МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет"

Кафедра сопротивления материалов

А.В. КОЛОТВИН, Р.В. РОМАШОВ

РАСЧЕТЫ НА ПРОЧНОСТЬ ПРИ КРУЧЕНИИ И ИЗГИБЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ ПО СОПРОТИВЛЕНИЮ МАТЕРИАЛОВ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования "Оренбургский государственный университет"

Оренбург 2009

УДК 620.1(07) ББК 30.121я7 К 61

Рецензент

кандидат технических наук, доцент С.Н. Горелов

Колотвин А.В.

К 61 Расчеты на прочность при кручении и изгибе: методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ по сопротивлению материалов/ А.В. Колотвин, Р.В. Ромашов – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 48 с.

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов заочной формы обучения специальностей: 260501 – ТПОП, 260202 – ТХМК, 260201 – ТЗ, 200503 – СС, 120303 – ГК, 190702 – ОБД при выполнении расчетно-проектировочных работ по сокращенной программе курса сопротивления материалов.

ББК 30.121я7

© Колотвин А.В., Ромашов Р.В., 2009 © ГОУ ОГУ, 2009

Содержание

1 Кручение	4
1.1 Понятие о кручении. Построение эпюр крутящих моментов	4
1.2 Напряжения и деформации при кручении стержня круглого	5
1.3 Расчеты стержней из условий прочности и жесткости при кручении	9
1.4 Задача №1 Построение эпюр ВСФ при кручении	11
2 Изгиб	12
2.1 Основные понятия об изгибе балок	12
2.2 Методика определения внутренних силовых факторов -	
поперечной силы и изгибающего момента	13
2.3 Дифференциальные зависимости между поперечной силой,	
изгибающим моментом и распределенной нагрузкой	14
2.4 Нормальные напряжения при чистом изгибе	16
2.5 Касательные напряжения при поперечном изгибе балки	18
2.6 Задача №2 Построение эпюр ВСФ при изгибе	20
3 Изгиб с кручением	27
3.1 Основные понятия	27
3.2 Задача №3 Расчет вала (изгиб с кручением)	30
Список использованных источников	36
Приложение А Указания к решению задачи №1	37
Приложение Б Указания к решению задачи № 2	41
Приложение В Указания к решению задачи № 3	45

1 Кручение

1.1 Понятие о кручении. Построение эпюр крутящих моментов

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях стержня возникает только крутящий момент. Прочие внутренние силовые факторы (продольная и поперечная силы, изгибающий момент) равны нулю.

В инженерной практике приходится весьма часто встречаться с деформацией кручения. Так, на кручение работают валы двигателей и станков, оси локомотивов и вагонов, элементы пространственных конструкций, витые пружины и др. Среди стержней, подвергаемых кручению, особое место занимают стержни с круглым или кольцевым поперечным сечением, имеющие наибольшее распространение в технике. Обычно их называют **валами**.

Для крутящего момента в учебной литературе иногда принимаются определенные правила знаков. Однако знак крутящего момента физического смысла не имеет, и общепринятого правила знака не существует.

Для определения крутящего момента M_{κ} в каком-либо сечении стержня применяется **метод сечений**. При этом крутящий момент в произвольном поперечном сечении стержня равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, действующих на стержень по одну сторону (слева или справа) от сечения. Если найти крутящие моменты в ряде сечений, то изменение M_{κ} по длине стержня можно изобразить графически в виде эпюры крутящих моментов.

В качестве примера рассмотрим построение эпюры крутящих моментов для стержня, нагруженного тремя внешними скручивающими моментами (рисунок 1.1).

Эпюру крутящих моментов удобнее строить, начиная от свободного (правого) конца, что позволяет не определять реактивный момент M_3 в заделке. Данный стержень состоит из четырех участков. Крутящие моменты в сечениях 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 участков равны:

 $M_{\kappa 1} = 0;$

 $M_{\kappa 2} = M_1 = 4$ кНм;

*М_{к3}=М*₁-*М*₂=4-7=-3 кНм;

 $M_{\kappa 4} = M_1 - M_2 + M_3 = 4 - 7 + 5 = 2$ кНм.

Полученные значения M_{κ} откладываются в выбранном масштабе от оси эпюры вверх или вниз, в зависимости от знака M_{κ} .



Рисунок 1.1

При расчете валов часто бывают заданы передаваемая мощность N в киловаттах и частота вращения n в оборотах в минуту. При этом крутящий момент M_{K} , H·м, может быть определен следующим образом:

$$M_{\kappa} = 9550 \cdot \frac{N}{n}$$

1.2 Напряжения и деформации при кручении стержня круглого поперечного сечения

Теория кручения стержня круглого поперечного сечения основана на следующих допущениях (гипотезах):

1) Сечения стержня, плоские и нормальные к его оси до деформации, остаются плоскими и нормальными к оси, и после деформации закручивания;

2) Радиусы поперечных сечений при деформации кручения стержня не искривляются.

Рассмотрим стержень круглого сечения радиуса r, жестко защемленный одним концом и нагруженный на свободном конце скручивающим моментом M (рисунок 1.2 а). В результате действия момента M возникает деформация кручения, в результате чего образующая *авсd* цилиндра, параллельная оси, займет положение *ав'с'd'*. При деформации стержня его поперечные сечения повернутся на некоторые углы по отношению к своему первоначальному положению (или, что то же, по отношению к неподвижному сечению – заделке). Угол поворота сечения тем больше, чем дальше отстоит сечение от заделки.



Рисунок 1.2

Таким образом, на основании принятых гипотез кручение стержня можно представить как результат сдвигов, вызванных взаимным поворотом поперечных сечений относительно друг друга. Вследствие этого можно сделать вывод, что в поперечных сечениях возникают только касательные напряжения, а нормальные напряжения равны нулю.

Рассмотрим деформацию элемента длиной dz, выделенного сечениями I и II из цилиндра (рисунок 1.2 б). Для наглядности элемент показан на рисунке 1.2 б в увеличенном виде. Если сечение I, находящееся на произвольном расстоянии z от заделки, повернулось на какой-то угол φ , то сечение II, находящееся на расстоянии z+dz от заделки, повернется на угол $\varphi + d\varphi$. Проведем из точки g прямую gc'' параллельно g'c'. Тогда угол $< c0c'' = d\varphi$. Деформация абсолютного сдвига элемента равна: $cc'' = r \cdot d\varphi$. Обозначая деформацию относительно сдвига через γ , можно записать:

$$\gamma = \frac{cc''}{dz} = r \cdot \frac{d\varphi}{dz} = r \cdot \theta, \qquad (1.1)$$

где $\theta = \frac{d\varphi}{dz}$ – относительный угол закручивания, т.е. угол закручивания, отнесенный к единице длины цилиндра. Для цилиндра постоянного сечения,

подверженного действию постоянного крутящего момента, угол $\theta = const$.

В соответствии с принятым допущением радиусы цилиндра при кручении остаются прямыми, тогда для произвольного элемента dA, находящегося внутри цилиндра на расстоянии ρ от центра сечения (рисунок 1.2 в), относительный сдвиг, с учетом формулы (1.1), равен:

$$\gamma_{\rho} = \rho \cdot \theta \,. \tag{1.2}$$

На основании закона Гука при сдвиге можно записать формулу для определения касательного напряжения в произвольной точке цилиндра, находящейся на расстоянии ρ от центра поперечного сечения:

$$\tau_{\rho} = G \cdot \gamma_{\rho} = G \cdot \theta \cdot \rho \,. \tag{1.3}$$

Отсюда следует, что $\tau = 0$ при $\rho = 0$; $\tau_{max} = G \cdot \theta \cdot r$ при $\rho = r$.

Таким образом, касательное напряжение изменяется по линейному закону пропорционально расстоянию ρ от центра поперечного сечения. Минимальное напряжение, равное нулю, имеет место в центре сечения, а максимальное – на поверхности цилиндра (рисунок 1.2 в).

Элементарная касательная сила, перпендикулярная радиусу сечения и действующая на элементарную площадку *dA*, с учетом формулы (1.3), равна:

$$dF = \tau_{\rho} \cdot dA = G \cdot \theta \cdot \rho \cdot dA.$$

Тогда элементарный момент, создаваемый силой *dF* относительно центра сечения, равен:

$$dM = \rho \cdot dF = G \cdot \theta \cdot \rho^2 \cdot dA.$$

Сумма таких элементарных моментов, взятая по всей площади поперечного сечения, равна крутящему моменту M_{κ} , который действует в рассматриваемом сечении цилиндра и в данном конкретном случае (для стержня с одним участком) равен внешнему моменту M:

$$M_{\kappa} = \int_{A} dM = \int_{A} G \cdot \theta \cdot \rho^{2} \cdot dA.$$

Учитывая, что G=const и θ = const, можно записать:

$$M_{\kappa} = G \cdot \theta \cdot \int_{A} \rho^2 \cdot dA$$

Но $\int_{A} \rho^2 \cdot dA = J_p$ – полярный момент инерции сечения. Тогда

$$M_{\kappa} = G \cdot \theta \cdot J_{p}. \tag{1.4}$$

Найдем зависимость напряжения от крутящего момента. Для этого в формулу (1.3) вместо θ подставим его значение из соотношения (1.4):

$$\tau_{\rho} = G \cdot \theta \cdot \rho = G \rho \frac{M_{\kappa}}{GJ_{p}} = \frac{M_{\kappa}}{J_{p}} \cdot \rho.$$
(1.5)

Формула (1.5) позволяет определять τ в любой (произвольной) точке круглого поперечного сечения, если известны крутящий момент M_{κ} и полярный момент инерции J_p . Для стержней с одним участком (рисунок 1.2 а) момент M_{κ} равен внешнему моменту, т.е. $M_{\kappa}=M$; для стержней, состоящих из нескольких участков (рисунок 1.1), значение M_{κ} берется с эпюры крутящих моментов.

Максимальное касательное напряжение, возникающее на поверхности цилиндра, можно определить, подставив в формулу (1.5) наибольшее значение радиуса ρ , равное *r*:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa}}{J_p} \cdot r = \frac{M_{\kappa}}{W_p}, \qquad (1.6)$$

$$W_p = \frac{J_p}{r}, \ \mathrm{cm}^3. \tag{1.7}$$

Величину *W_p* называют **полярным моментом сопротивления**. Приведем формулы для определения *W_p*: – для круглого сечения диаметром *d*:

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi d^4}{32} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0.2d^3;$$

– для кольцевого (трубчатого) сечения:

$$W_p = \frac{J_p}{r} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{16} (1 - \alpha^4) \approx 0.2D^3 (1 - \alpha^4),$$

где *D* – наружный диаметр;

 $\alpha = d/D$ – отношение внутреннего диаметра к наружному.

Как отмечено выше, при кручении деформация стержня состоит в повороте поперечных сечений стержня друг относительно друга. Из соотношения (1.4) получаем величину угла закручивания, отнесенного к единице длины стержня (относительный угол закручивания):

$$\theta = \frac{M_{\kappa}}{GJ_{p}}, \ \frac{\text{pag}}{M}.$$
(1.8)

Полный угол закручивания φ , радиан, равен:

$$\varphi = \theta \cdot l = \frac{M_{\kappa} \cdot l}{G \cdot J_p},\tag{1.9}$$

или, в градусах

$$\varphi^0 = \frac{M_\kappa \cdot l}{G \cdot J_p} \cdot \frac{180^0}{\pi}.$$
 (1.10)

Произведение модуля упругости второго рода на полярный момент инерции GJ_p называется жесткостью стержня при кручении. Угол закручивания тем меньше, чем больше произведение GJ_p , и наоборот. Жесткость характеризует способность стержня сопротивляться деформации кручения. Она зависит от материала и размеров поперечного сечения.

Если стержень состоит из нескольких участков, причем по длине стержня момент или диаметр меняются, то для расчета угла закручивания можно использовать формулу (1.9) в общем виде:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{k} \int_{l_i} \frac{M_{\kappa}}{GJ_p} \cdot dz, \qquad (1.11)$$

где *k* – количество участков.

Отметим, что полный угол закручивания φ не всегда может объективно характеризовать деформацию стержня при кручении. На протяжении длины стержня крутящие моменты могут иметь разные знаки (как на рисунке 1.1), поэтому полный угол закручивания, найденный как сумма углов закручивания отдельных участков, может быть небольшим, в то время как на некоторых участках он окажется значительным. Поэтому часто в расчетах удобнее использовать величину относительного угла закручивания $\theta = \varphi/l$ (отнесенного к единице длины стержня).

1.3 Расчеты стержней из условий прочности и жесткости при кручении

Условие прочности при кручении будет выполнено в том случае, если максимальное напряжение, возникающее при кручении, не превышает величины допускаемого напряжения:

$$\tau_{\max} = \frac{M_{\kappa \max}}{W_{\rho}} \le \tau_{adm} \,. \tag{1.12}$$

Допускаемое напряжение при кручении обычно принимают: $\tau_{adm} \approx (0,5...0,6) \sigma_{adm}$.

Пользуясь условием прочности (1.12), можно выполнить следующие расчеты:

1) произвести проверку прочности – непосредственно по формуле (1.12);

2) произвести **проектный расчет**, т.е. подобрать необходимые размеры поперечного сечения. Сначала определяется необходимый полярный момент сопротивления:

$$W_p \ge \frac{M_{\kappa \max}}{\tau_{adm}},\tag{1.13}$$

а затем и необходимый диаметр стержня (вала):

– для стержня сплошного круглого сечения $(W_p = 0, 2d^3)$

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa \max}}{0, 2\tau_{adm}}}; \tag{1.14}$$

– для стержня кольцевого (трубчатого) сечения $\left[W_p = 0, 2D^3(1-\alpha^4)\right]$

$$D \ge \sqrt[3]{\frac{M_{\kappa \max}}{0, 2(1 - \alpha^4)\tau_{adm}}}.$$
 (1.15)

3) определить допускаемый крутящий момент:

$$M_{k\max} \le W_p \cdot \tau_{adm} \,. \tag{1.16}$$

Кроме прочности, необходимо обеспечить жесткость стержня (вала).

Поэтому необходимо, чтобы наибольший относительный угол закручивания стержня не превышал допускаемого, установленного на основе опыта проектирования и эксплуатации конструкции. Условие жесткости записывается так:

$$\theta = \frac{M_{\kappa \max}}{GJ_p} \cdot \frac{180^0}{\pi} \le \theta_{adm}, \qquad (1.17)$$

где θ_{adm} – допустимый угол закручивания на единицу длины, который в зависимости от назначения вала принимается в пределах 0,25...1,0 градус/м.

Тогда на основании условия жесткости:

диаметр стержня (вала) сплошного круглого сечения $(J_p = 0, 1d^4)$

$$d \ge 4 \sqrt{\frac{M_{\kappa \max}}{0.1G\theta_{adm}}} \cdot \frac{180}{\pi}; \qquad (1.18)$$

наружный диаметр вала кольцевого сечения $\left[J_{p}=0,1D^{4}\left(1-\alpha^{4}\right)\right]$

$$D \ge \sqrt[4]{\frac{M_{\kappa \max}}{0, 1G\theta_{adm}} \cdot \left(1 - \alpha^4\right)} \cdot \frac{180}{\pi}.$$
 (1.19)

Расчет на жесткость производится в тех случаях, когда по условию эксплуатации нельзя допускать больших углов закручивания. Если вал длинный, то его рассчитывают на прочность и жесткость и затем выбирают большее значение диаметра.

1.4 Задача №1 Построение эпюр ВСФ при кручении

Имеется стержень, расчетная схема которого представлена на рисунке 1.3. Стержень нагружен внешними парами M_1, M_2, M_3 .

Требуется найти величины крутящих моментов M_K и построить их эпюру.

Дано: *a* =0,5 м; *b* = 1 м; *c*=2м, *M*₁=20 кН·м, *M*₂=60 кН·м, *M*₃=100 кН·м. Решение:

1 Расчет крутящих моментов производим, используя метод сечений. Крутящий момент на каждом участке находим как алгебраическую сумму моментов внешних пар, расположенных справа от сечения.

За первый участок принимается участок, наиболее удаленный от заделки (в данном случае это участок длиной a = 0,5 м), что позволяет не определять реактивный момент в заделке

 $M_{K1} = M_1 = 20 \text{ kH} \cdot \text{m};$

 $M_{K2} = M_1 - M_2 = 20 - 60 = -40 \text{ kH} \cdot \text{m};$

 $M_{K3} = M_1 - M_2 + M_3 = 20 - 60 + 100 = 60 \text{ kH} \cdot \text{M}.$

По найденным значениям крутящих моментов строится эпюра *Мк* (в произвольном масштабе) по участкам с учетом знака моментов (рисунок 1.3).



Рисунок 1.3

2 Изгиб

2.1 Основные понятия об изгибе балок

В конструкциях в большом количестве встречаются элементы, работающие на изгиб. Стержни, работающие на изгиб, принято называть **балками**. Термин «балка» в сопротивлении материалов – понятие широкое. С точки зрения расчетов на прочность и жесткость балкой является не только строительная балка, но также валы и оси машин, шатун кривошипно – шатунного механизма, зубья шестерен, болты и др.

На рисунке 2.1 а показана балка в ненагруженном состоянии. Если на боковой поверхности балки изобразить прямоугольник mnn_1m_1 , то, как показывают эксперименты, после деформации этот прямоугольник превратится в фигуру, близкую к трапеции (рисунок 2.1 б). Нижние продольные волокна балки при этом удлинятся, а верхние укоротятся. Таким образом, при изгибе часть волокон, расположенных по высоте балки, испытывает растяжение, а часть – сжатие. Следовательно, между ними есть волокно, которое не подвергалось ни деформации сжатия, ни деформации растяжения. Это волокно принято называть **нейтральным слоем балки**. Ось и продольные волокна при изгибе балки искривляются.



Рисунок 2.1

При изгибе в поперечных сечениях балок возникают два внутренних силовых фактора: поперечная сила *Q* и изгибающий момент *M*.

В зависимости от способов приложения нагрузки и способов закрепления

балки могут возникать два вида изгиба. В случае, когда изгибающий момент в поперечном сечении балки является единственным силовым фактором (а поперечная сила равна нулю), изгиб называется чистым. Если наряду с изгибающим моментом в поперечных сечениях возникают также и поперечные силы, то имеем так называемый поперечный изгиб.

На практике наибольший интерес представляет случай так называемого плоского изгиба, при котором все силы, в том числе и опорные реакции, лежат в одной плоскости, совпадающей с осью симметрии сечения.

2.2 Методика определения внутренних силовых факторов – поперечной силы и изгибающего момента

Расчет балок начинается, как правило, с определения опорных реакций. Предполагается, что внешние усилия, приложенные к балке и вызывающие ее деформацию, не нарушат равновесия балки. Балка рассматривается как система, на которую действуют активные и реактивные силы, лежащие в одной плоскости, и для нее справедливы три уравнения равновесия статики:

$$\sum Y = 0; \qquad \sum Z = 0; \qquad \sum M = 0.$$

Если на балку действуют только вертикально направленные внешние нагрузки, то уравнение $\sum Z = 0$ превращается в тождество. Тогда горизонтальная составляющая реакции в шарнирно – неподвижной или жестко защемленной опорах будет равна нулю, следовательно, для решения задачи достаточно двух уравнений.

Пусть балка, лежащая на опорах *B* и *C* (рисунок 2.2 а), нагружена произвольным образом внешними усилиями, действующими в вертикальной плоскости. Для определения внутренних силовых факторов в произвольном сечении применяется **метод сечений**.



Рисунок 2.2

Рассмотрим произвольное поперечное сечение *m-n* балки. Это сечение делит внешние силы и моменты, приложенные к балке, на две взаимно уравновешивающиеся системы, из которых одна действует слева (рисунок 2.2 б), а другая справа (рисунок 2.2 в) от сечения.

Как отмечено выше (п.2.1), в поперечном сечении возникают два внутренних силовых фактора – поперечная сила и изгибающий момент, которые заменяют действие отброшенной части балки на оставленную. При этом поперечную силу принято обозначать Q_y (с индексом «*y*»), так как направление этой силы параллельно оси *y*. Изгибающий момент принято обозначать M_x (с индексом «*x*»), так как под действием этого момента балка изгибается относительно оси *x*.

Для определения Q_y и M_x применяют следующие правила. Поперечная сила Q_y в любом сечении балки равна алгебраической сумме всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения (слева или справа от рассматриваемого сечения):

$$Q_{y} = \sum_{i=1}^{k_{1}} F_{i} \big|_{\text{слева}} = \sum_{i=1}^{k_{2}} F_{i} \big|_{\text{справа}}.$$
 (2.1)

Изгибающий момент M_x в любом сечении балки равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от рассматриваемого сечения и вычисленных относительно оси x:

$$M_{x} = \sum_{i=1}^{k_{1}} M(F_{i}) \big|_{\text{слева}} = \sum_{i=1}^{k_{2}} M(F_{i}) \big|_{\text{справа}}.$$
 (2.2)

Для поперечных сил и изгибающих моментов установлены **правила зна-**ков.

Обратим внимание, что известные из теоретической механики правила знаков статики неприемлемы для установления знаков Q_y и M_x , поэтому их применять не следует.

2.3 Дифференциальные зависимости между поперечной силой, изгибающим моментом и распределенной нагрузкой

Поперечная сила, изгибающий момент и интенсивность распределенной нагрузки связаны зависимостями, которые значительно упрощают построение эпюр Q_v и M_x :

$$q = \frac{dQ_y}{dz},\tag{2.3}$$

т.е. интенсивность распределенной нагрузки равна производной от поперечной силы по координате *z* сечения балки.

$$Q_y = \frac{dM_x}{dz},\tag{2.4}$$

т.е. поперечная сила равна производной от изгибающего момента по координате *z* сечения балки.

$$q = \frac{d^2 M_x}{dz^2},\tag{2.5}$$

т.е. интенсивность распределенной нагрузки равна второй производной от изгибающего момента по координате *z* сечения балки.

Зависимости (2.3), (2.4) и (2.5) используются при анализе различных вопросов, связанных с изгибом балок. В частности, ими пользуются при проверке правильности построения эпюр Q_y и M_x . Ниже приводится ряд правил проверки построения эпюр, одни из которых являются следствиями из дифференциальных зависимостей, другие вытекают непосредственно из метода сечений.

1 Если на некотором участке балки отсутствует распределенная нагрузка (q=0), то эпюра Q_y очерчена прямой линией, параллельной оси балки $(Q_y = \text{const})$, а эпюра M_x – прямой наклонной линией.

2 Для участка балки, на котором имеется равномерно распределенная нагрузка (q=const), эпюра Q_y очерчена прямой наклонной линией, а эпюра M_x – параболой (кривой второго порядка).

3 Если на некотором участке $Q_y > 0$, то изгибающий момент M_x возрастает (слева направо); если $Q_y < 0$, то момент M_x убывает; если $Q_y = 0$, то M_x =const (чистый изгиб).

4 Если поперечная сила Q_y , изменяясь непрерывно, проходит через нулевое значение (пересекает ось эпюры), то в этом сечении момент M_x достигает экстремума (равенство нулю первой производной – признак экстремума функции). Если при этом знак силы Q_y изменяется с плюса на минус (слева направо), то эпюра M_x в этом сечении имеет максимум, если знак Q_y изменяется с минуса на плюс, на эпюре M_x – минимум.

5 В сечении балки, в котором приложена сосредоточенная внешняя сила F, на эпюре Q_y имеется скачок, равный значению силы F, в ее направлении, а на эпюре M_x – перелом с острием навстречу силе. В сечении, в котором приложен сосредоточенный внешний момент M, на эпюре M_x – скачок, равный моменту в его направлении.

6 Эпюра M_x всегда обращена выпуклостью навстречу распределенной нагрузке q, что следует из дифференциальной зависимости (2.5) и совпадения правил знаков для изгибающих моментов и кривизны линии очертания эпюры.

2.4 Нормальные напряжения при чистом изгибе

Определение напряжений начнем со случая, когда поперечная сила равна нулю, и имеется только изгибающий момент. Как отмечалось выше, этот случай называется чистым изгибом.

Как показано в п.2.1, от действия изгибающего момента волокна балки, расположенные по одну сторону от нейтрального слоя, удлиняются (испытывают растяжение), а по другую – укорачиваются (испытывают сжатие). В результате в поперечных сечениях балки возникают нормальные напряжения растяжения и сжатия, неравномерно распределенные по высоте сечения.

Рассмотрим участок балки, нагруженный двумя равными противоположно направленными внешними моментами (рисунок 2.3). Для наглядности на рисунке изгиб балки сильно преувеличен. Двумя сечениями выделим элемент балки, подверженный деформации чистого изгиба. Радиус кривизны нейтрального слоя балки обозначен ρ .

Волокно *ав* на нейтральном слое искривляется, но напряжение в нем отсутствует ($\sigma=0$), так как оно является границей между зонами растяжения и сжатия.



Рисунок 2.3

Кривизна нейтрального слоя равна:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EJ_x}.$$
(2.6)

Произведение EJ_x называется жесткостью сечения балки при изгибе, которая зависит от механических свойств материала балки, а также формы и размеров сечения. Из формулы (2.6) следует, что кривизна нейтрального слоя (а значит и величина деформации изогнутой оси балки) обратно пропорциональна величине жесткости EJ_x .

Нормальные напряжения при изгибе равны:

$$\sigma = \frac{M_x}{J_x} \cdot y \,. \tag{2.7}$$

По формуле (2.7) можно рассчитывать напряжение в любой произвольной точке сечения, находящейся на расстоянии *у* от нейтральной оси *х* балки.

Из формулы 2.7 видно, что нормальные напряжения при изгибе распределены по высоте сечения неравномерно. При y=0 (на нейтральном слое) напряжение $\sigma = 0$, а при $y=y_{max}$ напряжение $\sigma = \sigma_{max}$, т.е. напряжение достигает максимального значения в волокнах, наиболее удаленных от нейтрального слоя. При этом по высоте сечения напряжения изменяются по линейному закону (см. эпюру σ на рисунке 2.3), так как они прямо пропорциональны расстоянию y от нейтрального слоя.

Наибольшие напряжения возникают на наиболее удаленных от нейтральной оси *x* волокнах, т.е. при $y=y_{max}$ (рисунок 2.3):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{J_x} \cdot y_{\max} = \frac{M_x}{\frac{J_x}{y_{\max}}} = \frac{M_x}{W_x}, \qquad (2.8)$$

где $W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}}$ (м³) – осевой момент сопротивления сечения относи-

тельно нейтральной оси х.

Формула (2.8) является основной при расчете на прочность балки при изгибе.

Рассмотрим величины моментов сопротивления W_x для наиболее распространенных форм сечения.

Для прямоугольного сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}} = \frac{\epsilon h^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{\epsilon h^2}{6}.$$
 (2.9)

Для круглого сечения:

$$W_x = \frac{J_x}{y_{\text{max}}} = \frac{\pi d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0.1 d^3.$$
 (2.10)

Для кольцевого (трубчатого) сечения:

$$W_x = \frac{\pi D^4 (1 - \alpha^4)}{64} : \frac{D}{2} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0, 1D^3 (1 - \alpha^4).$$
(2.11)

Для стандартных прокатных сечений (швеллеры, двутавры и др.) моменты сопротивлений приведены в справочных таблицах.

Таким образом, условие прочности (основная расчетная формула) при чистом изгибе записывается следующим образом:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x\max}}{W_x} \le \sigma_{adm}, \qquad (2.12)$$

где $M_{x \max}$ – максимальный изгибающий момент, взятый с эпюры M_x .

Отметим, что полученные формулы (2.7) и (2.8) для расчета нормальных напряжений применимы не только при чистом изгибе, но также и при поперечном изгибе, когда кроме изгибающих моментов M_x отличны от нуля поперечные силы Q_y .

Исходя из условия прочности (2.12), на практике могут решаться три вида задач:

1 Задача проверки прочности – по заданным нагрузкам и размерам поперечного сечения определяют максимальное напряжение в опасном сечении и сопоставляют его с допускаемым, т.е. расчет в этом случае делается непосредственно по формуле (2.12);

2 Проектная задача, когда по заданным нагрузкам и допускаемым напряжениям определяют размеры поперечного сечения балки, исходя из момента сопротивления:

$$W_{x} \ge \frac{M_{x \max}}{\sigma_{adm}}; \tag{2.13}$$

3 Задача определения допускаемого изгибающего момента в опасном сечении балки:

$$M_{x\max} \le W_x \cdot \sigma_{adm} \,. \tag{2.14}$$

2.5 Касательные напряжения при поперечном изгибе балки

Возникновение касательных напряжений τ при поперечном изгибе балок обусловлено наличием поперечных сил Q_y , так как поперечные силы вызывают деформацию сдвига: стремятся сдвинуть одну часть балки относительно другой в направлении, перпендикулярном к оси балки.

Касательные напряжения определяются по формуле:

$$\tau = \frac{Q_y \cdot S_x^*}{b \cdot J_x},\tag{2.15}$$

где J_x – момент инерции сечения относительно нейтральной оси *x*;

b – ширина сечения на расстоянии *y* от нейтральной оси;

 S_x^* – статический момент отсеченной части сечения относительно нейтральной оси *x*.

Формула (2.15) называется формулой Журавского Д.И. По этой формуле можно определять касательное напряжение в любой точке поперечного сечения балки. При этом ширина «*b*» сечения берется в том месте сечения, где находится рассматриваемая точка, а при расчете статического момента S_x^* за отсеченную часть сечения принимается часть A^* площади, расположенная выше (или ниже, если точка находится ниже оси *x*) уровня, на котором находится рассматриваемая точка.

При подходе к верхней или нижней кромкам сечения площадь отсеченной части сечения постепенно уменьшается до нуля: следовательно, для верхних и нижних точек сечения $S_x^*=0$, а значит и $\tau=0$. Максимального значения касательные напряжения τ достигают на нейтральной оси x, где S_x^* достигает наибольшей величины.

Закон распределения касательных напряжений τ по высоте поперечного сечения соответствует уравнению параболы.

Рассмотрим величины максимальных касательных напряжений $\tau_{\rm max}$ для наиболее распространенных форм сечения.

Так, для прямоугольного сечения касательное напряжение равно:

$$\tau_{\max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A}, \qquad (2.16)$$

где *А* – площадь поперечного сечения. Для круглого сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{A} = \frac{4}{3} \frac{Q_y}{\pi R^2}; \qquad (2.17)$$

для кольцевого (трубчатого) сечения:

$$\tau_{\max} = 2\frac{Q_y}{A} = 2\frac{Q_y}{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)},$$
(2.18)

где *D* – наружный диаметр кольца;

d – внутренний диаметр.

Для двутаврового поперечного сечения (или швеллера) максимальные касательные напряжения возникают в точках на нейтральной оси *x* и определяются по формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_y \cdot S_{x\max}^*}{d \cdot J_x},\tag{2.19}$$

где $S_{x \max}^*$ – статический момент полусечения относительно нейтральной оси *x* (определяется по справочным таблицам);

d – толщина стенки двутавра.

2.6 Задача №2 Построение эпюр ВСФ при изгибе

Перед построением эпюр Q_y и M_x необходимо с помощью уравнений статики определить опорные реакции, возникающие под влиянием внешних нагрузок. Опорные реакции можно не определять для консольных балок (защемленных с одного конца), но в этом случае расчет (обход участков) надо выполнять, начиная со свободного (незакрепленного) конца.

Значения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x находятся методом сечений. Поперечная сила в рассматриваемом сечении балки равна алгебраической сумме (с учетом знака) проекций на ось *у* всех внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения:

$$Q_y = \sum_{i=1}^n F_i \, .$$

Изгибающий момент в рассматриваемом сечении балки равен алгебраической сумме (с учетом знака) моментов всех внешних сил, приложенных по одну сторону от сечения относительно оси *x* этого сечения:

$$M_x = \sum_{i=1}^n M_i \; .$$

Вычислив по указанным формулам значения поперечной силы Q_y и изгибающего момента M_x в различных сечениях балки, строятся эпюры Q_y и M_x , являющиеся графиками изменения указанных усилий вдоль оси *z* балки. При этом положительные ординаты эпюры поперечных сил Q_y откладываются вверх от оси эпюры, а отрицательные - вниз. Ординаты эпюр изгибающих моментов M_x откладываются со стороны сжатых волокон балки. Согласно этому правилу, положительные моменты необходимо откладывать вверх, а отрицательные - вниз.

Примечание - В строительной отрасли принять ординаты эпюры моментов M_x откладывать со стороны растянутого волокна. Поэтому положительные моменты откладываются вниз, а отрицательные – вверх.

Правила знаков

Поперечная сила Q_y в сечении считается положительной, если внешние силы, лежащие слева от рассматриваемого сечения, направлены вверх или справа от него – вниз (рисунок 2.4); и отрицательной в противоположном случае: слева - вниз или справа - вверх. Согласно этому правилу внешняя сила, стремящаяся повернуть оставленную часть балки по отношению к рассматриваемому сечению по ходу часовой стрелки, вызывает в сечении положительную, а против хода часовой стрелки - отрицательную поперечную силу Q_y .



Рисунок 2.4

Изгибающий момент M_x в сечении считается положительным, если момент относительно центра тяжести сечения от внешних сил, лежащих слева от рассматриваемого сечения, направлен по часовой стрелке или справа от него против хода часовой стрелки; и отрицательным в противоположном случае: слева - против хода часовой стрелки или справа - по часовой стрелке. Согласно этому правилу изгибающий момент M_x считается положительным (рисунок 2.4), если рассматриваемая часть балки изгибается вверх (выпуклостью вниз), и отрицательным - если балка изгибается вниз (выпуклостью вверх).

Задача № 2

Дано: $F_1 = 60$ кH; $F_2 = 30$ кH; M = 120 кH·м; q = 15 кH/м; a = 2 м.

Требуется найти величины поперечных сил Q_y и изгибающих моментов M_x и построить их эпюры.

Решение:

1 Определяются реакции опор R_A и R_B . Для этого составляются уравнения моментов:

$$\sum M_{A} = 0; \qquad (q \cdot 4a) \cdot 2a + F_{1} \cdot 4a + M + F_{2} \cdot 6a - R_{B} \cdot 5a = 0.$$

Отсюда
$$R_B = \frac{15 \cdot 8 \cdot 4 + 60 \cdot 8 + 120 + 30 \cdot 12}{10} = 144$$
 кH;



Рисунок 2.5

 $\sum M_{B} = 0; \qquad +F_{2} \cdot a + M - F_{1} \cdot a - (q \cdot 4a) \cdot 3a + R_{A} \cdot 5a = 0.$

Отсюда $R_A = \frac{-30 \cdot 2 - 120 + 60 \cdot 2 + 15 \cdot 8 \cdot 6}{10} = 66$ кH.

Проверка: $\sum y = 0$; $R_A + R_B - F_1 - F_2 - q \cdot 4a = 0$

 $66 + 144 - 60 - 30 - 15 \cdot 8 = 0$

210 - 210 = 0, то есть реакции найдены правильно.

2 Построение эпюр M_x и Q_y .

Балка (рисунок 2.5) разбивается на участки. Для решения данной задачи удобно разбить балку на три участка, причем два взять слева, и один - справа. Для определения M_x и Q_y применяется метод сечений.

Участок 1. Делается сечение на расстоянии z_1 от начала участка $(0 \le z_1 \le 8 \text{ м})$, и условно отбрасывается правая часть балки (рисунок 2.6).



Поперечная сила на этом участке находится как алгебраическая сумма сил, лежащих слева от сечения:

$$Q_{y_1} = R_A - q \cdot z_1$$

Согласно правилу знаков реакция R_A берется положительной (так как дает момент по часовой стрелке относительно рассматриваемого сечения), а распределенная нагрузка на длине z_1 - отрицательной, так как она направлена в обратную сторону (дает момент против хода часовой стрелки).

При $z_1 = 0$ $Q_{y_1} = R_A - q \cdot 0 = R_A = 66$ кH;

При $z_1 = 8$ м $Q_{y_1} = R_A - q \cdot b = 66 - 15 \cdot 8 = -54$ кH.

При этом поперечная сила Q_{y_1} на первом участке изменяется по линейному закону (прямая наклонная линия).

Поперечная сила Q_{y_1} на первом участке меняет знак с плюса на минус, то есть эпюра Q_{y_1} пересекает ось. Определим, на каком расстоянии z_{1_0} от начала участка эпюра пересекает ось:

$$Q_{y_1} = 0;$$
 $R_A - q \cdot z_{1_0} = 0.$

Отсюда
$$z_{1_0} = \frac{R_A}{q} = \frac{66}{15} = 4,4$$
 м.

Изгибающий момент на первом участке находится как алгебраическая сумма моментов всех внешних сил, действующих слева от сечения:

$$M_{x_{1}} = R_{A} \cdot z_{1} - (q \cdot z_{1}) \cdot \frac{z_{1}}{2} = R_{A} \cdot z_{1} - \frac{q \cdot z_{1}^{2}}{2}$$

Согласно правилу знаков момент, создаваемый реакцией R_A , положительный (он направлен по часовой стрелке слева от сечения, изгибая рассматриваемую часть балки выпуклостью вниз), а момент, создаваемый распределенной нагрузкой, - отрицательный, так как он направлен в обратную сторону (изгибает балку выпуклостью вверх). При этом $(q \cdot z_1)$ - равнодействующая распределенной нагрузки, приложенная по середине отрезка длиной z_1 , поэтому плечо момента от этой силы равно $z_1/2$.

При
$$z_1 = 0$$
 $M_{x_1} = 0;$
При $z_1 = 8$ м $M_{x_1} = R_A \cdot 8 - \frac{q \cdot 8^2}{2} = 66 \cdot 8 - \frac{15 \cdot 64}{2} = 48$ кН·м.

Изгибающий момент M_{x_1} на первом участке изменяется по параболическому закону, так как его уравнение - второго порядка (M_{x_1} зависит от z_1^2).

Определяется максимальное значение момента на первом участке в сечении балки, где $Q_{y_1} = 0$ (при $z_{1_0} = 4,4$ м):

$$M_{x_1 \max} = R_A \cdot 4, 4 - \frac{q \cdot 4, 4^2}{2} = 66 \cdot 4, 4 - \frac{15 \cdot 4, 4^2}{2} = 145 \text{ kHm}.$$

Участок 2. Делается сечение на расстоянии z_2 от начала участка $(0 \le z_2 \le 2 \text{ м})$, и условно отбрасывается правая часть балки (рисунок 2.7).

Поперечная сила как алгебраическая сумма сил, лежащих слева от сечения, равна:

 $Q_{y_2} = R_A - q \cdot 4a - F_1 = 66 - 15 \cdot 8 - 60 = -114$ кH, то есть на втором участке поперечная сила постоянна по всей его длине.



Рисунок 2.7

Изгибающий момент на втором участке равен:

 $M_{x_2} = R_A (4a + z_2) - (q \cdot 4a) \cdot (2a + z_2) - F_1 \cdot z_2;$

где $(q \cdot 4a)$ - равнодействующая распределенной нагрузки, приложенная по середине отрезка длиной $4 \cdot a = 8$ м, поэтому плечо момента от этой силы равно $(2a + z_2)$.

При $z_2 = 0$; $M_{x_2} = R_A \cdot 4a - q \cdot 4a \cdot 2a = 66 \cdot 8 - 15 \cdot 8 \cdot 4 = 48$ кН·м; При $z_2 = 2$ м $M_{x_2} = R_A \cdot 5a - q \cdot 4a \cdot 3a - F_1 \cdot 2 = = 66 \cdot 10 - 15 \cdot 8 \cdot 6 - 60 \cdot 2 = -180$ кН·м.

При этом изгибающий момент M_{x_2} на втором участке изменяется по линейному закону (наклонная прямая линия).

Участок 3. Делается сечение на расстоянии z_3 от начала участка $(0 \le z_3 \le 2 \text{ м})$ и условно отбрасывается левая часть балки (рисунок 2.8).



Рисунок 2.8

Поперечная сила как алгебраическая сумма сил, лежащих справа от сечения (дает момент по часовой стрелке относительно сечения), равна:

 $Q_{y_3} = F_2 = 30$ кH, то есть на третьем участке поперечная сила постоянна по всей его длине.

Изгибающий момент на третьем участке равен: $M_{x_3} = -F_2 \cdot z_3$

Согласно правилу знаков этот момент отрицательный, так как он напрвлен по часовой стрелке справа от сечения (изгибает рассматриваемую часть балки выпуклостью вверх):

При $z_3 = 0$ $M_{x_3} = 0$. При $z_3 = 2$ м $M_{x_2} = -F_1 \cdot 2 = -30 \cdot 2 = -60$ кН·м.

При этом изгибающий момент M_{x_3} на третьем участке изменяется по линейному закону (наклонная прямая линия).

По полученным данным Q_y и M_x для первого, второго и третьего участков строятся в произвольном масштабе эпюры поперечных сил и изгибающих моментов (рисунок 2.5), действующих по длине балки. Положительные значения моментов M_x откладываются вверх от оси эпюры, а отрицательные - вниз.

3 Изгиб с кручением

3.1 Основные понятия

В конструкциях различных механизмов очень часто встречаются детали, работающие на совместное действие изгиба и кручения. Характерным примером таких деталей являются валы самых разнообразных устройств.

При расчёте валов обычно учитываются только крутящий и изгибающий моменты, действующие в опасном поперечном сечении, и не принимаются во внимание поперечные силы, так как соответствующие им касательные напряжения относительно невелики: примерно до 5% от напряжений кручения.

При расчёте на прочность валов предварительно, используя принцип независимости действия сил, строятся эпюры изгибающих моментов M_x и M_y от нагрузок, действующих в вертикальной и горизонтальной плоскостях, а также эпюру крутящих моментов M_k .

В каждом сечении круглого вала имеет место прямой изгиб от действия результирующего изгибающего момента:

$$M_{u} = \sqrt{M_{x}^{2} + M_{y}^{2}} \,.$$

Нормальные напряжения от этого момента достигают наибольших значений на поверхности вала и определяются по формуле:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_u}{W} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2}}{W},$$
(3.1)

где $W \approx 0.1d^3$ - осевой момент сопротивления сечения вала.

Максимальные касательные напряжения от кручения также возникают на поверхности вала и равны:

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p} = \frac{M_k}{2W},\tag{3.2}$$

где $W_{p} \approx 0.2d^{3}$ - полярный момент сопротивления сечения вала.



Каждое из этих напряжений (σ_{\max} и τ_{\max}), взятое в отдельности, может быть меньше допускаемого напряжения для соответствующего вида деформаций. Однако одновременное их действие может оказаться опасным для вала.

Для оценки одновременного действия напряжения σ от изгиба и напряжения τ от кручения выделим в наиболее опасной точке (на поверхности вала) элемент материала (рисунок 3.1).

По четырём граням этого элемента действуют касательные напряжения, по двум их этих граней – нормальные напряжения. Значит, элемент находится в плоском напряженном состоянии. Расчёт в этом случае ведётся по эквивалентному напряжению на основании одной из теорий прочности.

Воспользуемся, например, условием прочности, исходя из третьей теории прочности:

$$\sigma_{_{\mathcal{H}G_{III}}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \le \sigma_{adm} \tag{3.3}$$

Подставив в это условие выражения (3.1) и (3.2) для напряжений σ и τ , получаем (с учётом того, что $W_p = 2 \cdot W$):

$$\sigma_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}.III}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_k^2}}{W} \le \sigma_{adm}$$
(3.4)

Выражение, стоящее в числителе, назовём эквивалентным моментом:

$$M_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}_{III}}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_k^2}, \qquad (3.5)$$

тогда расчётная формула принимает вид:

$$\sigma_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}.III}} = \frac{M_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}_{III}}}}{W} \le \sigma_{adm}, \qquad (3.6)$$

то есть расчёт на прочность выполняется по эквивалентному моменту, который учитывает как изгибающие, так и крутящий моменты.

Если исходить из четвёртой (энергетической) теории прочности, то условие прочности записывается, как:

$$\sigma_{_{\mathcal{H}\mathcal{G}._{IV}}} = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \le \sigma_{adm} \tag{3.7}$$

Осуществив подстановки, аналогичные предыдущим, имеем:

$$\sigma_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}._{IV}}} = \frac{\sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_k^2}}{W} \le \sigma_{adm}, \qquad (3.8)$$

тогда

$$M_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}_{IV}}} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0.75M_k^2}, \qquad (3.9)$$

а расчётная формула аналогична выражению (3.6).

Таким образом, расчётная формула (3.6) для случая действия изгиба и кручения вала аналогична расчётной формуле на изгиб с той лишь разницей, что вместо изгибающего момента берётся некоторый другой момент, называемый эквивалентным моментом, определяемым по формулам (3.5) или (3.9). При этом наиболее опасным сечением вала будет, очевидно, то сечение, для которого величина эквивалентного момента будет максимальной.

Решая неравенство (3.6) относительно *W*, получаем формулу для определения момента сопротивления:

$$W \ge \frac{M_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}.}}}{\sigma_{adm}},\tag{3.10}$$

и диаметра круглого вала (с учётом того, что $W \approx 0.1d^3$):

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{10M_{_{\mathcal{H}B.}}}{\sigma_{adm}}} \tag{3.11}$$

При проверочных расчётах, когда диаметр вала известен, определяется коэффициент запаса прочности:

$$n = \frac{\sigma_y}{\sigma_{_{\mathcal{SKG}}}},\tag{3.12}$$

где σ_v - предел текучести материала.

По третьей теории прочности значение $\sigma_{_{_{ЭКВ.}}}$ определяется выражением (3.3). Для этого случая

$$n = \frac{\sigma_y}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau^2}{(0.5\sigma_y)^2}}}$$

В соответствии с третьей теорией τ_y = 0,5 σ_y , тогда:

$$n = \frac{1}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma_y^2} + \frac{\tau^2}{\tau_y^2}}}$$
(3.13)

Формула (3.13) после преобразований принимает вид:

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}}, \qquad (3.14)$$

29

где $n_{\sigma} = \frac{\sigma_y}{\sigma}$ - коэффициент запаса прочности по нормальным

напряжениям;

 $n_{\tau} = \frac{\tau_y}{\tau}$ - коэффициент запаса прочности по касательным

напряжениям.

Следует отметить, что зависимости (3.13) и (3.14) остаются в силе и для четвёртой теории прочности, только в этом случае $\tau_v \approx 0.58 \sigma_v$.

3.2 Задача №3 Расчет вала (изгиб с кручением)

Дано: передаваемая мощность P = 40 кВт при частоте вращения n = 2200 об/мин. Заданы (рисунок 3.2) диаметры зубчатых колес $D_1 = 80$ мм, $D_2 = 200$ мм. Длина участков a = 80 мм, b = 100 мм, c = 80 мм. Материал сталь – 45 с допускаемым напряжением $\sigma_{adm} = 80$ МПа.

Требуется определить диаметр вала на каждом из участков и выполнить приближенный эскиз вала.

Решение:

1 Определяется крутящий момент, передаваемый валом:

$$M_{\kappa} = \frac{P}{\omega}; \ \omega = \frac{\pi n}{30} = \frac{3,14 \cdot 2200}{30} = 230,27 \ 1/c$$

$$M_{\kappa} = \frac{P}{\omega} = \frac{40 \cdot 10^3}{230,27} = 173,7 \text{ H} \cdot \text{M}$$



Рисунок 3.2

Крутящий момент подается на вал через пару зубчатых колес, в которую входит колесо диаметром D_1 , а снимается через пару колес, в которую входит колесо диаметром D_2 . Таким образом, эпюра крутящего момента расположена между колесами D_1 и D_2 на длине вала, равной (a+b) - рисунок 3.2.

2 Определяются усилия, действующие на зубчатые колеса. Окружные усилия:

$$F_{t_1} = \frac{M_{\kappa}}{0.5D_1} = \frac{173.7}{0.04} \left(\frac{\text{H} \cdot \text{M}}{\text{M}}\right) = 4343 \text{ H}$$

$$F_{t_2} = \frac{M_{\kappa}}{0,5D_2} = \frac{173,7}{0,01} \left(\frac{\text{H} \cdot \text{M}}{\text{M}}\right) = 1737 \text{ H}$$

Радиальные усилия:

 $F_{r_1} = 0, 4F_{t_1} = 0, 4 \cdot 4343 = 1737$ H

$$F_{r_2} = 0, 4F_{t_2} = 0, 4 \cdot 1737 = 695$$
 H

Осевое усилие, действующее на колесо диаметром D₂:

$$F_{a_2} = 0, 3F_{t_2} = 0, 3 \cdot 1737 = 521 \text{ H}$$

3 Построение эпюры изгибающих моментов M_x , действующих на вал в вертикальной плоскости.

Для этого составляется расчетная схема вала, на которой показывают внешние силы, действующие в вертикальной плоскости: радиальные усилия F_{r_1} и F_{r_2} , а также внешний сосредоточенный момент от осевого усилия $M = F_{a_2} \cdot \frac{D_2}{2}$. На опорах (в подшипниках) вала возникают неизвестные реакции R_A и R_B .

Определяются реакции опор R_B и R_A

$$\sum M_{A} = 0; -1737 \cdot 0,08 - 695 \cdot 0,1 + 52,1 + R_{B} \cdot 0,18 = 0$$
$$R_{B} = \frac{156,36}{0,18} = 868,7 \text{ H} (\text{направлена вверх})$$
$$\sum M_{B} = 0; -1737 \cdot 0,26 + 52,1 + 695 \cdot 0,08 - R_{A} \cdot 0,18 = 0$$

$$R_A = -\frac{343,92}{0,18} = -1910,7$$
 Н (т.е. направлена вниз)

Проверка реакций:

$$\sum Y = 0;$$
 $F_{r_1} + R_B - R_A - F_{r_2} = 0$ 1737 + 868, 7 - 1910, 7 - 695 = 0

2605,7-2605,7=0, т.е. реакции определены, верно.

Построение эпюры изгибающих моментов M_x в вертикальной плоскости выполняется по участкам (рисунок 3.3 б).

Первый участок
$$0 \le z_1 \le 0,08$$
 м
 $M_{x_1} = F_{r_1} \cdot z_1 = 1737 z_1 = \frac{0}{0,08} \left| \frac{0}{139 \text{ H} \cdot \text{м}} \right|$

Второй участок $0 \le z_2 \le 0,1$ м

$$M_{x_2} = F_{r_1} \cdot (0,08 + z_2) - R_A \cdot z_2 = 1737 \cdot (0,08 + z_2) - 1910,7z_2 = \frac{0}{0,1} \left| \frac{139 \text{ H} \cdot \text{m}}{121,6 \text{ H} \cdot \text{m}} \right|$$

Третий участок $0 \le z_3 \le 0,08$ м

$$M_{x_3} = R_B \cdot z_3 = 868, 7 \cdot z_3 = \frac{0}{0,08} \left| \frac{0}{69,5 \text{ H} \cdot \text{m}} \right|^{-1}$$

По найденным значениям строится эпюра M_x для вертикальной плоскости.

Примечание: на границе между вторым и третьим участками на эпюре M_x получается скачок, равный внешнему сосредоточенному моменту M = 52,1 Н·м: 121,6-69,5 = 52,1 Н·м

4 Построение эпюры изгибающих моментов M_y , действующих на вал в горизонтальной плоскости.

Для этого составляется расчетная схема вала, на которой показывают внешние силы, действующие в горизонтальной плоскости – окружные усилия F_{t_1} и F_{t_2} . На опорах (в подшипниках) вала возникают неизвестные реакции H_A и H_B .

Определяются реакции опор H_B и H_A

$$\sum M_{A} = 0; \ 4343 \cdot 0,08 - 1737 \cdot 0,1 + H_{B} \cdot 0,18 = 0$$

 $H_{B} = \frac{-173,74}{0,18} = -965,2$ H, т.е. первоначально выбранное направление H_{B}

оказалось неверным.

$$\sum M_B = 0$$
; 4343 · 0,26 + 1737 · 0,08 – H_A · 0,18 = 0
 $H_A = \frac{1268,14}{0,18} = 7045,2$ Н (направление выбрано, верно)

Проверка реакций:

$$\sum X = 0; \quad H_A - F_{t_1} - F_{t_2} - H_B = 0 \qquad 7045, 2 - 4343 - 1737 - 695, 2 = 0$$

7045, 2-7045, 2 = 0, т.е. реакции определены, верно.

Построение эпюры изгибающих моментов M_y в горизонтальной плоскости выполняется по участкам (рисунок 3.3 в)

Первый участок $0 \le z_1 \le 0,08$ м

$$M_{y_1} = -F_{t_1} \cdot z_1 = -4343z_1 = \frac{0}{0,08} \left| \frac{0}{-347,4 \text{ H} \cdot \text{m}} \right|^{-347,4 \text{ H} \cdot \text{m}}$$

Третий участок $0 \le z_3 \le 0,08$ м

$$M_{y_3} = -H_B \cdot z_3 = -965, 2z_3 = \frac{0}{0,08} \left| \frac{0}{-77,2 \text{ H} \cdot \text{m}} \right|$$

На втором участке уравнение для M_{y_2} можно не составлять, так как эпюра M_y на втором участке получается, если соединить прямой линией значения моментов M_y в конце первого и третьего участков.

5 Расчет диаметра вала по участкам (рисунок 3.3) На левом (малом) колесе *D*₁:

$$M_x = 0$$
; $M_y = 0$; $M_\kappa = 173,7$ Н·м (взято с эпюр M_x, M_y, M_κ).

Вертикальная плоскость







Горизонтальная плоскость:



Рисунок 3.3

Эквивалентный изгибающий момент (по третьей теории прочности) равен:

$$M_{_{\mathcal{K}\mathcal{G}}}^{III} = \sqrt{M_{_{X}}^{^{2}} + M_{_{Y}}^{^{2}} + M_{_{K}}^{^{2}}} = \sqrt{0 + 0 + 173,7^{^{2}}} = 173,7 \text{ H}\cdot\text{m}$$

Диаметр вала равен:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{10 \cdot M_{_{3K6}}^{III}}{\sigma_{adm}}} = \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 173,7}{80 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{21,7 \cdot 10^{-6}} = 2,8 \cdot 10^{-2} = 2,8 \text{ cm} = 28 \text{ mm}$$

На левой опоре А:

 $M_x = 139$ H·м; $M_y = 347,4$ H·м; $M_\kappa = 173,7$ H·м (взято с эпюр M_x , M_y , M_κ).

$$M_{_{\mathcal{H}\mathcal{B}}}^{III} = \sqrt{139^2 + 347, 4^2 + 173, 7^2} = \sqrt{170180} = 412,5 \text{ H}\cdot\text{M}$$

Диаметр вала равен:

$$d \ge \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 412,5}{80 \cdot 10^6}} = \sqrt[3]{51,5625 \cdot 10^{-6}} = 3,72 \cdot 10^{-2} = 3,72 \text{ cm} = 37,2 \text{ mm}$$

Округляем диаметр, принимая d = 38 мм.

На правом (большом) колесе D_2 :

$$M_{x} = 121,6 \text{ H} \cdot \text{m}; \ M_{y} = 77,2 \text{ H} \cdot \text{m}; \ M_{\kappa} = 173,7 \text{ H} \cdot \text{m}$$
$$M_{_{3\kappa6}}^{III} = \sqrt{121,6^{2} + 77,2^{2} + 173,7^{2}} = \sqrt{50919} = 226 \text{ H} \cdot \text{m}$$
$$d \ge \sqrt[3]{\frac{10 \cdot 226}{80 \cdot 10^{6}}} = \sqrt[3]{28,25 \cdot 10^{-6}} = 3,06 \cdot 10^{-2} = 3,06 \text{ cm} = 30,6 \text{ mm}$$

Округляем, принимаем d = 32 мм.

На правой опоре В:

$$M_x = 0; M_y = 0; M_\kappa = 0$$
 Н·м (взято с эпюр M_x, M_y, M_κ).

Тогда $M_{_{3\kappa\theta}}^{III} = 0$ Н·м. Так как диаметр вала при $M_{_{3\kappa\theta}}^{III} = 0$ рассчитать невозможно, то принимаем на правой опоре d = 20 мм - конструктивно. Этот размер вала даст возможность поставить на опоре подшипник стандартных размеров.

На основании рассчитанных значений диаметра вала по участкам делается эскиз вала (рисунок 3.3 в).

Список использованных источников

1 **Феодосьев, В.И.** Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2007. - 592 с.

2 Александров, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Александров, В.Д. Потапов, Б.Т. Державин. - М.: Высшая школа, 2003. – 560 с.

3 Степин, П.А. Сопротивление материалов / П.А. Степин. – М.: Высшая школа, 1983. – 303 с.

4 Костенко, Н.А. Сопротивление материалов / Н.А. Костенко [и др.]. – М.: Высшая школа, 2004. – 430 с.

5 Кочетов, В.Т. Сопротивление материалов / В.Т. Кочетов, А.Д. Павленко, М.В. Кочетов – Ростов-на-Дону: Феникс, 2001. – 368 с.

6 **Ромашов, Р.В.** Сопротивление материалов / Р.В. Ромашов. – Оренбург.: Изд-во ОГУ, 2007 – 284 с.

7 Колотвин, А.В. Расчеты на прочность при плоском изгибе: методические указания к выполнению расчетно-проектировочных работ по сопротивлению материалов / А.В. Колотвин, Р.В. Ромашов – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 34 с.

Приложение А (обязательное) Указания к решению задачи №1

Порядок решения:

- 1 Вычертить в масштабе расчетную схему по данным варианта.
- 2 Вычислить значения крутящих моментов на каждом из участков.
- 3 Построить эпюру ВСФ.

Таблица А.1 – Исходные данные к заданию

- I					1					
N⁰	Значения параметров					N⁰	№ Значения параметров			
вар.	ам	Ьм	СМ	М,		вар.	ам	Ьм	СМ	М,
	<i>a</i> , M	v, \mathbf{M}	С, М	кН∙м			<i>u</i> , M	v, w	ς, Μ	кH·м
1	1	2	5	20		16	7	3	8	20
2	4	3	6	20		17	5	2	7	40
3	3	3	4	30		18	3	1	6	30
4	2	4	7	30		19	2	3	8	20
5	6	2	9	40		20	4	5	7	30
6	5	2	6	40		21	3	6	9	10
7	3	3	7	20		22	2	5	9	20
8	4	1	8	10		23	4	3	5	40
9	2	3	6	40		24	7	2	9	20
10	5	3	6	50		25	1	6	10	30
11	1	4	7	50		26	4	4	6	50
12	3	2	8	10		27	3	5	8	40
13	2	5	10	10		28	5	4	6	10
14	2	2	3	20		29	6	4	10	20
15	3	4	10	10]	30	3	3	8	50

Схемы расчетно-проектировочных заданий



Продолжение таблицы А.2



Продолжение таблицы А.2



Приложения Б (обязательное) Указания к решению задачи № 2

Порядок решения:

- 1 Вычертить в масштабе расчетную схему по данным варианта.
- 2 Вычислить все ВСФ на каждом из участков.
- 3 Построить эпюру ВСФ.

Помор	Значения параметров							
варианта	а,м	<i>b</i> ,м	С,М	<i>F</i> , кН	$q, \kappa H_{M}$	M , к $\mathrm{H}\cdot\mathrm{m}$		
1	1	2	5	20	10	20		
2	4	3	6	40	20	20		
3	3	3	4	30	30	30		
4	2	4	7	40	20	30		
5	6	2	9	20	40	40		
6	5	2	6	50	20	40		
7	3	3	7	20	30	20		
8	4	1	8	20	10	10		
9	2	3	6	20	40	40		
10	5	3	6	10	30	50		
11	1	4	7	30	40	50		
12	3	2	8	40	50	10		
13	2	5	10	30	60	10		
14	2	2	3	10	30	20		
15	3	4	10	40	50	10		
16	7	3	8	30	20	20		
17	5	2	7	10	20	40		
18	3	1	6	20	20	30		
19	2	3	8	30	50	20		
20	4	5	7	40	10	30		
21	3	6	9	20	50	10		
22	2	5	9	30	20	20		
23	4	3	5	10	40	40		
24	7	2	9	50	30	20		
25	1	6	10	30	10	30		
26	4	4	6	10	40	50		
27	3	5	8	20	10	40		
28	5	4	6	30	30	10		
29	6	4	10	30	40	20		
30	3	3	8	20	40	50		

Таблица Б.1 – Исходные данные к заданию



Таблица Б.2 – Задание к задаче 2

Продолжение таблицы Б.2



Продолжение таблицы Б.2



Приложения В

(обязательное)

Указания к решению задачи № 3

Проектный расчет вала по условиям статической прочности

Порядок решения:

1 Вычислить и построить эпюры ВСФ.

2 Определить диаметры вала на каждом участке по условиям прочности.

3 Вычертить в масштабе эскиз вала.

Принять:

- материал вала – Сталь 45, $\sigma_{adm} = 80$ МПа;

- $F_{r_1} = 0, 4F_t, F_a = 0, 3F_t.$

No	Значения параметров								
вар.	Р, кВт	<i>п</i> , об/мин	<i>D</i> ₁ , м	<i>D</i> ₂ , м	а,м	<i>b</i> ,м	С,М		
1	2,2	300	0,05	0,16	0,20	0,10	0,10		
2	2,2	400	0,05	0,17	0,15	0,15	0,15		
3	2,5	200	0,06	0,18	0,12	0,11	0,14		
4	3,5	500	0,06	0,19	0,10	0,10	0,10		
5	3,5	300	0,05	0,20	0,14	0,12	0,14		
6	3,5	400	0,05	0,19	0,14	0,14	0,14		
7	5,0	300	0,06	0,18	0,10	0,10	0,10		
8	5,0	350	0,06	0,17	0,12	0,12	0,12		
9	5,0	250	0,05	0,16	0,15	0,15	0,15		
10	7,0	300	0,05	0,15	0,16	0,12	0,12		

Таблица В.1 – Исходные данные к заданию

Схемы расчетно-проектировочных заданий



Продолжение таблицы В.2



Продолжение таблицы В.2

