**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОНТЕ-КАРЛО ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ**

**Крючкова И.В., Молчанова Н.Н.**
**Оренбургский государственный университет, г. Оренбург**

Метод Монте-Карло - это численный метод для решения различных задач с помощью моделирования случайных величин.

1. Сущность метода Монте-Карло

Сущность метода Монте-Карло следующая: требуется найти значение А некоторой изучаемой величины. Для этого выберем такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно А:

$$M(x) = A$$

На практике поступаем так: производим n испытаний, в результате которых получаем n возможных значений x; вычисляем их среднее арифметическое

$$\overline{x} = (\sum x_i)/n$$

и принимаем в качестве оценки (приближенного значения) искомого числа a:

$$a \cong \overline{x}$$

2. Непрерывные случайные величины.

Для вычисления определенного интеграла нам понадобится непрерывная случайная величина.

Случайная величина $\xi$ - непрерывна, когда она принимает любое значение из некоторого интервала (a,b).

Математическим ожиданием непрерывной случайной величины называется число

$$M\xi = \int_a^b xp(x)dx.$$

Дисперсией случайной величины $\xi$ называется число

$$D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2.$$

Укажем формулу для математического ожидания случайной функции:

$$Mf(\xi) = \int_a^b f(x)p(x)dx,$$

где $\eta = f(\xi)$ – случайная функция.

Случайная величина $\eta$ называется равномерно распределенной в интервале (a,b), если ее плотность постоянна в этом интервале.

$$\eta = a + \gamma(b-a).$$

3. Вычисление определенного интеграла.

Метод Монте-Карло применяется не только к чисто вероятностным задачам, он находит свое применение в вычислении определенных интегралов.

Рассмотрим функцию f(x), заданную на интервале a < x < b. Требуется приближенно вычислить интеграл

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

Выбираем произвольную плотность распределения $p_\xi(x)$ ,которая определена на интервале (a, b) (т.е. произвольную функцию $p_\xi(x)$ , удовлетворяющую условиям для вероятности непрерывной случайной величины).

Наряду со случайной величиной $\xi$ , определенной в интервале (a, b) с плотностью $p_\xi(x)$, нам нужна случайная величина

$$\eta = g(\xi) / p_\xi(x).$$

Согласно формуле математического ожидания для случайной функции:

$$M\eta = \int_a^b \left[ \frac{g(x)}{p_\xi(x)} \right] p_\xi(x)dx = I.$$

Генерируем случайные величины с плотностью вероятности $p_\xi(x)$ ,т.е. мы выбираем N значений $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_N$ ,тогда при достаточно большом N

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \frac{g(x)}{p_\xi(x)} \approx I.$$

Выбор схемы расчета:

Для расчета интеграла может использоваться любая случайная величина $\xi$ , определенная в интервале (a, b). В любом случае

$$M\eta = M\left[ g(\xi) / p_\xi(\xi) \right] = I.$$

Но дисперсия $D\eta$ и оценка погрешности зависят от того, какую величину $\xi$ использовать. Действительно

$$D\eta = M(\eta^2) - I^2 = \int_a^b \left[ \frac{g^2(x)}{p_\xi(x)} \right] dx - I^2.$$

Это выражение будет минимальным тогда, когда $p_\xi(x)$ пропорциональна $|g(x)|$.

При выборе очень сложных плотности вероятностей $p_\xi(x)$, процедура разыгрывания значений $\xi$ очень трудоемкая. Но при выборе $p_\xi(x)$ можно руководствоваться ее пропорциональностью $|g(x)|$.

Оценка ошибки:

Абсолютная ошибка при вычислении интеграла $I$ по формуле $\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{g(x)}{p_\xi(x)} \approx I$ практически не превышает величины $3\sqrt{D\eta / N}$ . В действительности же ошибка, как правило, заметно меньше этой величины. Поэтому для оценки ошибки на практике часто используют вероятную ошибку

$$\delta_{вер} = 0.675\sqrt{D\eta / N}.$$

На практике абсолютная ошибка зависит от выбора случайных чисел и может оказаться как в 2—3 раза больше, так и в несколько раз меньше, чем $\delta_{вер}$. Вероятная ошибка $\delta_{вер}$ дает нам не саму ошибку, а лишь задает её порядок.

Пример:

Вычислим приближенно интеграл:

$$I = \int_0^1 x^2 dx.$$

Точное значение интеграла:

$$\int_0^1 x^2 dx = [x^3/3]\Big|_0^1 = 1/3 \approx 0.333$$

Для вычисления интеграла используем две различные случайные величины $\xi$ : с постоянной плотностью $p_\xi(x) = 1$ (то есть $\xi$ равномерно распределена в интервале (0, 1)) и с линейной плотностью $p_\xi(x) = (3\sqrt{x})/2$ (т.е $\int_0^1 p_\xi(x) = 1$).

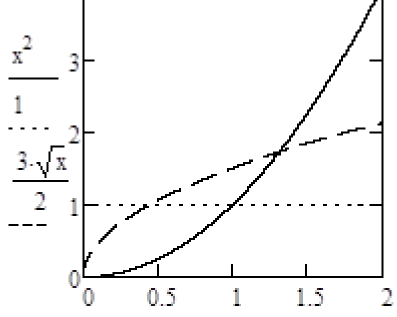


Рисунок 1. Графики функций

А) Пусть $p_\xi(x) = 1$ на интервале (0, 1). Формула для разыгрывания

$\xi$ может быть получена из формулы $\eta = a + \gamma(b - a)$ при a = 0 и b = 1:

$$\xi = \gamma.$$

А формула для приближенного расчета интеграла методом Монте-Карло примет вид:

$$I = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \xi_i^2.$$

Пусть N=10. Используем программу Mathcad для генерирования случайных чисел $\gamma$ (см. таблицу 1).

Таблица 1. Случайные величины

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | 0.599 | 0.735 | 0.572 | 0.152 | 0.425 | 0.517 | 0.752 | 0.169 | 0.492 | 0.7 |
| $\xi$ | 0.599 | 0.735 | 0.572 | 0.152 | 0.425 | 0.517 | 0.752 | 0.169 | 0.492 | 0.7 |

Из расчета $I \approx 0.302$.

Б) Пусть теперь $p_\xi(x) = (3\sqrt{x})/2$. Для разыгрывания $\xi$ используем уравнение:

$$\int_0^{\xi} ((3\sqrt{x})/2)dx = \gamma$$

откуда после несложных вычислений получим

$$\xi = \sqrt[3]{\gamma^2}$$

А формула для приближенного расчета интеграла методом Монте-Карло примет вид:

$$I = \frac{2}{3N}\sum_{i=1}^{N} \frac{\xi_i^2}{\sqrt{\xi_i}}$$

Возьмем те же $\gamma$, что и для случая А) и рассчитаем $\xi$ (см. таблицу 2):

Таблица 2. Случайные величины

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | 0.599 | 0.735 | 0.572 | 0.152 | 0.425 | 0.517 | 0.752 | 0.169 | 0.492 | 0.7 |
| $\xi$ | 0.711 | 0.814 | 0.689 | 0.284 | 0.565 | 0.644 | 0.827 | 0.306 | 0.623 | 0.788 |

В результате вычислений $I \approx 0.341$.

Второй способ вычисления дал более точный результат.

Оценим ошибку для первого и второго случая:

Рассчитаем дисперсию, вероятностную ошибку и ошибку, полученную в вычислении.

$$D\eta = \int_a^b \left[ \frac{g^2(x)}{p_\xi(x)} \right] dx - I^2$$

$$\delta_{вер} = 0.675\sqrt{D\eta / N}.$$

Таблица 3. Результаты измерений

| Метод | $D\eta$ | $\delta_{вер}$ | $\delta_{счет}$ |
|---|---|---|---|
| А) | 0.089 | 0.064 | 0.031 |
| Б) | 0.037 | 0.041 | 0.008 |

Сделаем вывод: вычисление данного интеграла приведено для примера. На практике метод Монте-Карло применяется для расчета определенных интегралов, не берущихся обычными способами, а также для вычисления кратных интегралов. Метод Монте-Карло для кратных интегралов почти не отличается от метода приведенного выше.

*Список литературы*


*1. Соболь И. М. Метод Монте-Карло/ И.М.Соболь. - М., «Наука», 1968, 64 с.*

*Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: Учеб. пособие для вузов/В. Е. Гмурман. — 9-е изд., стер. — М.: Высш. шк., 2003. — 479 с: ил.*