

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Г.В. Куча, И.И. Мосалева

ОПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ ТОЧЕК ТВЕРДОГО ТЕЛА ПРИ ПОСТУПАТЕЛЬНОМ И ВРАЩАТЕЛЬНОМ ДВИЖЕНИЯХ

Методические указания
к расчетно-графической работе
по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Государственного образовательного учреждения высшего
профессионального образования «Оренбургский государственный
университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 531.3(076.5)
ББК 22.213я7
К 95

Рецензент – профессор, кандидат технических наук Р.В.Ромашов

Куча, Г. В.
К 95 Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях: методические указания / Г.В. Куча, И.И. Мосалева; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург : ОГУ, 2010. - 22 с.

В методических указаниях приведены общие формулы и определения по данной теме, рассмотрены контрольные вопросы, варианты заданий и пример выполнения задания по кинематике твердого тела.

Методические указания предназначены для студентов заочной формы обучения специальностей 190601.65 (ААХ), 190603.65 (СТТМ), 151001.65 (ТМ), 150002.65 (МСК), 150205.65 (ТПИ), 220301.65 (АТП).

УДК 531.3(076.5)
ББК 22.213я7

©Куча Г.В.,
Мосалева И.И.,
©ГОУ ОГУ, 2010

Содержание

Введение	4
1 Простейшие движения твердого тела	5
1.1 Поступательное движение	5
1.2 Вращательное движение	5
1.3 Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела	5
1.4 Векторные формулы для определения скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.	8
1.5 Передаточные механизмы	9
2 Контрольное задание К2	
Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях	13
2.1 Контрольные вопросы	13
2.2 Содержание задания	13
2.3 Рекомендации к решению задач	14
2.4 Пример выполнения задания	17
3 Литература, рекомендованная для изучения дисциплины	22

Введение

В методических указаниях приводятся основные определения и формулы по теме «Простейшие движения твердого тела», рассмотрены передаточные механизмы и соотношения между их кинематическими и геометрическими характеристиками.

Методические указания включают контрольные вопросы по кинематике твердого тела, общие рекомендации к решению типовых задач, а также вопросы для самоконтроля, на которые необходимо ответить прежде, чем приступить к выполнению задания.

В методических указаниях содержатся условия контрольного задания К2 «Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях»; варианты исходных расчетных схем и необходимые числовые данные. Кроме того, подробно рассмотрен пример решения задачи.

Методические указания разработаны для студентов заочной формы обучения, но могут быть полезны и для студентов дневной и вечерней формы обучения.

1 Простейшие движения твердого тела

1.1 Поступательное движение

Поступательным движением твердого тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведенная в теле, остается во время движения параллельной своему первоначальному направлению.

Траектории точек при этом движении представляют собой одинаковые кривые, которые могут быть получены одна из другой путем параллельного смещения. При поступательном движении скорости и ускорения всех точек твердого тела в данный момент геометрически равны. Следовательно, при исследовании поступательного движения твердого тела достаточно определить движение одной какой-либо точки тела.

Таким образом, задача о поступательном движении твердого тела сводится к задаче кинематики точки.

1.2 Вращательное движение

Вращательным движением твердого тела называется такое его движение, при котором все точки, принадлежащие некоторой прямой, неизменно связанной с телом, остаются неподвижными.

Эта прямая называется осью вращения тела. При этом движении все остальные точки тела движутся в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, и описывают окружности, центры которых лежат на этой оси.

1.3 Скорости и ускорения точек вращающегося твердого тела

Линейная скорость точки вращающегося твердого тела численно равна произведению угловой скорости тела на расстояние от этой точки до оси вращения

$$V = \omega \cdot h .$$

Направлена линейная скорость по касательной к описываемой точкой M окружности в сторону вращения тела (рисунок 1).

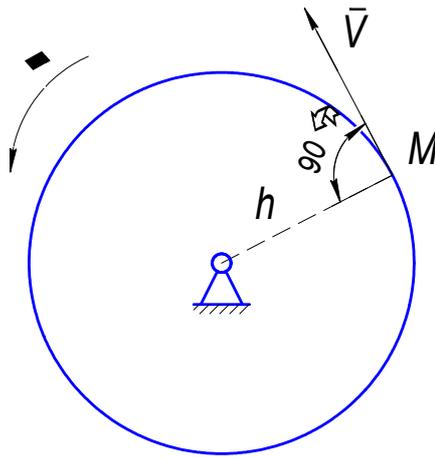


Рисунок 1

Так как для всех точек тела ω имеет в данный момент одно и то же значение, то линейные скорости точек вращающегося тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (рисунок 2).

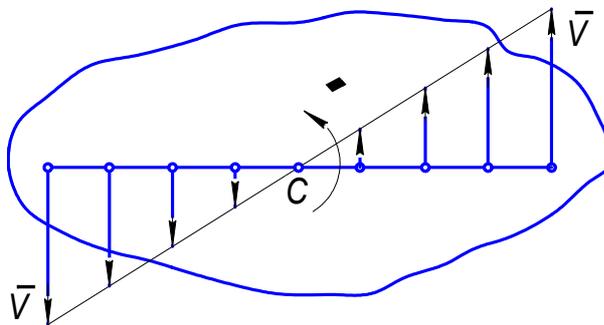


Рисунок 2

Ускорение точки вращающегося тела определяют по его составляющим

$$\bar{a} = \bar{a}_\tau + \bar{a}_n$$

Здесь \bar{a}_τ - касательное ускорение;

\bar{a}_n - нормальное ускорение.

Модуль касательного ускорения:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot h.$$

Модуль нормального ускорения

$$a_n = \omega^2 \cdot h.$$

Касательное ускорение направлено по касательной к траектории (в сторону движения, если тело вращается ускоренно, или в обратную сторону, если тело вращается замедленно); нормальное ускорение всегда направлено по радиусу h к оси вращения (рисунок 3).

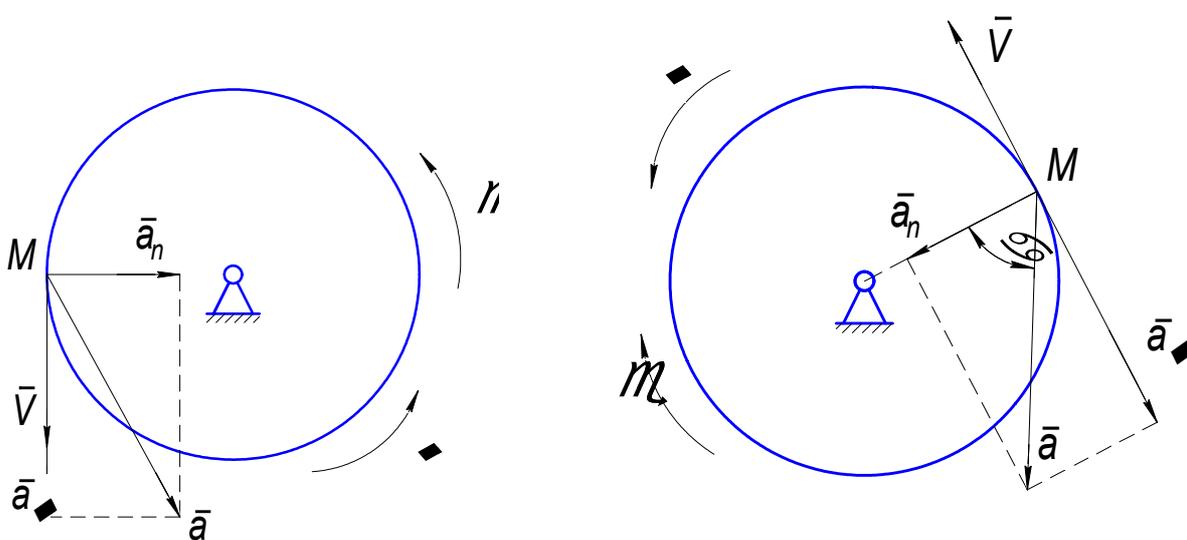


Рисунок 3

Полное ускорение точки М будет равно

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$$

или

$$a = h\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}$$

Так как ε и ω имеют в данный момент для всех точек тела одно и то же значение, то ускорения всех точек вращающегося твердого тела пропорциональны их расстояниям от оси вращения (рисунок 4).

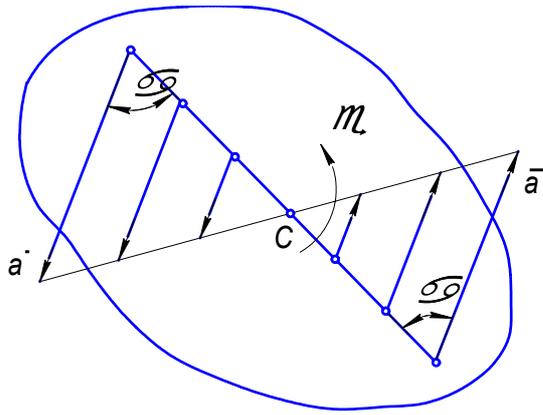


Рисунок 4

Отклонение вектора полного ускорения от радиуса описываемой точкой окружности определяется углом α (рисунки 3, 4), который вычисляется по формуле

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{|a_{\tau}|}{a_n} = \frac{|\epsilon|}{\omega^2}$$

1.4 Векторные формулы для определения скоростей и ускорений точек твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Формула

$$\bar{V} = \bar{\omega} \times \bar{r}$$

называется *формулой Эйлера*: вектор скорости любой точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси, равен векторному произведению вектора угловой скорости тела на радиус-вектор этой точки, проведенный из произвольно выбранной точки, взятой на оси вращения тела. (рисунок 5).

Формула Эйлера позволяет определить скорость любой точки вращающегося тела.

Дифференцируя обе ее части по времени, найдем ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси (рисунок 6):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{\omega} \times \bar{r}) = \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \frac{d\bar{r}}{dt} = \bar{\epsilon} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}$$

Первое слагаемое является касательным ускорением:

$$\bar{a}_\phi = \bar{\omega} \times \bar{r},$$

а второе слагаемое — это нормальное ускорение:

$$\bar{a}_n = \bar{\omega} \times \bar{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

Полное ускорение складывается из этих двух ускорений:

$$\bar{a} = \bar{a}_\phi + \bar{a}_n$$

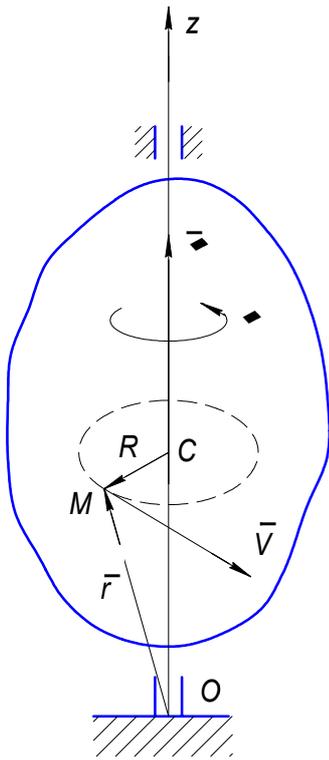


Рисунок 5

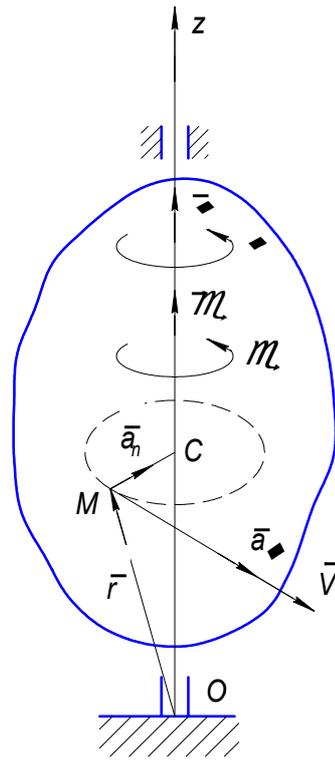


Рисунок 6

1.5 Передаточные механизмы

Передаточные механизмы предназначены для передачи вращения от одного вала, называемого *ведущим*, к другому, называемому *ведомым*. Если оси ведущего и ведомого валов параллельны или пересекаются, то вращение можно передать с помощью фрикционной или зубчатой передачи (рисунки 7-10).

Во фрикционной передаче вращение передается вследствие действия силы сцепления на поверхности соприкасающихся колес, в зубчатой передаче - от зацепления зубьев.

Вращательная скорость V в точке соприкосновения колес относится к точкам обоих колес, т. е. ее модуль определяется как

$$V = r_1 \cdot \omega_1 = r_2 \cdot \omega_2, \quad (1)$$

Откуда

$$\omega_1 / \omega_2 = r_2 / r_1$$

Таким образом, угловые скорости колес фрикционной или зубчатой передачи обратно пропорциональны радиусам колес.

При внешнем зацеплении (рисунок 7) направление вращения ведущего и ведомого колес противоположное, а при внутреннем (рисунок 8) - одинаковое.

Кроме фрикционной и зубчатой передач существует ременная передача - передача на расстоянии с помощью гибкой связи (ремня, троса, цепи) (рисунок 9).

Так как скорости всех точек ремня одинаковы, и ремень не скользит по поверхности шкива, то к ременной передаче относится то же соотношение (1).

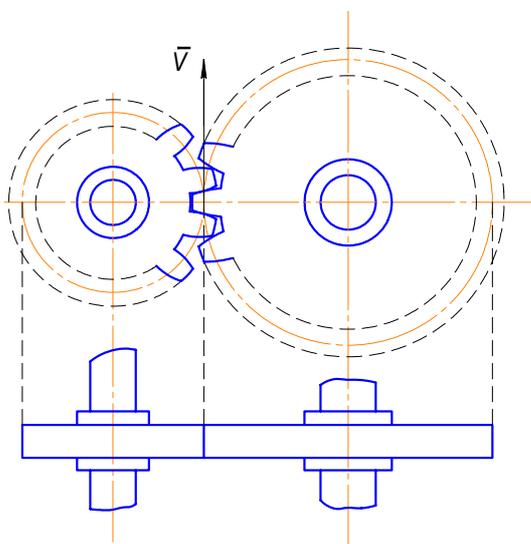


Рисунок 7

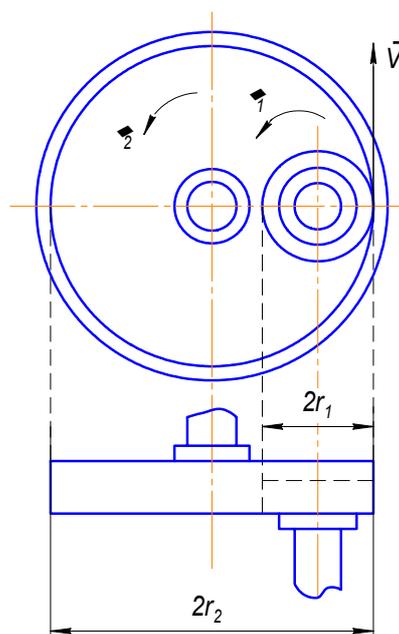


Рисунок 8

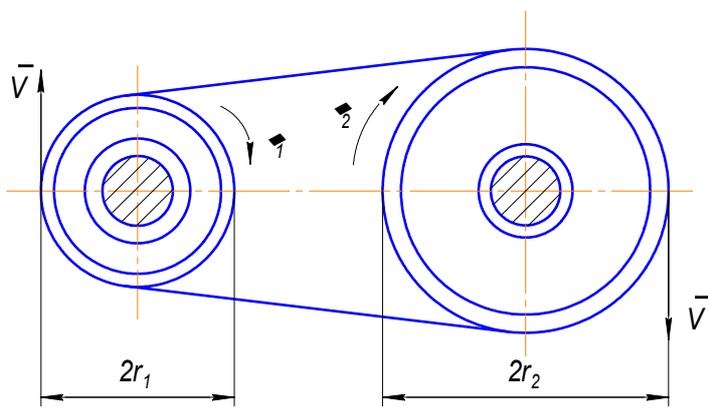


Рисунок 9

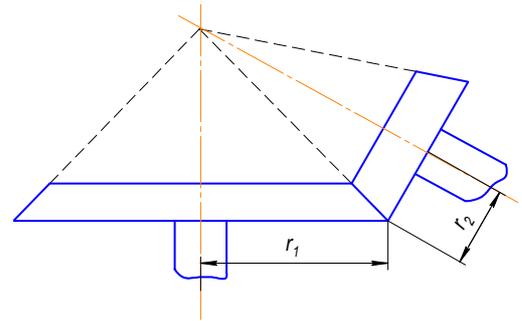


Рисунок 10

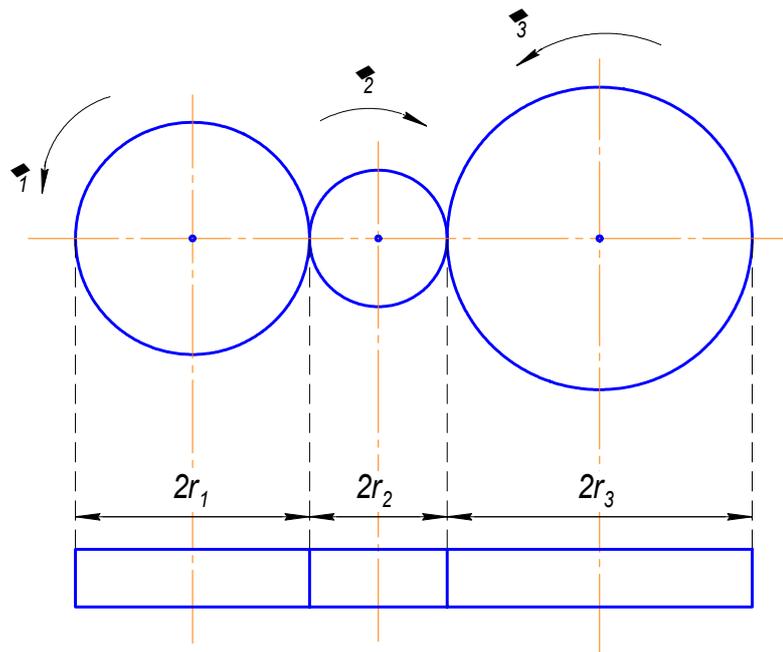


Рисунок 11

Применяются также серии колес с неподвижными осями вращения в виде последовательного ряда с паразитными колесами (рисунок 11) и последовательного ряда с кратным зацеплением (рисунок 12), называемые *рядовыми соединениями колес*.

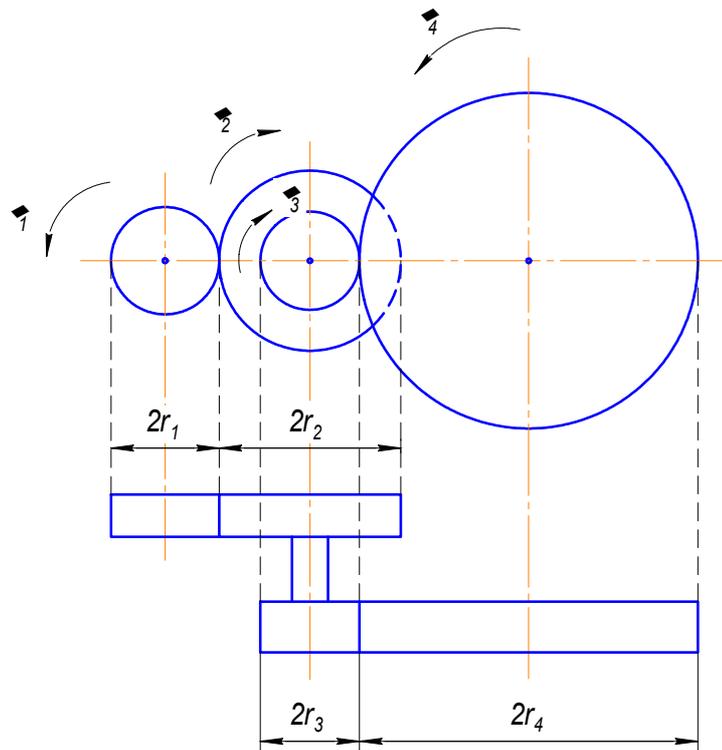


Рисунок 12

В рассмотренных передачах при равномерном вращении ведущего вала ведомый вал вращается тоже равномерно.

2 Контрольное задание К2

Определение скоростей и ускорений точек твердого тела при поступательном и вращательном движениях

2.1 Контрольные вопросы

1. Какое движение твердого тела называют поступательным?
2. Могут ли траектории точек тела при его поступательном движении быть окружностями? Привести примеры.
3. Перечислить основные свойства поступательного движения твердого тела.
4. Какими уравнениями задается поступательное движение тела?
5. Какое движение твердого тела называют вращательным вокруг неподвижной оси? Каковы траектории точек тела при этом движении?
6. Каким уравнением задается вращение тела вокруг неподвижной оси?
7. Какие зависимости существуют между углом поворота, угловой скоростью и угловым ускорением тела?
8. Как направлен вектор угловой скорости?
9. Как определяется скорость точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси?
10. Как определяется ускорение точки тела, вращающегося вокруг неподвижной оси? Как направлены и чему равны его составляющие?
11. Формулы Эйлера для скорости и ускорения точки.

2.2 Содержание задания

Движение тела 1 описывается уравнением $x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$,

где c_2 , c_1 и c_0 – некоторые постоянные коэффициенты;

t – время, с.

В начальный момент времени (при $t_0 = 0$) координата тела 1 соответствовала значению x_0 , а его скорость $-v_0$. В момент времени t_2 координата тела соответствует значению x_2 .

Для заданного механизма (рисунок 13, таблица 1) определить:

- 1) уравнение движения тела 1;
- 2) скорость и ускорение тела 1;
- 3) скорость и ускорение точки М в момент времени t_1 ;
- 4) на схеме механизма вычертить скорость и ускорения (касательное, нормальное и полное) точки М без учета масштаба.

2.3 Рекомендации к решению задач

При решении задач на преобразование простейших движений рекомендуется следующая последовательность:

- 1) исходя из условий задачи, записать уравнения движения того твердого тела, движение которого известно;
- 2) пользуясь формулами кинематики точки и кинематики вращения твердого тела вокруг неподвижной оси, найти кинематические характеристики другого твердого тела, которому передается движение;
- 3) найти скорости и ускорения точек этого твердого тела.

Таблица 1 – Исходные данные

Номер строки	Радиусы колес, см				Координаты и скорость тела			Расчетные моменты времени, с	
	R ₂	r ₂	R ₃	r ₃	x ₀ , см	v ₀ , см/с	x ₂ , см	t ₁	t ₂
1	80	65	60	45	5	10	41	1	2
2	100	60	75	65	8	6	40	2	4
3	60	45	60	50	4	4	172	3	4
4	80	70	45	30	3	15	102	2	3
5	100	60	30	25	7	16	215	2	4
6	45	35	105	90	8	5	124	3	4
7	35	10	25	10	5	2	111	2	3
8	40	30	20	15	10	7	48	1	2
9	20	10	30	10	6	5	356	2	5
0	60	45	40	30	2	12	173	2	3

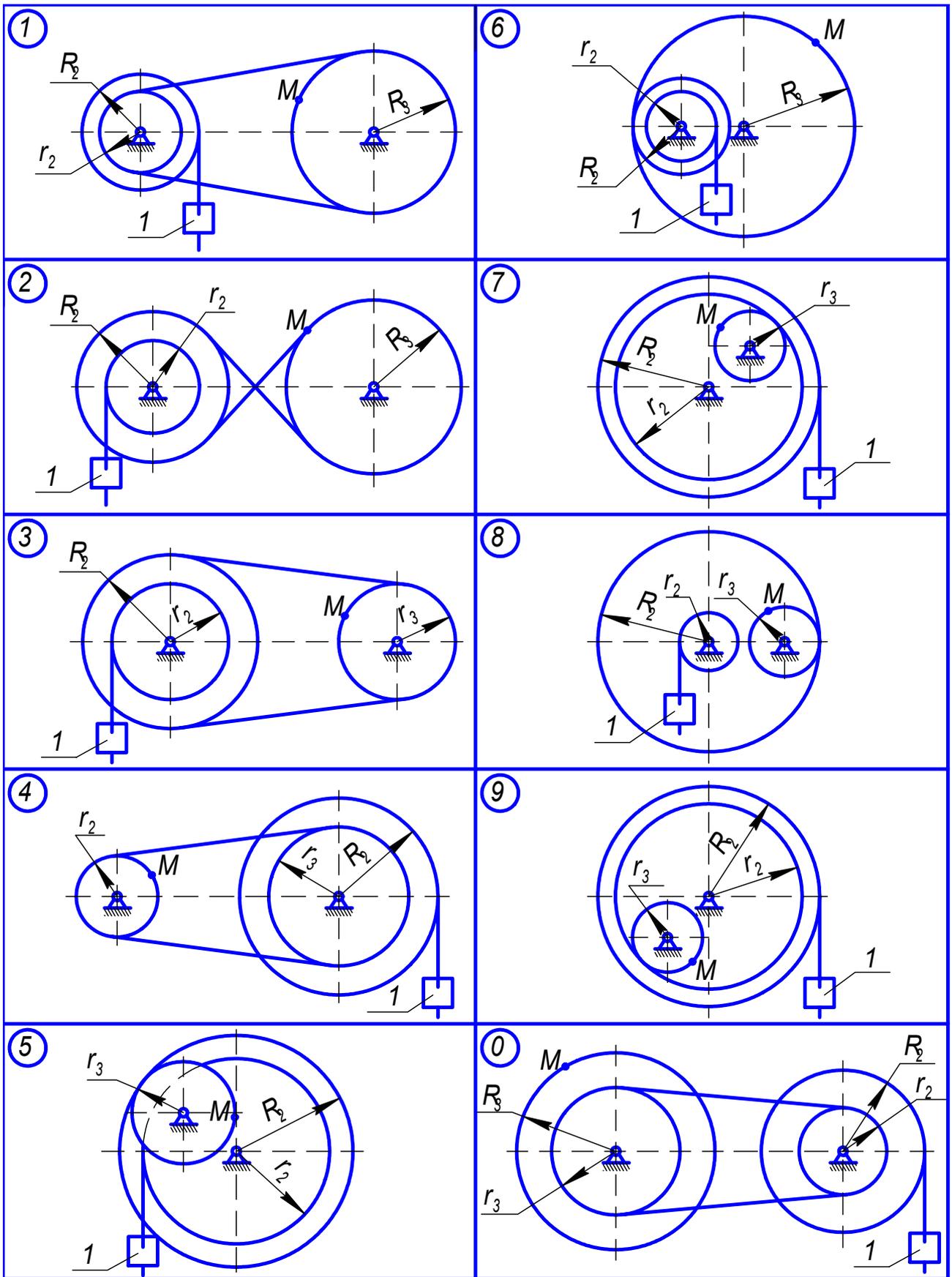


Рисунок 13

2.4 Пример выполнения задания

Движение тела 1 описывается уравнением $x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0$,

где c_2 , c_1 и c_0 – некоторые постоянные коэффициенты;

t – время, с.

В начальный момент времени (при $t_0 = 0$) координата тела 1 соответствовала значению x_0 , а его скорость $-v_0$. В момент времени t_2 координата тела соответствует значению x_2 .

Для заданного механизма (рисунок 14) требуется определить:

- 1) уравнение движения тела 1;
- 2) скорость и ускорение тела 1;
- 3) скорость и ускорение точки М в момент времени t_1 ;
- 4) на схеме механизма вычертить скорость и ускорение (касательное, нормальное и полное) точки М без учета масштаба.

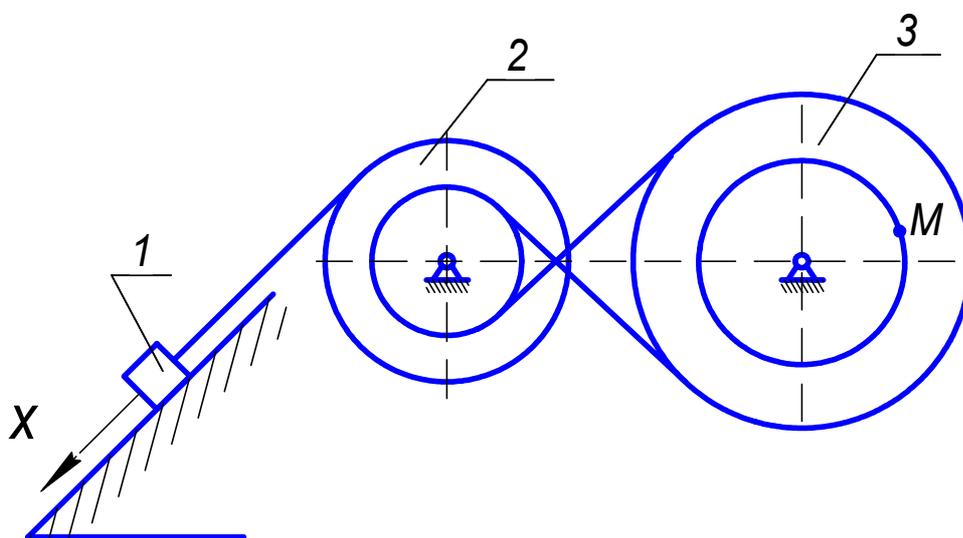


Рисунок 14

Таблица 2 - Исходные параметры

x_0 , см	v_0 , см/с	x_2 , см	t_1 , с	t_2 , с	r_2 , см	R_2 , см	r_3 , см	R_3 , см
10	5	158	2	4	50	80	70	100

Решение:

Движение тела 1 описывается уравнением

$$x = c_2 t^2 + c_1 t + c_0.$$

1. Определение уравнения движения тела.

Определяем коэффициенты c_0 , c_1 , c_2 .

По условию при $t_0=0$ перемещение

$$x_0=10 \text{ см,}$$

следовательно,

$$10 = c_2 \cdot 0 + c_1 \cdot 0 + c_0 \quad \text{и} \quad c_0 = 10.$$

Скорость тела 1:

$$v = \frac{dx}{dt} = 2c_2 t + c_1.$$

При $t_0 = 0$ скорость тела

$$v_0 = 5 \text{ см/с,}$$

значит,

$$5 = 2 \cdot c_2 \cdot 0 + c_1 \quad \text{и} \quad c_1 = 5.$$

При $t_2 = 4$ с перемещение тела соответствовало $x_2 = 158$ см:

$$x_2 = 158 = c_2 \cdot t^2 + 5 \cdot t + 10$$

$$158 = c_2 \cdot 4^2 + 5 \cdot 4 + 10$$

$$158 = 16c_2 + 30,$$

отсюда

$$c_2 = \frac{158 - 30}{16} = 8.$$

Таким образом, уравнение движения тела 1 принимает вид

$$x = 8t^2 + 5t + 10.$$

2. Вычисляем скорость и ускорение тела 1.

Скорость тела 1

$$v = \frac{dx}{dt} = 16t + 5, \text{ см/с.}$$

Ускорение тела 1

$$a_1 = \frac{d^2x}{dt^2} = 16 \text{ см/с}^2; \quad a_1 = \text{const.}$$

3. Определение скорости и ускорений точки М при $t_1 = 2$ с.

В соответствии с заданной схемой механизма, уравнения, связывающие скорость тела 1 (v_1) и угловые скорости колес 2 и 3 (ω_2 и ω_3) имеют вид:

$$v_1 = R_2 \cdot \omega_2 \quad \omega_2 = \frac{v_1}{R_2}.$$

Так как

$$v_B = v_D,$$

то

$$r_2 \cdot \omega_2 = R_3 \cdot \omega_3.$$

Следовательно, угловая скорость колеса 3

$$\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot r_2}{R_3} = \frac{v_1 \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3}$$

или, с учетом

$$v_1 = 16t + 5,$$

получаем

$$\omega_3 = \frac{(16t + 5) \cdot r_2}{R_2 \cdot R_3} = \frac{(16t + 5) \cdot 50}{80 \cdot 100} = 0,1t + 0,031.$$

В момент времени $t_1 = 2$ с угловая скорость

$$\omega_3 = 0,1 \cdot 2 + 0,31 = 0,231 \text{ рад/с.}$$

Угловое ускорение колеса 3

$$e_3 = \frac{d\omega_3}{dt} = 0,1 \text{ рад/с}^2.$$

Скорость точки М (v_M), ее касательное (a_M^ϕ), нормальное (a_M^n) и полное (a_M) ускорения вычисляем, соответственно, из соотношений

$$v_M = r_3 \cdot \omega_3 = 70 \cdot 0,231 = 16,17 \text{ см/с};$$

$$a_M^\phi = r_3 \cdot e_3 = 70 \cdot 0,1 = 7 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M^n = r_3 \cdot \omega_3^2 = 70 \cdot 0,231^2 = 3,735 \text{ см/с}^2;$$

$$a_M = \sqrt{(a_M^\phi)^2 + (a_M^n)^2} = \sqrt{7^2 + 3,735^2} = 7,934 \text{ см/с}^2.$$

4. На схеме вычерчиваем скорость и ускорения точки М без учета масштаба (рисунок 15).

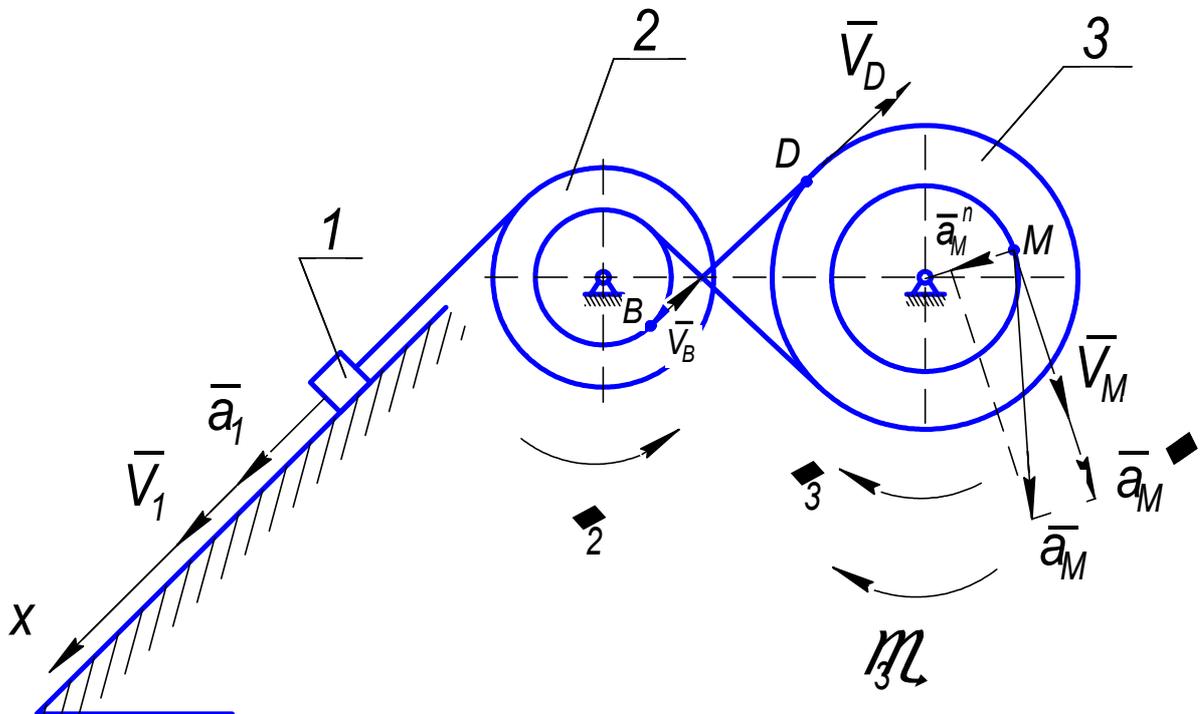


Рисунок 15

Результаты вычислений сводим в таблицу:

Таблица 3 – Результаты вычислений

Коэффициенты			Тело 1		Колесо 3		Точка М			
c_2	c_1	c_0	$v_1,$ см/с	$a_1,$ см/с ²	$\omega_3,$ рад/с	$\epsilon_3,$ рад/с ²	$v_M,$ см/с	$a_{M\phi},$ см/с ²	$a_{Mn},$ см/с ²	$a_M,$ см/с ²
8	5	10	16t+5	16	0,231	0,1	16,17	7	3,735	7,934

3 Литература, рекомендованная для изучения дисциплины

1 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов /Яблонский А.А., [и др].; под ред. А.А. Яблонского - 5-е изд., перераб. и доп. - М.: Высшая школа, 2010. - 367с.

2 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики./С.М. Тарг - 10-е изд., исправл. –М.: Наука, 2010. - 416 с.

3 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебник для втузов: в 2-х томах. Т.1. Статика./ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц Я.Л., Д.Р. Меркин -2-е изд., исправл. -М.: Наука, 1979. - 543 с.

4 Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: учебник для втузов: в 2-х томах. Т.2. Динамика./ Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц Я.Л., Д.Р. Меркин -2-е изд., исправл. -М.: Наука, 1979. - 543 с.

5 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов в 3-х томах. Т.1. Статика и кинематика./ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон - 9-е изд., перераб., - М.: Наука, 1990. - 672 с.

6 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов в 3-х томах. Т.2. Динамика./ М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991. - 640 с.