ПРИМЕНЕНИЕ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ФРЕДГОЛЬМА С ВЫРОЖДЕННЫМ ЯДРОМ

Павленко А.Н., Пихтилькова О.А.
Оренбургский государственный университет, г. Оренбург

Введение

Как известно [1, с. 49-53; 2, с. 37-39], интегральные уравнения Фредгольма с вырожденными ядрами сводятся к системам линейных алгебраических уравнений, для нахождения коэффициентов которых требуется вычисление n^2+n (n - количество слагаемых в вырожденном ядре) определенных интегралов или проведение для данного уравнения конкретизации решения уравнения в общем виде. Следует отметить, что практическое выполнение заданий по данной теме при самостоятельной работе вызывает у студентов значительные трудности чисто технического характера как при использовании информационных технологий, так и без их применения. Применение метода неопределенных коэффициентов ([3, с. 966-968; 4, с. 404-405] и приведенная там литература) без использования информационных технологий приводит к даже более сложным выкладкам в силу необходимости получения и упрощения подынтегральной функции, представляющей собой сумму $n(n+1)$ слагаемых.

Ниже рассматривается возможность применения метода неопределенных коэффициентов и метода частных значений к решению интегральных уравнений Фредгольма с вырожденными ядрами в среде компьютерного математического пакета. Последнее упрощает компьютерную генерацию многовариантных заданий [6-10] по данной теме, а также организацию аудиторной и домашней самостоятельной работы студентов [11-13].

Решение неоднородного уравнения Фредгольма второго рода в среде математического пакета MathCAD

Пусть имеется неоднородное интегральное уравнение Фредгольма второго рода

$$y(x)= f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt \qquad (1)$$

с вырожденным ядром $K(x,t)$, имеющим вид

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)b_i(t). \qquad (2)$$

Здесь функции $a_i(x)$, $b_i(t)$ $(i=1,2,...,n)$ предполагаются непрерывными на отрезке $[a,b]$. Кроме того, будем считать, что функции $a_i(x)$ $(i=1,2,...,n)$ и $b_i(t)$

$(i=1, 2,...,n)$ образуют две линейно независимые на отрезке $[a,b]$ системы функций.

Как известно [1, с. 49-53; 2, с. 37-39], структура решения неоднородного интегрального уравнения Фредгольма второго рода с вырожденным ядром имеет вполне определенный вид

$$y(x)= f(x)+\sum_{i=1}^{n} C_i a_i(x). \tag{3}$$

Тогда возможно применение метода неопределенных коэффициентов.

Для нахождения неизвестных коэффициентов C_i $(i=1, 2,...,n)$ используем, что для них на отрезке $[a,b]$ должно выполняться тождество

$$f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt - y(x)\equiv 0 . \tag{4}$$

Тогда будет верно равенство

$$\int_a^b \left| f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)y(t)dt - y(x)\right| dx = 0 .$$

Левую часть последнего равенства будем трактовать как функцию $F(C_1, C_2,...,C_n)$, зависящую от n переменных. Очевидно, что всегда $F(C_1, C_2,...,C_n)\geq 0$. Так как подынтегральная функция является непрерывной, то $F(C_1, C_2,...,C_n)=0$ тогда и только тогда, когда функция (3) будет являться решением исходного интегрального уравнения (1).

Таким образом, задача свелась к поиску минимума функции $F(C_1, C_2,...,C_n)$. Для нахождения которого удобно использовать функцию Minimize математического пакета MathCAD [5]. Пусть уравнение (1) имеет ровно одно решение, то тогда и минимум будет единственным.

Приведем (рисунок 1) в качестве примера решение интегрального уравнения

$$y(x)= x^3 + \frac{1}{2}\int_0^1 \left(x^2 t + 2xt^2\right) y(t)dt . \tag{5}$$

Структура решения данного уравнения имеет вид

$$y(x)= x^3 + C_1 x^2 + C_2 x .$$

Тогда получим

$$a := 0 \quad b := 1 \quad \lambda := \frac{1}{2} \quad f(x) := x^3$$

$$A(x) := \begin{pmatrix} x^2 & x \end{pmatrix} \quad B(t) := \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(C) := \int_a^b \left| A(x)\cdot C - \lambda \cdot \int_a^b A(x)\cdot B(t)\cdot (f(t) + A(t)\cdot C)\, dt \right| dx$$

$$V := \text{Minimize}(F, C)$$

$$V = \begin{pmatrix} 0.165 \\ 0.266 \end{pmatrix}$$

Рисунок 1

Таким образом, решение данного уравнения имеет вид

$$y(x) = x^3 + 0.165x^2 + 0.266x.$$

Точное решение

$$y(x) = x^3 + \frac{148}{897}x^2 + \frac{398}{1495}x.$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов предполагаемого решения (3) уравнения (1) можно свести последнее к системе линейных алгебраических уравнений в среде MathCAD, причем более простым способом, чем при стандартном подходе [1, с. 49-53; 2, с. 37-39].

Рассмотрим левую часть тождества (4). С учетом (2) и (3) ее можно рассматривать как функцию n переменных вида

$$F(C_1, C_2, \ldots, C_n) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) y(t) dt - y(x) =$$

$$= f(x) + \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(t) \right) \left(f(t) + \sum_{i=1}^n C_i a_i(t) \right) dt - \left(f(x) + \sum_{i=1}^n C_i a_i(x) \right) =$$

$$= \lambda \int_a^b \left(\sum_{i=1}^n a_i(x) b_i(t) \right) \left(f(t) + \sum_{i=1}^n C_i a_i(t) \right) dt - \sum_{k=1}^n C_i a_i(x) =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} h_i(C_1, C_2, ..., C_n)a_i(x).$$

Здесь $h_i(C_1, C_2, ..., C_n)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ - линейные функции относительно неизвестных коэффициентов C_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Тогда из (4) имеем тождество на отрезке $[a, b]$

$$\sum_{i=1}^{n} h_i(C_1, C_2, ..., C_n)a_i(x) \equiv 0.$$

Так как функции $a_i(x)$ $(i = 1, 2, ..., n)$ на отрезке $[a, b]$ являются независимыми, то из последнего тождества следует система линейных алгебраических уравнений

$$h_i(C_1, C_2, ..., C_n) = 0 \;\; (i = 1, 2, ..., n). \tag{6}$$

Решив которую, найдем искомые коэффициенты решения (3).

В качестве примера снова решим интегральное уравнение (5).

$$C1 \cdot x^2 + C2 \cdot x - \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 \left(x^2 \cdot t + 2 \cdot x \cdot t^2\right) \cdot \left(t^3 + C1 \cdot t^2 + C2 \cdot t\right) dt \rightarrow \frac{7}{8} \cdot C1 \cdot x^2 + \frac{3}{4} \cdot x \cdot C2 - \frac{1}{6} \cdot x - \frac{1}{10} \cdot x^2 - \frac{1}{5} \cdot x \cdot C1 - \frac{1}{6} \cdot x^2 \cdot C2$$

Given

$$\frac{7}{8} \cdot C1 - \frac{1}{6} \cdot C2 - \frac{1}{10} = 0$$

$$\frac{-1}{5} \cdot C1 + \frac{3}{4} \cdot C2 - \frac{1}{6} = 0$$

$$\mathrm{Find}(C1, C2) \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{148}{897} \\ \frac{398}{1495} \end{pmatrix}$$

Рисунок 2

Вместо решения полученной системы линейных уравнений (6), удобнее использовать метод частных значений (рисунок 3).

$$a := 0 \quad b := 1 \quad \lambda := \frac{1}{2} \quad f(x) := x^3$$

$$A(x) := \begin{pmatrix} x^2 & x \end{pmatrix} \quad B(t) := \begin{pmatrix} t \\ 2t^2 \end{pmatrix} \quad C := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$F(C,x) := A(x)\cdot C - \lambda\cdot\int_a^b A(x)\cdot B(t)\cdot(f(t) + A(t)\cdot C)\,dt$$

Given

$$F(C,1) = 0$$

$$F(C,2) = 0$$

$$\mathrm{Find}(C) = \begin{pmatrix} 0.165 \\ 0.266 \end{pmatrix}$$

Рисунок 3

Легкость получения ответов при использовании метода частных значений в среде MathCAD позволяет его применять для компьютерного генерирования индивидуальных заданий [6-10]. Последнее представляется более чем желательным для организации аудиторной и домашней самостоятельной работы студентов [11-13].

Список литературы

1. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения [Текст]: задачи и примеры с подробными решениями: учеб. пособие / М. Л. Краснов, А. И. Киселев, Г. И. Макаренко. - 4-е изд., испр. - М.: КомКнига, 2007. - 192 с. - (Вся высшая математика в задачах) - ISBN 987-5-484-00984-8.

2. Краснов, М. Л. Интегральные уравнения (Введение в теорию) [Текст]: учеб. пособие / М. Л. Краснов. - М.: Наука, 1975. - 301 с.

3. Математическая энциклопедия [Текст] / ред. И. М. Виноградов. - М. : Сов. энциклопедия, 1977-1985. - (Энциклопедии, словари, справочники). Т. 3: Коо - Од., 1982. - 1183 с.: ил.

4. Математический энциклопедический словарь [Текст] / гл. ред. Ю. В. Прохоров. - М.: Сов. энциклопедия, 1988. - 845 с.: ил.

5. Дьяконов, В. П. Mathcad 11/12/13 в математике [Комплект]: справочник / В. П. Дьяконов. - М.: Горячая линия-Телеком, 2007. - 958 с. : ил. + 1 электрон. опт. диск (CD-ROM). - Прил.: с. 905-931. - Библиогр.: с. 932-935. - ISBN 5-93517-332-8.

6. Кручинин, В.В. Использование деревьев И/ИЛИ для генерации вопросов и задач // Вестник Томского государственного университета. 2004. №284. С. 183 – 186.

7. Лаптев, В. В. Генерация вариантов заданий для лабораторных работ по программированию / В. В. Лаптев, В. В. Толасова // Вестник Астраханского государственного технического университета. Серия: Управление, вычислительная техника и информатика. 2010. № 1. С. 127-131.

8. Зорин, Ю.А. Использование алгоритмов комбинаторной генерации при построении генераторов тестовых заданий // Дистанционное и виртуальное обучение. 2013. №6. С. 54 – 59.

9. Павленко, А.Н. Применение ПК для составления большого количества вариантов однотипных заданий по курсу математического анализа / А.Н. Павленко. Совершенствование преподавания физико-математических дисциплин в педвузе и школе: Сб. науч. тр. – Вып. 2. – Борисоглебск: Борисоглебский госпединститут, 1999, ил., С. 43-46.

10. Павленко, А. Н. Составление большого количества вариантов заданий для самостоятельных работ по высшей математике в среде EXCEL: материалы VI региональной научно-практической конференции «Информационные и коммуникационные технологии в образовании» – Борисоглебск: БГПИ, 2003. – С. 69-73.

11. Павленко, А. Н. О некоторых аспектах организации самостоятельной работы студентов с использованием интерактивных технологий в условиях многоуровневой системы высшего профессионального образования / А. Н. Павленко, О. А. Пихтилькова // депонировано в ВИНИТИ № 374-В2012. – Оренбург: ОГУ, 2012.

12. Павленко, А.Н Об использовании информационных технологий при организации самостоятельной работы студентов в курсе математического анализа / А. Н. Павленко, О. А. Пихтилькова. Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы всерос. науч.-практич. конф. – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2013. – С. 1272-1276.

13. Павленко, А.Н. О целесообразности использования информационных технологий для повышения эффективности самостоятельной работы на аудиторных занятиях математического цикла / А.Н. Павленко, О.А. Пихтилькова О.А. Павленко А.Н., Пихтилькова О.А. Университетский комплекс как региональный центр образования, науки и культуры: материалы всерос. науч.-практич. конф. – Оренбург: ООО ИПК «Университет», 2014. – С. 1610-1612