

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Л.И. Кудина

# **РАСЧЕТ ПЛОСКОЙ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМОЙ ФЕРМЫ**

Методические указания  
к выполнению расчетно-графического задания  
по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом  
Государственного образовательного учреждения  
высшего профессионального образования  
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург  
ИПК ГОУ ОГУ  
2010

УДК 531.2(07)  
ББК 22.21я73  
К 88

Рецензент – профессор, кандидат технических наук Р.В. Ромашов

**Кудина, Л.И.**  
К 88 Расчет плоской статически определимой фермы: методические указания к выполнению расчетно-графического задания по дисциплине «Теоретическая механика» / Л.И. Кудина; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 43с.

Методические указания содержат краткие сведения из теории расчета статически определимых ферм, рекомендации по определению усилий в стержнях ферм аналитическим и графическим способами, примеры расчета ферм с использованием системы Mathcad, а также варианты расчетно-графического задания и пример его решения.

Предназначены для самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению 653500 «Строительство», при выполнении расчетно-графического задания по дисциплине «Теоретическая механика».

УДК 531.2(07)  
ББК 22.21я73

©Кудина Л.И., 2010  
©ГОУ ОГУ, 2010

## Содержание

Введение .....	4
1 Краткие теоретические сведения .....	5
1.1 Общие положения .....	5
1.2 Аналитические способы определения усилий в стержнях ферм .....	8
1.2.1 Способ вырезания узлов .....	8
1.2.2 Способ сечений (способ Риттера).....	11
1.3 Графический способ определения усилий в стержнях ферм.....	13
1.3.1 Порядок построения диаграммы Максвелла – Кремоны .....	13
1.3.2 Определение усилий в стержнях по диаграмме Максвелла-Кремоны .....	16
2 Вопросы для самоконтроля .....	18
3 Задание. Расчет плоской статически определимой фермы.....	19
3.1 Содержание задания.....	19
3.2 Пример выполнения задания.....	22
4 Определение усилий в стержнях ферм с помощью системы Mathcad .....	37
4.1 Определение усилий в стержнях ферм матричным способом .....	38
4.2 Определение усилий в стержнях ферм с помощью вычислительного блока Given - Find.....	41
5 Литература, рекомендуемая для изучения темы.....	43

## Введение

В строительстве при возведении мостов, опор линий электропередач, подъемных кранов, покрытий промышленных и гражданских зданий широко используются сквозные конструкции, называемые фермами. По сравнению со сплошными балками фермы более экономичны по затрате материала, им легко придают любые очертания, требуемые условиями эксплуатации или архитектурными соображениями, фермы относительно просты в изготовлении и монтаже.

Треугольные деревянные конструкции, похожие на современные фермы, применялись еще в Древнем Риме при устройстве покрытий гражданских зданий. Изображения мостов, в конструкциях которых присутствуют фермы, содержатся в зарисовках французского архитектора XIII века В. де Гоннекура. В трактатах итальянских архитекторов С. Серлио (1475 – 1554) и А. Палладио (1518 - 1580) приведено обстоятельное описание сложных ферм, по своей схеме близких к современным. Однако, из-за отсутствия достоверных сведений об их работе и несовершенства узловых соединений, фермы не получили в то время большого распространения. Лишь в XIX веке, когда были разработаны простые и надежные методы расчета таких конструкций, началось широкое и разнообразное применение ферм в строительстве.

Методические указания к выполнению расчетно-графического задания по определению усилий в стержнях плоских ферм предназначены, в первую очередь, для студентов строительных специальностей. Вместе с тем настоящие методические указания могут быть рекомендованы и студентам других инженерно-технических специальностей в качестве пособия при самостоятельном изучении методов расчета простейших ферм.

# 1 Краткие теоретические сведения

## 1.1 Общие положения

**Фермой** называется геометрически неизменяемая (жесткая) система, состоящая из прямолинейных стержней, соединенных по концам шарнирами.

Ферма состоит из большого числа стержней, соединенных в точках пересечения их осей (рисунок 1.1). Места соединения стержней называют **узлами**. Если оси всех стержней фермы и линии действующих на нее сил лежат в одной плоскости, то ферма называется **плоской**. Вертикальные стержни фермы называют **стойками**, а наклонные – **раскосами**. Стержни, ограничивающие ферму по верхнему контуру, образуют **верхний пояс**, а ограничивающие по нижнему контуру – **нижний пояс** фермы.

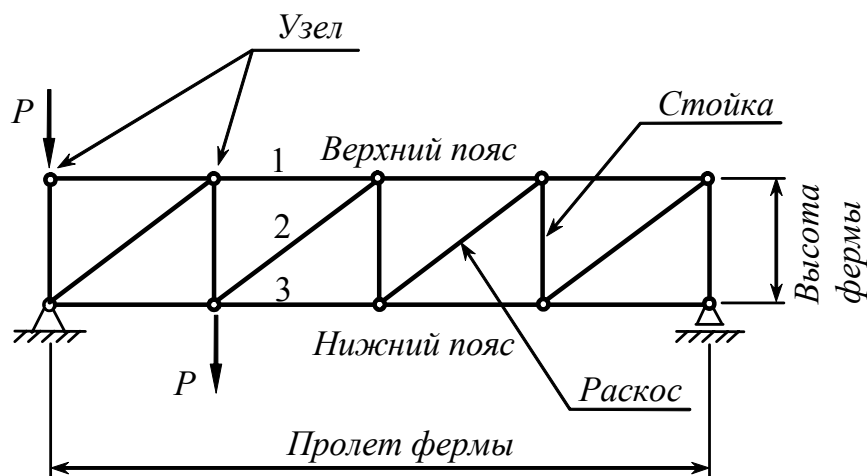


Рисунок 1.1 – Схема фермы

При расчете ферм принимаются следующие допущения:

- 1) стержни фермы считаются невесомыми;
- 2) узлы фермы считаются идеальными (лишенными трения) шарнирами;
- 3) действующие внешние силы приложены в узлах фермы.

При принятых допущениях на каждый стержень фермы будут действовать только две силы  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$ , являющиеся реакциями шарниров, находящихся на концах стержня (рисунок 1.2). Согласно аксиомам статики стержень может находиться в равновесии под действием двух сил только в том случае, если эти силы будут равны по величине и направлены в противоположные стороны вдоль одной прямой, то есть по оси стержня. Следовательно, можно считать, что *стержни ферм работают только на растяжение или сжатие*. На рисунке 1.2 стержень АВ растягивается силами  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$ , приложенных к его концам со стороны узлов фермы. Тогда реакции  $\bar{S}$  и  $\bar{S}'$ , действующие на узлы А и В фермы со стороны стержня, будут соответственно равны по модулю и противоположно направлены силам  $\bar{F}$  и  $\bar{F}'$ . Аналогичная картина будет наблюдаться и при сжатии стержня. Возникающие при этом в самих стержнях внутренние силы, препятствующие изменению их формы, называются *усилиями в стержнях*. Очевидно, что эти усилия равны реакциям  $\bar{S}$  и  $\bar{S}'$ , действующим на узлы фермы со стороны стержней.

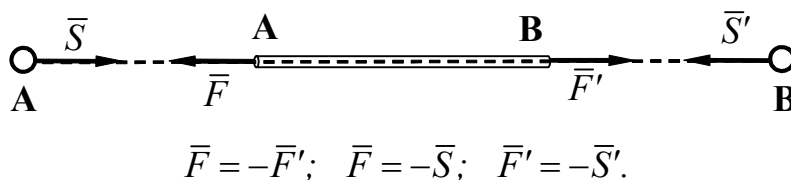


Рисунок 1.2

Подобное представление о работе стержней фермы, конечно, является идеализированным. В реальной ферме стержни обладают весом и соединяются между собой наглухо (с помощью сварки, заклепок и т.п.). Вследствие этого под действием собственного веса стержни будут изгибаться. Но так как собственный вес стержней является незначительным по сравнению с силами, приложенными в узлах фермы, принятые допущения позволяют наиболее простым способом получить результаты, достаточно близкие к действительности.

Ферма представляет собой жесткую, неизменяемую конструкцию: под действием приложенных к ней сил узлы фермы не могут изменять своего взаимного положения.

Простейшей неизменяемой фермой является так называемый шарнирный треугольник (рисунок 1.3, а).

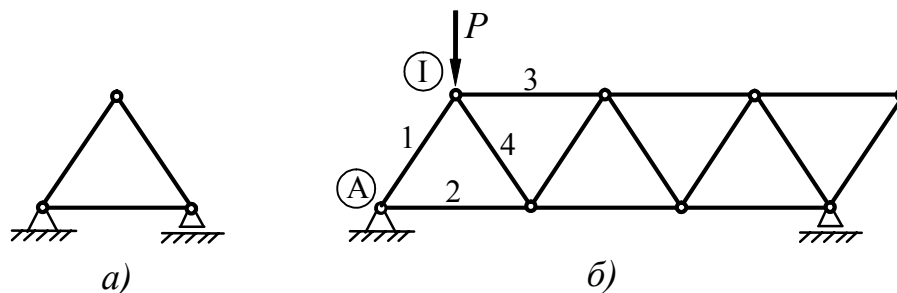


Рисунок 1.3

Очевидно, что плоская ферма, полученная из шарнирного треугольника путем последовательного присоединения каждого нового узла при помощи двух стержней, также является неизменяемой (рисунок 1.3, б).

Ферма, теряющая свойство жесткости при удалении хотя бы одного стержня, называется *фермой без лишних стержней*.

В плоской ферме без лишних стержней число стержней  $m$  и число узлов  $n$  связаны соотношением:

$$m = 2n - 3. \quad (1.1)$$

Условие (1.1) одновременно является и *условием статической определенности* плоской фермы, так как в этом случае число неизвестных реакций будет равно числу независимых уравнений равновесия, которые можно составить для определения этих реакций.

Расчет фермы сводится к определению опорных реакций и усилий в ее стержнях.

Опорные реакции можно найти обычными методами статики, рассмотрев равновесие фермы в целом, как абсолютно твердого тела, находящегося под действием внешней нагрузки и реакций связей.

Для определения усилий в стержнях ферм используют аналитические и графические способы.

## 1.2 Аналитические способы определения усилий в стержнях ферм

Существуют два основных аналитических способа определения усилий в стержнях статически определимых ферм: способ вырезания узлов и способ сечений.

Метод расчета ферм, в основе которого лежит идея вырезания узлов и составления для них уравнений равновесия, был разработан русским ученым Д.И. Журавским (1821 – 1891), использовавшим его почти на шесть лет ранее немецкого механика К. Кульмана (1821 – 1881). Способ сечений в практически удобной форме был предложен немецким инженером А. Риттером (1826 – 1906) и усовершенствован впоследствии русским инженером и ученым Ф.С. Ясинским (1856 – 1899).

### 1.2.1 Способ вырезания узлов

Этим способом удобно пользоваться для определения усилий во *всех* стержнях фермы. Он сводится к последовательному составлению уравнений равновесия сил, сходящихся в каждом из узлов фермы.

Расчет начинают с узла, в котором сходятся два стержня. Для фермы, изображенной на рисунке 1.3, б, таким узлом является, например, узел А. Мысленно вырезая узел из фермы, рассматривают его равновесие под действием внешних сил, включая опорные реакции, и реакций отброшенных стержней (рисунок 1.4).



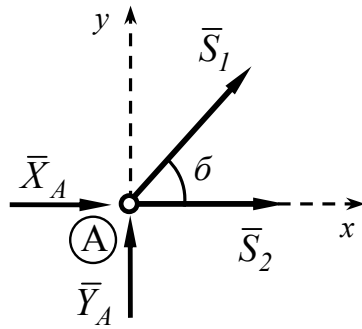


Рисунок 1.4

***Предполагая все стержни фермы растянутыми, реакции стержней направляют от узла.***

Составляя два уравнения равновесия (1.2) плоской сходящейся системы сил, действующей на узел, определяют неизвестные реакции стержней  $S_1$  и  $S_2$ .

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases}; \begin{cases} X_A + S_1 \cos \alpha + S_2 = 0 \\ Y_A + S_1 \sin \alpha = 0 \end{cases}. \quad (1.2)$$

Если в результате вычислений значение реакции окажется отрицательным, то это означает, что в действительности данный стержень сжат, а не растянут. Найденные реакции и будут равны по модулю искомым усилиям в стержнях.

Затем переходят к рассмотрению равновесия узла, в котором может сходиться произвольное число стержней, но усилия неизвестны только в двух из них (рисунок 1.5). Составляя два уравнения равновесия (1.3) плоской сходящейся системы сил, действующей на узел, определяют неизвестные реакции стержней  $S_3$  и  $S_4$  и т.д.

Последовательность рассмотрения узлов определяется условием, что число неизвестных сил, приложенных к узлу, не должно превышать число независимых уравнений равновесия (для плоской фермы – два).

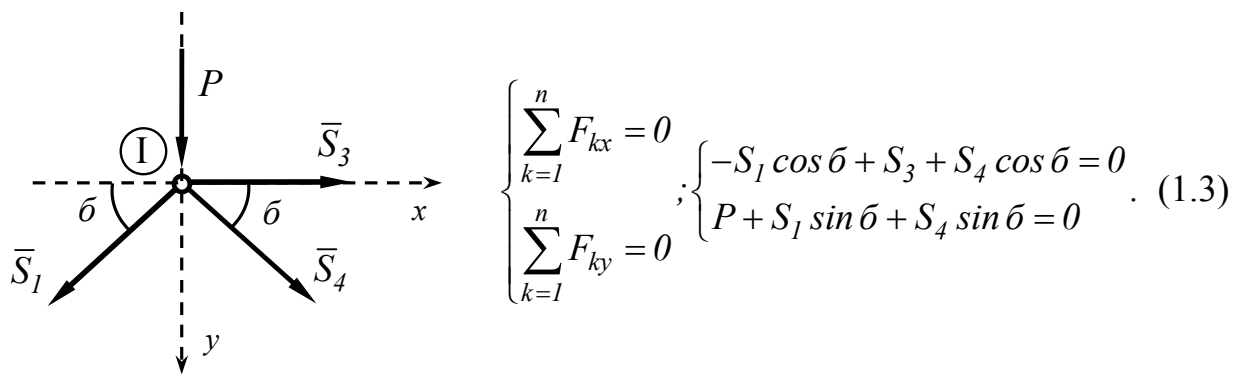


Рисунок 1.5

Усилия в отдельных стержнях загруженной фермы могут оказаться равными нулю. Такие стержни принято называть **нулевыми**.

Пользуясь **признаками нулевых стержней**, можно найти эти стержни, не производя расчета всей фермы:

1. Если в незагруженном узле плоской фермы сходятся два стержня, то усилия в этих стержнях равны нулю (рисунок 1.6, а).
2. Если в незагруженном узле фермы сходятся три стержня, два из которых расположены на одной прямой, то усилие в третьем стержне равно нулю, а в двух других стержнях – равны между собой (рисунок 1.6, б).
3. Если в узле плоской фермы сходятся два стержня, и приложенная к узлу сила действует по оси одного из этих стержней, то усилие в этом стержне равно по модулю приложенной силе, а усилие в другом стержне равно нулю.

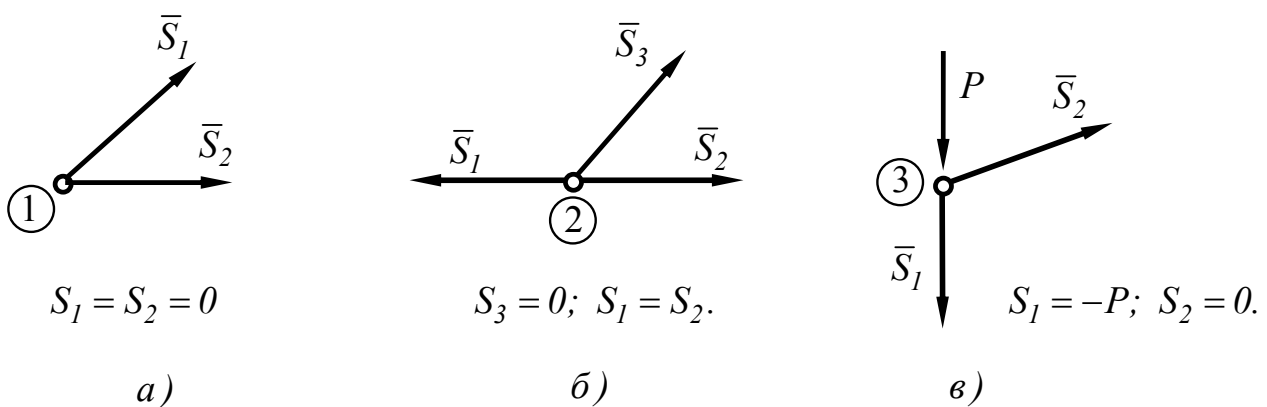


Рисунок 1.6

Заметим, что удалять нулевые стержни из фермы нельзя, так как в этом случае будет нарушено условие геометрической неизменяемости фермы (1.1).

### 1.2.2 Способ сечений (способ Риттера)

Этим способом удобно пользоваться для определения усилий в *отдельных* стержнях фермы, в частности для проверочных расчетов.

Поясним идею способа на примере определения усилий в стержнях 1 и 2 фермы, изображенной на рисунке 1.1. Ферму мысленно разрезают на две части так, чтобы число разрезанных стержней не превышало трех (сечение проходит через стержни 1, 2, 3). Затем рассматривают равновесие одной из частей фермы под действием внешних сил (включая опорные реакции) и реакций рассеченных стержней (рисунок 1.7). **Предполагая все стержни фермы растянутыми, реакции стержней направляют от сечения.**

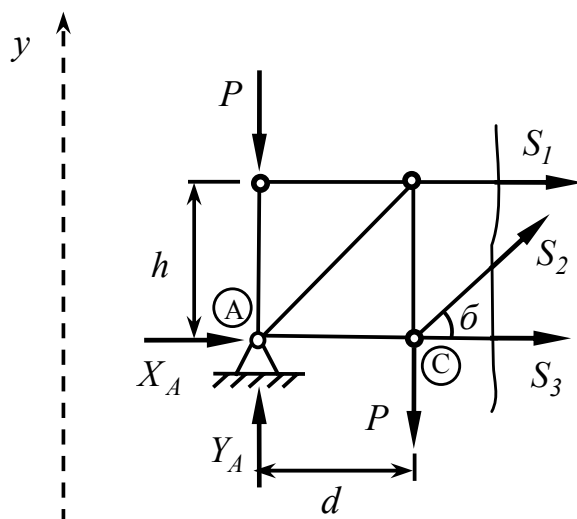


Рисунок 1.7

Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на рассматриваемую часть фермы, должны быть составлены так, чтобы в каждое уравнение входила только одна неизвестная реакция.

Таким образом, *усилия в стержнях фермы должны определяться независимо друг от друга, только через внешние силы.*

Если два из рассеченных стержней параллельны, то реакция третьего стержня определяется из уравнений проекций на ось, перпендикулярную двум первым стержням. Так, для определения реакции  $S_2$  (рисунок 1.7) нужно составить уравнение проекций сил на ось  $y$ :

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A - 2P + S_2 \sin \delta = 0. \quad (1.4)$$

В остальных случаях искомая реакция определяется из уравнения моментов относительно точки пересечения линий действия двух других реакций. Так, для определения реакции  $S_1$  (рисунок 1.7) составляется уравнение моментов относительно точки  $C$  пересечения линий действия  $S_2$  и  $S_3$  :

$$\sum_{k=1}^n m_C(\bar{F}_k) = 0; \quad Pd - Y_A d - S_1 h = 0. \quad (1.5)$$

Найденные реакции будут равны по модулю усилиям в соответствующих стержнях. Отрицательный знак реакции стержня будет указывать, что в действительности данный стержень сжат, а не растянут.

Сравнивая два рассмотренных способа определения усилий в стержнях ферм, следует заметить, что способ вырезания узлов более прост, хорошо программируется. К его недостаткам можно отнести то, что усилия в стержнях фермы определяются последовательно: каждое усилие определяется через вычисленные ранее усилия. Это приводит к суммирующейся при переходе от узла к узлу погрешности вычислений. Способ Риттера позволяет определить усилие в любом стержне фермы, не находя усилий в других. В этом его большое преимущество перед способом вырезания узлов.

### 1.3 Графический способ определения усилий в стержнях ферм

Графическая интерпретация способа вырезания узлов была предложена английским физиком Дж. К. Максвеллом (1831 – 1879), а затем развита итальянским геометром Л. Кремоной (1830 – 1903). Способ Максвелла – Кремоны сводится к построению единой диаграммы, дающей возможность графически определить усилия во всех стержнях фермы. Дж. К. Максвелл дал теоретическое обоснование этого способа, а Л. Кремона применил его на практике в приложении к фермам.

Идея этого способа состоит в построении замкнутого многоугольника сил для каждого узла фермы. Так как усилие в каждом стержне входит в силовые многоугольники двух узлов фермы, то объединив все построенные многоугольники общими сторонами, получают геометрическую фигуру, называемую *диаграммой Максвелла – Кремоны*.

#### 1.3.1 Порядок построения диаграммы Максвелла – Кремоны

1. Построить схему фермы в произвольном масштабе.
2. Определить опорные реакции фермы (графическим или аналитическим способом).
3. Обозначить внешние зоны фермы. Границами зон являются линии действия внешних сил и опорных реакций.
4. Обозначить внутренние зоны фермы. Границами зон являются элементы (стержни) фермы.
5. Обходя ферму по часовой стрелке, в принятом масштабе построить многоугольник внешних сил. При этом каждая сила обозначается двумя индексами: первый (начало вектора) – совпадает с обозначением зоны, расположенной перед силой, второй (конец вектора) – совпадает с обозначением зоны, расположенной за силой. Силы изображаются на диаграмме отрезками, откладываемыми по направлению действия сил в той последовательности, в которой они встречаются

при обходе внешних зон фермы. Если опорные реакции определены верно, то многоугольник внешних сил будет замкнут.

6. Определение усилий необходимо начинать с узла, в котором сходятся два стержня. Обходя узел по часовой стрелке, обозначить стержни в соответствии с правилом, принятым при обозначении сил (пункт 5).

7. Из точек, входящих в обозначения стержней и уже присутствующих на диаграмме, провести прямые, параллельные соответствующим стержням. Точку пересечения этих прямых обозначить общим индексом, который входит в обозначение стержней, и положение которого ранее было неизвестно.

8. Следующим рассмотреть узел, в котором сходится произвольное число стержней, но усилия неизвестны только в двух из них. Для данного узла повторить действия, изложенные в пунктах 6 и 7.

Действия, изложенные в пункте 8, повторяют до тех пор, пока на диаграмме не появятся все точки, соответствующие наименованиям внутренних зон фермы.

Построенная диаграмма должна быть замкнутой.

Рассмотрим построение диаграммы Максвелла - Кремоны на примере фермы, изображенной на рисунке 1.8.

В произвольном масштабе строим схему фермы. Опорные реакции фермы определяем из условия симметрии фермы и внешней нагрузки:  $R_1 = R_2 = \frac{P}{2}$ .

Внешние силы и опорные реакции должны быть изображены на схеме таким образом, чтобы они проходили вне контура фермы. Силы разбивают пространство вокруг фермы на три внешние зоны, которые обозначаем буквами: от силы  $\bar{R}_2$  до силы  $\bar{P}$  – зона А; от силы  $\bar{P}$  до силы  $\bar{R}_1$  – зона В; от силы  $\bar{R}_1$  до силы  $\bar{R}_2$  – зона С. Внутренние зоны, границами которых являются стержни фермы, обозначаем римскими цифрами – зоны I и II.

Обходя внешние зоны фермы по часовой стрелке (начиная с любой зоны), обозначаем внешние силы и откладываем их на диаграмме в выбранном масштабе. Согласно принятому правилу сила  $\bar{P}$  будет изображаться на диаграмме отрезком АВ длиной 4 см, который откладываем из произвольно выбранной точки А

вниз (по направлению действия силы  $\bar{P}$ ). Сила  $\bar{R}_1$  получает обозначение BC. Из точки B откладываем вверх (по направлению действия силы  $\bar{R}_1$ ) отрезок BC длиной 2 см. Сила  $\bar{R}_2$  получает обозначение CA. Из точки C откладываем вверх (по направлению действия силы  $\bar{R}_2$ ) отрезок  $|CA| = 2$  см. В результате попадаем в точку A, с которой начиналось построение диаграммы: многоугольник внешних сил оказывается замкнутым.

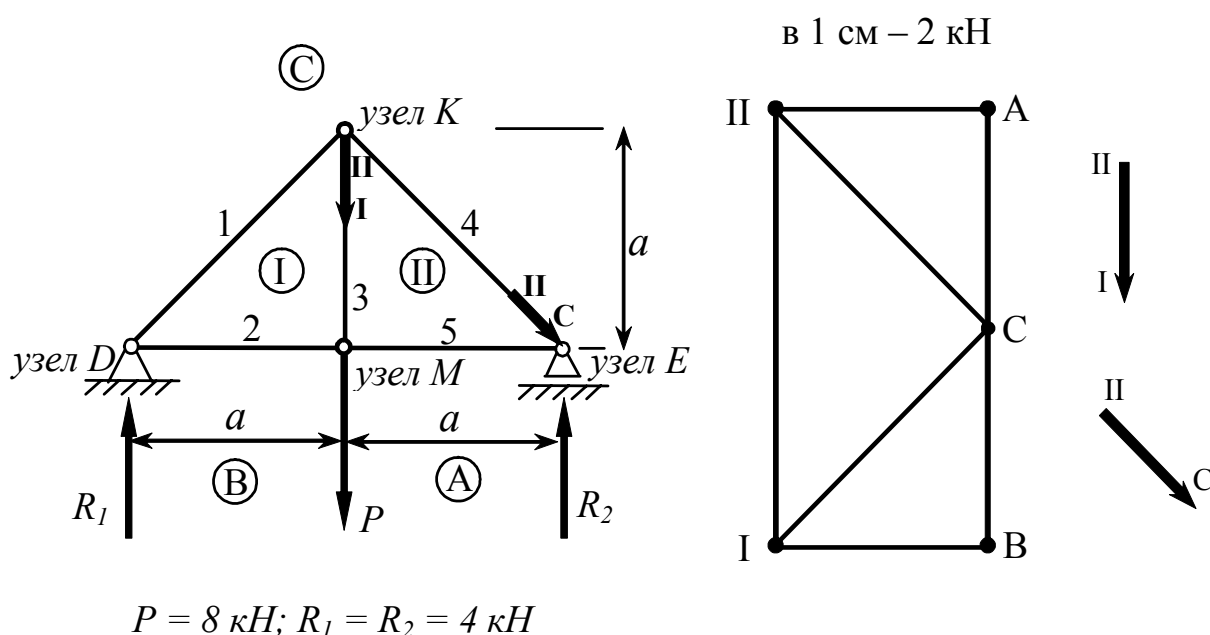


Рисунок 1.8

Определение усилий в стержнях фермы начинаем с узла  $D$ , в котором сходятся два стержня 1 и 2. Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами, соответствующими наименованиям зон перед стержнем и после него. Стержень 1 получает обозначение C-I, стержень 2 – обозначение I-B. Из точек C и B, которые уже присутствуют на диаграмме, проводим прямые, параллельные соответствующим стержням: из точки C – параллельную стержню C-I, из точки B – параллельную стержню I-B. Точку пересечения этих прямых обознача-

ем I (общий индекс в обозначениях стержней). Отрезки C-I и I-B в принятом масштабе изображают усилия в соответствующих стержнях.

Следующим рассмотрим узел *M*, в котором сходятся три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (стержни 3 и 5). Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни с неизвестными усилиями: стержень 3 получает обозначение I-II, стержень 5 – обозначение II-A. Из точки I проводим прямую, параллельную стержню I-II, из точки A – прямую, параллельную стержню II-A. Точку пересечения прямых обозначаем II. Отрезки I-II и II-A изображают усилия в соответствующих стержнях. Так как на диаграмме присутствуют все точки, соответствующие обозначениям внешних и внутренних зон фермы, построение диаграммы считается законченным.

### 1.3.2 Определение усилий в стержнях по диаграмме Максвелла-Кремоны

При определении значений усилий в стержнях фермы по диаграмме Максвелла-Кремоны рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

1. Выбрать один из двух узлов фермы, примыкающих к стержню, усилие в котором требуется определить.

2. Обходя узел по часовой стрелке, обозначить стержень двумя индексами по принятому ранее правилу. Длина соответствующего отрезка на диаграмме в выбранном масштабе и есть значение усилия в данном стержне.

3. Для определения знака усилия изобразить соответствующий отрезок вектором (первый индекс в обозначении стержня – начало вектора, второй – его конец). Мысленно перенести вектор на стержень на схеме фермы. Если вектор направлен от выбранного узла, то стержень растянут (величина усилия принимается со знаком «плюс»), если к узлу – сжат (величина усилия принимается со знаком «минус»).

Определим по построенной диаграмме (рисунок 1.8) усилие в стержне 3. Выбираем один из двух узлов, к которому примыкает этот стержень, например,



узел  $K$ . При обходе узла  $K$  по часовой стрелке стержень 3 получает обозначение II-I. Длина отрезка II-I составляет 4 см, что в выбранном масштабе соответствует 8 кН. Переносим вектор  $\overline{II-I}$  на стержень 3 на схеме фермы. Вектор направлен от узла  $K$ , следовательно, стержень 3 растянут. Таким образом, искомое усилие в стержне  $S_3 = 8 \text{ кН}$ .

Тот же результат получим, если будем рассматривать узел  $M$ . В этом случае стержень 3 получит обозначение I-II. Длина отрезка I-II останется прежней, а направление вектора  $\overline{I-II}$  изменится на противоположное. При наложении на схему фермы вектор  $\overline{I-II}$  будет направлен от узла  $M$ , что соответствует положительному знаку усилия (растянутому стержню).

Определим усилие в стержне 4. Выбираем узел  $E$ . При обходе узла  $E$  по часовой стрелке стержень 4 получает обозначение II-C. Длина отрезка II-C составляет 2,8 см, что в выбранном масштабе соответствует 5,6 кН. Переносим вектор  $\overline{II-C}$  на стержень 4 на схеме фермы. Вектор направлен к узлу  $E$ , следовательно, стержень 4 сжат. Таким образом, искомое усилие в стержне  $S_4 = -5,6 \text{ кН}$ .

В заключение отметим, что диаграмма Максвелла – Кремоны до сих пор сохраняет свое значение как пример быстрого и изящного определения усилий в стержнях плоских ферм.

## 2 Вопросы для самоконтроля

1. Какая конструкция называется фермой?
2. Какие допущения принимаются при расчете ферм?
3. Какая ферма называется плоской?
4. Какая ферма называется фермой без лишних стержней?
5. Какая зависимость существует между числом стержней и числом узлов плоской статически определимой фермы? фермы без лишних стержней?
6. В чем заключается сущность способа вырезания узлов?
7. Почему для плоской фермы определение усилий способом вырезания узлов начинают с узла, в котором сходятся только два стержня?
8. Каким условием определяется последовательность рассмотрения узлов фермы при расчете способом вырезания узлов?
9. Как формулируются признаки нулевых стержней?
10. Докажите самостоятельно признаки нулевых стержней для плоской фермы.
11. В чем заключается сущность способа Риттера?
12. В какой форме составляются уравнения равновесия для определения усилий в стержнях фермы способом сечений?
13. В чем заключается преимущество способа Риттера перед способом вырезания узлов?
14. Как обозначают внешние силы и стержни фермы при построении диаграммы Максвелла – Кремоны?
15. Как определить растянут или сжат данный стержень по диаграмме Максвелла – Кремоны?

### 3 Задание. Расчет плоской статически определимой фермы

#### 3.1 Содержание задания

Для плоской фермы (рисунок 3.1) с выбранными в соответствии с вариантом размерами и нагрузкой (таблица 1) требуется:

- 1) определить способом вырезания узлов усилия во всех стержнях;
- 2) определить способом сечений (способом Риттера) усилия в трех указанных стержнях;
- 3) построить диаграмму Максвелла – Кремоны и определить по ней усилия во всех стержнях;
- 4) результаты расчета оформить в виде таблицы и сравнить значения, полученные способом вырезания узлов и по диаграмме Максвелла – Кремоны.

Внешние силы, приложенные в указанных узлах фермы, направлены вертикально вниз. При решении задачи собственным весом стержней пренебречь.

#### *Примечания*

1 По заданию преподавателя вычисление усилий способом вырезания узлов может проводиться в системе Mathcad. В этом случае в отчете по расчетно-графическому заданию **обязательно** приводятся расчетные схемы всех узлов фермы и составленные уравнения равновесия сил, сходящихся в узлах. К отчету прикладывается распечатка программы с выводом результатов расчета.

2 Примерные тексты программ для определения усилий в стержнях плоских ферм в системе Mathcad приведены в разделе 4.

Таблица 1 – Исходные данные

Первая цифра шифра	d, м	Величина вертикальной нагрузки, кН			Вторая цифра шифра	H, м	Узлы приложения внешних сил			№ стержней	Третья цифра шифра (№ схемы)
		<i>Q</i>	<i>P</i>	<i>F</i>			<i>Q</i>	<i>P</i>	<i>F</i>		
<b>0</b>	1,5	5	10	15	<b>0</b>	2,4	I, IV	VI	II	2, 5, 8	<b>0</b>
<b>1</b>	1,6	10	15	35	<b>1</b>	2,6	I, V	III	VI	7, 8, 11	<b>1</b>
<b>2</b>	1,8	15	20	40	<b>2</b>	2,8	I, VI	IV	III	4, 9, 10	<b>2</b>
<b>3</b>	2	20	25	35	<b>3</b>	3	II, VI	III	IV	6, 7, 8	<b>3</b>
<b>4</b>	2,2	25	5	45	<b>4</b>	3,2	IV, V	II	III	3, 6, 8	<b>4</b>
<b>5</b>	2,5	5	20	30	<b>5</b>	3,4	I, III	V	II	4, 5, 6	<b>5</b>
<b>6</b>	2,7	10	25	45	<b>6</b>	3,6	III, V	IV	VI	5, 8, 10	<b>6</b>
<b>7</b>	2,9	15	5	40	<b>7</b>	3,8	II, III	I	IV	3, 4, 10	<b>7</b>
<b>8</b>	3,1	20	10	50	<b>8</b>	4	II, IV	VI	V	4, 6, 7	<b>8</b>
<b>9</b>	3,3	25	10	30	<b>9</b>	4,2	I, II	III	VI	3, 8, 10	<b>9</b>

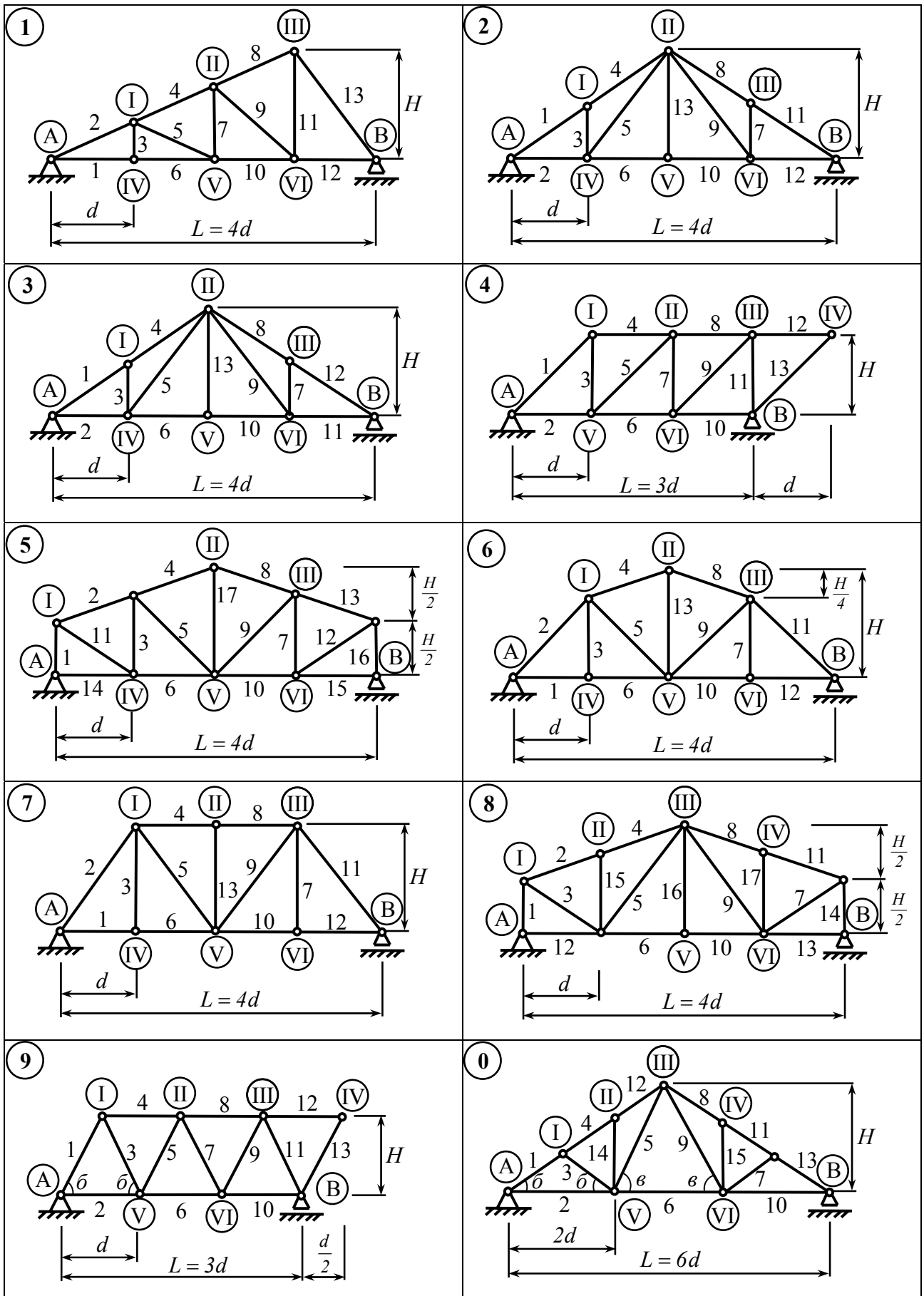


Рисунок 3.1

### 3.2 Пример выполнения задания

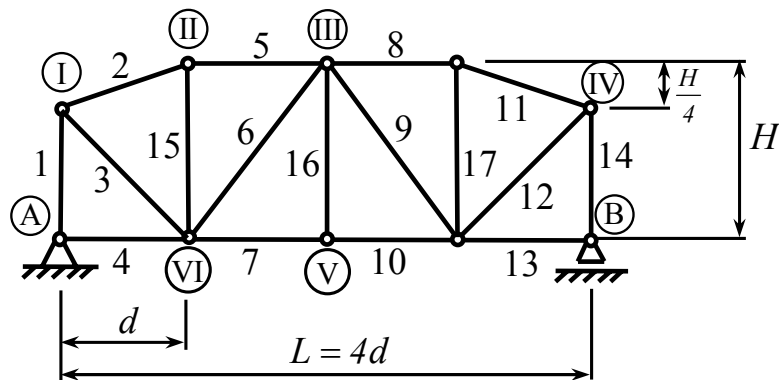


Рисунок 3.2 – Схема фермы

**Дано:**  $d = 3 \text{ м}$ ;  $H = 2 \text{ м}$ ;  $Q = 5 \text{ кН}$ ;  $P = 20 \text{ кН}$ ;  $F = 15 \text{ кН}$ . Узлы приложения внешних сил:  $Q - I, II$ ;  $P - IV$ ;  $F - V$ . Номера стержней: 3, 4, 9, 11. Схема фермы – рисунок 3.2.

1. Определить способом вырезания узлов усилия во всех стержнях.
2. Определить способом сечений (способом Риттера) усилия в четырех указанных стержнях.
3. Построить диаграмму Максвелла – Кремоны и определить по ней усилия во всех стержнях.
4. Сравнить значения, полученные способом вырезания узлов и по диаграмме Максвелла – Кремоны.

#### **Решение.**

Схема фермы с нагрузкой показана на рисунке 3.3. Внешние силы, приложенные в указанных узлах фермы, изображаем таким образом, чтобы они проходили вне контура фермы.

1. Проверка условия статической определимости фермы.

Проверяем условие (1.1). Число стержней фермы  $m = 17$ . Число узлов фермы (включая опорные)  $n = 10$ .

$$m = 2n - 3;$$

$$17 = 2 \cdot 10 - 3;$$

$$17 = 17.$$

Условие выполняется, следовательно, ферма статически определима.

## 2. Определение опорных реакций фермы.

Рассмотрим равновесие фермы в целом как твердого тела. Мысленно отбросим опоры и заменим их действие реакциями (рисунок 3.3). Так как направление реакции неподвижного шарнира  $A$  неизвестно, то изобразим ее двумя составляющими  $\bar{X}_A$  и  $\bar{Y}_A$ . Реакция подвижного шарнира  $B$  направлена по нормали к опорной поверхности шарнира.

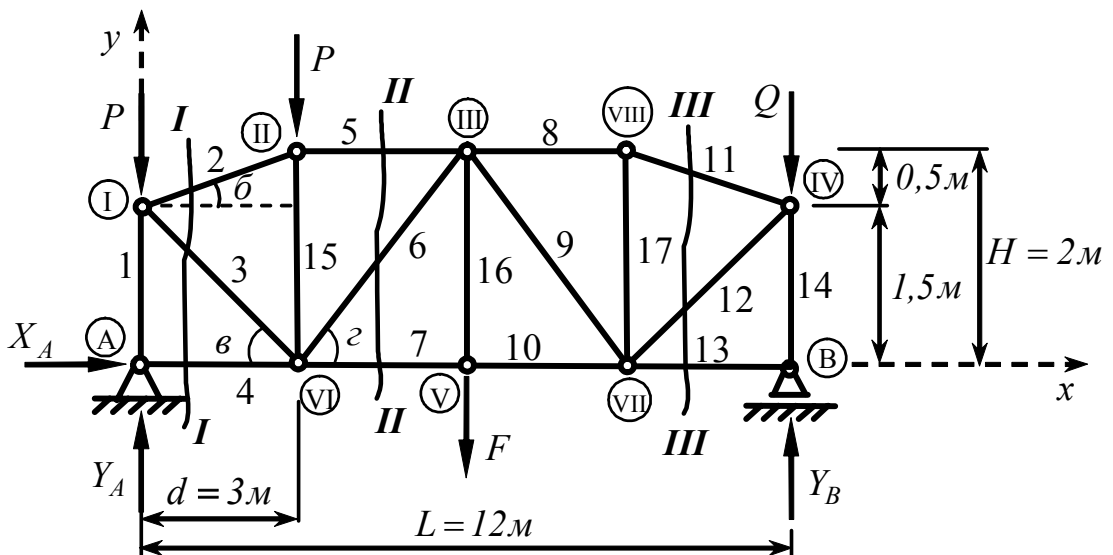


Рисунок 3.3 – Схема фермы с нагрузкой.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, действующей на ферму:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n m_A(\bar{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^n m_B(\bar{F}_k) = 0 \end{cases} \begin{cases} X_A = 0 \\ 12Y_B - 3P - 6F - 12Q = 0; \\ 12P + 9P + 6F - 12Y_A = 0 \end{cases} \begin{cases} X_A = 0 \\ Y_B = \frac{3P + 6F + 12Q}{12} = 17,5 \text{ кН} \\ Y_A = \frac{21P + 6F}{12} = 42,5 \text{ кН} \end{cases}$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим дополнительно уравнение проекций на вертикальную ось:

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0; \quad Y_A + Y_B - 2P - F - Q = 42,5 + 17,5 - 40 - 15 - 5 = 0.$$

Следовательно, реакции найдены правильно.

### 3. Определение усилий в стержнях фермы способом вырезания узлов.

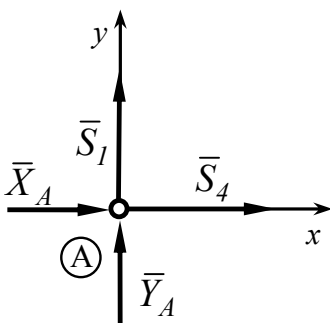
Определим необходимые для дальнейших расчетов углы наклона верхнего пояса и раскосов фермы.

$$\operatorname{tg} \bar{\alpha} = \frac{H}{4d} = \frac{0,5}{3} = 0,1667; \quad \bar{\alpha} = 9,5^\circ; \quad \cos \bar{\alpha} = 0,9864; \quad \sin \bar{\alpha} = 0,1644;$$

$$\operatorname{tg} \bar{\beta} = \frac{3H}{4d} = \frac{1,5}{3} = 0,5; \quad \bar{\beta} = 26,6^\circ; \quad \cos \bar{\beta} = 0,8944; \quad \sin \bar{\beta} = 0,4472;$$

$$\operatorname{tg} \bar{\gamma} = \frac{H}{d} = \frac{2}{3} = 0,6667; \quad \bar{\gamma} = 33,7^\circ; \quad \cos \bar{\gamma} = 0,8320; \quad \sin \bar{\gamma} = 0,5547.$$

Расчет начинаем с узла, в котором сходятся два стержня, например, с узла А. Вырезаем узел из фермы и показываем действующие на него силы, включая реакции отброшенных стержней. Реакции стержней направляем от узла, предполагая стержни растянутыми (рисунок 3.4).



Составим уравнения равновесия плоской сходящейся системы сил, действующей на узел А:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} X_A + S_4 = 0 \\ Y_A + S_1 = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_1 = -Y_A = -42,5 \text{ кН} \\ S_4 = -X_A = 0 \end{cases}.$$

Рисунок 3.4



Найденные значения реакций стержней равны по модулю возникающим в них усилиям. Отрицательный знак у реакции  $S_1$  означает, что стержень 1 в действительности сжат, а не растянут.

Затем рассматриваем равновесие узла I, в котором сходятся три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (рисунок 3.5). Повторяя действия, выполненные для узла А, получим:

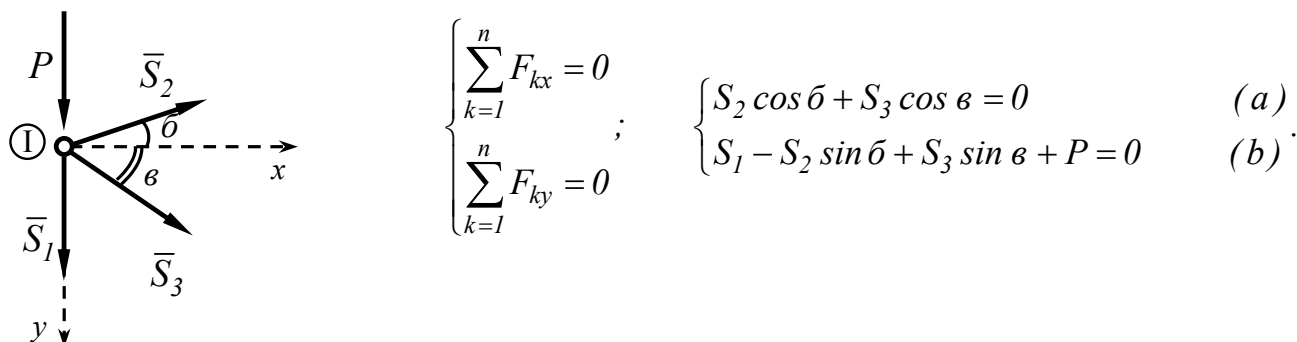


Рисунок 3.5

Выразим из (a)  $S_3$  и подставим в (b):

$$S_3 = -S_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta};$$

$$S_1 - S_2 \sin \alpha - S_2 \cos \alpha \frac{\sin \beta}{\cos \beta} + P = 0;$$

$$S_2 = \frac{P + S_1}{\sin \alpha + \cos \alpha \cdot \operatorname{tg} \beta} = \frac{20 - 42,5}{0,1644 + 0,9864 \cdot 0,5} = -34,215 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_3 = -S_2 \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} = -(-34,215) \cdot \frac{0,9864}{0,8944} = 37,735 \text{ кН}.$$

Последовательно переходя от узла к узлу так, чтобы каждый раз в рассматриваемом узле сходилась не более двух стержней с неизвестными усилиями, определим значения усилий во всех стержнях фермы.

Узел II (рисунок 3.6)

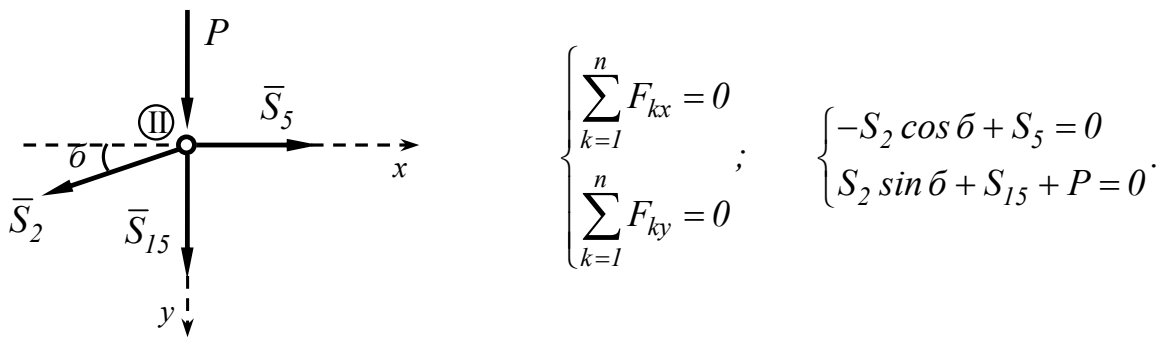


Рисунок 3.6

$$S_5 = S_2 \cos \beta = -34,215 \cdot 0,9864 = -33,750 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{15} = -S_2 \sin \beta - P = 34,215 \cdot 0,1644 - 20 = -14,375 \text{ кН (сжат)}.$$

Узел VI (рисунок 3.7)

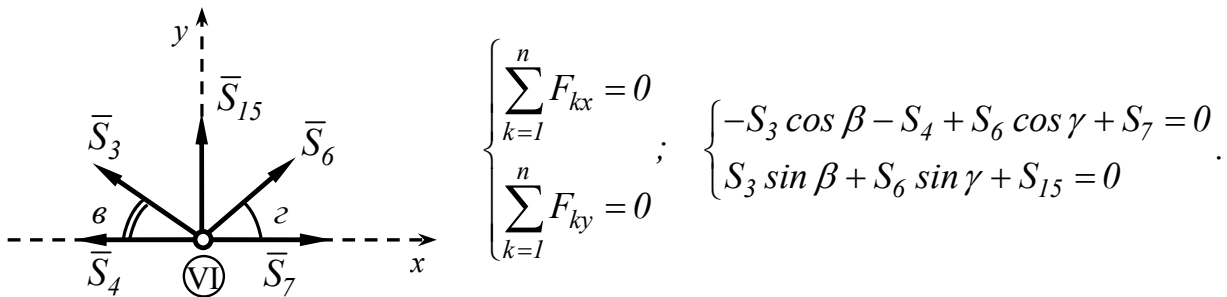
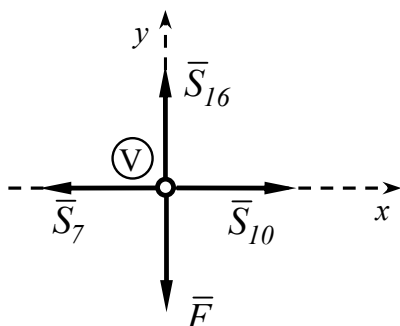


Рисунок 3.7

$$S_6 = -\frac{S_3 \sin \beta + S_{15}}{\sin \gamma} = -\frac{37,735 \cdot 0,4472 - 14,375}{0,5547} = -4,507 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_7 = S_3 \cos \beta + S_4 - S_6 \cos \gamma = 37,735 \cdot 0,8944 + 4,507 \cdot 0,832 = 37,50 \text{ кН}.$$

Узел V (рисунок 3.8)



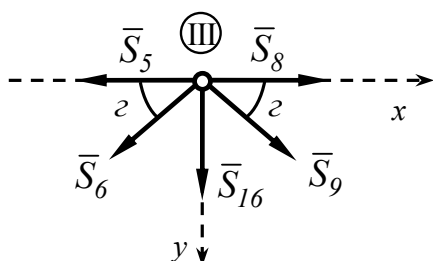
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -S_7 + S_{10} = 0 \\ S_{16} - F = 0 \end{cases};$$

$$S_{10} = S_7 = 37,50 \text{ кН};$$

$$S_{16} = F = 15 \text{ кН}.$$

Рисунок 3.8

Узел III (рисунок 3.9)



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases};$$

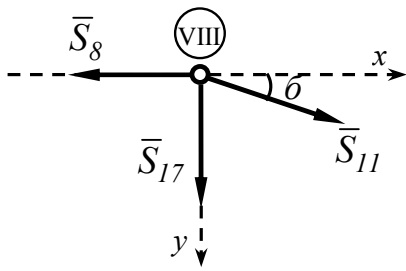
$$\begin{cases} -S_5 - S_6 \cos \gamma + S_8 + S_9 \cos \gamma = 0 \\ S_6 \sin \gamma + S_9 \sin \gamma + S_{16} = 0 \end{cases};$$

Рисунок 3.9

$$S_9 = -\frac{S_6 \sin \gamma + S_{16}}{\sin \gamma} = -\frac{-4,507 \cdot 0,5547 + 15}{0,5547} = -22,535 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_8 = S_5 + S_6 \cos \gamma - S_9 \cos \gamma = -33,75 + (-4,507 + 22,535) \cdot 0,832 = -18,750 \text{ кН (сжат)}.$$

Узел VIII (рисунок 3.10)



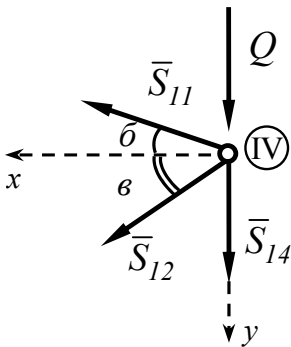
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} -S_8 + S_{11} \cos \bar{\sigma} = 0 \\ S_{11} \sin \bar{\sigma} + S_{17} = 0 \end{cases};$$

Рисунок 3.10

$$S_{11} = \frac{S_8}{\cos \bar{\sigma}} = \frac{-18,75}{0,9864} = -19,0 \text{ кН (сжат)};$$

$$S_{17} = -S_{11} \sin \bar{\sigma} = 19,0 \cdot 0,1644 = 3,125 \text{ кН}.$$

Узел IV (рисунок 3.11)



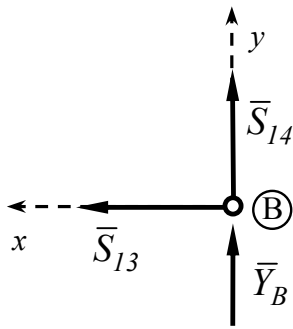
$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_{11} \cos \bar{\sigma} + S_{12} \cos \bar{\epsilon} = 0 \\ -S_{11} \sin \bar{\sigma} + S_{12} \sin \bar{\epsilon} + S_{14} + Q = 0 \end{cases};$$

Рисунок 3.11

$$S_{12} = -S_{11} \frac{\cos \bar{\sigma}}{\cos \bar{\epsilon}} = 19,0 \cdot \frac{0,9864}{0,8944} = 20,954 \text{ кН};$$

$$\begin{aligned} S_{14} &= S_{11} \sin \bar{\sigma} - S_{12} \sin \bar{\epsilon} - Q = \\ &= -19,0 \cdot 0,1644 - 20,954 \cdot 0,4472 - 5 = -17,50 \text{ кН (сжат)}. \end{aligned}$$

Узел В (рисунок 3.12)



$$\begin{cases} \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \\ \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} S_{13} = 0 & (a) \\ Y_B + S_{14} = 0 & (b) \end{cases};$$

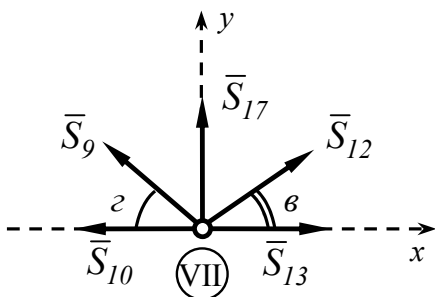
Рисунок 3.12

Уравнение (b) используем для проверки найденного значения  $S_{14}$ :

$$Y_B + S_{14} = 17,5 - 17,5 = 0.$$

Так как усилия во всех стержнях определены, то равновесие узла VII рассматриваем для контроля правильности вычислений

Узел VII (рисунок 3.13)



$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{kx} &= -S_9 \cos \gamma - S_{10} + S_{12} \cos \beta + S_{13} = \\ &= 22,535 \cdot 0,832 - 37,5 + 20,954 \cdot 0,8944 = 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n F_{ky} &= S_9 \sin \gamma + S_{12} \sin \beta + S_{17} = \\ &= -22,535 \cdot 0,5547 + 20,954 \cdot 0,4472 + 3,125 = 0. \end{aligned}$$

Рисунок 3.13

4. Определение усилий в стержнях фермы способом сечений (способом Риттера).

Для определения усилий в стержнях 3 и 4 проведем сквозное сечение фермы I – I (рисунок 3.3) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части (рисунок 3.14). На нее действуют силы  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $P$  и реакции рассеченных стержней  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_4$ . Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

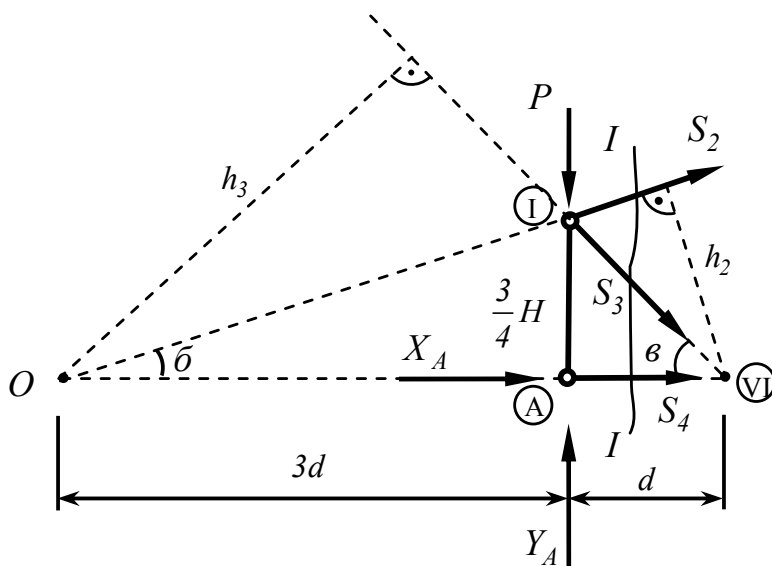


Рисунок 3.14

Для определения реакции  $S_3$  составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций  $S_2$  и  $S_4$  (точки O).

$$OA = \frac{3}{4}H \cdot \operatorname{ctg} \vartheta = \frac{3}{4}H \cdot \frac{4d}{H} = 3d;$$

$$h_3 = 4d \sin \vartheta;$$

$$\sum_{k=1}^n m_O(\bar{F}_k) = 0;$$

$$Y_A \cdot 3d - P \cdot 3d - S_3 \cdot 4d \sin \vartheta = 0;$$

$$S_3 = (Y_A - P) \cdot \frac{3d}{4d \sin \vartheta} = \frac{3 \cdot (Y_A - P)}{4 \sin \vartheta} = \frac{3 \cdot (42,5 - 20)}{4 \cdot 0,4472} = 37,735 \text{ кН}.$$

Для определения реакции  $S_2$  составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций  $S_3$  и  $S_4$  (узла VI).

$$h_2 = 4d \sin \delta;$$

$$\sum_{k=1}^n m_{VI}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$P \cdot d - Y_A \cdot d - S_2 \cdot 4d \sin \delta = 0;$$

$$S_2 = (P - Y_A) \cdot \frac{d}{4d \sin \delta} = \frac{P - Y_A}{4 \sin \delta} = \frac{20 - 42,5}{4 \cdot 0,1644} = -34,215 \text{ кН (сжат)}.$$

Для определения усилия в стержне 6 проведем сквозное сечение фермы II–II (рисунок 3.3) и рассмотрим равновесие левой отсеченной части под действием сил  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $P$  и реакций рассеченных стержней  $S_5$ ,  $S_6$ ,  $S_7$  (рисунок 3.15). Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

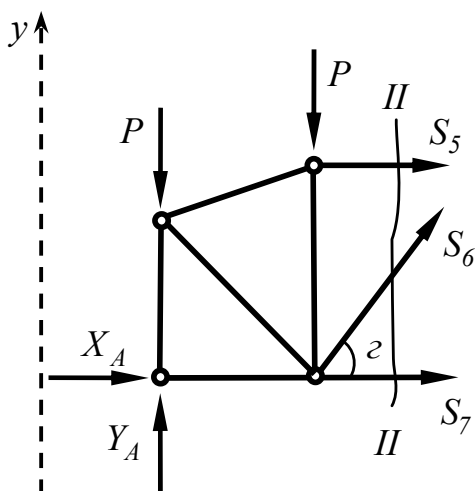


Рисунок 3.15

Для определения реакции  $S_6$  составим уравнение проекций на ось, перпендикулярную линиям действия реакций  $S_5$  и  $S_6$ .

$$\sum_{k=1}^n F_{ky} = 0;$$

$$Y_A - 2P + S_6 \cdot \sin \gamma = 0;$$

$$S_6 = \frac{2P - Y_A}{\sin \gamma} = \frac{2 \cdot 20 - 42,5}{0,5547} = -4,507 \text{ кН (сжат)}.$$

Для определения усилия в стержне 11 проведем сквозное сечение фермы III–III (рисунок 3.3) и рассмотрим равновесие правой отсеченной части под действием сил  $Y_B$ ,  $Q$  и реакций рассеченных стержней  $S_{11}$ ,  $S_{12}$ ,  $S_{13}$  (рисунок 3.16). Предполагая стержни растянутыми, направляем их реакции от сечения.

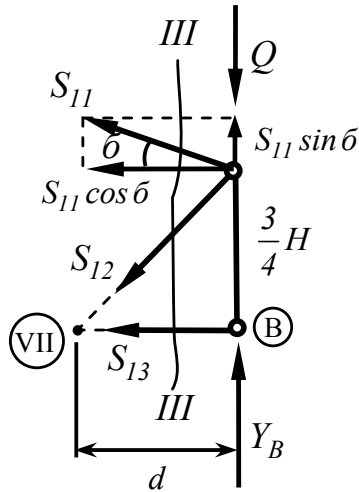


Рисунок 3.16

Для определения реакции  $S_{11}$  составим уравнение моментов относительно точки пересечения линий действия реакций  $S_{12}$  и  $S_{13}$  (узла VII).

$$\sum_{k=1}^n m_{VII}(\bar{F}_k) = 0;$$

$$Y_B \cdot d - Q \cdot d + S_{11} \cdot \cos \bar{\alpha} \cdot \frac{3H}{4} + S_{11} \cdot \sin \bar{\alpha} \cdot d = 0;$$

$$S_{11} = \frac{(Q - Y_B) \cdot d}{\left( \frac{3H}{4} \cdot \cos \bar{\alpha} + d \cdot \sin \bar{\alpha} \right)} = \frac{(5 - 17,5) \cdot 3}{1,5 \cdot 0,9864 + 3 \cdot 0,1644} = -19,0 \text{ кН (сжат).}$$

Найденные значения реакций  $S_2$ ,  $S_3$ ,  $S_6$ ,  $S_{11}$  совпадают со значениями, полученными ранее способом вырезания узлов.

5. *Определение усилий в стержнях фермы графическим способом (диаграмма Максвелла – Кремоны).*

Строим в произвольном масштабе схему фермы (рисунок 3.17). Обозначаем внешние зоны фермы, границами которых являются линии действия внешних сил



и опорных реакций, прописными буквами. Внутренние зоны фермы, границами которых являются стержни фермы, обозначаем строчными буквами.

Обходя внешние зоны фермы по часовой стрелке (начиная с любой зоны) обозначаем внешние силы двумя индексами, соответствующими названиям зон, на границе которых находится сила, и откладываем их на диаграмме в выбранном масштабе. Сила  $P$ , приложенная в узле I, будет изображаться на диаграмме отрезком  $CD$  длиной 4 см, который откладываем из произвольно выбранной точки  $C$  вниз (по направлению действия силы  $P$ ). Сила  $P$ , приложенная в узле II, получает обозначение  $DE$  и изображается на диаграмме отрезком  $DE$  длиной 4 см, который откладываем из точки  $D$  вниз (по направлению действия силы  $P$ ). Сила  $Q$ , приложенная в узле IV, изображается отрезком  $EK = 1$  см (из точки  $E$  вниз по направлению силы). Сила  $Y_B$  изображается отрезком  $KM = 3,5$  см (из точки  $K$  вверх по направлению силы). Сила  $F$  – отрезком  $MN = 3$  см (из точки  $M$  вниз по направлению силы). Сила  $Y_A$  изображается отрезком  $NC = 8,5$  см (из точки  $N$  вверх по направлению силы). В результате возвращаемся в точку  $C$ , с которой начиналось построение диаграммы, следовательно, многоугольник внешних сил оказывается замкнутым.

Определение усилий в стержнях фермы начинаем с узла  $A$ , в котором сходятся два стержня. Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами, соответствующим наименованиям зон перед стержнем и после него. Стержень 1 получает обозначение  $C-a$ , стержень 4 – обозначение  $a-N$ . Из точек  $C$  и  $N$ , которые уже присутствуют на диаграмме, проводим прямые, параллельные соответствующим стержням: из точки  $C$  – параллельную стержню  $C-a$ , из точки  $N$  – параллельную стержню  $a-N$ . Точку пересечения этих прямых обозначаем  $a$  (общий индекс, входящий в обозначения стержней). Положение точки  $a$  на диаграмме совпадает с точкой  $N$ . Это означает, что стержень  $a-N$  – нулевой.

Следующим рассмотрим узел I, в котором сходятся три стержня, но усилия неизвестны только в двух из них (стержни 2 и 3). Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни с неизвестными усилиями: стержень 2 получает обозначение  $D-b$ , стержень 3 – обозначение  $b-a$ . Из точки  $D$  проводим прямую, параллельную

стержню  $D-b$ , из точки  $a$  – прямую, параллельную стержню  $b-a$ . Точку пересечения прямых обозначаем  $b$ .

Рассмотрим узел II. Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни с неизвестными усилиями: стержень 5 получает обозначение  $E-d$ , стержень 15 – обозначение  $d-b$ . Из точки  $E$  проводим прямую, параллельную стержню  $E-d$ , из точки  $b$  – прямую, параллельную стержню  $d-b$ . Точку пересечения прямых обозначаем  $d$  и т. д. Последовательность рассмотрения узлов при построении диаграммы аналогична способу вырезания узлов. Построенная диаграмма приведена на рисунке 3.17.

Построенная диаграмма позволяет определить усилия во всех стержнях фермы. Вычисление усилий и определение их знаков покажем на примере стержней, сходящихся в узле I.

Обходя узел по часовой стрелке, обозначаем стержни двумя индексами. Стержень 1 получает обозначение  $a-C$ . Длина отрезка  $aC$  составляет 8,5 см, что в выбранном масштабе соответствует 42,5 кН. Мысленно переносим вектор  $\overline{aC}$  на стержень 1 на схеме фермы. Вектор направлен к узлу I, следовательно, стержень 1 сжат. Усилие в стержне  $S_1 = -42,5 \text{ кН}$ .

Стержень 2 получает обозначение  $D-b$ . Длина отрезка  $Db$  составляет 6,8 см, что в выбранном масштабе соответствует 34 кН. Переносим вектор  $\overline{Db}$  на стержень 2. Вектор направлен к узлу I, следовательно, стержень 2 сжат. Таким образом, искомое усилие в стержне  $S_2 = -34 \text{ кН}$ .

Стержень 3 получает обозначение  $b-a$ . Длина отрезка  $ba$  составляет 7,5 см, что в выбранном масштабе соответствует 37,5 кН. Переносим вектор  $\overline{ba}$  на стержень 3. Вектор направлен от узла I, следовательно, стержень 3 растянут. Усилие в стержне  $S_3 = 37,5 \text{ кН}$ .

Аналогично определяются усилия во всех стержнях фермы. Результаты вычислений сводим в таблицу 2.

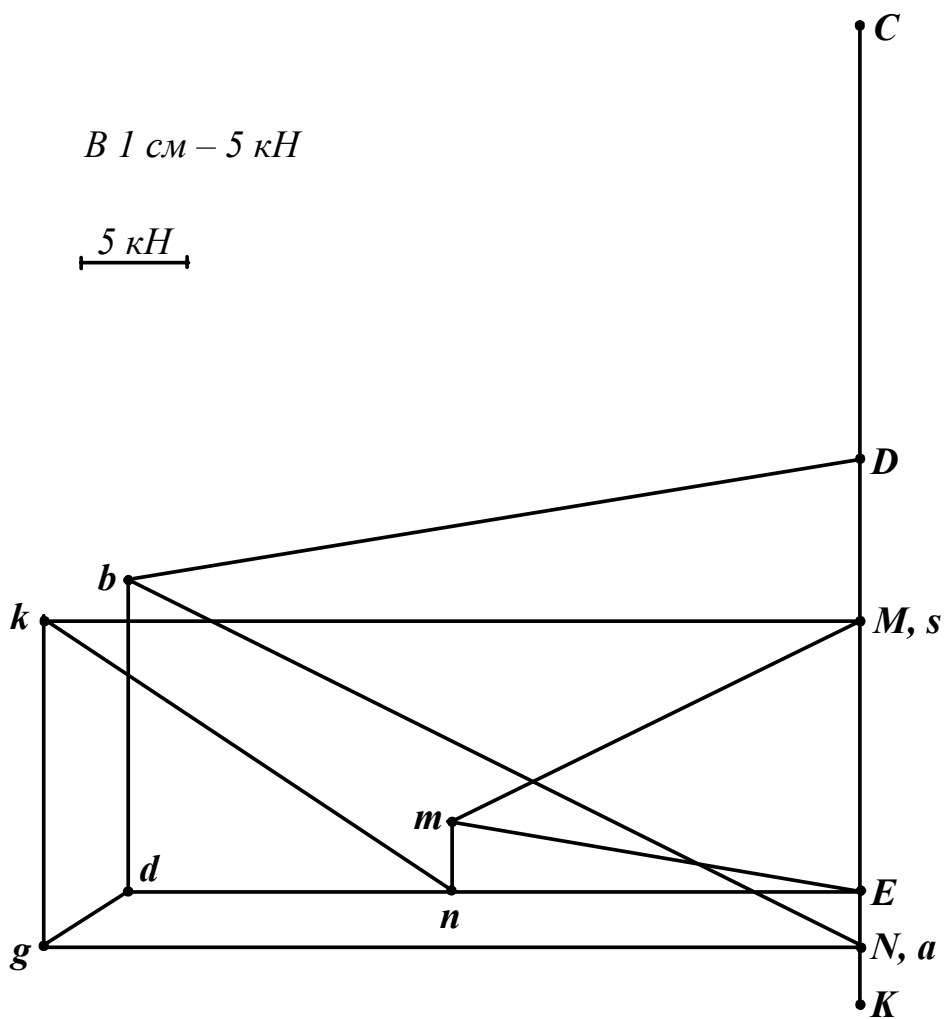
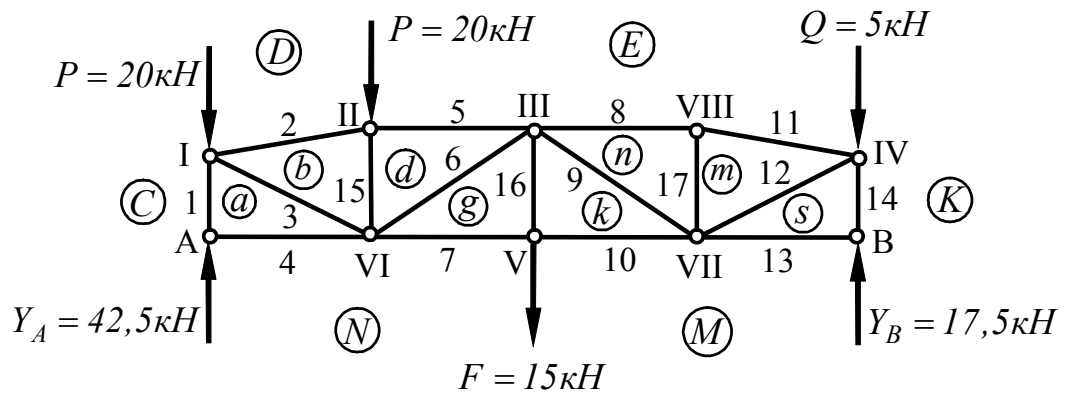


Рисунок 3.17 – Диаграмма Максвелла – Кремоны

6. Сравнение результатов вычислений

Таблица 2 – Усилия в стержнях фермы

№ стержня	Усилия в стержнях фермы, кН			Погрешность, %
	Способ вырезания узлов	Способ Риттера	Диаграмма Максвелла- Кремоны	
1	-42,5		-42,5	-
2	-34,215	-34,215	-34	0,6%
3	37,735	37,735	37,5	0,7%
4	0		0	-
5	-33,75		-33,5	0,7%
6	-4,507	-4,507	-4,5	0,1%
7	37,50		37,5	-
8	-18,75		-18,5	1,3%
9	-22,535		-22,5	0,2%
10	37,50		37,5	-
11	-19,0	-19,0	-19	-
12	20,954		21	0,2%
13	0		0	-
14	-17,50		-17,5	-
15	-14,375		-14	2,6%
16	15		15	-
17	3,125		3	4%

Примечание – Погрешность вычисляется по формуле:

$$\Delta = \left| \frac{S^{\text{аналит}} - S^{\text{граф}}}{S^{\text{аналит}}} \right| \cdot 100\%,$$

где  $S^{\text{аналит}}$  – значение усилия в стержне, вычисленное способом вырезания узлов;

$S^{\text{граф}}$  – значение усилия в стержне, определенное по диаграмме Максвелла - Кремоны.

## 4 Определение усилий в стержнях ферм с помощью системы Mathcad

В настоящее время имеется обширная литература по применению системы компьютерной математики Mathcad для решения различных инженерных, математических и физических задач. Подробные инструкции по использованию системы содержатся, например, в [7]. В [8] имеется большое количество примеров решения конкретных задач теоретической механики в системе Mathcad.

Mathcad прост в использовании и не требует изучения специальных языков программирования. Кроме того, Mathcad предоставляет пользователю уникальную возможность написания алгоритмов на естественном формульном языке. Большинство операторов и встроенных функций системы имеют вид привычных математических символов, которые можно набирать непосредственно с клавиатуры. Для реализации численных расчетов можно использовать любую версию системы. В приведенных примерах была использована версия Mathcad 14. Тексты программ содержат комментарии, поясняющие выполняемые операции (выделены курсивом).

Отметим особо, что в приведенных примерах можно обойтись без предварительного определения опорных реакций фермы. Число узлов фермы, включая опорные, равно  $n$ . Общее число независимых уравнений равновесия плоской сходящейся системы сил, которые можно составить для всех узлов, равно  $2n$ . Число неизвестных усилий в стержнях равно числу стержней фермы  $m = 2n - 3$ . Включая в число неизвестных три опорные реакции фермы, получим, что общее число уравнений и неизвестных совпадает. Запишем уравнения равновесия узлов, составленные в параграфе 3.2 «Пример выполнения задания» при вычислении усилий способом вырезания узлов, в виде системы линейных уравнений (4.1). С целью единства обозначений опорные реакции фермы  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $Y_B$  обозначаем соответственно  $S_{18}$ ,  $S_{19}$ ,  $S_{20}$ .

$$\begin{cases}
S_4 + S_{18} = 0 & (1) \\
S_1 + S_{19} = 0 & (2) \\
S_2 \cos \bar{\theta} + S_3 \cos \vartheta = 0 & (3) \\
S_1 - S_2 \sin \bar{\theta} + S_3 \sin \vartheta = -P & (4) \\
-S_2 \cos \bar{\theta} + S_5 = 0 & (5) \\
S_2 \sin \bar{\theta} + S_{15} = -P & (6) \\
-S_3 \cos \vartheta - S_4 + S_6 \cos \varrho + S_7 = 0 & (7) \\
S_3 \sin \vartheta + S_6 \sin \varrho + S_{15} = 0 & (8) \\
-S_7 + S_{10} = 0 & (9) \\
S_{16} = F & (10) \\
-S_5 - S_6 \cos \varrho + S_8 + S_9 \cos \varrho = 0 & (11) \\
S_6 \sin \varrho + S_9 \sin \varrho + S_{16} = 0 & (12) \\
-S_8 + S_{11} \cos \bar{\theta} = 0 & (13) \\
S_{11} \sin \bar{\theta} + S_{17} = 0 & (14) \\
S_{11} \cos \bar{\theta} + S_{12} \cos \vartheta = 0 & (15) \\
-S_{11} \sin \bar{\theta} + S_{12} \sin \vartheta + S_{14} = -Q & (16) \\
S_{13} = 0 & (17) \\
S_{14} + S_{20} = 0 & (18) \\
-S_9 \cos \varrho - S_{10} + S_{12} \cos \vartheta + S_{13} = 0 & (19) \\
S_9 \sin \varrho + S_{12} \sin \vartheta + S_{17} = 0 & (20)
\end{cases} \quad (4.1).$$

#### 4.1 Определение усилий в стержнях ферм матричным способом

Обозначим  $\|\mathbf{A}\|$  – матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных системы уравнений (4.1),  $\{\mathbf{S}\}$  – вектор-столбец неизвестных усилий  $S_1 - S_{20}$ ,  $\{\mathbf{D}\}$  – вектор-столбец свободных членов уравнений.

Запишем систему уравнений (4.1) в виде

$$\|\mathbf{A}\| \cdot \{\mathbf{S}\} = \{\mathbf{D}\}.$$

Умножая обе части равенства на матрицу, обратную  $\|\mathbf{A}\|$ , слева, получим:

$$\|A\|^{-1} \cdot \|A\| \cdot \{S\} = \|A\|^{-1} \cdot \{D\};$$

$$\{S\} = \|A\|^{-1} \cdot \{D\}.$$

Ниже приводится текст программы для определения усилий в стержнях плоской фермы в системе Mathcad.

**Определение усилий в стержнях плоской фермы**

**Исходные данные:**

$$d := 3 \quad H := 2 \quad Q := 5 \quad P := 20 \quad F := 15$$

**Углы наклона стержней фермы:**

$$\text{atan}(\beta) := \frac{H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\gamma) := \frac{3 \cdot H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\alpha) := \frac{H}{d}$$

**Коэффициенты матрицы  $A_{ij}$ , где  $i$  - порядковый номер уравнения в системе (4.1);  $j$  - порядковый номер усилия  $S_j$ :**

ORIGIN:=1

$i := 1 \dots 20$	$j := 1 \dots 20$	$A_{i,j} := 0$
$A_{1,4} := 1$	$A_{1,18} := 1$	$A_{2,1} := 1$
$A_{2,19} := 1$	$A_{3,2} := \cos(\alpha)$	$A_{3,3} := \cos(\beta)$
$A_{4,1} := 1$	$A_{4,2} := -\sin(\alpha)$	$A_{4,3} := \sin(\beta)$
$A_{5,2} := -\cos(\alpha)$	$A_{5,5} := 1$	$A_{6,2} := \sin(\alpha)$
$A_{6,15} := 1$	$A_{7,3} := -\cos(\beta)$	$A_{7,4} := -1$
$A_{7,6} := \cos(\gamma)$	$A_{7,7} := 1$	$A_{8,3} := \sin(\beta)$
$A_{8,6} := \sin(\gamma)$	$A_{8,15} := 1$	$A_{9,7} := -1$
$A_{9,10} := 1$	$A_{10,16} := 1$	$A_{11,5} := -1$
$A_{11,6} := -\cos(\gamma)$	$A_{11,8} := 1$	$A_{11,9} := \cos(\gamma)$
$A_{12,6} := \sin(\gamma)$	$A_{12,9} := \sin(\gamma)$	$A_{12,16} := 1$
$A_{13,8} := -1$	$A_{13,11} := \cos(\alpha)$	$A_{14,11} := \sin(\alpha)$
$A_{14,17} := 1$	$A_{15,11} := \cos(\alpha)$	$A_{15,12} := \cos(\beta)$
$A_{16,11} := -\sin(\alpha)$	$A_{16,12} := \sin(\beta)$	$A_{16,14} := 1$
$A_{17,13} := 1$	$A_{18,14} := 1$	$A_{18,20} := 1$

$$\begin{aligned}
A_{19,9} &:= -\cos(\gamma) & A_{19,10} &:= -1 & A_{19,12} &:= \cos(\beta) \\
A_{19,13} &:= 1 & A_{20,9} &:= \sin(\gamma) & A_{20,12} &:= \sin(\beta) \\
A_{20,17} &:= 1 & & & & 
\end{aligned}$$

**Коэффициенты матрицы свободных членов  $D_i$ , где  $i$  – порядковый номер уравнения в системе (4.1):**

$$\begin{aligned}
i &:= 1 \dots 20 & D_i &:= 0 \\
D_4 &:= -P & D_6 &:= -P & D_{10} &:= F & D_{16} &:= Q
\end{aligned}$$

**Решение системы линейных уравнений (4.1):**

$$S := A^{-1} \cdot D$$

S =

	1
1	-42.5
2	-34.216
3	37.734
4	0
5	-33.75
6	-4.507
7	37.5
8	-18.75
9	-22.535
10	37.5
11	-19.009
12	20.963
13	0
14	-17.5
15	-14.375
16	15
17	3.125
18	0
19	42.5
20	17.5

В Mathcad для решения систем линейных уравнений предусмотрена встроенная функция `lsolve(A, D)`, которая возвращает вектор решения  $\{S\}$  при заданной матрице коэффициентов  $\|A\|$  и векторе свободных членов  $\{D\}$ . В случае использования встроенной функции последняя строка программы выглядит следующим образом:

$$S := \text{lsolve}(A, D)$$

Результаты вычисления усилий представлены на рисунке 4.1.

Рисунок 4.1



## 4.2 Определение усилий в стержнях ферм с помощью вычислительного блока Given - Find

Использование вычислительного блока Given-Find позволяет вводить линейные уравнения (4.1) в той естественной форме, в которой они были составлены при рассмотрении равновесия узлов. Строго говоря, блок Given-Find предусмотрен для численного решения систем нелинейных уравнений, а точность решения во многом зависит от выбора начальных приближений неизвестных. При использовании блока для решения систем линейных уравнений, начальные условия могут быть заданы произвольно, например, нулевые. При вводе уравнений равновесия вместо обычного знака равенства используется оператор логического сравнения, расположенный на панели булевых операторов (выглядит как «жирный» знак равенства). Далее представлен соответствующий документ Mathcad для решения системы линейных уравнений (4.1).

### **Определение усилий в стержнях плоской фермы**

**Исходные данные:**

$$d := 3 \quad H := 2 \quad Q := 5 \quad P := 20 \quad F := 15$$

**Углы наклона стержней фермы:**

$$\text{atan}(\beta) := \frac{H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\alpha) := \frac{3 \cdot H}{4 \cdot d} \quad \text{atan}(\gamma) := \frac{H}{d}$$

**Задание начальных приближений для неизвестных усилий и опорных реакций:**

$$\text{ORIGIN} := 1 \quad i := 1 \dots 20 \quad D_i := 0 \quad R := D^T$$

$$(S_1 \ S_2 \ S_3 \ S_4 \ S_5 \ S_6 \ S_7 \ S_8 \ S_9 \ S_{10} \ S_{11} \ S_{12} \ S_{13} \ S_{14} \ S_{15} \ S_{16} \ S_{17} \ X_A \ Y_A \ Y_B) := R$$

**Формирование блока решений системы алгебраических уравнений**

**(4.1):**

Given

$$X_A + S_4 = 0$$

$$Y_A + S_1 = 0$$

$$S_2 \cdot \cos(\alpha) + S_3 \cdot \cos(\beta) = 0$$

$$S_1 - S_2 \cdot \sin(\alpha) + S_3 \cdot \sin(\beta) + P = 0$$

$$-S_2 \cdot \cos(\alpha) + S_5 = 0$$

$$S_2 \cdot \sin(\alpha) + S_{15} + P = 0$$

$$\begin{aligned}
-S_3 \cdot \cos(\beta) - S_4 + S_6 \cdot \cos(\gamma) + S_7 &= 0 & S_3 \cdot \sin(\beta) + S_6 \cdot \sin(\gamma) + S_{15} &= 0 \\
-S_7 + S_{10} &= 0 & S_{16} - F &= 0 \\
-S_5 - S_6 \cdot \cos(\gamma) + S_8 + S_9 \cdot \cos(\gamma) &= 0 & S_6 \cdot \sin(\gamma) + S_9 \cdot \sin(\gamma) + S_{16} &= 0 \\
-S_8 + S_{11} \cdot \cos(\alpha) &= 0 & S_{11} \cdot \sin(\alpha) + S_{17} &= 0 \\
S_{11} \cdot \cos(\alpha) + S_{12} \cdot \cos(\beta) &= 0 & -S_{11} \cdot \sin(\alpha) + S_{12} \cdot \sin(\beta) + S_{14} + Q &= 0 \\
S_{13} &= 0 & Y_B + S_{14} &= 0 \\
-S_9 \cdot \cos(\gamma) - S_{10} + S_{12} \cdot \cos(\beta) + S_{13} &= 0 & S_{19} \cdot \sin(\gamma) + S_{12} \cdot \sin(\beta) + S_{17} &= 0
\end{aligned}$$

**Вычисление неизвестных усилий в стержнях и опорных реакций фермы:**

**МБ:**

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \\ S_{17} \\ X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} := \text{Find} \left( \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \\ S_{17} \\ X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \\ S_4 \\ S_5 \\ S_6 \\ S_7 \\ S_8 \\ S_9 \\ S_{10} \\ S_{11} \\ S_{12} \\ S_{13} \\ S_{14} \\ S_{15} \\ S_{16} \\ S_{17} \\ X_A \\ Y_A \\ Y_B \end{pmatrix}$$

	1
1	-42.5
2	-34.216
3	37.734
4	0
5	-33.75
6	-4.507
7	37.5
8	-18.75
9	-22.535
10	37.5
11	-19.009
12	20.963
13	0
14	-17.5
15	-14.375
16	15
17	3.125
18	-0
19	42.5
20	17.5

## 5 Литература, рекомендуемая для изучения темы

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин . – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.
3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
4. Диевский, В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В.А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 320 с.
5. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов. В 3 т. Т.1. Статика и кинематика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
6. Кирсанов, М.Н. Решебник: Теоретическая механика / М.Н. Кирсанов; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
7. Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В.Д. Бертяев. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 752 с.
8. Очков, В. Ф. Mathcad 14 для студентов и инженеров: русская версия / В. Ф. Очков. – СПб.: БХВ-Петербург, 2009. – 498 с.