

$$N_{z\max} \le A \cdot \sigma_{adm}. \qquad (27)$$

Расчет на жесткость

Для нормальной работы некоторых конструкций необходимо, чтобы деформации их элементов не превышали допускаемой величины.

Условие жесткости стержня выражается неравенством:

$$\Delta l \le \Delta l_{adm}, \qquad (28)$$

где Δl – абсолютная деформация стержня, *м*;

Δl_{adm} – допускаемая величина абсолютной деформации стержня.

В зависимости от поставленной задачи различают следующие **виды расчета на жесткость:**

- проверочный расчет

$$\Delta l = \frac{N_{z\ \max} \cdot l}{EA} \le \Delta l_{adm}; \tag{29}$$

- проектный расчет

$$A \ge \frac{N_z \cdot l}{E \cdot \Delta l_{adm}}. \tag{30}$$

Формулы для расчета площади различных типов сечений приводятся в справочной литературе. Для прокатных профилей (сечений типа: двутавр, швеллер, уголок) численные значения площади поперечных сечений в зависимости от номера профиля (размера) приводятся в сортаменте (ГОСТе).

2. Задание к расчетно-проектировочной работе

Выбор варианта задания и требования к оформлению.

Необходимо выбрать из таблиц 2.1 и 2.2, прилагаемых к условию задания, данные в соответствии со своим вариантом. Номер схемы нагружения совпадает с номером варианта.

Расчетно-проектировочная работа выполняется на бумаге формата А4.

Расчетно-проектировочная работа должна содержать условие задания, расчетно-графическую схему с указанием на ней в числах всех величин и решения с кратким объяснением. Расчеты выполняются в единицах системы СИ (для удобства допускается использование производных единиц).

2.1 Расчетно-проектировочная работа «Расчет на прочность и жесткость стержня при центральном растяжении и сжатии»

Дан стальной стержень (модуль упругости $E = 2\cdot10^5$ *МПа*), нагруженный сосредоточенными силами F_1, F_2, F_3. Стержень состоит из трех участков, два из которых имеют одинаковый тип и размер поперечного сечения.

Требуется:

1. Построить эпюру продольной силы N_z по длине стержня.

2. Определить из расчета на прочность при $\sigma_{adm}^{p} = \sigma_{adm}^{c} = 160$ *МПа* размеры поперечных сечений стержня: прямоугольное поперечное сечение ($h\backslash b=2$); круглое сплошное поперечное сечение. Выполнить проверку условия прочности.

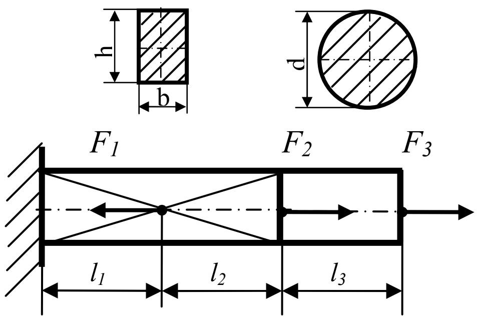
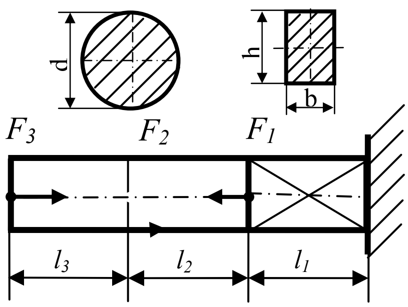
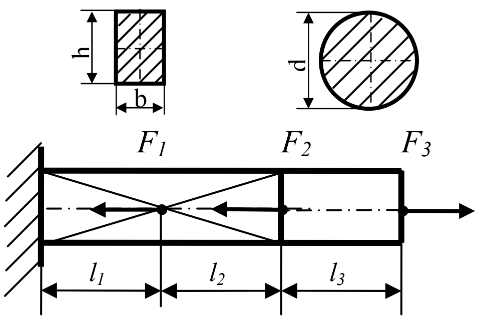
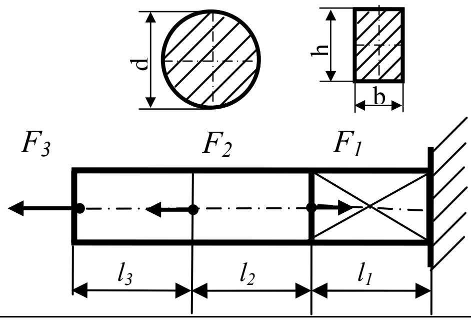
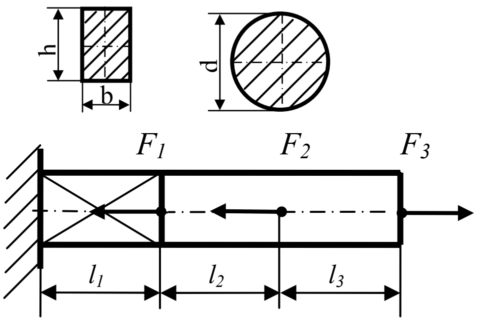
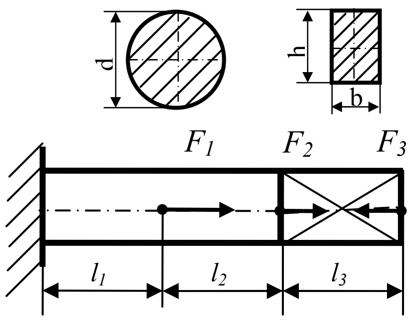
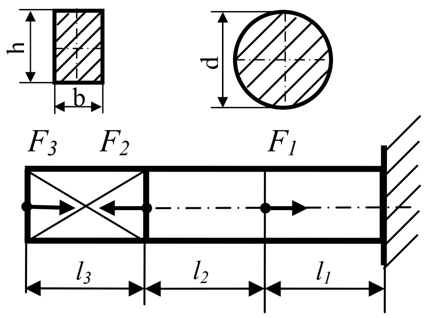
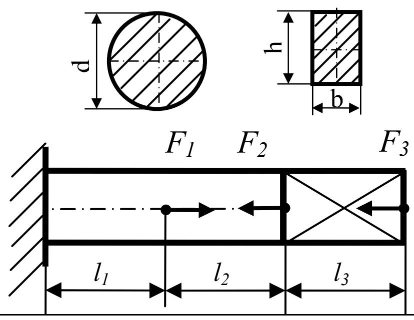
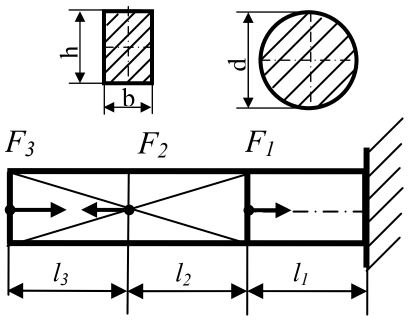
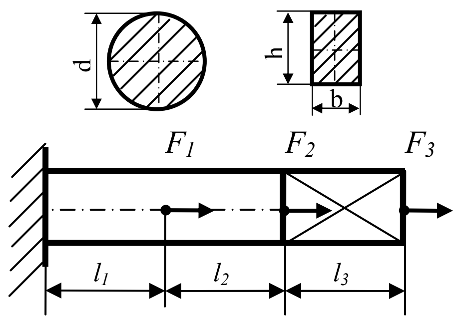
Построить эпюру нормальных напряжений σ по длине стержня и эпюры распределения нормальных напряжений σ по поперечным сечениям.

3. Определить изменение длины стержня под действием внешних сил и построить эпюру перемещений поперечных сечений. Выполнить проверку условия жесткости стержня, если $\Delta l_{adm} = 0{,}5$ *мм*.

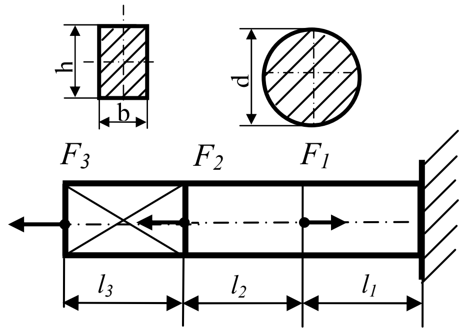
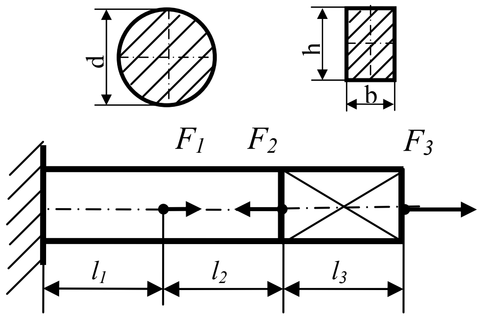
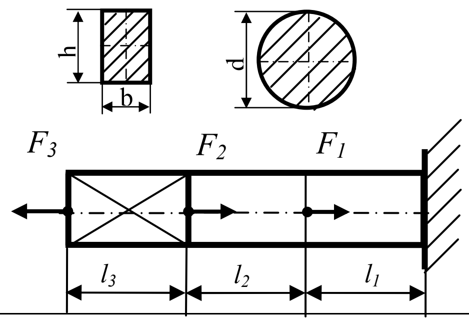
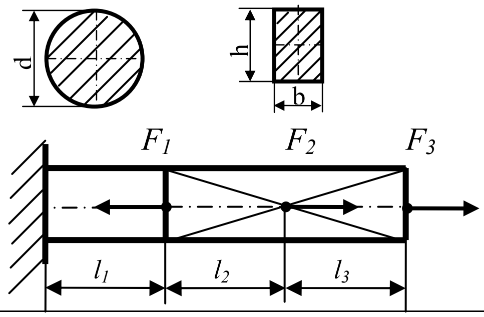
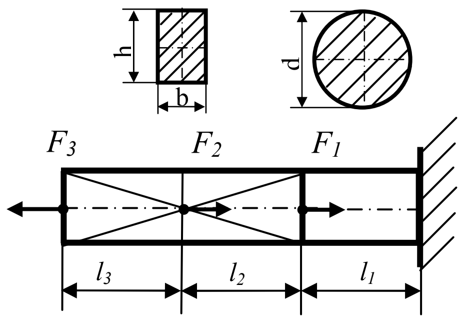
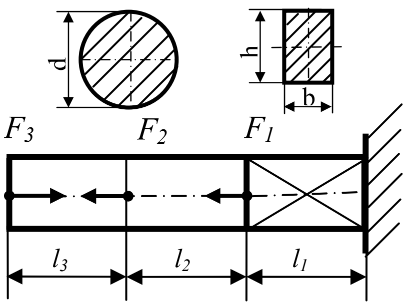
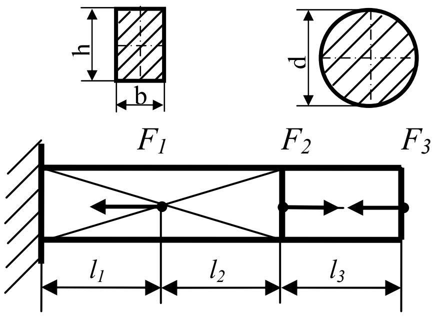
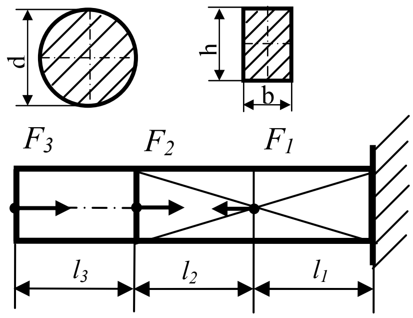
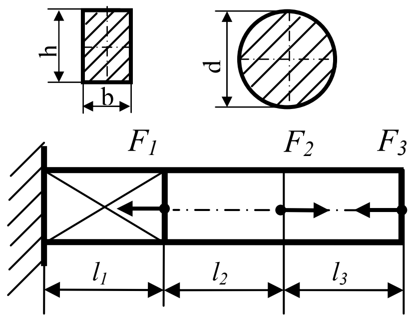
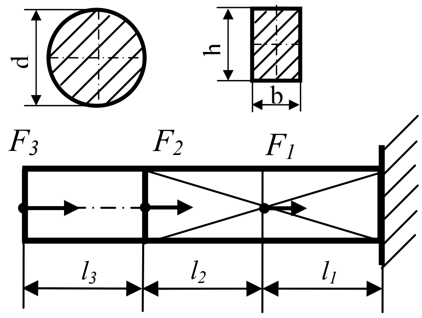
Таблица 2.1 - Исходные данные

№ варианта	F_1, *kH*	F_2, *kH*	F_3, *kH*	l_1, *м*	l_2, *м*	l_3, *м*
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
1	250	20	120	0,1	0,2	0,1
2	240	170	80	0,2	0,1	0,3
3	60	80	120	0,2	0,1	0,2
4	230	100	30	0,1	0,2	0,3
5	180	70	90	0,2	0,1	0,1
6	90	140	130	0,2	0,1	0,3
7	70	230	120	0,1	0,2	0,2
8	220	10	90	0,1	0,3	0,2
9	20	210	60	0,3	0,2	0,3
10	50	40	100	0,2	0,3	0,2
11	20	60	90	0,2	0,1	0,2
12	270	20	180	0,2	0,1	0,2
13	150	130	110	0,2	0,3	0,2
14	60	40	130	0,3	0,1	0,3
15	150	60	190	0,1	0,3	0,1
16	120	170	190	0,1	0,2	0,3
17	50	90	160	0,1	0,2	0,1
18	30	10	180	0,1	0,3	0,1
19	90	20	170	0,2	0,3	0,2
20	50	40	80	0,1	0,3	0,1
21	50	40	100	0,2	0,3	0,1
22	20	60	90	0,1	0,2	0,2
23	270	20	180	0,2	0,1	0,2
24	150	130	110	0,2	0,3	0,2
25	60	40	130	0,3	0,2	0,3
26	150	60	190	0,1	0,3	0,1
27	120	170	190	0,3	0,2	0,3
28	50	90	160	0,1	0,2	0,1
29	30	10	180	0,1	0,3	0,2
30	90	20	170	0,2	0,3	0,2

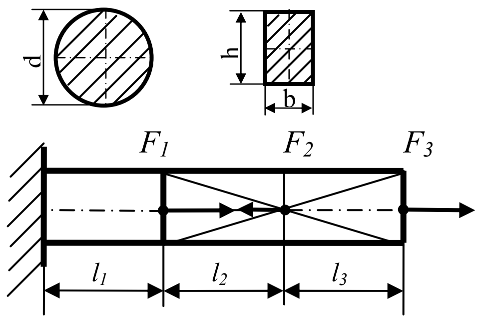
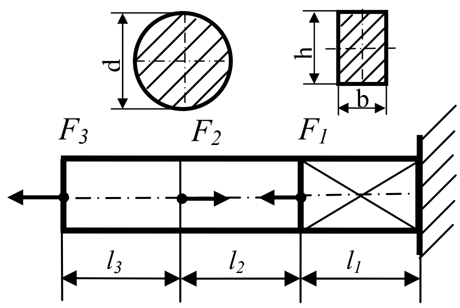
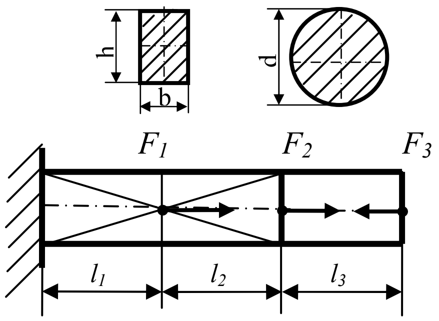
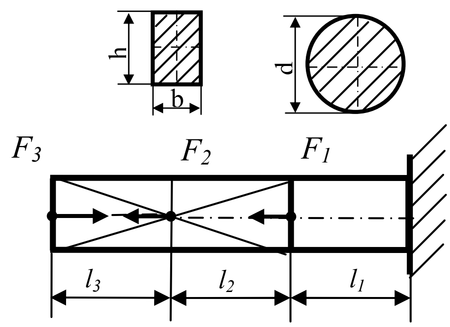
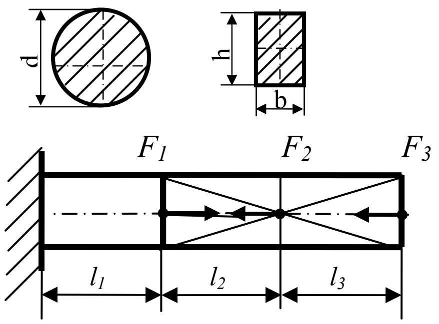
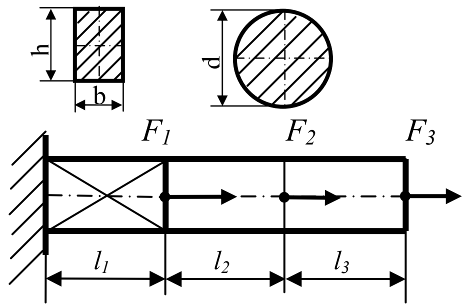
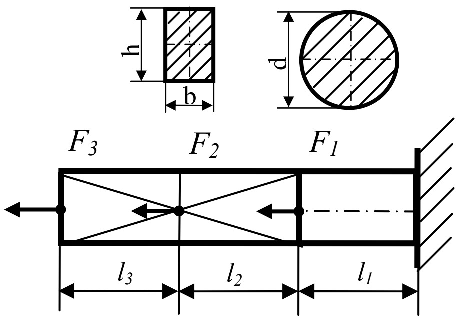
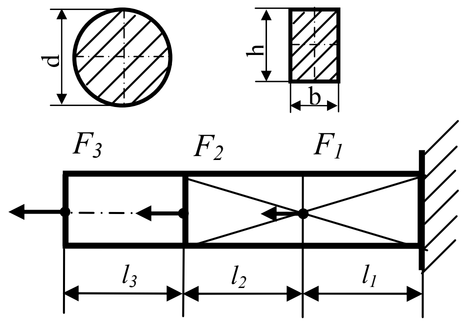
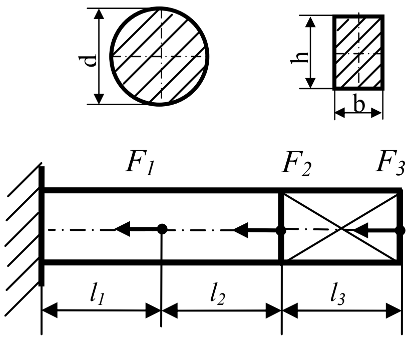
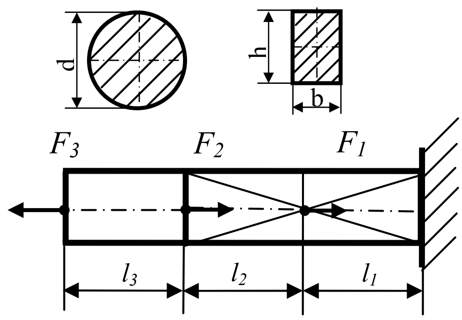
Таблица 2.2 - Схемы нагружения стержня

<table>
<tr>
<td>№1

</td>
<td>№2

</td>
</tr>
<tr>
<td>№3

</td>
<td>№4

</td>
</tr>
<tr>
<td>№5

</td>
<td>№6

</td>
</tr>
<tr>
<td>№7

</td>
<td>№8

</td>
</tr>
<tr>
<td>№9

</td>
<td>№10

</td>
</tr>
</table>

Продолжение таблицы 2.2

№11 	№12 
№13 	№14 
№15 	№16 
№17 	№18 
№19 	№20 

Продолжение таблицы 2.2

№21 	№22 
№23 	№24 
№25 	№26 
№27 	№28 
№29 	№30 

3. Пример выполнения расчетно-проектировочной работы

Дан стальной стержень (модуль упругости $E = 2 \cdot 10^5$ *МПа*), нагруженный сосредоточенными силами F_1, F_2, F_3. Стержень состоит из трех участков, два из которых имеют одинаковый тип и размер поперечного сечения.

Требуется:

1. Построить эпюру продольной силы N_z по длине стержня.

2. Определить из расчета на прочность при $\sigma_{adm}^p = \sigma_{adm}^c = 160$ *МПа* размеры поперечных сечений стержня: прямоугольное поперечное сечение ($h \backslash b=2$); круглое сплошное поперечное сечение. Выполнить проверку условия прочности. Построить эпюру нормальных напряжений σ по длине стержня и эпюры распределения нормальных напряжений σ по поперечным сечениям.

3. Определить изменение длины стержня под действием внешних сил и построить эпюру перемещений поперечных сечений. Выполнить проверку условия жесткости стержня, если $\Delta l_{adm} = 0,5$ *мм*.

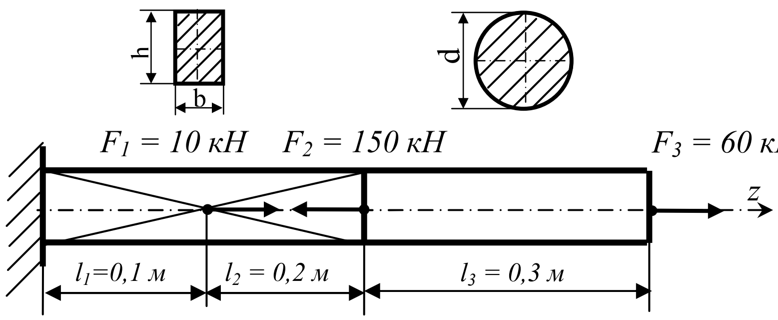


Рисунок 3.1 – Схема ступенчатого стержня

1. Определим реакции опор.

Введем декартову систему координат. Ось z совместим с осью стержня; оси x и y расположим в плоскости поперечного сечения (рисунок 3.2, а). За положительное направление оси z выберем направление, указанное на чертеже.

Под действием внешней нагрузки в жестко защемленной опоре возникает реакция опоры H_A (рисунок 3.2, а), которая определяется из уравнения равновесия статики. Линия действия реакции опоры H_A совпадает с осью стержня и линиями действия внешних сил F_1, F_2 и F_3. Направление реакции опоры H_A выбираем произвольно (в данном случае совпадает с направлением оси z). Спроецируем все усилия (H_A, F_1, F_2 и F_3) на ось z:

$$\sum Z = 0;$$

$$H_A + F_1 - F_2 + F_3 = 0;$$

$$H_A = -F_1 + F_2 - F_3 = -10 + 150 - 60 = 80 \ кН.$$

2. Определим продольную силу N_z на каждом участке нагружения стержня и построим эпюру.

Разбиваем данный ступенчатый стержень на участки. Границам участков являются места приложения внешних сил и изменения размеров поперечного сечения. Обозначим границы участков буквами *A, B, C* и *D,* начиная от жесткой заделки. Стержень состоит из трех участков нагружения: *участок AB, участок BC* и *участок CD* (рисунок 3.2, а). Причем, *участки AB и BC* имеют одинаковые тип и размеры поперечного сечения - прямоугольное сечение; *участок CD* – круглое сплошное сечение.

Для определения продольной силы N_z используем метод сечений: на каждом участке проведем сечение, перпендикулярное оси стержня; отбросим одну часть стержня; рассмотрим равновесие оставшейся части. Рассмотрим каждый участок в отдельности.

Участок AB (0 ≤ z_1 ≤ 0,1 м)

Проведем сечение I-I, перпендикулярное оси стержня, на расстоянии z_1 от точки *A*. Отбросим правую от сечения часть стержня. Рассмотрим равновесие оставшейся левой части стержня. На левую часть стержня действует реакция опоры H_A, которая направлена к проведенному сечению, следовательно, подставляем ее значение в формулу со знаком «-». Таким образом, в поперечном сечении I-I возникает продольная сила N_{Z_1} :

$$N_{Z_1} = \sum_{i=1}^{n} F_i = -H_A = -80\ кН \quad \text{- (уравнение константы).}$$

Продольная сила N_{Z_1} в сечении I-I сжимающая, что означает сжатие *участка AB*.

Участок BC, (0 ≤ z_2 ≤ 0,2 м)

Проведем сечение II-II на расстоянии z_2 от точки *B*. Отбросим правую от сечения часть стержня. Рассмотрим всю левую часть стержня. На левую часть стержня действуют силы H_A и F_1. Сила F_1 и реакция опоры H_A направлены к сечению, следовательно, подставляем их значения в формулу со знаком «-». Таким образом, в поперечном сечении II-II возникает продольная сила N_{Z_2} :

$$N_{Z_2} = \sum_{i=1}^{n} F_i = -H_A - F_1 = -80 - 10 = -90\ кН \quad \text{- (уравнение константы).}$$

Продольная сила N_{Z_2} в сечении II-II сжимающая, что означает сжатие *участка BC*.

Участок CD (0 ≤ z_3 ≤ 0,3 м)

Проведем сечение III-III на расстоянии z_3 от точки *D*. Отбросим правую от сечения часть стержня. Рассмотрим всю левую часть стержня. На левую часть стержня действуют силы H_A, F_1 и F_2. Сила F_1 и реакция опоры H_A направлены к сечению, следовательно, подставляем их значения в формулу со знаком «-». Сила F_2 направлена от сечения, следовательно, подставляем ее значение в формулу со знаком «+». Таким образом, в поперечном сечении III-III возникает продольная сила N_{Z_3}:

$$N_{Z_3} = \sum_{i=1}^{n} F_i = -H_A - F_1 + F_2 = -80 - 10 + 150 = 60 \text{ кН} \quad \text{- (уравнение константы).}$$

Продольная сила N_{Z_3} в сечении III-III растягивающая, что означает растяжение *участка CD*.

По найденным значениям продольных сил для каждого участка строим эпюру продольных сил N_Z (рисунок 3.2, б). Проверим правильность построения эпюры: в сечениях стержня, где приложены сосредоточенные нагрузки, на эпюре будут скачки, равные по величине приложенной сосредоточенной силе.

3. Определим из расчета на прочность при $\sigma_{adm}{}^p = \sigma_{adm}{}^c = 160$ МПа размеры поперечных сечений стержня. Выполним проверку прочности по участкам. Построить эпюру нормальных напряжений σ по длине стержня и эпюры распределения нормальных напряжений σ по поперечным сечениям.

Для определения размеров поперечных сечений используем формулу проектного расчета для определения требуемой по условию прочности площади опасного поперечного сечения.

Определим сечения, в которых возникает максимальная продольная сила (опасные сечения), на каждом участке стержня. В пределах каждого участка продольная сила постоянна. Следовательно, на каждом участке все сечения равноопасны.

По условию задачи *участки AB и BC* имеют одинаковые тип и размеры поперечного сечения. На *участке BC* продольная сила по абсолютному значению больше, чем на *участке AB*. Поэтому расчет требуемой площади поперечного сечения будем вести по *участку BC*.

Участок BC ($0 \le z_2 \le 0{,}2$ м)

Участок BC по условию задачи имеет прямоугольное поперечное сечение со сторонами b и h, причем $h \backslash b=2$.

Требуемая площадь поперечного сечения из условия прочности равна:

$$A_2^{тр} \ge \frac{|\ N_{Z_2}\ |}{\sigma_{adm}}.$$

Площадь прямоугольника с учетом условия задачи определяется по формуле:

$$A = b \cdot h = b \cdot 2b = 2b^2.$$

Откуда находим, что

$$b \ge \sqrt{\frac{A_2^{тр}}{2}} = \sqrt{\frac{\left|N_{Z_2}\right|}{2\cdot\sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{90\cdot10^3}{2\cdot160\cdot10^6}} \cong 0{,}0168\ м = 1{,}68\ см.$$

Назначаем *b = 1,7 см*.

Из заданного соотношения сторон прямоугольного сечения *(h\b=2)*, находим, что:

$$h = 2b = 2\cdot1{,}7 = 3{,}4\ см.$$

Определим нормальные напряжения при назначенных размерах поперечного сечения стержня на *участке ВС*, учитывая, что фактическая площадь поперечного сечения определяется по формуле $A_2^{ф} = 2b^2$:

$$\sigma_{BC} = \frac{N_{Z_2}}{A_2^{ф}} = \frac{N_{Z_2}}{2b^2} = -\frac{90\cdot10^3}{2\cdot1{,}7^2\cdot10^{-4}} = -15{,}57\cdot10^7\ \frac{Н}{м^2} = -155{,}7\ МПа$$ *- (уравнение константы).*

Так как все сечения в пределах *участка ВС* равноопасны, то $\sigma_{BC} = \sigma_{max}^{p}$.

Выполним проверку условия прочности:

$$\sigma_{\max} \le \sigma_{adm}^{p};$$

$$155{,}7\ МПа < 160\ МПа.$$

Недогрузка стержня на *участке ВС* составляет:

$$\frac{\left|\ \sigma_{\max} - \sigma_{adm}\ \right|}{\sigma_{adm}}\cdot100\ \% = \frac{\left|155{,}7-160\right|}{160}\cdot100\ \% = 2{,}7\ \%.$$

Недогрузка не превышает 5 %, следовательно, условие прочности на *участке ВС* выполняется.

Участок АВ (0 ≤ z₁ ≤ 0,1 м)

Определим нормальные напряжения при назначенных размерах поперечного сечения стержня на *участке АВ,* учитывая, что фактическая площадь поперечного сечения определяется по формуле $A_1^{ф} = 2b^2$:

$$\sigma_{AB} = \frac{N_{Z_1}}{A_1^{ф}} = -\frac{80\cdot10^3}{2\cdot1{,}7^2\cdot10^{-4}} = -13{,}84\cdot10^7\ \frac{Н}{м^2} = -138{,}4\ МПа$$ *- (уравнение константы).*

Так как все сечения в пределах участка равноопасны, то $\sigma_{AB} = \sigma_{max}{}^{p}$.

Выполним проверку условия прочности:

$$\sigma_{\max} \le \sigma_{adm}^{p};$$

$$138{,}4\ \text{МПа} < 160\ \text{МПа}.$$

Недогрузка стержня на *участке АВ* составляет:

$$\frac{|\ \sigma_{\max} - \sigma_{adm}\ |}{\sigma_{adm}} \cdot 100\ \% = \frac{|138{,}4 - 160|}{160} \cdot 100\ \% = 13{,}5\ \%.$$

Участок CD ($0 \le z_3 \le 0{,}3$ м)

Участок CD по условию задачи имеет круглое сплошное поперечное сечение диаметром d.

Требуемая площадь поперечного сечения из условия прочности равна:

$$A_3^{тр} \ge \frac{|\ N_{Z_3}\ |}{\sigma_{adm}}.$$

Площадь сплошного круглого сечения определяется по формуле:

$$A = \frac{\pi\, d^2}{4}.$$

Откуда находим, что:

$$d = \sqrt{\frac{4A_3^{тр}}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot |N_{Z_3}\ |}{\pi \cdot \sigma_{adm}}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 160 \cdot 10^6}} \cong 0{,}0219\ м = 2{,}19\ см.$$

Назначаем $d = 2{,}2$ *см*.

Определим нормальные напряжения при назначенных размерах поперечного сечения стержня на *участке CD*, учитывая, что фактическая площадь поперечного сечения определяется по формуле $A_3^{ф} = \dfrac{\pi\, d^2}{4}$:

$$\sigma_{CD} = \frac{N_{Z_3}}{A_3^{ф}} = \frac{N_{Z_3}}{\frac{\pi d^2}{4}} = \frac{4 \cdot 60 \cdot 10^3}{3{,}14 \cdot 2{,}2^2 \cdot 10^{-4}} = 15{,}79 \cdot 10^7\ \frac{Н}{м^2} = 157{,}9\ МПа$$ *- (уравнение константы).*

Так как все сечения в пределах участка равноопасны, то $\sigma_{CD} = \sigma_{max}{}^{p}$.

Выполним проверку условия прочности:

$$\sigma_{\max} \le \sigma_{adm}^{p};$$

$$157{,}9\ МПа < 160\ МПа.$$

Недогрузка стержня на *участке CD* составляет:

$$\frac{|\ \sigma_{\max} - \sigma_{adm}\ |}{\sigma_{adm}} \cdot 100\ \% = \frac{|157{,}9 - 160|}{160} \cdot 100\ \% = 1{,}3\ \%.$$

Недогрузка не превышает 5 %, следовательно, условие прочности на *участке CD* выполняется.

По найденным значениям нормальных напряжений на каждом участке строим эпюру распределения нормальных напряжений *σ* по длине стержня (рисунок 3.2, в).

Для опасных сечений строим эпюру распределения нормальных напряжений по сечению (рисунок 3.2, г). *Участок BC* более нагружен, чем *участок AB*, следовательно, любое сечения на *участке BC* более опаснее; поэтому эпюра распределения нормальных напряжений по высоте поперечного сечения строится на этом участке.

Из эпюры нормальных напряжений по длине стержня следует, что наибольшие нормальные напряжения возникают на *участке CD*:

$$\sigma_{CD} = \sigma_{\max} = 157{,}9\ МПа.$$

Условие прочности стержня выполняется:

$$157{,}9\ МПа < 160\ МПа.$$

4. Определим изменение длины заданного стержня под действием внешних сил и построим эпюру перемещений поперечных сечений. Выполним проверку условия жесткости.

Абсолютная деформация участка стержня определяется по формуле:

$$\Delta l = \int_0^l \frac{N_z dz}{EA_z}.$$

Составим уравнения изменения длины (абсолютной деформации) каждого участка, учитывая, что: $A_1^{ф} = 2b^2$; $A_2^{ф} = 2b^2$; $A_3^{ф} = \frac{\pi d^2}{4}$.

Участок AB ($0 \le z_1 \le 0{,}1$ м)

$$\Delta l_1 = \int_0^{z_1} \frac{N_{Z_1} \cdot dz_1}{E \cdot A_1^{\phi}} = \int_0^{z_1} -\frac{H_A \cdot dz_1}{E \cdot A_1^{\phi}} = -\frac{H_A \cdot z_1}{E \cdot A_1^{\phi}} = -\frac{H_A \cdot z_1}{E \cdot 2 \cdot b^2}$$ - *(уравнение наклонной прямой).*

Определим значение абсолютной деформации в граничных сечениях данного участка:

при $z_1 = 0 \quad \Delta l_1 = 0;$

при $z_1 = l_1 = 0{,}1\ м \quad \Delta l_1 = -\dfrac{80 \cdot 10^3 \cdot 0{,}1}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1{,}7^2 \cdot 10^{-4}} = -0{,}69 \cdot 10^{-4}\ м = -0{,}069\ мм.$

Участок ВС (0 ≤ z_2 ≤ 0,2 м)

$$\Delta l_2 = \int_0^{z_2} \frac{N_{Z_2} \cdot dz_2}{E \cdot A_2^{\phi}} = \int_0^{z_2} \frac{(-H_A - F_1) \cdot dz_2}{E \cdot A_2^{\phi}} = \frac{(-H_A - F_1) \cdot z_2}{E \cdot A_2^{\phi}} = \frac{(-H_A - F_1) \cdot z_2}{E \cdot 2 \cdot b^2}$$ - *(уравнение наклонной прямой).*

Определим значение абсолютной деформации в граничных сечениях данного участка:

при $z_2 = 0 \quad \Delta l_2 = 0;$

при $z_2 = l_2 = 0{,}2\ м \quad \Delta l_2 = \dfrac{(-80 - 10) \cdot 10^3 \cdot 0{,}2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 2 \cdot 1{,}7^2 \cdot 10^{-4}} = -1{,}56 \cdot 10^{-4}\ м = -0{,}156\ мм.$

Участок CD (0 ≤ z_3 ≤ 0,3 м)

$$\Delta l_3 = \int_0^{z_3} \frac{N_{Z_3} \cdot dz_3}{E \cdot A_3^{\phi}} = \int_0^{z_3} \frac{(-H_A - F_1 + F_2) \cdot dz_3}{E \cdot A_3^{\phi}} = \frac{(-H_A - F_1 + F_2) \cdot z_3}{E \cdot A_3^{\phi}} = \frac{(-H_A - F_1 + F_2) \cdot z_3}{E \cdot \frac{\pi d^2}{4}}$$

(уравнение наклонной прямой).

Определим значение абсолютной деформации в граничных сечениях данного участка:

при $z_3 = 0 \quad \Delta l_3 = 0;$

при $z_3 = l_3 = 0{,}3\, м \quad \Delta l_3 = \dfrac{(-80 - 10 + 150) \cdot 10^3 \cdot 0{,}3}{2 \cdot 10^{11} \cdot \frac{3{,}14 \cdot 2{,}2^2}{4} \cdot 10^{-4}} = 2{,}37 \cdot 10^{-4}\ м = 0{,}237\ мм.$

Для определения изменения длины стержня вычислим перемещения граничных сечений. Просуммируем абсолютные деформации участков стержня, начиная от заделки. Тогда перемещение граничных сечений будут соответственно равны:

- для сечения A: $\Delta l_A = 0$ (т.к. точка A находится в заделке);
- для сечения B: $\Delta l_B = \Delta l_A + \Delta l_1 = 0 - 0{,}069 = -0{,}069$ *мм*;
- для сечения C: $\Delta l_C = \Delta l_B + \Delta l_2 = -0{,}069 - 0{,}156 = -0{,}225$ *мм;*
- для сечения D: $\Delta l_D = \Delta l_C + \Delta l_3 = -0{,}225 + 0{,}237 = 0{,}012$ *мм*.

Абсолютная деформация стержня составляет:

$$\Delta l = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \int_{l_i} \frac{N_{Z_i}}{E \cdot A_i^{\phi}} = \int_0^{l_1} \frac{N_{Z_1} \cdot dz_1}{E \cdot A_1^{\phi}} + \int_0^{l_2} \frac{N_{Z_2} \cdot dz_2}{E \cdot A_2^{\phi}} + \int_0^{l_3} \frac{N_{Z_3} \cdot dz_3}{E \cdot A_3^{\phi}} =$$

$$= \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = -0{,}069 - 0{,}156 + 0{,}237 = 0{,}012 \ \text{мм}.$$

По вычисленным значениям перемещений граничных сечений строим эпюру перемещений поперечных сечений стержня Δl (рисунок 3.2, д).

Выполним проверку условия жесткости:

$$\Delta l \le \Delta l_{adm},$$

$$0{,}012 \ \text{мм} < 0{,}5 \ \text{мм}.$$

Условие жесткости стержня выполняется.

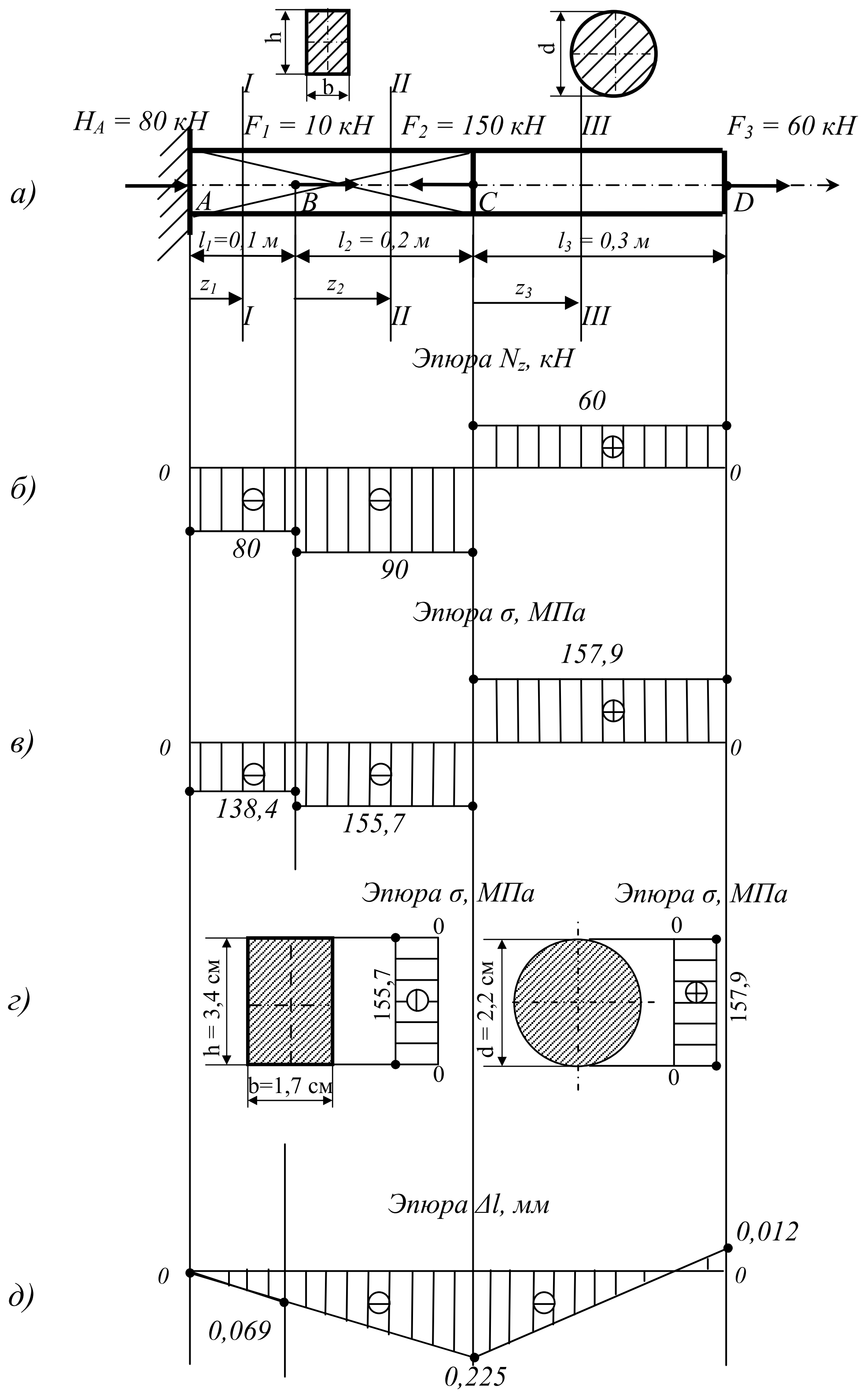


Рисунок 3.2 – Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений стержня.

4. Литература, рекомендуемая для изучения темы

1. **Кочетов, В.Т.** Сопротивление материалов / В.Т. Кочетов, А.Д. Павленко, М.В. Кочетов. - М.: ФЕНИКС, 2001. - 368 с.

2. **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев.- М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. - 590 с.

3. **Писаренко, Г.С.** Сопротивление материалов / Г.С. Писаренко, [и др.]. - Киев: Вища школа, 1986. - 775 с.

4. **Ромашов, Р.В.** Сопротивление материалов: учебное пособие / Р.В. Ромашов.-2-е изд.- Оренбург: ИПК ГОУ ОГУ, 2007. – 284 с.

5. **Костенко, Н.А.** Сопротивление материалов / Н.А. Костенко. - М.: Высшая школа, 2004. - 430 с.

6. **Маркова, Б.Н.** Сопротивление материалов: учебное пособие / Б.Н. Маркова. - М.: КДУ, 2006. - 256 с.