

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса

Кафедра вычислительной техники и математики

П.Н.ШАЛЫМИНОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 519.6(075.32)
ББК 22.193 Я73
III 18

Рецензент
заместитель директора по научно-методической работе
Кузюшин С. А.

Ш18 **Шалыминов, П. Н.**
Численные методы : конспект лекций/ Шалыминов П.Н. –
Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 92 с.

Конспект лекций предназначен для изучения в полном объеме стандарта для очного отделения, обеспечения учебного процесса в Колледже электроники и бизнеса ГОУ ОГУ для студентов 3 курса в 3 семестре по специальности 230105.01 Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем очной формы обучения.

Конспект лекций составлен с учетом требований государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования «Государственные требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальности 230105.51 Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем (введены в действие с 21.01.03 г, примерная программа учебной дисциплины «Численные методы»).

ББК 22.193 Я73

© Шалыминов П.Н., 2009
© ГОУ ОГУ, 2009

Содержание

Введение.....	6
1 Введение в теорию погрешностей.....	7
1.1 Представление чисел в позиционной системе счисления.....	7
1.2 Основные источники погрешностей.....	9
1.3 Округление чисел.....	11
1.4 Абсолютная погрешность.....	12
1.5 Верные значащие цифры.....	13
1.6 Относительная погрешность приближенных чисел.....	15
1.7 Вопросы к самопроверке.....	16
2 Решение нелинейных алгебраических уравнений приближенными методами.....	17
2.1 Основные понятия. Виды уравнений. Способы решения уравнений	17
2.2 Метод половинного деления для решения нелинейного уравнения..	20
2.2.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом половинного деления.....	21
2.3 Метод хорд для решения нелинейных уравнений.....	22
2.3.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом хорд.....	24
2.4 Метод Ньютона (касательных).....	26
2.4.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона (касательных).....	27
2.5 Метод итерации.....	29
2.5.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом итерации.....	32
2.6 Комбинированный метод хорд и касательных.....	33
2.6.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения комбинированным методом хорд и касательных.....	34
2.7 Вопросы к самопроверке.....	35
3 Решение систем линейных алгебраических уравнений.....	36
3.1 Основные понятия. Способы решения системы линейных алгебраических уравнений.....	36
3.2 Метод Гаусса для решения системы линейных алгебраических уравнений.....	38
3.2.1 Пример решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса.....	39
3.3 Метод итерации для решения систем линейных алгебраических уравнений.....	40
3.3.1 Пример решения систем линейных алгебраических уравнений методом итераций.....	43
3.4 Метод Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений.....	44
3.4.1 Пример решения систем линейных алгебраических уравнений	

методом Зейделя.....	46
3.5 Вопросы к самопроверке.....	48
4 Интерполирование функций.....	49
4.1 Основные понятия. Интерполяция и экстраполяция.....	49
4.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа для неравностоящих узлов.....	50
4.2.1 Пример вычисления значения функции, заданной таблицей в точке с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа для неравностоящих узлов.....	51
4.3 Интерполяционный полином Лагранжа для равностоящих узлов....	51
4.4 Интерполяционные формулы Ньютона для равностоящих узлов....	53
4.4.1 Конечные разности.....	53
4.4.2 Первая интерполяционная формула Ньютона.....	54
4.4.3 Вторая интерполяционная формула Ньютона.....	56
4.4.4 Пример вычисления значения функции, заданной таблицей в точке с помощью интерполяционных полиномов Ньютона для равностоящих узлов.....	56
4.5 Интерполяция сплайнами.....	58
4.6 Вопросы к самопроверке.....	61
5 Методы вычисления определенных интегралов.....	62
5.1 Основные понятия. Методы вычисления определенных интегралов.....	62
5.2 Метод трапеций.....	62
5.3 Формула Симпсона.....	66
5.5 Вопросы к самопроверке.....	69
6 Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений....	69
6.1 Основные понятия. Способы решения обыкновенных дифференциальных уравнений.....	69
6.2 Метод Эйлера.....	72
6.2.1 Пример ручного решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера.....	74
6.3 Усовершенствованный метод Эйлера.....	75
6.3.1 Пример ручного решения обыкновенного дифференциального уравнения усовершенствованным методом Эйлера.....	75
6.4 Метод Рунге-Кутты.....	77
6.4.1 Пример ручного решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты.....	79
6.5 Вопросы к самопроверке.....	81
7 Методы минимизации и оптимизации функции одной и двух переменных.....	81
7.1 Основные понятия. Методы минимизации функций одной переменной.....	81
7.1.1 Поиск минимума функции одной переменной.....	82
7.1.2 Метод дихотомии.....	83
7.1.3 Метод золотого сечения.....	84

7.2	Минимизация функции многих переменных.....	86
7.2.1	Метод покоординатного спуска.....	88
7.2.2	Метод наискорейшего спуска.....	89
7.3	Вопросы к самопроверке.....	91
	Список использованных источников.....	92

Введение

В данном методическом пособии излагается теоретический материал по следующим темам:

- введение в теорию погрешностей;
- решение нелинейных алгебраических уравнений приближенными методами;
- решение систем линейных алгебраических уравнений;
- интерполирование функций;
- методы вычисления определенных интегралов;
- методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений;
- методы минимизации и оптимизации функции одной и двух переменных.

После каждой темы приведен перечень вопросов к самопроверке.

Методическое пособие может быть использовано студентами очной и заочной формы обучения при изучении других дисциплин, в которых есть данные темы из дисциплины «Численные методы», а также преподавателями этой дисциплины.

1 Введение в теорию погрешностей

1.1 Представление чисел в позиционной системе счисления

Информация в ЭВМ кодируется, как правило, в двоичной или в двоично-десятичной системе счисления.

Система счислений - это способ наименования и изображения чисел с помощью символов, имеющих определенные количественные значения.

В зависимости от способа изображения чисел системы счисления делятся на позиционные и непозиционные.

В *позиционной* системе счисления количественное значение каждой цифры зависит от ее места (позиции) в числе. В *непозиционной* системе счисления цифры не меняют своего количественного значения при изменении их расположения в числе. Количество (P) различных цифр, используемых для изображения числа в позиционной системе счисления, называется основанием системы счисления. Значения цифр лежат в пределах от 0 до $P-1$. В общем случае запись любого смешанного числа в системе счисления с основанием P будет представлять собой ряд вида:

$$a_{m-1}P^{m-1} + a_{m-2}P^{m-2} + a_{m-3}P^{m-3} + \Lambda + a_1P^1 + a_0P^0 + a_{-1}P^{-1} + a_{-2}P^{-2} + \Lambda + a_{-s}P^{-s} \quad (1.1)$$

где нижние индексы определяют местоположение цифры в числе (разряд):

– положительные значения индексов - для целой части числа (m разрядов);

– отрицательные значения - для дробной (s разрядов).

Пример 1.1: Позиционная система счисления - арабская десятичная система, в которой: основание $P=10$, для изображения чисел используются 10 цифр (от 0 до 9). Непозиционная система счисления - римская, в которой для каждого числа используется специфическое сочетание символов (XIV, CXXVII и т.п.).

Максимальное целое число, которое может быть представлено в m разрядах:

$$N_{\max} = P^m - 1$$

Минимальное значащее (не равное 0) число, которое можно записать в s разряд дробной части:

$$N_{\min} = P^{-s}$$

Имея в целой части числа m , а в дробной s разрядов, можно записать всего P^{m+s} разных чисел.

Двоичная система счисления имеет основание $P=2$ и использует для представления информации всего две цифры: 0 и 1. Существуют правила перевода чисел из одной системы счисления в другую, основанные, в том числе и на соотношении (1.1).

Пример 1.2:

$101110,101_{(2)} = 1*2^5 + 1*2^4 + 1*2^3 + 1*2^2 + 1*2^1 + 0*2^0 + 1*2^{-1} + 1*2^{-2} + 1*2^{-3} = 46,625_{(10)}$, т.е. двоичное число 101110,101 равно десятичному числу 46,625.

В вычислительных машинах применяются две формы представления двоичных чисел:

- естественная форма или форма с фиксированной запятой (точкой);
- нормальная форма или форма с плавающей запятой (точкой).

С *фиксированной* запятой все числа изображаются в виде последовательности цифр с постоянным для всех чисел положением запятой, отделяющую целую часть от дробной.

Пример 1.3: В десятичной системе счисления имеются 5 разрядов в целой части числа (до запятой) и 5 разрядов в дробной части числа (после запятой); числа, записанные в такую разрядную сетку, имеют вид:

400721,35500; +00000,00328; -10301,20260.

Эта форма наиболее проста, естественна, но имеет небольшой диапазон представления чисел и поэтому не всегда приемлема при вычислениях.

Пример 1.4: Диапазон значащих чисел (N) в системе счисления с основанием P при наличии m разрядов в целой части и s разрядов в дробной части числа (без учета знака числа) будет:

$$P^{-s} \leq N \leq P^m - P^{-s}$$

При $P=2$, $m=10$, $s=6$: $0.015 \leq N \leq 1024$

Если в результате операции получится число, выходящее за допустимый диапазон, происходит переполнение разрядной сетки, и дальнейшие вычисления теряют смысл. В современных ЭВМ естественная форма представления используется как вспомогательная и только для целых чисел.

С *плавающей запятой* каждое число изображается в виде двух групп цифр. Первая группа цифр называется *мантиссой*, вторая - *порядком*, причем абсолютная величина мантиссы должна быть меньше 1, а порядок - целым числом. В общем виде число в форме с плавающей запятой может быть представлено так:

$$N = \pm M P^{\pm r},$$

где M - мантисса числа ($|M| < 1$);

P - основание системы счисления;

r - порядок числа (r - целое число).

Пример 1.5: Приведенные в предыдущих примерах числа в нормальной форме запишутся так: $+0.721355 * 10^3$; $0.328 * 10^{-3}$; $-0.103012026 * 10^5$.

Нормальная форма представления имеет огромный диапазон отображения чисел и является основной в современных ЭВМ.

Диапазон значащих чисел в системе счисления с основанием P при наличии m разрядов у мантиссы и s разрядов у порядка (без учета знаковых разрядов порядка и мантиссы) будет:

$$P^{-m} P^{(Ps-1)} \leq N \leq (1-P^{-m}) P^{(Ps-1)}.$$

Знак числа обычно кодируется двоичной цифрой, при этом код 0 означает знак "+", код 1 - знак «-».

Двоично-десятичная система счисления получила большое распространение современных ЭВМ ввиду легкости перевода в десятичную систему и обратно. Она используется там, где основное внимание уделяется не простоте технического построения машины, а удобству работы пользователя. В этой системе счисления все десятичные цифры отдельно кодируются четырьмя двоичными цифрами и в таком виде записываются последовательно друг за другом.

1.2 Основные источники погрешностей

Численные методы в настоящее время относятся к основным методам решения задач математики и различных ее приложений. Они характеризуются тем, что сводят процесс решения математической задачи к некоторой конечной последовательности операций над числами и приводят к результатам, представленным в виде чисел, числовых векторов и матриц, числовых таблиц и т. п. Их значение возрастает параллельно с развитием вычислительной техники.

В то же время полученные численными методами результаты обычно содержат погрешности, являясь лишь приближениями к искомым ответам. Вызвано это рядом объективных причин, среди которых есть не связанные непосредственно с методами вычислений. Чтобы разобраться в них, проанализируем основные этапы математического решения прикладных задач, а именно:

- 1) построение математической модели задачи;
- 2) определение исходных данных;
- 3) решение полученной математической задачи.

Погрешности появляются уже на первом этапе, ибо математическая модель задачи - это приближенное, идеализированное описание задачи на языке математики. При моделировании объекты и процессы задачи-оригинала, взаимосвязи между ее параметрами заменяются на математические понятия и соотношения. Понятно, что чем меньше факторов отбрасывается, тем точнее получается модель.

Несмотря на приближенность результатов математического моделирования, без него в приложениях математики не обойтись.

Следующей причиной появления погрешностей является то, что установить точные значения исходных параметров во многих случаях невозможно.

После того как математическая модель построена и определены исходные данные, необходимо подобрать метод решения полученной математической задачи. Круг математических методов условно подразделяется на аналитические, численные и графические методы. Нас интересуют численные методы, которые, в свою очередь, делятся на точные и приближенные.

Численный метод называется точным, если он дает принципиальную возможность после выполнения конечного числа операций над точными числами получить точное решение задачи. К таким методам относится, например, алгоритм решения квадратного уравнения

Для большинства реальных задач точных методов решения вообще не существует, а если они и имеются, то бывают настолько трудоемкими, что не представляют практического интереса. Кроме того, они часто сопряжены с бесконечными вычислительными процессами. Вследствие этого основным инструментом вычислительной математики являются приближенные численные методы, приводящие обычно к приближенным результатам даже при точных исходных данных и точных вычислениях. Возникают так называемые погрешности метода.

В процессе реализации численных методов приходится выполнять арифметические операции над приближенными числами, вычислять значения функций, а также округлять исходные данные, промежуточные и окончательные результаты. При этом оказывается, что погрешность результата любого арифметического действия, как правило, превышает погрешности исходных данных. Известно также, что значения корней \sqrt{x} и трансцендентных функций ($\sin x$, $\operatorname{tg} x$, e^x и т. п.) чаще всего удается найти только приближенно с помощью математических таблиц, компьютерных средств вычислений или приближенных формул вида

$$\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \Lambda$$

Перечисленные погрешности называются вычислительными.

Выше было сказано, что точные численные методы должны давать «принципиальную возможность» получения точных решений. На самом деле эта возможность часто не реализуется из-за вычислительных погрешностей. Например, чтобы найти и записать в десятичной форме корни уравнения $x^2 + x - 1 = 0$, надо подставить в соответствующие формулы округленное значение числа $\sqrt{5}$. Понятно, что тогда получатся приближенные значения корней.

Наконец, определенное влияние на результаты оказывает степень точности используемых средств вычислений. Для представления чисел в них выделяется ограниченное количество десятичных разрядов, что влечет автоматическое округление числовых данных. Чем больше разрядная сетка, тем погрешность округлений меньше и, следовательно, с тем большей точностью можно производить вычисления.

Подытоживая все сказанное выше, отмечаем, что основными источниками погрешностей являются:

- замена реальной задачи математической моделью;
- затруднения в определении точных исходных данных;
- применение приближенных методов;
- арифметические действия над приближенными числами;
- вычисление значений функций;
- округление чисел;
- ограниченность разрядной сетки вычислительных устройств.

При решении конкретных задач влияние тех или иных источников различно. Иногда некоторые из них могут отсутствовать вообще или накладывать ничтожный отпечаток на результаты.

Поскольку приближенные результаты решения задач бесполезны без информации о степени их точности, в процессе вычислений обязательно следует вести учет погрешностей, а изучение необходимых для этого правил и методов должно занимать важное место в курсе вычислительной математики.

Погрешности математических моделей и исходных данных не зависят от вычислительных методов, поэтому способы их определения и оценки не входят в круг проблем данной книги. В то же время без сведений о точности исходных данных нельзя учесть погрешности результатов. Будем считать, что они известны вычислителю.

1.3 Округление чисел

При вычислениях часто приходится иметь дело с числами, содержащими большое количество значащих цифр. Независимо от того, точные эти числа или приближенные, часть цифр иногда целесообразно отбрасывать. Минимальную погрешность округления дает следующее правило.

Правило округления чисел. Чтобы округлить число до n значащих цифр, отбрасывают все его цифры, стоящие справа от n -й значащей цифры, или, если это нужно для сохранения разрядов чисел, заменяют их нулями. При этом:

- если первая (слева) отбрасываемая цифра меньше 5, то все сохраняемые цифры остаются без изменения;
- если первая отбрасываемая цифра больше 5 или если она равна 5, но среди остальных отбрасываемых цифр есть ненулевые, то к последней сохраняемой цифре прибавляется единица;
- если первая отбрасываемая цифра равна 5 и все остальные отбрасываемые цифры являются нулями, то последняя сохраняемая цифра остается неизменной, если она четная, и увеличивается на единицу, если она нечетная.

Пусть в результате округления числа a получилось число \hat{a} . Оно имеет погрешность $a - \hat{a}$, вызванную этой операцией. Правило округления гарантирует, что $|a - \hat{a}|$ не будет превышать половины единицы разряда, где находится последняя оставленная цифра.

1.4 Абсолютная погрешность

Пусть A - точное значение некоторой числовой, векторной или функциональной величины, a - известное приближение к нему (т. е. приближенное значение для A).

В зависимости от типа величины принято называть A точным числом (вектором, функцией), а его приближение a - приближенным числом (вектором, функцией).

Например, в соотношениях $\pi \approx 3,14$, $\pi \approx 3,142$ число π является точным, а числа 3.14, 3.142 — приближенными (приближениями к π).

Определение. Разность $A - a$ (или $a - A$) между точным и приближенным значениями величины называется погрешностью значения a .

Степень точности приближений удобно характеризовать с помощью неотрицательных чисел, поэтому понятие погрешности для этой цели не годится. Действительно, в случае чисел погрешность может быть как положительным, так и отрицательным числом, а в случае векторов или функций она также будет вектором или функцией.

Определение. Любое неотрицательное число Δ_a , удовлетворяющее неравенству

$$|A - a| \leq \Delta_a \quad (1.2)$$

называется абсолютной погрешностью приближенного значения a .

Замечание. Число Δ_a из определения часто называют предельной абсолютной погрешностью, причем здесь слово «предельная» не имеет никакого отношения к понятию предела функции или последовательности.

Как число Δ_a , так и само неравенство (1.2) называют также оценкой погрешности (точности) значения a или приближенного равенства $A \approx a$.

Абсолютная погрешность дает ценную информацию о неизвестном точном значении A : оно находится от известного приближения a на расстоянии, не большем чем Δ_a . В случае числовых величин имеем

$$|A - a| \leq \Delta_a \leftrightarrow a - \Delta_a \leq A \leq a + \Delta_a$$

Следовательно, найдя приближенное значение a и его абсолютную погрешность Δ_a , узнаем, что точное значение A располагается на отрезке $[a - \Delta_a; a + \Delta_a]$, т.е. находится «в пределах от $a - \Delta_a$ до $a + \Delta_a$ ».

Иногда о точном значении A ничего не известно, кроме границ, между которыми оно находится. Если $a_1 \leq A \leq a_2$, то за приближенное число a можно взять середину отрезка $[a_1, a_2]$, т.е. $a = (a_1 + a_2)/2$. Тогда $\Delta_a = (a_2 - a_1)/2$.

Абсолютная погрешность является основной характеристикой точности вычислений. Во всех последующих правилах учета погрешностей речь будет идти прежде всего о ней.

Определение. Если известна абсолютная погрешность Δ_a приближенного значения a , то a называют приближением к A с точностью до Δ_a .

Когда говорят, что надо получить какой-то результат с заданной точностью $\varepsilon > 0$, это означает, что абсолютная погрешность его должна быть не больше ε .

В дальнейшем нам понадобится следующее понятие.

Определение. Все цифры десятичной записи числа, начиная с первой ненулевой слева, называются значащими цифрами этого числа.

Нули в конце числа всегда считаются значащими, в противном случае их не пишут. Так, число 0,05020 содержит четыре значащие цифры: 5, 0, 2 и 0.

Абсолютную погрешность не следует записывать с большим количеством значащих цифр. Основной информацией, содержащейся в ней, являются значение первой ненулевой цифры и десятичный разряд, в котором эта цифра расположена.

Правило. В записи абсолютной погрешности обычно оставляют только одну или две значащие цифры. Для сохранения условия (1.1) округление при этом всегда производится с избытком.

Пример 1.6: Пусть требуется оценить погрешность округления числа $e = 2.7182818\dots$ до трех значащих цифр: $\varepsilon \approx 2.72$.

Для этого найдем расстояние от числа e до приближения 2.72:

$$p(e; 2,72) = |e - 2,721| = 0,00171817\dots$$

Оно является иррациональным числом и потому неудобным для использования. Введем абсолютную погрешность $\Delta_{2.72}$. При записи с двумя значащими цифрами с соблюдением условия (1.2) следует взять $\Delta_{2.72} = 0,0018$, но не 0,0017, как получилось бы при обычных правилах округления. Приемлемым значением $\Delta_{2.72}$ будет и 0,002 (с одной значащей цифрой).

1.5 Верные значащие цифры

С помощью абсолютных погрешностей определяют так называемые верные значащие цифры приближенных чисел.

Пусть приближенное число записано в виде десятичной дроби:

$$a = a_n \dots a_1 a_0, a_{-1}, a_{-2} \dots a_{-m}, \text{ т.е. } a = a_n \cdot 10^n + \dots + a_1 \cdot 10^1 + a_0 \cdot 10^0 + a_{-1} \cdot 10^{-1} + \dots + a_{-m} \cdot 10^{-m}.$$

Определение. Значащая цифра приближенного значения a , находящаяся в разряде, в котором выполняется условие: абсолютная погрешность Δ_a не превосходит половину единицы этого разряда, называется верной. Значащие цифры разрядов, где не выполняется данное условие, называются сомнительными.

Следовательно, значащая цифра a_k ($k = n, \dots, 1, 0, -1, \dots, -m$) верная, если $\Delta_a \leq 0,5 \cdot 10^k$. Понятно, что все значащие цифры, расположенные слева от верной, также будут верными, а расположенные справа от сомнительной - сомнительными.

Соответствующие десятичные разряды также называем верными или сомнительными.

Пример 1.7: Для приближенного числа $x = 72,356$ известна абсолютная погрешность $\Delta_x = 0,04$. Требуется определить его верные значащие цифры.

Проверим цифру 7. Половина единицы ее разряда: $10/2 = 5 \geq 0,04$. Значит, она верная. Цифра 2: $1/2 = 0,5 \geq 0,04$ - тоже верная. Верной будет и цифра 3 (проверьте!), а вот цифры 5 и 6 - сомнительные. Действительно, для $5:0.01/2 = 0,005 < 0,04$, т.е. требуемое условие нарушено.

Результат, полученный в примере 1.7, приводит к мысли о том, что цифры приближенного числа a верны во всех тех разрядах, где им соответствуют нули абсолютной погрешности. Однако это предположение верно лишь частично, ибо последняя такая цифра может оказаться сомнительной. Будет ли она верной, зависит от величины значащих цифр Δ_a .

Для выявления верных цифр числа a без проверки каждой из них «по определению» рекомендуется следующее правило.

Правило. Абсолютная погрешность округляется с избытком до одной значащей цифры (обозначим эту цифру буквой d). Если цифра $d \leq 5$, то все значащие цифры числа a левее того разряда, где находится d , будут верными. В противном случае последнюю (самую правую) из этих цифр следует признать сомнительной.

Пример 1.8: Даны числа a, b, c и их абсолютные погрешности:

$$a = 2,645 \quad b = 0,81726 \quad c = 3968$$

$$\Delta_a = 0,003 \quad \Delta_b = 0,0052 \quad \Delta_c = 49$$

Видим, что цифры 2, 6, 4 числа a верные, так как соответствующая разряду тысячных долей цифра $d=3$ абсолютной погрешности Δ_a меньше 5. Число b имеет только одну верную значащую цифру 8. Действительно, при округлении с избытком его абсолютной погрешности получим число 0,006, содержащее в разряде тысячных долей значащую цифру $d = 6 > 5$, которая «портит» разряд сотых долей числа b . У целого числа c цифры верны в разрядах тысяч и сотен: это 3 и 9.

Верная цифра приближенного числа не обязана буквально совпадать с цифрой соответствующего разряда точного числа. Например, пусть $A = 1,999$ - точное число, $a = 2,000$ - его приближение. Тогда $\Delta_a = 0,001$ и, следовательно, три первые цифры числа a верные, хотя ни одна из них не совпадает с соответствующей цифрой числа A .

Нередко бывает так, что исходные числовые данные приводятся без оценки их погрешностей, но с известными верными цифрами. Возникает задача: найти абсолютные погрешности этих чисел, необходимые для последующего учета погрешностей.

Решение следует из определения верной цифры. Если все три цифры числа $a = 4,06$ верные, это означает, что $\Delta_a \leq 0,005$. Во избежание искусственного завышения степени точности числа мы не имеем права взять конкретное $\Delta_a < 0,005$, например, $\Delta_a = 0,004$, поэтому принимаем $\Delta_a = 0,005$. Отсюда следует правило.

Правило. За абсолютную погрешность приближенного числа с известными верными значащими цифрами принимается половина единицы того разряда, где находится последняя верная цифра.

Обратим внимание на информационную значимость нулей, записанных в конце числа. Так, если известно, что все цифры чисел 3,2 и 3,20 верные, то эти записи не равноценны. За абсолютную погрешность первого числа можно взять 0,05, а второго - 0,005.

Когда в конце числа получаются верные значащие нули округления, их следует сохранять. Пусть $a = -17,2986$, $\Delta_a = 0,002$ и требуется округлить a до верных цифр. Тогда пишем $a \approx -17,30$, но не $a \approx -17,3$.

В приближенных вычислениях часто используется другое определение верной значащей цифры.

Определение. Если абсолютная погрешность числа не превосходит единицы того разряда, где находится значащая цифра, то эта цифра называется верной в нестрогом (широком) смысле.

Таким образом, для верной в нестрогом смысле цифры a_k должно выполняться неравенство $\Delta_a < 1 * 10^k$. Так, у числа 5,6307 с абсолютной погрешностью 0,006 цифра 3 в разряде сотых долей верна в нестрогом смысле, ибо $0,006 \leq 10^{-2} = 0,01$. Понятно, что верными будут и предыдущие цифры 5 и 6.

1.6 Относительная погрешность приближенных чисел

При приближенных измерениях и вычислениях возникает потребность в характеристике качества проделанной работы. Для этой цели знание только абсолютной погрешности оказывается недостаточным.

Для оценки качества измерений или вычислений вводится понятие относительной погрешности.

Определение. Относительной погрешностью приближенного числа a ($a \neq 0$) будем называть неотрицательное число

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \quad (1.3)$$

Замечание. Введенное таким образом число δ_a часто называют предельной относительной погрешностью. Следует также заметить, что в работах по вычислительной математике встречаются другие определения понятия относительной (предельной относительной) погрешности. Однако в плане практического использования данное здесь определение является наиболее распространенным.

Формула (1.3) связывает абсолютную и относительную погрешности чисел. Из нее, в частности, следует важное соотношение:

$$\Delta_a = |a| * \delta_a.$$

Из-за неоднозначности абсолютной погрешности относительная погрешность приближенного числа также не единственна. Как и абсолютную погреш-

ность, относительную погрешность записывают с одной-двумя значащими цифрами и округляют при необходимости с избытком. Она является безразмерной величиной и потому часто выражается в процентах:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \cdot 100 \%$$

Заметим, что при фиксированном Δ_a относительная погрешность тем меньше, чем больше абсолютная величина приближенного числа.

1.7 Вопросы к самопроверке

- 1) Из каких основных этапов состоит процесс решения задачи с помощью ЭВМ? Дайте характеристику каждого этапа.
- 2) Из каких частей складывается общая погрешность решения задачи?
- 3) Что такое абсолютная погрешность приближенного значения величины? Что такое граница абсолютной погрешности?
- 4) Как с помощью границы абсолютной погрешности Δx известного приближенного значения x можно указать возможные значения его нижней и верхней границ?
- 5) Каким образом определяется граница абсолютной ошибки Δx для приближенного значения x , получаемого в результате многократных измерений?
- 6) Что такое относительная погрешность приближенного значения величины? Что такое граница относительной погрешности?
- 7) Какие цифры в записи приближенного числа называются верными в широком смысле, а какие верными в строгом смысле?
- 8) Какие цифры в записи приближенного числа называются значащими?
- 9) Что такое округление числа? Что такое погрешность округления?
- 10) Как различаются погрешности округления методом отбрасывания и симметрическое округление?
- 11) Из чего складывается полная погрешность округленного числа?

2 Решение нелинейных алгебраических уравнений приближенными методами

2.1 Основные понятия. Виды уравнений. Способы решения уравнений

В современной математике алгебру называют наукой о системах объектов (величин), над которыми определены операции, аналогичные сложению и умножению действительных чисел.

Алгебраическим выражением называется, выражение, состоящее из имен объектов, знаков операций и вспомогательных знаков.

$$(a+b):(c+d)-f;$$

$$(a+b)/(c+d)-f;$$

$$\frac{a+b}{c+d} - f ;$$

Выражения, содержащие знак корня называют иррациональным $\sqrt{x/2y}$.

Два алгебраических выражения, соединенные одним из знаков $<, <=, >, >=, \neq$ образуют неравенство.

Неравенство называется тождественным или универсальным, если оно выполняется (в арифметическом смысле) для любых действительных значений входящих в неравенство величин. Неравенство называется выполненным, если существует непустое множество входящих в неравенство величин, при подстановке которых неравенство оказывается справедливым, и невыполнимым, если таких значений не существует.

$$x^2+1>0 - \text{тождественное};$$

$$2x+4>0 - \text{выполнимое};$$

$$x^2+y^2+5<0 - \text{невыполнимое}.$$

Два алгебраических выражения, соединенные знаком $=$ образуют уравнение.

$$5x-2y=z+1.$$

Любое уравнение $P(x_1, \dots, x_n)=0$, где $P(x_1, \dots, x_n)$ есть многочлен (отличный от нулевого) относительно x_1, \dots, x_n называется алгебраическим уравнением относительно переменных x_1, \dots, x_n . Коэффициенты многочлена могут быть при этом как постоянными, так и параметрами или функциями таких параметров.

$$3x^2-x+5=0 - \text{алгебраическое}.$$

$$x^2+2y^2-xy-3=0 - \text{алгебраическое}.$$

$y^3-y\sin(x)-2\sin^2(x)-7=0$ – не алгебраическое относительно x и y , но если x рассматривать как параметр, то это уравнение будет алгебраическим относительно y .

$$\sqrt{4x-7} + 5 = 1 - 2x^3 - \text{не алгебраическое}.$$

Алгебраические уравнения, в которых переменные, рассматриваются как неизвестные, входят под знаком трансцендентных функций называются трансцендентными.

$$\sin(x)-e^x+5=0 - \text{трансцендентное}.$$

Всякое алгебраическое уравнение относительно x можно записать в виде $A_0x^n + A_1x^{n-1} + \dots + A_{n-1}x + A_n = 0$ при $A_0 \neq 0$, $n \geq 1$. A_i называются коэффициентами уравнения, n -его порядка.

Если все коэффициенты A_i являются параметрами, то уравнение называется общим алгебраическим уравнением относительно x степени n .

Если алгебраическое уравнение разделить на $A_0 \neq 0$, то обозначив A_i/A_0 через a_i ($i=1 \dots n$) получим каноническую форму алгебраического уравнения n -й степени относительно x : $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$.

В общем случае алгебраическое уравнение можно записать в виде $F(x) = 0$, где функция $F(x)$ определена и непрерывна на конечном или бесконечном интервале $[a, b]$.

Всякое число $\xi \in [a, b]$, обращающее функцию $F(x)$ в нуль, т.е. такое, при котором $F(\xi) = 0$, называют корнем уравнения или нулем функции $F(x)$.

Мы будем предполагать, что уравнение $F(x) = 0$ имеет лишь изолированные корни, т.е. для каждого корня уравнения существует окрестность, не содержащая других корней этого уравнения.

Приближенное нахождение изолированных действительных корней уравнения обычно складывается из двух этапов:

1) Отделение корней, т.е. возможно тесных промежутков $[a, b]$, в которых содержится только один корень.

2) Уточнение приближенных корней, т.е. доведение их до заданной степени точности.

Теорема: Если непрерывная функция $F(x)$ принимает значение разных знаков на концах отрезка $[a, b]$, т.е. $F(a) \cdot F(b) < 0$, то внутри этого отрезка содержится, по крайней мере, один корень уравнения $F(x) = 0$, т.е. найдется хотя бы одно число $\xi \in (a, b)$, такое, что $F(\xi) = 0$.

Корень ξ заведомо будет единственным, если производная $F'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (a, b) , т.е. если $F'(x) > 0$ ($F'(x) < 0$) при $a < x < b$.

Действительные корни уравнения $F(x) = 0$ приближенно можно рассматривать как абсциссы точек пересечения графика функции $y = F(x)$ с осью OX . Если уравнение не имеет близких между собой корней, то этим способом его корни легко отделяются. На практике часто бывает выгодно уравнение $F(x)$ заменить равносильным ему уравнением $\varphi(x) = \psi(x)$,

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – более простые функции, чем функция $F(x)$.

Тогда построив графики функций $y = \varphi(x)$ и $y = \psi(x)$, искомые корни получим как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример 2.1: $x \lg(x) = 1$. Представим в виде $1/x = \lg(x)$. Построим два графика функций $y = 1/x$ и $y = \lg(x)$ (см. рисунок 2.1).

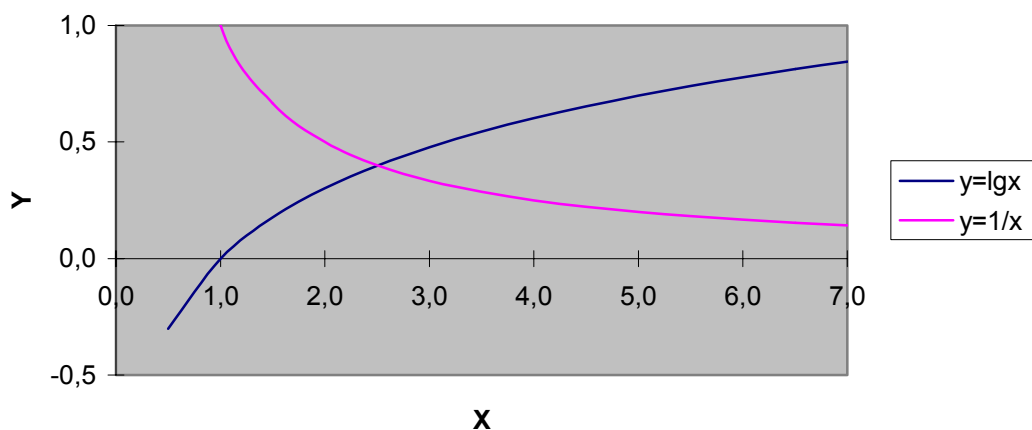


Рисунок 2.1- Графики функций $y=1/x$ и $y=\lg(x)$

Пример 2.2: $\sin(2x) - \ln(x) = 0$. Представим в виде $\sin(2x) = \ln(x)$. Построим два графика $y=\sin(2x)$ и $y=\ln(x)$ (см. рисунок 2.2)

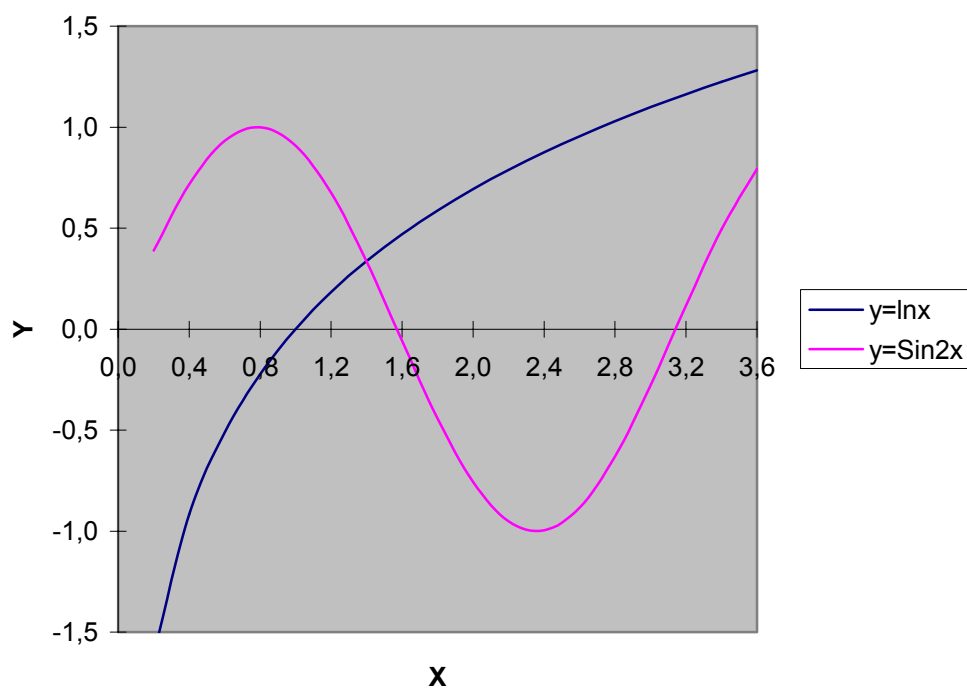


Рисунок 2.2- Графики функций $y=\sin(2x)$ и $y=\ln(x)$

Пример 2.3: $x^3 - 2x^2 + 1 = 0$. Представим в виде $x^3 = 2x^2 - 1$. Построим два графика $y=x^3$ и $y=2x^2 - 1$ (см. рисунок 2.3)

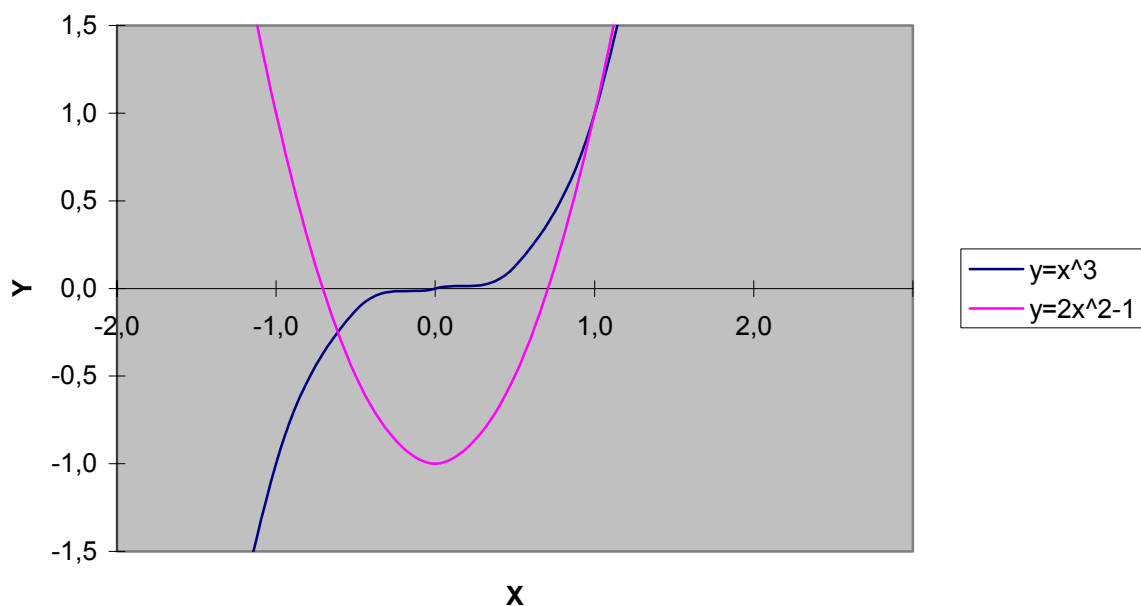


Рисунок 2.3- Графики функций $y=x^3$ и $y=2x^2-1$

2.2 Метод половинного деления для решения нелинейного уравнения

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \quad (2.1).$$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и выполняется условие $f(a) \cdot f(b) < 0$. (см. рисунок 2.4).

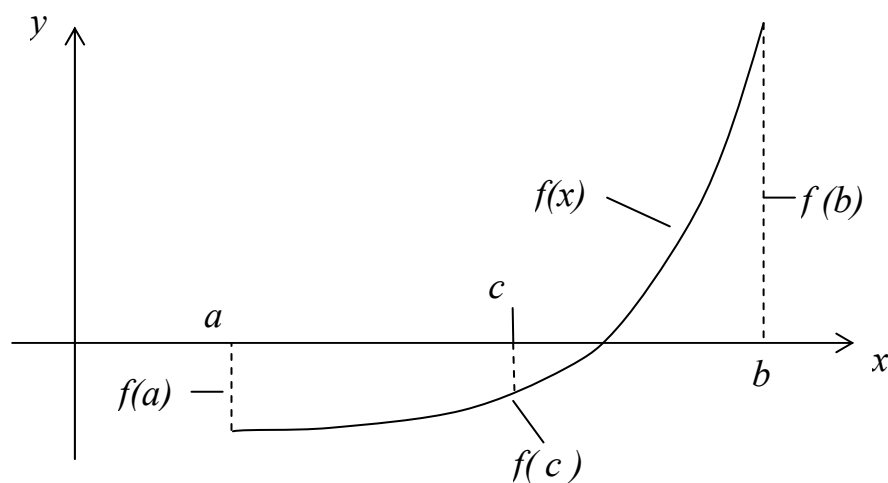


Рисунок 2.4 – График функции $f(x)$

Для нахождения корня уравнения $f(x)=0$, делим отрезок $[a,b]$ пополам, т. е. $c=(a+b)/2$.

Если $f(c)=0$, то $x=c$ – корень уравнения.

Если $f(c) \neq 0$, то выбираем ту из половин $[a,c]$, $[c,b]$, на концах которой функция $f(x)$ имеет противоположные знаки. В нашем случае это отрезок $[c,b]$. Новый, суженный отрезок $[a_1,b_1]$ снова делим пополам и проводим тоже рассмотрение, что и выше.

В результате проведенных рассуждений, получаем последовательность вложенных отрезков $[a_1,b_1]$, $[a_2,b_2]$, $[a_3,b_3]$, ..., $[a_n,b_n]$, ... таких, что

$$f(a_n) * f(b_n) \leq 0, \quad (2.2)$$

и

$$b_n - a_n = (b-a)/2^n \quad (n=1,2,3,\dots), \quad (2.3)$$

Т. к. левые концы $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ образуют монотонную, не убывающую, ограниченную последовательность, а правые концы $b_1, b_2, b_3, \dots, b_n, \dots$ монотонную, не возрастающую, ограниченную последовательность, то в силу равенства (3) при $n \rightarrow \infty$ существует общий предел $\xi = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, т. е. $f(\xi)=0$ и ξ является корнем уравнения.

2.2.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом половинного деления

Найти корни уравнения $(1-x)^{0.5} - \tan(x) = 0$ с точностью до $\varepsilon=0,001$ с помощью метода половинного деления.

Исходное уравнение представим в виде $(1-x)^{0.5} = \tan(x)$ и рассмотрим графики двух функций $y=6*x+8$ и $y1=x^3$.

I. Строим таблицу.

$$\begin{aligned} f(x) &= (1-x)^{0.5} - \tan(x) = 0 \\ y &= (1-x)^{0.5} \\ y1 &= \tan(x) \\ f'(x) &= ((1-x)^{0.5} - \tan(x))' = -0,5/(1-x)^{0.5} - 1/(\cos(x))^2 \\ f''(x) &= (-0,5/(1-x)^{0.5} - 1/(\cos(x))^2)' = -0,25/(1-x)^{3/2} - 2*\sin(x)/(\cos(x))^3 \end{aligned}$$

Таблица 2.1 – Значения функций $y=(1-x)^{0.5}$ и $y1=\tan(x)$

	x	-1,00	-0,80	-0,60	-0,40	-0,20	0,00	0,20	0,40	0,60	0,80	1,00
$y=(1-x)^{0.5}$	y	1,41	1,34	1,26	1,18	1,10	1,00	0,89	0,77	0,63	0,45	0,00
$y1=\tan(x)$	y1	-1,56	-1,03	-0,68	-0,42	-0,20	0,00	0,20	0,42	0,68	1,03	1,56
f(x)		2,97	2,37	1,95	1,61	1,30	1,00	0,69	0,35	-0,05	-0,58	-1,56
f'(x)								-1,60			-3,18	
f''(x)								-0,77			-7,04	

II. Строим график:

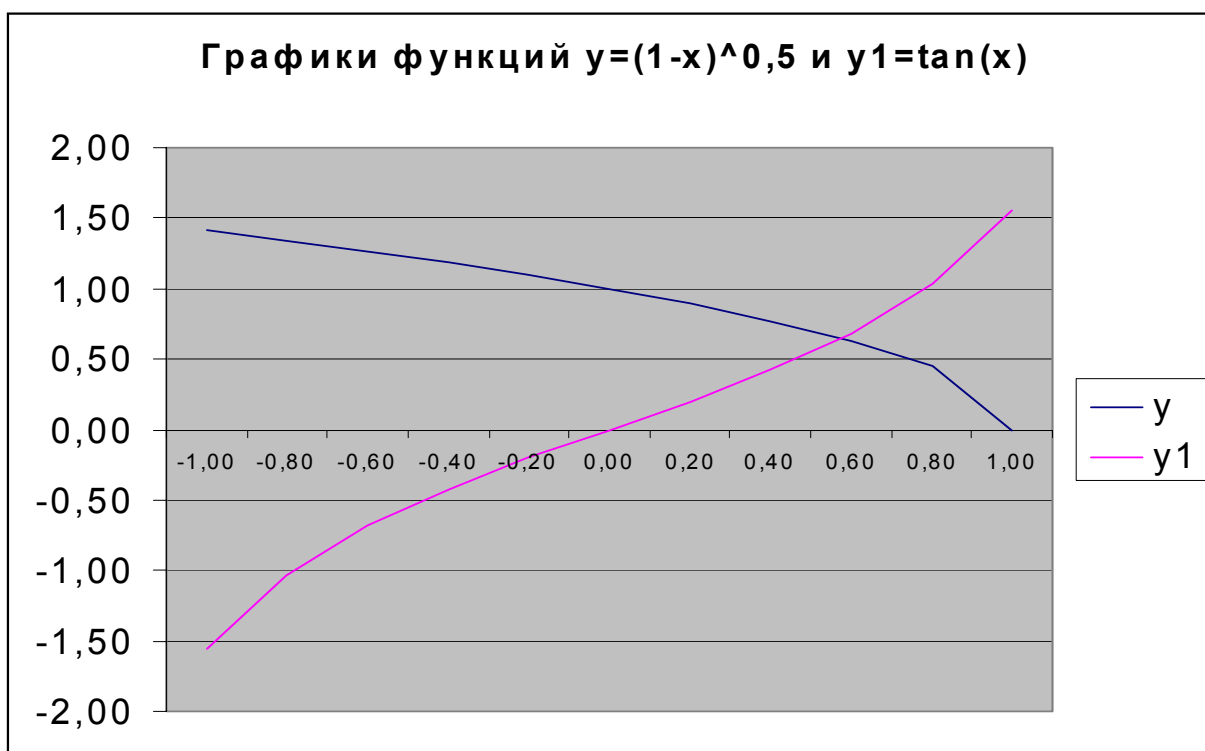


Рисунок 2.5 – Графики функций $y=(1-x)^{0,5}$ и $y1=\tan(x)$

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале $[0,2, 0,8]$.

Проверим условие существования корня на отрезке $[a, b]$, т.е. $f(a)*f(b)<0$. $f(0,2)=0,69$, $f(0,8)=-0,58$. Следовательно, $f(0)*f(1)<0$, т. е. корень существует.

2.3 Метод хорд для решения нелинейных уравнений

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \quad (2.4)$$

где функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $f(a)*f(b)<0$. Пусть для определенности $f(a)<0$ и $f(b)>0$. Тогда, вместо того чтобы делить отрезок $[a, b]$ пополам более естественно разделить его в отношении $f(a)/f(b)$ (см. рисунок 2.6).

Это дает нам приближенное значение корня

$$x_1=a+h_1, \quad (2.5)$$

Из подобия треугольников aAc и bBc имеем

$$-\frac{f(a)}{f(b)} = \frac{h_1}{b - (a + h_1)}, \quad (2.6)$$

определяем h_1

$$h_1 = -\frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a), \quad (2.7)$$

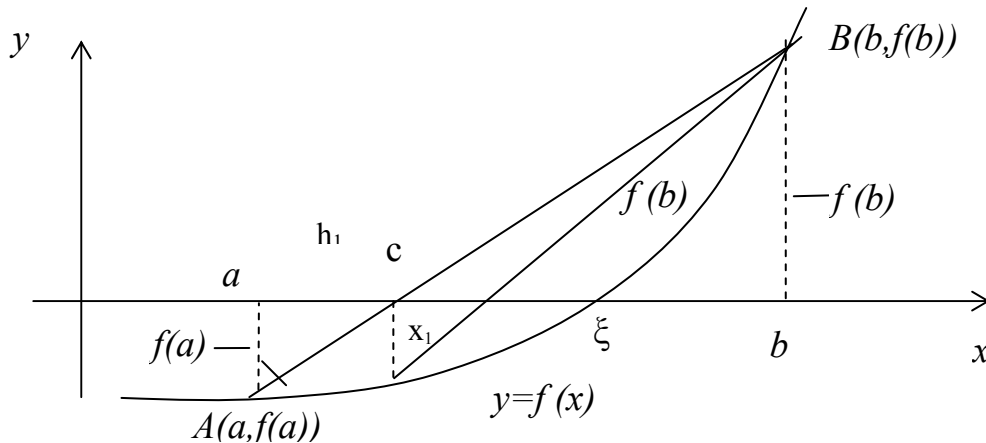


Рисунок 2.6 - График функции $f(x)$ ($f''(x) > 0, f(b) > 0$)

Подставляя в формулу (2.5) вместо h_1 полученное, имеем

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a), \quad (2.8)$$

Далее применяем тот же процесс к тому из отрезков $[a, x_1]$ или $[x_1, b]$, на концах которого функция $f(x)$ имеет противоположные знаки, получим второе приближение корня x_2 и т. д..

(2.8) - формула приближенного значения корня, полученного по методу хорд.

Геометрически способ пропорциональных частей эквивалентен замене кривой $y=f(x)$ проходящей через точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$. В самом деле, уравнение хорды AB есть

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y(x) - f(a)}{f(b) - f(a)}, \quad (2.9)$$

Отсюда, полагая $x=x_1$ и тогда $y(x_1)=0$, получим:

$$x_1 = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a), \quad (2.10)$$

Формула (2.10) полностью эквивалентна формуле (2.8).

В методе хорд:

1) *Неподвижен тот конец, для которого знак функции $f(x)$ совпадает со знаком ее второй производной $f''(x)$;*

2) *Последовательные приближения x_n лежат по ту сторону корня ξ , где функция $f(x)$ имеет знак, противоположный знаку ее второй производной $f''(x)$ (см. рисунок 2.7).*

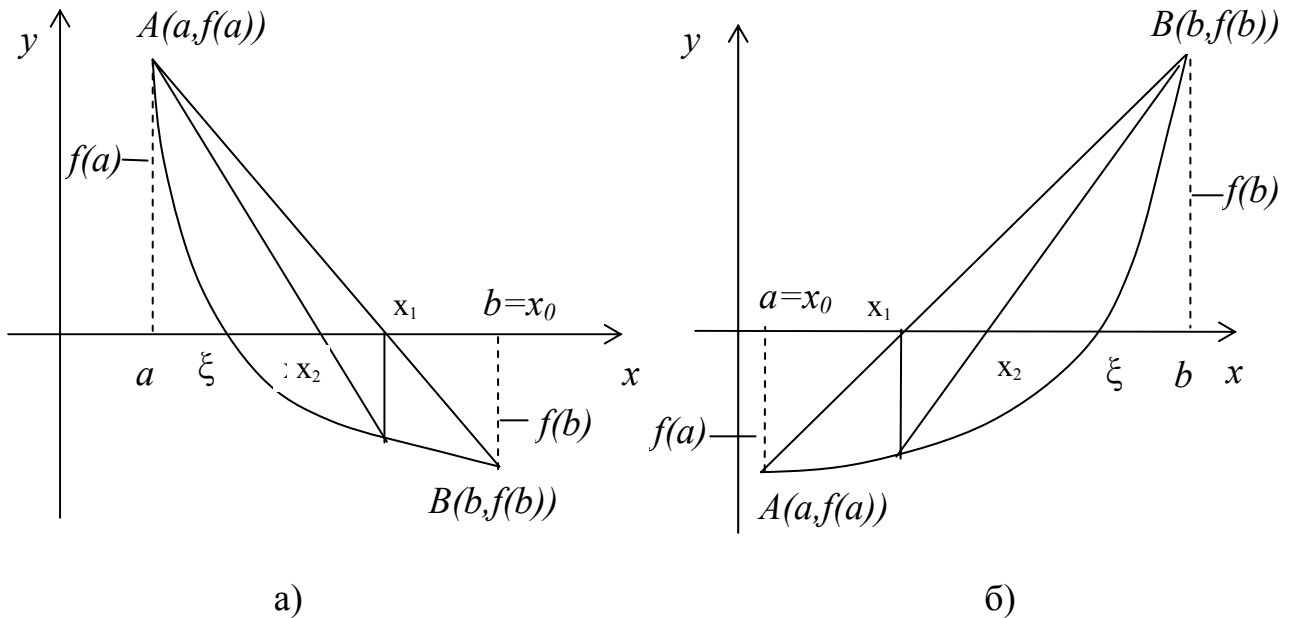


Рисунок 2.7 – График функции $f(x)$, для которой $f''(x) > 0, f(a) > 0$ (а) и $f(b) > 0$ (б)

Если точка **A** неподвижна (рисунок 2.7 - а)), вычисление приближенного корня производится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad (2.11)$$

Если точка **B** неподвижна (Рисунок 2.7 - б)), вычисление приближенного корня производится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \quad (2.12)$$

2.3.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом хорд

Найти корни уравнения $x^3 - 6x - 8 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$ с помощью метода хорд.

Исходное уравнение представим в виде $x^3=6*x+8$ и рассмотрим графики двух функций $y=6*x+8$ и $y1=x^3$.

I. Строим таблицу.

$$f(x)=x^3-6*x-8=0$$

$$y=6*x+8$$

$$y1=x^3$$

$$f'(x)=(x^3-6*x-8)'=3*x^2-6$$

$$f''(x)=(3*x^2-6)'=6*x$$

Таблица 2.2 – Значения функций $y=6*x+8$ и $y1=x^3$

		a							b				
	x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	
$y=6*x+8$	y	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	
$y1=x^3$	y1	-1,00	-0,13	0,00	0,13	1,00	3,38	8,00	15,63	27,00	42,88	64,00	
$f(a)*f(b)>0$	проверка существования корня								-7,38	13,9			
$f'(a)*f(b)>0$	проверка первой производной								12,8	30,8			
$f''(a)*f''(b)>0$	проверка второй производной								15	21			
$f(a)*f'(a)<0$	выбор начального приближения								-111	291			

x_0

II. Строим графики функций (см. рисунок 2.8).

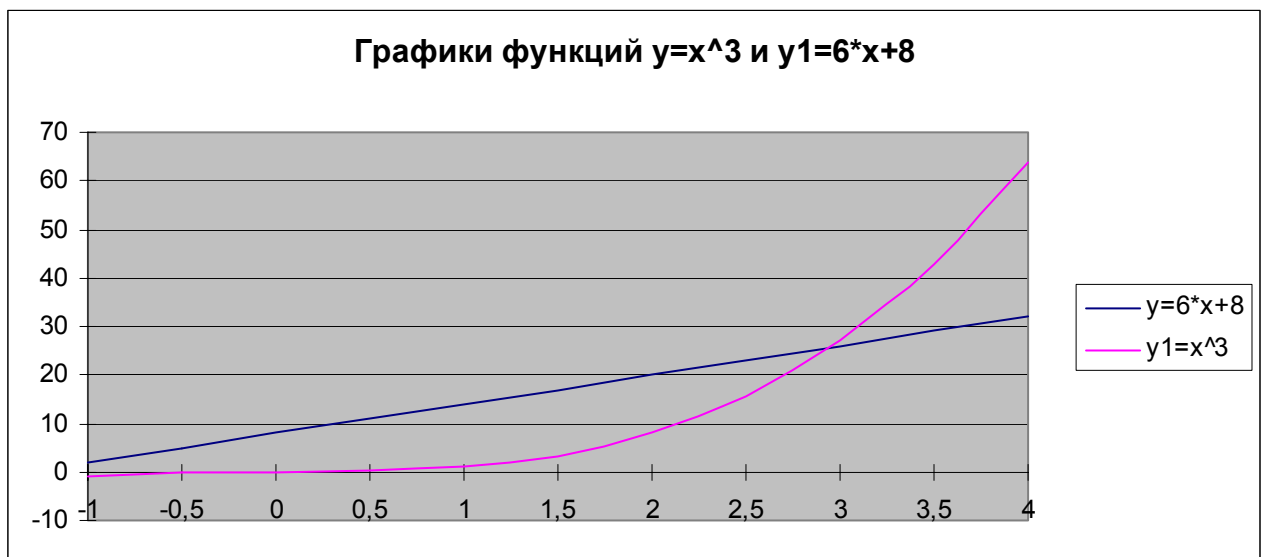


Рисунок 2.8 – Графики функций $y=6*x+8$ и $y1=x^3$

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале $[2,5, 3,5]$.

Проверим условие существования корня на отрезке $[a,b]$, т.е. $f(a)*f(b)<0$. $f(2.5)=-7.38$, $f(3.5)=13.9$. Следовательно, $f(2.5)*f(3.5)<0$, т. е. корень существует.

2.4 Метод Ньютона (касательных)

Пусть корень ξ уравнения

$$f(x)=0, \quad (2.13)$$

отделен на отрезке $[a, b]$. На данном отрезке первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки. Зададим n -ое приближение корня x_n , тогда можно записать, что

$$\xi = x_n + h_n, \quad (2.14)$$

где h_n - малая величина.

$$f(\xi)=0 \text{ или } f(x_n+h_n)=0, \quad (2.15)$$

Применяя формулу Тейлора, получим

$$f(x_n+h_n) \approx f(x_n) + f'(x_n) * h_n = 0, \quad (2.16)$$

тогда

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.17)$$

Подставим (2.17) в (2.14), с учетом (2.16) получим

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad (2.18)$$

где x_{n+1} - новое приближение корня.

Если $f(x_{n+1}) \leq \varepsilon$, тогда x_{n+1} корень уравнения $f(x)=0$ с заданной степенью точности ε .

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой $y=f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой в соответствии с рисунком 2.9.

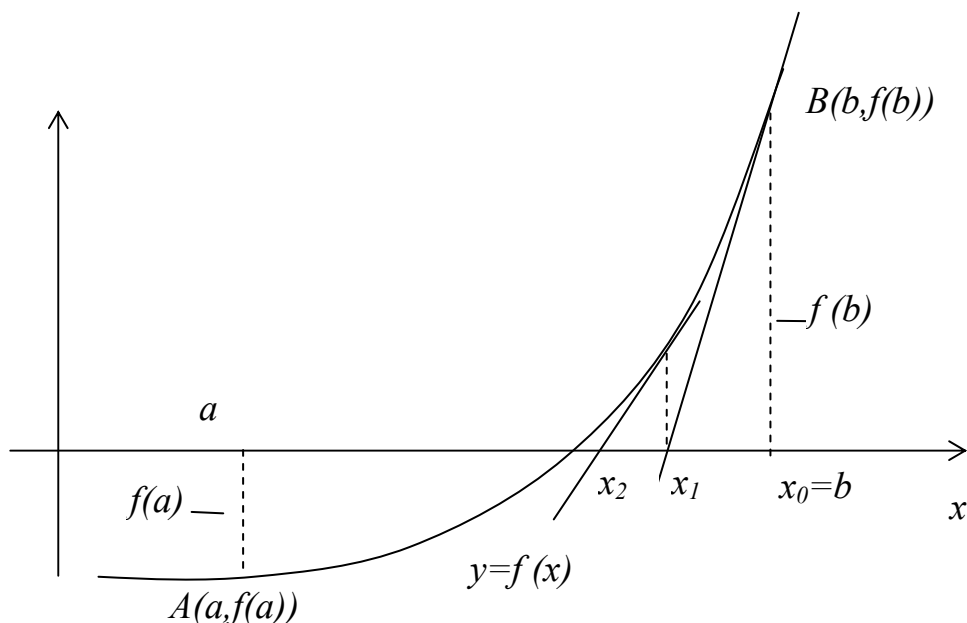


Рисунок 2.9 - График функции $f(x)$ ($f'(x) > 0, f(b) > 0$)

где $x_n - x_{n+1} = h$. x_{n+1} — точка пересечения касательной к точке B с осью X . При выборе начального приближения x_n необходимо задавать x_n в той части отрезка $[a, b]$, в которой выполняется условие $f(x_n) * f''(x_n) > 0$.

Из формулы (2.18) видно, что, чем меньше численное значение $f'(x)$ в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую надо учитывать в первом приближении, а, значит, быстрее сходимость.

2.4.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом Ньютона (касательных)

Найти корни уравнения $x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$ с помощью метода Ньютона (касательных).

Исходное уравнение представим в виде $x^3 = 3x^2 + 24x + 3$ и рассмотрим графики двух функций $y = 3x^2 + 24x + 3$ и $y_1 = x^3$.

I. Строим таблицу

$$f(x) = x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$$

$$y = 3x^2 + 24x + 3$$

$$y_1 = x^3$$

$$f'(x) = (x^3 - 3x^2 - 24x - 3)' = 3x^2 - 6x - 24$$

$$f''(x) = (3x^2 - 6x - 24)' = 6x - 6$$

Таблица 2.3 – Значения функций $y=3*x^2+24*x+3$ и $y1=x^3$

	x	-0,50	-0,40	-0,30	-0,20	-0,10	0,00	0,10	0,20	0,30	0,40	0,50
$y=3*x^2+24*x+3$	y	-8,25	-6,12	-3,93	-1,68	0,63	3,00	5,43	7,92	10,47	13,08	15,75
$y1=x^3$	y1	-0,13	-0,06	-0,03	-0,01	0,00	0,00	0,00	0,01	0,03	0,06	0,13
$f(a)*f(b)<0$	проверка существования корня				1,67	-0,63						
$f(a)*f'(b)>0$	проверка первой производной				-22,68	-23,37						
$f'(a)*f'(b)>0$	проверка второй производной				-1,00	-0,50						
$f(a)*f'(a)>0$	проверка условия выбора x_0				-1,67	0,32						
						x_0						

II. Строим графики функций (см. рисунок 2.10)

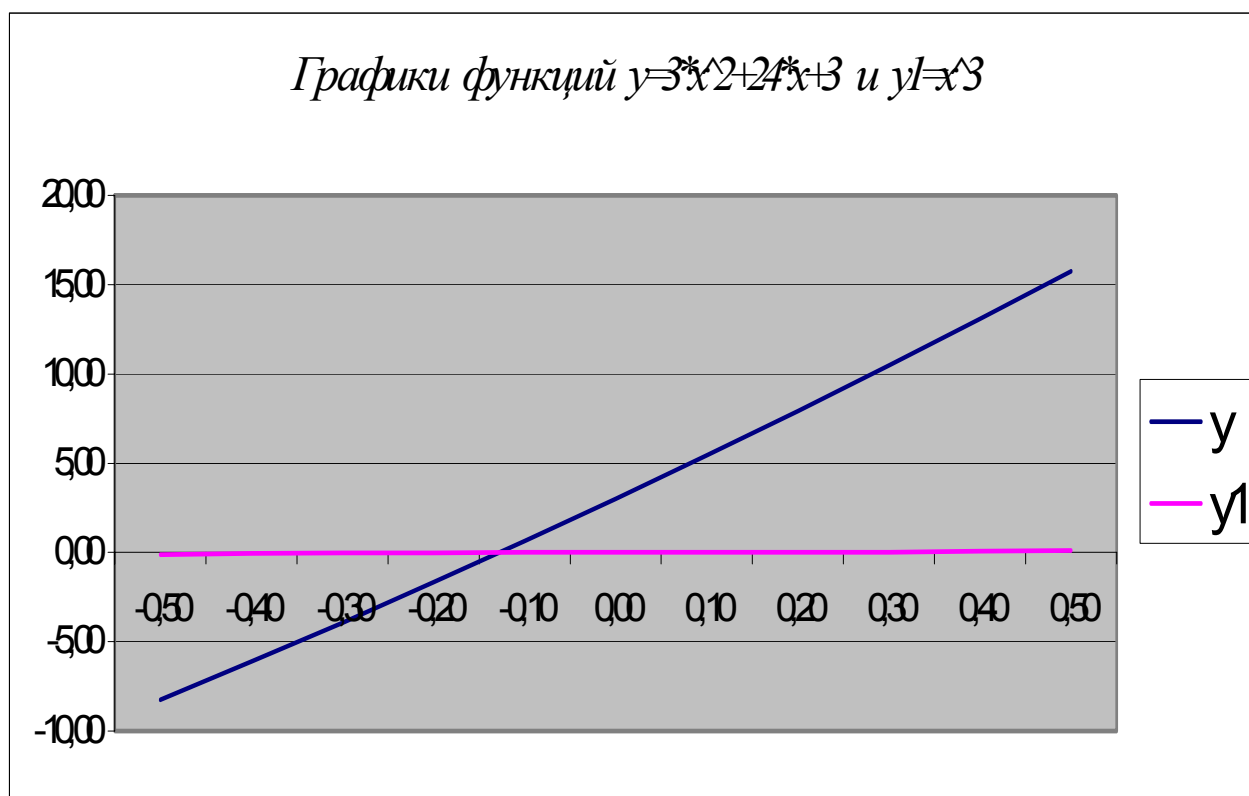


Рисунок 2.10 – Графики функций $y=3*x^2+24*x+3+8$ и $y1=x^3$

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале $[-0.2, -0.1]$.

Проверим условие существования корня на отрезке $[a,b]$, т.е. $f(a)*f(b)<0$. $f(-0.2)=1.67$, $f(-0.1)=-0.63$. Следовательно, $f(-0.2)*f(-0.1)<0$, т. е. корень существует.

2.5 Метод итерации

Пусть дано уравнение

$$f(x)=0, \quad (2.19)$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, и требуется определить его вещественные корни. Заменяем уравнение (2.19) равносильным уравнением

$$x=\varphi(x), \quad (2.20)$$

Выберем каким-либо способом грубо приближенное значение корня x_0 и подставим его в первую часть уравнения (2.20). Тогда получим некоторое число

$$x_1=\varphi(x_0), \quad (2.21)$$

Подставляя теперь в правую часть равенства (2.21) вместо x_0 число x_1 , получим новое число $x_2=\varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел

$$x_n=\varphi(x_{n-1}) \quad (n=1,2,3,\dots), \quad (2.22)$$

$x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ – последовательность приближений (итерационная последовательность).

Если эта последовательность – сходящаяся, т.е. существует предел $\xi=\lim x_n$, то, переходя к пределу в равенстве (2.22) и предполагая функцию $\varphi(x)$ – непрерывной, найдем: $\lim x_n=\varphi(\lim x_{n-1})$ или

$$\xi=\varphi(\xi), \quad (2.23)$$

Таким образом, предел ξ является корнем уравнения (2.20) и может быть вычислен по формуле (2.22) с любой степенью точности.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом (см. рисунок 2.11).

Построим на плоскости XOY график функции $y=x$ и $y=\varphi(x)$. Каждый действительный корень ξ уравнения (2.20) является абсциссой точки пересечения M кривой $y=\varphi(x)$ с прямой $y=x$.

Отправляясь от некоторой точности $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$, строим ломаную $A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ (лестница) (см. рисунок 2.11), звенья которой попеременно параллельны оси OX и OY , вершины A_0, A_1, A_2, \dots лежат на кривой $y=\varphi(x)$, а вершины $B_1, B_2, B_3\dots$ - на прямой $y=x$. Общие абсциссы точек A_1 и B_1, A_2 и B_2, \dots , очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения x_1, x_2, \dots корня ξ .

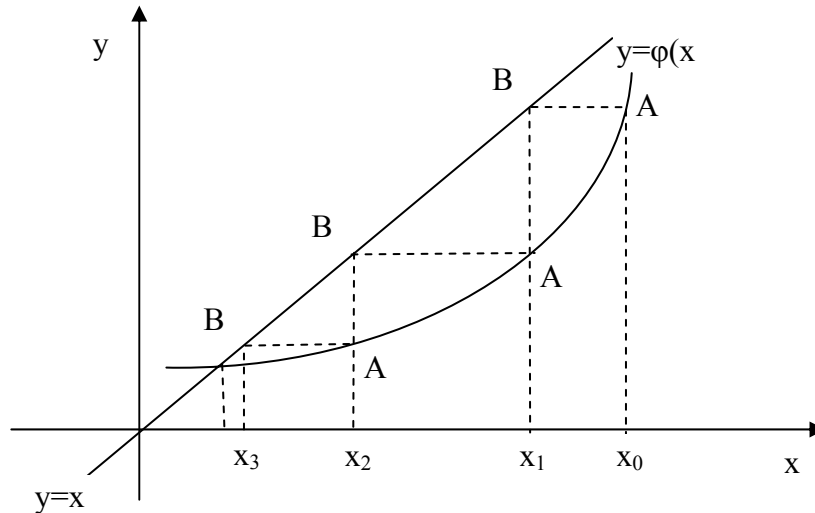


Рисунок 2.11 – График сходящегося итерационного процесса «лестница»

Возможен также другой вид ломаной $A_0B_1A_1B_2A_2\dots$ (спираль) (см. рисунок 2.12). Легко сообразить, что решение в виде «лестница» получается, если производная $\varphi'(x)$ положительна, а решение в виде «спираль», если производная $\varphi'(x)$ отрицательна.

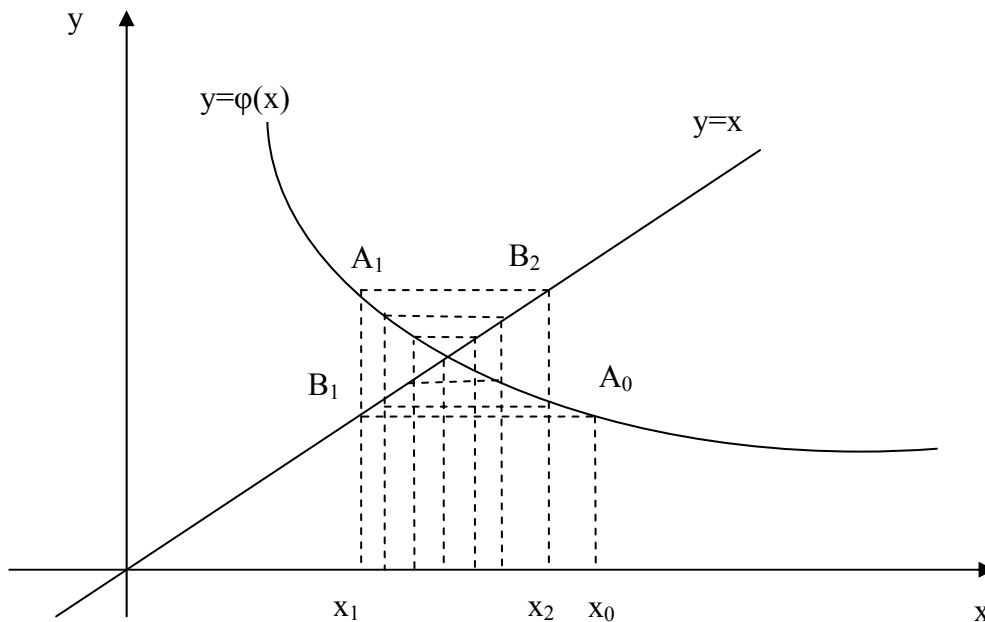


Рисунок 2.12 – График сходящегося итерационного процесса «спираль»

На рассмотренных рисунках $|\varphi'(x)| < 1$, и процесс итерации сходится. Однако, если рассмотреть рисунок 2.13, где $|\varphi'(x)| > 1$, то процесс итерации может быть расходящимся. Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

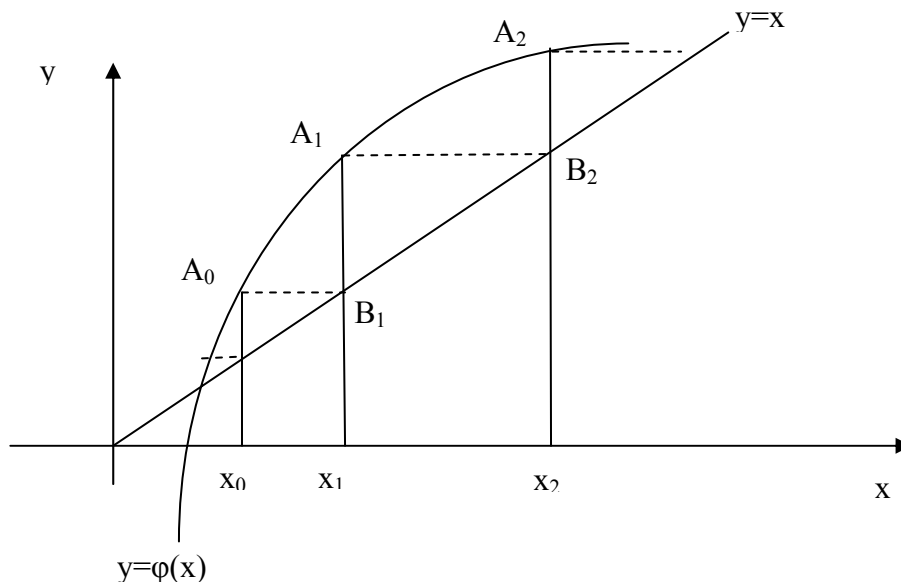


Рисунок 2.13 – График расходящегося итерационного процесса

Теорема: Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем, все ее значения $\varphi(x)$ принадлежат $[a,b]$. Тогда, если существует правильная дробь q такая, что

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \quad (2.24)$$

при $a < x < b$, то:

1) процесс итерации

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n=1,2,3,\dots), \quad (2.25)$$

сходиться независимо от начального значения $x_0 \in [a,b]$;

2) предельное значение $\xi = \lim x_n$ является единственным корнем уравнения

$$x = \varphi(x), \quad (2.26)$$

Отсюда ясно, что сходимость процесса итерации будет тем быстрее, чем меньше число q .

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последних приближений x_{n-1} и x_n не будет обеспечено выполнение неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| \leq ((1-q)/q) * \varepsilon, \text{ при } 0 < \varphi'(x) < q$$

и

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon, \text{ при } \varphi'(x) < 0.$$

2.5.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения методом итерации

Найти корни уравнения $3^x+x+2=0$ с точностью до $\varepsilon=0,001$ с помощью метода итерации.

Исходное уравнение представим в виде $x=-(3^x+2)$ и рассмотрим графики двух функций $y=-(3^x+2)$ и $y=x$.

I. Строим таблицу

$$3^x+x+2=0$$

$$x=-3^x-2=-(3^x+2)$$

$$\varphi(x)=-3^x-2=-(3^x+2)$$

$$y=x$$

$$\varphi'(x)=-3^x \cdot \ln(3)$$

Таблица 2.4 – Значения функций $y=-(3^x+2)$ и $y=x$

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$\varphi(x)$	-2,04	-2,06	-2,11	-2,19	-2,33	-2,58	-3,00	-3,73	-5,00	-7,20	-11,00
y	-3,00	-2,50	-2,00	-1,50	-1,00	-0,50	0,00	0,50	1,00	1,50	2,00
f(a)*f(b)		-0,44			1,33						
abs($\varphi'(x)$)<1		0,07			0,37						
		x_0									

II. Строим графики функций (см. рисунок 2.14)

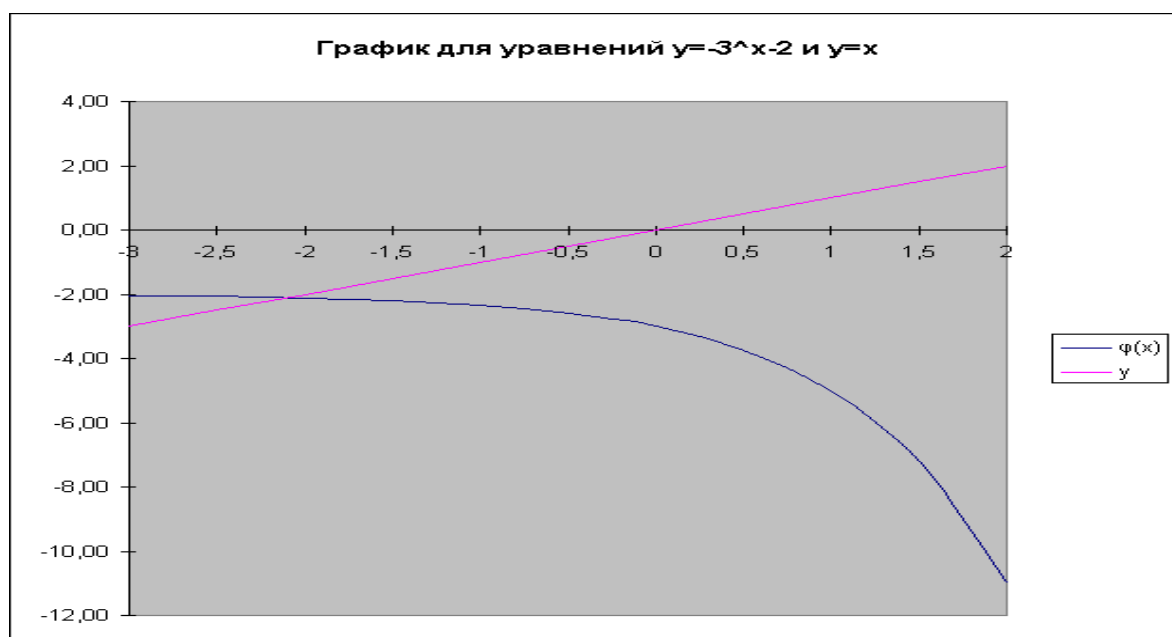


Рисунок 2.14 – Графики функций $y=-(3^x+2)$ и $y=x$

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале $[-2.5, -1]$.

Проверим условие существования корня на отрезке $[a, b]$, т.е. $f(a) * f(b) < 0$. $f(-2.5) = -0.44$, $f(-1) = 1.33$. Следовательно, $f(-2.5) * f(-1) < 0$, т.е. корень существует.

Проверим условие сходимости эквивалентного уравнения на полученном интервале, т.е. $abs(\varphi'(x)) < 1$. $Abs(\varphi'(-2.5)) = 0.07 < 1$, $abs(\varphi'(-1)) = 0.37 < 1$. Следовательно, для эквивалентного уравнения метод итераций применить можно и за x_0 рекомендуется взять точку a , т.е. $x_0 = -2.5$.

2.6 Комбинированный метод хорд и касательных

Методы хорд и касательных дают приближения к корню с разных сторон. Если один из них дает приближения слева, то другой - справа, и наоборот. Если за один проход цикла в алгоритме уточнения корня применить оба эти способа одновременно, заданная точность результата будет получена быстрее.

Пусть уравнение $F(x) = 0$ имеет единственный корень на отрезке $[a; b]$, а функция $F(x)$ на этом отрезке монотонна и не меняет характера выпуклости, т.е. первая и вторая производная сохраняют на интервале постоянные знаки. Применяя расчетные формулы

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.27)$$

и

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \quad (2.28)$$

или

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n),$$

для метода касательных и хорд, следует правильно определить, какой конец отрезка от деления корня (левый или правый) нужно будет принять за начальное значение корня для одного метода, а какой - для другого. Для этого надо в качестве параметра начального приближения x_0 для формулы (2.28) выбрать тот конец отрезка $[a; b]$, для которого $F(x_0) * F''(x_0) < 0$. А другой конец отрезка принять в качестве начального приближения к корню для метода касательных. Один из возможных способов одновременного расположения хорды и касательной показан на рисунке 2.15.

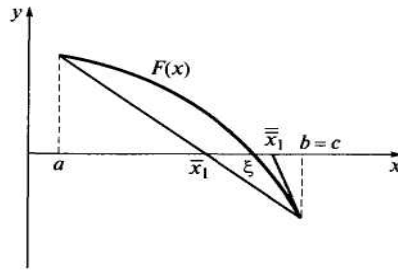


Рис. 2.15 - Геометрический смысл комбинированного метода хорд и касательных:

Для комбинированного метода хорд и касательных существует удобный способ оценки погрешности корня. Если на n -ом шаге итерационного процесса за приближенное значение корня ξ , принимают середину отрезка, ограниченно-го последними приближениями слева и справа (обозначим их соответственно x_l и x_r), т.е.

$$\xi = \frac{1}{2}(x_l + x_r), \quad (2.29)$$

то допускаемая при этом погрешность корня $\Delta\xi$ не будет превышать половины длины этого отрезка:

$$\Delta\xi \leq \frac{1}{2}|x_r - x_l|, \quad (2.30)$$

2.6.1 Пример решения нелинейного алгебраического уравнения комбинированным методом хорд и касательных

Найти корни уравнения $x^3 - 6x - 8 = 0$ с точностью до $\varepsilon = 0,001$ с помощью комбинированного метода хорд и касательных.

Исходное уравнение представим в виде $x^3 = 6x + 8$ и рассмотрим графики двух функций $y = 6x + 8$ и $y = x^3$.

II. Строим таблицу.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 6x - 8 = 0 \\ y &= 6x + 8 \\ y_1 &= x^3 \\ f'(x) &= (x^3 - 6x - 8)' = 3x^2 - 6 \\ f''(x) &= (3x^2 - 6)' = 6x \end{aligned}$$

Таблица 2.5 – Значения функций $y=6*x+8$ и $y1=x^3$

		a							b				
	x	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	
$y=6*x+8$	y	2	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32	
$y1=x^3$	y1	-1,00	-0,13	0,00	0,13	1,00	3,38	8,00	15,63	27,00	42,88	64,00	
$f(a)*f(b)>0$	проверка существования корня								-7,38	13,9			
$f'(a)*f(b)>0$	проверка первой производной								12,8	30,8			
$f''(a)*f''(b)>0$	проверка второй производной								15	21			
$f(a)*f'(a)<0$	выбор начального приближения								-111	291			
									x_l	x_r			

III. Строим графики функций (см. рисунок 2.16).

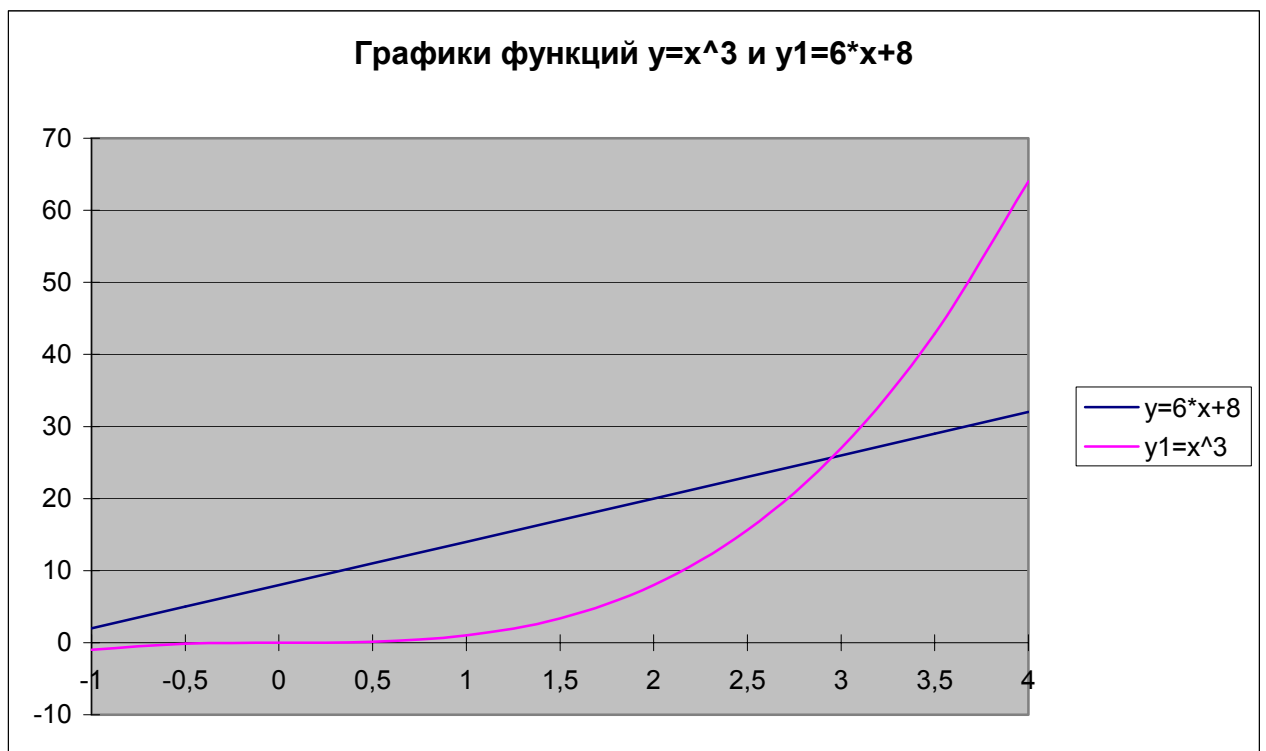


Рисунок 2.16 – Графики функций $y=6*x+8$ и $y1=x^3$

2.7 Вопросы к самопроверке

- 1) Что такое уравнение?
- 2) Что такое алгебраическое уравнение?
- 3) Что такое линейное алгебраическое уравнение?
- 4) Что такое нелинейное алгебраическое уравнение?
- 5) Что такое корень уравнение?
- 6) Что такое изолированный корень?

- 7) Этапы приближенного нахождения изолированных действительных корней.
- 8) Условия существования корня на отрезке $[a,b]$.
- 9) Условия существования единственного корня на отрезке $[a,b]$.
- 10) Геометрическое обоснование метода половинного деления.
- 11) Какую последовательность образуют левые концы отрезков, а какую правые?
- 12) Вывод формулы метода хорд.
- 13) Геометрическое обоснование метода хорд.
- 14) Условие выбора начального приближения x_0 в методе хорд.
- 15) Формула хорд в зависимости от выбранного начального приближения x_0 .
- 16) Где лежат последовательные приближения x_n .
- 17) Математический вывод формулы Ньютона для решения нелинейных алгебраических уравнений.
- 18) Геометрическое обоснование метода Ньютона.
- 19) Условие выбора начального приближения x_0 в методе Ньютона.
- 20) Условия существования единственного корня на отрезке $[a,b]$ для метода Ньютона.
- 21) Формула точности приближения метода Ньютона.
- 22) Формула метода Ньютона.
- 23) Суть метода итерации для решения нелинейных алгебраических уравнений.
- 24) Условие выбора начального приближения x_0 в методе итераций.
- 25) Условия существования единственного корня на отрезке $[a,b]$ для метода итераций.
- 26) Геометрическое обоснование метода итераций.
- 27) Формула точности приближения метода итераций.

3 Решение систем линейных алгебраических уравнений

3.1 Основные понятия. Способы решения системы линейных алгебраических уравнений

Многообразие численных методов решения систем линейных алгебраических уравнений можно разделить на точные и итерационные.

Прямые (точные) методы характеризуются тем, что дают решение системы за конечное число арифметических операций. К точным методам относятся метод Гаусса, метод главного элемента, метод квадратного корня и другие.

Итерационные методы являются приближенными. Они дают решение системы как предел последовательных приближений, вычисляемых по единой схеме. К итерационным методам относятся: метод простой итерации, метод Зейделя, метод релаксации, градиентные методы и их модификации.

Рассмотрим систему из m линейных алгебраических уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad (3.1)$$

которая может быть записана в матричном виде

$$Ax = B,$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \Lambda & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \Lambda & a_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ a_{m1} & a_{m2} & \Lambda & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ -- прямоугольная матрица размерности } m \times n$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \Lambda \\ x_n \end{bmatrix} \text{ -- вектор } n\text{-ог порядка,} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \Lambda \\ b_m \end{bmatrix} \text{ -- вектор } m\text{-го порядка.}$$

Решением системы (3.1) называется такая упорядоченная совокупность чисел $x_1=c_1, x_2=c_2, \dots, x_n=c_n$, которая обращает все уравнения системы в верные равенства.

Система линейных уравнений называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение, и несовместной, если она не имеет решений.

Совместная система линейных уравнений называется определенной, если она имеет единственное решение и неопределенной, если более одного решения.

Две системы линейных уравнений называются равносильными (эквивалентными), если каждое решение первой системы является решением второй и наоборот.

Если матрица A квадратная и ее определитель не равен нулю, то матрица называется невырожденной (неособенной).

$$\begin{aligned}
& x_1 + a''_{12}x_2 + a''_{13}x_3 + \dots + a''_{1n}x_n = b''_1 \\
& 0 + x_2 + a''_{23}x_3 + \dots + a''_{2n}x_n = b''_2 \\
& 0 + 0 + a''_{33}x_3 + \dots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\
& 0 + 0 + a''_{43}x_3 + \dots + a''_{4n}x_n = b''_4 , \\
& \dots \dots \dots \\
& 0 + 0 + a''_{n3}x_3 + \dots + a''_{nn}x_n = b''_n
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Повторив такие же преобразования с 3-им, 4-ым ... и (n-1)-ым уравнением получим:

$$\begin{aligned}
& x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \dots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\
& \quad x_2 + \alpha_{23}x_3 + \dots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\
& \quad \quad x_3 + \dots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\
& \dots \dots \dots \\
& \quad \quad \quad x_{n-1} + \alpha_{n-1n}x_n = \beta_{n-1} \\
& \quad \quad \quad \alpha_{nn}x_n = \beta_n
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Из системы (3.7) последовательно находят значения всех неизвестных $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_2, x_1$,

$$\begin{aligned}
& x_n = \beta_n / \alpha_{nn} \\
& x_{n-1} = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1n}x_n \\
& x_{n-2} = \beta_{n-2} - \alpha_{n-2,n-1}x_{n-1} - \alpha_{n-2,n}x_n \\
& \dots \dots \dots \\
& x_1 = \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \dots - \alpha_{1n}x_n
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Т.о., процесс решения системы (3.2) по методу Гаусса распадается на два этапа. Первый этап, состоящий в последовательном исключении неизвестных, называется прямым ходом. Второй – нахождение значений неизвестных - обратным ходом. Коэффициенты при неизвестных в системе (3.7) вычисляются по формулам:

$$\begin{aligned}
& \alpha_{1j} = a_{1j} / a_{11} \quad (j=1, 2, \dots, n); \\
& \alpha_{ij} = a_{ij} - a_{ik} * \alpha_{kj} \quad (j=1, 2, \dots, n; i=2, 3, \dots, n; k=1, 2, \dots, n); \\
& \beta_i = b_i - \beta_k * a_{ik} \quad (i=2, 3, \dots, n; k=1, 2, \dots, n);
\end{aligned}$$

3.2.1 Пример решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 1 \end{cases}$$

Решение: Разделив 1-ое уравнение системы на 2 , получим систему

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ 3x_1-x_2+2x_3=1 \\ 4x_1-x_2+5x_3=1 \end{cases}$$

Вычтем из 2-ого уравнения, полученной системы 1-ое уравнение, умноженное на 3, а из 3-его уравнения 1-ое уравнение, умноженное на 4, и получим систему

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ -2.5x_2-x_3=-0.5 \\ -3x_2+x_3=-5 \end{cases}$$

Разделив 2-ое уравнение, полученной системы на -2,5 , получим:

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ x_2+0.4x_3=0.2 \\ -3x_2+x_3=-5 \end{cases}$$

Вычтем из 3-его уравнения, полученной системы 2-ое уравнение, умноженное на -3 и получим систему:

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ x_2+0.4x_3=0.2 \\ 2.2x_3=-4.4 \end{cases}$$

Из 3-его уравнения, полученной системы находим $x_3=-2$; подставив это значение во 2-ое уравнение, полученной системы получим $x_2=0,2-0,4x_3=0,2-0,4(-2)=1$; наконец, подставив значение $x_3=-2$ и $x_2=1$ в 1-ое уравнение, полученной системы , находим $x_1=0,5-0,5x_2-x_3=0,5-0,5 \cdot 1 - (-2)=2$. Итак, получаем ответ $x_1=2, x_2=1, x_3=-2$

Проверка:

$$\begin{aligned} 2*2+1+2*(-2) &= 1 \\ 3*2-1+2*(-2) &= 1 \\ 4*2-1+5*(-2) &= -3 \end{aligned}$$

3.3 Метод итерации для решения систем линейных алгебраических уравнений

При большом числе неизвестных линейной системы схема метода Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В этих условиях для на-

хождения корней системы иногда удобнее пользоваться приближенными численными методами. Одним из них является метод итерации.

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (3.9)$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii} \neq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$), решим первое уравнение системы (3.9) относительно x_1 , второе относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \dots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 - \dots - \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \beta_3 - \alpha_{31}x_1 - \alpha_{32}x_2 - \dots - \alpha_{3n}x_n, \\ \dots \\ x_n = \beta_n - \alpha_{n1}x_1 - \alpha_{n2}x_2 - \dots - \alpha_{n-1n}x_{n-1} \end{cases} \quad (3.10)$$

где $\beta_i = b_i/a_{ii}$, $\alpha_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ при $i < j$, $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (3.10) можно записать в матричной форме:

$$\bar{X} = \bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{X} \quad (3.11)$$

Систему (3.10) будем решать методом последовательных приближений. За первое приближение принимаем, например, столбец свободных членов $x^{(0)} = \beta$.

Далее, последовательно строим матрицы-столбцы

$x^{(1)} = \beta + \alpha x^{(0)}$ - первое приближение,

$x^{(2)} = \beta + \alpha x^{(1)}$ - второе приближение и т.д.

Вообще говоря, любое $(k+1)$ -ое приближением вычисляют по формуле

$$x^{(k+1)} = \beta + \alpha x^{(k)}, \quad k = (0, 1, 2, \dots, n, \dots)$$

Если последовательность приближений $x^{(0)}, x^{(1)}, \dots, x^{(k)}, \dots$ имеет предел

$$x = \lim_{n \rightarrow \infty} x^{(k)}$$

то этот предел является решением системы (3.10), а следовательно, и системы (3.9).

Напишем формулы приближений в развернутом виде:

$$\left. \begin{aligned} x_i^{(0)} &= \beta_i \\ x_i^{(k+1)} &= \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii} &= 0, i=1,2, \dots, n, k=0,1,2, \dots) \end{aligned} \right\}, \text{ -формула итерации} \quad (3.12)$$

Теорема. Если для приведенной (эквивалентной) системы (3.2) выполнено, по меньшей мере, одно из условий

- 1) $\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) - сумма коэффициентов по строкам < 1 ,
- 2) $\sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) - сумма коэффициентов по столбцам < 1 ,
- 3) $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1$,

то процесс итерации (3.10) сходится к единственному решению этой системы, независимо от выбора начального приближения.

Следствие. Для системы $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ ($i=1,2, \dots, n$) метод итерации сходится, если выполнено одно из неравенств:

- 1) $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$ ($i = 1, 2, \dots, n$)
- 2) $\sum_{i=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$ ($j = 1, 2, \dots, n$)

Оценка погрешности по формуле $|x_{k+1} - x_k| < \varepsilon$.

3.3.1 Пример решения систем линейных алгебраических уравнений методом итераций

Найти корни системы линейных алгебраических уравнений методом итераций

$$\begin{cases} 2.23x_1 - 0.73x_2 + 1.27x_3 = 2.43 & \text{(I)} \\ 2.15x_1 + 3.17x_2 - 1.43x_3 = -0.32 & \text{(II)} \\ 0.83x_1 + 0.72x_2 + 2.12x_3 = 1.42 & \text{(III)} \end{cases}$$

I. Из исходной системы видим, что ни одно из условий следствия для исходной системы не выполняется.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы сумму остальных элементов строк.

$$\begin{cases} 2.23x_1 - 0.73x_2 + 1.27x_3 = 2.43 & \text{I} \\ 1.58x_1 + 5.34x_2 + 1.54x_3 = 0.09 & \text{II (2*III+II-I)} \\ 0.83x_1 + 0.72x_2 + 2.12x_3 = 1.42 & \text{III} \end{cases}$$

Из преобразованной системы видим, что:

$$\begin{aligned} 0.73 + 1.27 &< 2.23 \\ 1.58 + 1.54 &< 5.34 \\ 0.83 + 0.72 &< 2.12, \end{aligned}$$

т. е. выполняется 1-ое условие из следствия, следовательно, можно преобразованную систему заменить эквивалентной.

II. Для получения эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений в первом уравнении системы слева оставим $2.23x_1$, а остальные элементы перенесем в правую часть, во втором уравнении оставим $5.34x_2$, а остальные элементы перенесем в правую часть, в третьем уравнении оставим $2.12x_3$, а остальные элементы перенесем в правую часть. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2.23x_1 = 0.73x_2 - 1.27x_3 + 2.43 \\ 5.34x_2 = -1.58x_1 - 1.54x_3 + 0.09 \\ 2.12x_3 = -0.83x_1 - 0.72x_2 + 1.42 \end{cases}$$

В первом уравнении системы слева и справа прибавим $7.77x_1$, во втором $4.66x_2$, в третьем $7.88x_3$. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 10x_1 = 7.77x_1 + 0.73x_2 - 1.27x_3 + 2.43 \\ 10x_2 = -1.58x_1 + 4.66x_2 - 1.54x_3 + 0.09 \\ 10x_3 = -0.83x_1 - 0.72x_2 + 7.88x_3 + 1.42 \end{cases}$$

Разделим все элементы каждого уравнения на 10 и в итоге получим следующую эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x_1 = 0.777x_1 + 0.073x_2 - 0.127x_3 + 0.243 \\ x_2 = -0.158x_1 + 0.466x_2 - 0.154x_3 + 0.009 \\ x_3 = -0.083x_1 - 0.072x_2 + 0.788x_3 + 0.142 \end{cases}$$

Из эквивалентной системы видно что:

$$\begin{aligned} 0.777+0.073+0.127 < 1 \\ 0.158+0.466+0.154 < 1 \\ 0.083+0.072+0.788 < 1, \end{aligned}$$

т. е. выполняется 1-ое условие из теоремы, следовательно, эквивалентная система будет сходиться и за первоначальное приближение, можно взять любое значение вектора X . За первоначальное приближение возьмем вектор свободных членов, т. е. 0.243, 0.009, 0.142.

Исходными данными для решения данной системы методом итерации являются:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.777 & 0.073 & 0.127 \\ -0.158 & 0.466 & -0.154 \\ -0.083 & -0.072 & 0.788 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0.243 \\ 0.009 \\ 0.142 \end{bmatrix}$$

3.4 Метод Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода итерации. Основная его идея заключается в том, что при вычислении $(k+1)$ -ого приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее $(k+1)$ -ые приближения неизвестных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}$.

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \quad (3.14)$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii} > 0$ ($i=1,2, \dots, n$), решим первое уравнение системы (3.14) относительно x_1 , второе относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \dots - \alpha_{1n}x_n \\ x_2 = \beta_2 - \alpha_{21}x_1 - \alpha_{23}x_3 - \dots - \alpha_{2n}x_n \\ x_3 = \beta_3 - \alpha_{31}x_1 - \alpha_{32}x_2 - \dots - \alpha_{3n}x_n \\ \dots \dots \dots \\ x_n = \beta_n - \alpha_{n1}x_1 - \alpha_{n2}x_2 - \dots - \alpha_{n-1n}x_{n-1} \end{cases} \quad (3.15)$$

где $\beta_i = b_i/a_{ii}$, $\alpha_{ij} = -a_{ij}/a_{ii}$ при $i < j$, $\alpha_{ij} = 0$ при $i = j$ ($i, j = 1, 2, \dots, n$).

В общем виде ее можно записать

$$x_i = \beta_i + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

Введя матрицы

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (3.15) можно записать в матричной форме:

$$\bar{X} = \bar{\beta} + \bar{\alpha}\bar{X} \quad (3.16)$$

Выберем произвольные начальные приближения корней $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}$, стараясь, конечно, чтобы они в какой-то мере соответствовали искомым неизвестным $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$.

Далее, предполагая, что k -е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить $(k+1)$ -ые приближения корней по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^n \alpha_{1j} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^n \alpha_{2j} x_j^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31} x_1^{(k+1)} + \alpha_{32} x_2^{(k+1)} + \sum_{j=3}^n \alpha_{3j} x_j^{(k)}$$

.....

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^n \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

-формула Зейделя

.....

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k+1)}$$

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но приводит к более громоздким вычислениям.

Достаточным условием сходимости метода Зейделя для приведенной системы (3.15) является выполнение одного из условий:

- 1) $\sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ ($i = 1, 2, \dots, n$) - сумма коэффициентов по строкам < 1 ,
- 2) $\sum_{i=1}^n |\alpha_{ij}| < 1$ ($j = 1, 2, \dots, n$) - сумма коэффициентов по столбцам < 1 ,
- 3) $\sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |\alpha_{ij}|^2} < 1$.

Для исходной системы $\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) метод Зейделя сходится,

если выполнено одно из неравенств:

- 1) $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$ ($i = 1, 2, \dots, n$)
- 2) $\sum_{i=1}^n |a_{ij}| < |a_{ii}|$ ($j = 1, 2, \dots, n$)

3.4.1 Пример решения систем линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

Найти корни системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя

$$\begin{cases} 0.64x_1 - 1.05x_2 + 2.93x_3 = 1.18 & \text{I} \\ 1.05x_1 - 1.41x_2 + 0.16x_3 = -0.27 & \text{II} \\ -2.93x_1 + 0.16x_2 - 1.51x_3 = 0.72 & \text{III} \end{cases}$$

I. Из исходной системы видим, что ни одно из условий следствия для исходной системы не выполняется.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы сумму остальных элементов строк.

Для этого, переставим в исходной системе 1-ое и 3-ье уравнения

$$\begin{cases} -2.93x_1+0.16x_2-1.51x_3=0.72 & \text{III} \\ 1.05x_1-1.41x_2+0.16x_3=-0.27 & \text{II} \\ 0.64x_1-1.05x_2+2.93x_3=1.18 & \text{I} \end{cases}$$

Из преобразованной системы видим, что:

$$\begin{aligned} 0.16+1.51 &< 2.93 \\ 1.05+0.16 &< 1.41 \\ 0.64+1.05 &< 2.93, \end{aligned}$$

т. е. выполняется 1-ое условие из следствия, следовательно, можно преобразованную систему заменить эквивалентной.

II. Для получения эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений в первом уравнении системы слева оставим $-2.93x_1$, а остальные элементы перенесем в правую часть, во втором уравнении оставим $-1.41x_2$, а остальные элементы перенесем в правую часть, в третьем уравнении оставим $2.93x_3$, а остальные элементы перенесем в правую часть и 1-ое и 2-ое уравнение умножим на -1 . В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2.93x_1=-0.72+0.16x_2-1.51x_3 \\ 1.41x_2=0.27+1.05x_1+0.16x_3 \\ 2.93x_3=1.18-0.64x_1+1.05x_2 \end{cases}$$

Для удобства выполнения операции деления, в первом уравнении слева и справа прибавим $7.07x_1$, во втором уравнении $8.59x_2$, в третьем $7.07x_3$ и получим

$$\begin{cases} 10x_1=-0.72+7.07x_1+0.16x_2-1.51x_3 \\ 10x_2=0.27+1.05x_1+8.59x_2+0.16x_3 \\ 10x_3=1.18-0.64x_1+1.05x_2+7.07x_3 \end{cases}$$

Разделим все коэффициенты при неизвестных на 10 и получим:

$$\begin{cases} x_1=-0.072+0.707x_1+0.016x_2-0.151x_3 \\ x_2=0.27+0.105x_1+0.859x_2+0.016x_3 \\ x_3=0.118-0.064x_1+0.105x_2+0.707x_3 \end{cases}$$

Таким образом, получили равносильную (эквивалентную) систему, в которой сумма коэффициентов при неизвестных по строкам меньше 1, т. е.

$$\begin{aligned} 0.707+0.016+0.151 &< 1, \\ 0.105+0.859+0.016 &< 1, \\ 0.064+0.105+0.707 &< 1. \end{aligned}$$

Следовательно, полученная эквивалентная система сходится.

Исходными данными для решения системы методом Зейделя являются:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.016 & -0.151 \\ 0.105 & 0.859 & 0.016 \\ -0.064 & 0.105 & 0.707 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} -0.072 \\ 0.27 \\ 0.118 \end{bmatrix}$$

3.5 Вопросы к самопроверке

- 1) Какая система алгебраических уравнений называется линейной?
- 2) Какая система алгебраических уравнений называется не линейной?
- 3) Какие методы для решения систем линейных алгебраических уравнений называются (СЛАУ) точными?
- 4) Какие методы для решения систем линейных алгебраических уравнений называются (СЛАУ) итерационными?
- 5) Как записывается систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в матричной форме?
- 6) Что называется решением линейной, алгебраической системы?
- 7) Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной?
- 8) Какие системы линейных алгебраических уравнений называется равносильными?
- 9) Какая матрица называется расширенной?
- 10) Какая матрица называется транспонированной?
- 11) Прямой ход метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.
- 12) Обратный ход метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.
- 13) Суть метода итераций для решения систем линейных алгебраических уравнений.
- 14) Условие сходимости приближенных решений для исходной системы линейных алгебраических уравнений методом итераций.
- 15) Условие сходимости приближенных решений для равносильной системы линейных алгебраических уравнений методом итераций.
- 16) Общая формула метода итераций для решения системы линейных алгебраических уравнений.
- 17) Суть метода Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений.
- 18) Условие сходимости приближенных решений для исходной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.
- 19) Условие сходимости приближенных решений для равносильной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.

20) Общая формула метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений.

4 Интерполирование функций

4.1 Основные понятия. Интерполяция и экстраполяция

Пусть известные значения некоторой функции f образуют следующую таблицу:

Таблица 4.1 - Значения функции $f(x)$

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

При этом требуется получить значение функции f для такого значения аргумента x , которое входит в отрезок $[x_0; x_n]$, но не совпадает ни с одним из значений x_i ($i=0, 1, \dots, n$).

Очевидный прием решения этой задачи — вычислить значение $f(x)$, воспользовавшись аналитическим выражением функции f . Этот прием, однако, можно применить лишь в случае, когда аналитическое выражение f пригодно для вычислений. Более того, часто аналитическое выражение функции f вовсе неизвестно. В этих случаях применяется особый прием — построение по исходной информации (таблица 1) приближающей функции F , которая в некотором смысле близка к функции f и аналитическим выражением, которой можно воспользоваться для вычислений, считая приближенно, что

$$f(x) \approx F(x). \quad (4.1)$$

Классический подход к решению задачи построения приближающей функции основывается на требовании строгого совпадения значений $f(x)$ и $F(x)$ в точках x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), т. е.

$$F(x_0) = y_0, F(x_1) = y_1, \dots, F(x_n) = y_n. \quad (4.2)$$

В этом случае нахождение приближенной функции называют интерполяцией (или *интерполированием*), а точки x_0, x_1, \dots, x_n — *узлами* интерполяции.

4.2 Интерполяционный многочлен Лагранжа для не равностоящих узлов

Пусть функция f задана таблицей 41. Построим интерполяционный многочлен $L_n(x)$, степень которого не больше n и для которого выполнены условия

$$F(x_0)=y_0, F(x_1)=y_1, \dots, F(x_n)=y_n. \quad (4.3)$$

Будем искать $L_n(x)$ в виде

$$L_n(x)=l_0(x)+l_1(x)+l_2(x)+\dots+l_n(x), \quad (4.4)$$

где $l_i(x)$ — многочлен степени n , причем

$$\begin{cases} l_i(x_k) = y_i, & \text{если } i=k \\ l_i(x_k) = 0, & \text{если } i \neq k \end{cases} \quad (4.5)$$

Очевидно, что требование (4.5) с учетом (4.4) вполне обеспечивает выполнение условий (4.3).

Многочлены $l_i(x)$ составим следующим способом: .

$$l_i(x)=c_i(x-x_0)(x-x_1) \cdot \dots \cdot (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x-x_n), \quad (4.6)$$

где c_i - постоянный коэффициент, значение которого найдем из первой части условия (4.5):

$$c_i = \frac{y_i}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)}$$

(заметим, что ни один множитель в знаменателе не равен нулю). Подставим c_i в (4.6) и далее с учетом (4.4) окончательно имеем:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \frac{(x - x_0) \cdot \dots \cdot (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot \dots \cdot (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \cdot \dots \cdot (x_i - x_n)} \quad (4.7)$$

В общем виде он записывается следующим образом:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot \prod_{j=0, j \neq i}^n \frac{(x - x_j)}{(x_i - x_j)} \quad \text{при } i \neq j, \quad (4.8)$$

Это и есть интерполяционный многочлен Лагранжа.

4.2.1 Пример вычисления значения функции, заданной таблицей в точке с помощью интерполяционного многочлена Лагранжа для неравностоящих узлов

Построить интерполяционный многочлен Лагранжа для функции, заданной таблицей:

Таблица 4.2 - Исходные данные

	x_0	x_1	x_2
x	1	3	4
$f(x)$	12	4	6

Из таблицы 4.2 следует, что $n=2$ (т. е. степень многочлена будет не выше, чем вторая); здесь $x_0=1, x_1=3, x_2=4$. Используя формулу (4.8), получаем:

$$L_2(x) = 12 \frac{(x-3)(x-4)}{(1-3)(1-4)} + 4 \frac{(x-1)(x-4)}{(3-1)(3-4)} + 6 \frac{(x-1)(x-3)}{(4-1)(4-3)} =$$

$$= 2(x^2 - 7x + 12) - 2(x^2 - 5x + 4) + 2(x^2 - 4x + 3) = 2x^2 - 12x + 22$$

Т.о. приближающая функция для функции f заданной таблицей 4.2 имеет следующий вид $F(x)=2x^2-12x+22$.

4.3 Интерполяционный полином Лагранжа для равностоящих узлов

Интерполяционная формула Лагранжа заметно упрощается, если узлы интерполяции равностоящие, т.е. $h=x_{i+1}-x_i=Const$, где h – шаг интерполяции.

В этом случае шаг интерполирования $h=(x_n-x_0)/n$, где n – число отрезков.

Введем обозначение $t=(x-x_0)/h$

Тогда из формулы

$$L_n(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)(x_i-x_2)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)}, \quad (4.9)$$

имеем, т.к. $x-x_0=th$

$$x-x_1=x-x_1-h=h(t-1)$$

$$x-x_2=x-x_0-2h=h(t-2)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x-x_i=x-x_0-ih=h(t-i)$$

$$\dots\dots\dots$$

$$x-x_n=x-x_0-nh=h(t-n)$$

ТО

$$L_n(t) = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-(i-1))(t-(i+1))\dots(t-n) * h^n}{ih(i-1)h(i-2)h\dots h(-h)\dots[-(n-i)h]}, \quad (4.10)$$

Т.к. $x_i=x_0+ih \rightarrow x_i-x_0=ih$

$$\begin{aligned} x_i-x_1 &= x_i-x_0-h=h(i-1) \\ x_i-x_2 &= x_i-x_0-2h=h(i-2) \\ &\dots\dots\dots \\ x_i-x_{i-1} &= x_i-x_0-(i-i+1)h=h \\ x_i-x_{i+1} &= x_i-x_0-(i-i-1)h=-h \\ x_i-x_{i+2} &= x_i-x_0-(i-i-2)h=-2h \\ &\dots\dots\dots \\ x_i-x_n &= x_i-x_0-(i-n)h=-(n-i)h \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned} ih(i-1)h(i-2)h \dots h &= i! h^i \\ -h(-2h)\dots(-(n-i)h) &= (-1)^{n-i} (n-i)! h^{n-i} \end{aligned}$$

Представляя, полученное в (4.10) получим

$$L_n(t) = \frac{t(t-1)(t-2)\dots(t-(i-1))(t-(i+1))\dots(t-n) * h^n}{h^n (-1)^{n-i} i! (n-i)!} \quad (4.11)$$

Умножим числитель и знаменатель на $(-1)^{n-i} (t-i)$, тогда получим:

$$L_n(t) = \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)t(t-2)\dots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}, \quad (4.12)$$

И, следовательно, полином Лагранжа для равностоящих узлов запишется в виде

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i} t(t-1)t(t-2)\dots(t-n)}{i!(n-i)!(t-i)}, \quad (4.13)$$

4.4 Интерполяционные формулы Ньютона для равностоящих узлов

Часто интерполирование, ведется для функций, заданных таблицами с равноотстоящими значениями аргумента. В этом случае шаг таблицы $h=x_{i+1}-x_i$ ($i=0, 1, 2, \dots$) является величиной постоянной. Для таких таблиц построение интерполяционных формул (как, впрочем, и вычисление по этим формулам) заметно упрощается.

4.4.1 Конечные разности

Пусть функция задана таблицей 4.3 с постоянным шагом.

Таблица 4.3 - Значения функции $f(x)$

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

Разности между значениями функции в соседних узлах интерполяции называются *конечными разностями первого порядка*:

$$\Delta y_i = y_{i+1} - y_i \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad (4.14)$$

Из конечных разностей первого порядка образуются *конечные разности второго порядка*:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i \quad (i=0, 1, 2, \dots), \quad (4.15)$$

Продолжая этот процесс, можно по заданной таблице функции составить таблицу конечных разностей (см. таблицу 4.4), Конечные разности любого порядка могут быть представлены через значения функции. Действительно, для разностей первого порядка это следует из определения. Для разностей второго порядка имеем:

$$\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i, \quad (4.16)$$

Аналогично для разностей третьего порядка:

$$\Delta^3 y_i = \Delta^2 y_{i+1} - \Delta^2 y_i = (y_{i+3} - 2y_{i+2} + y_{i+1}) - (y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i) = y_{i+3} - 3y_{i+2} + 3y_{i+1} - y_i$$

и т. д.

Методом математической индукции можно, доказать, что

$$\Delta^k y_i = y_{i+k} - ky_{i+k-1} + \frac{k(k-1)}{2!} y_{i+k-2} - \dots + (-1)^k y_i, \quad (4.17)$$

Таблица 4.4 – Таблица конечных разностей

x	y	Δy_1	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$...
x_0	y_0	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_2$...	
x_3	y_3	Δy_3	...		
x_4	y_4	...			
...	...				

4.4.2 Первая интерполяционная формула Ньютона

Пусть для функции, заданной таблицей с постоянным шагом, составлена таблица конечных разностей 4.2. Будем искать интерполяционный многочлен в виде:

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)(x-x_1) + \dots + a_n(x-x_0) \dots (x-x_{n-1}). \quad (4.18)$$

Это многочлен n -й степени. Значения коэффициентов a_0, a_1, \dots, a_n найдем из условия совпадения значений исходной функции и многочлена в узлах. Полагая $x=x_0$, из (4.18) находим $y_0 = P_n(x_0) = a_0$, откуда $a_0 = y_0$. Далее, придавая x значения x_1 и x_2 , последовательно получаем:

$$y_1 = P_n(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0),$$

откуда $a_1 = \frac{y_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y_0}{h};$

$$y_2 = P_n(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1),$$

$$a_2 = \frac{y_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{y_2 - y_0 - \frac{\Delta y_0 * 2 * h}{h}}{1 * 2 * h^2} = \frac{(y_2 - y_0) - 2y_1 + 2y_0}{2! h^2} =$$

$$= \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2! h^2} = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}$$

т. е. $a_2 = \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}$

Далее, проведя аналогичные выкладки, можно получить:

$$a_3 = \frac{\Delta^3 y_0}{3! h^3};$$

в общем случае выражение для a_k будет иметь вид:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_0}{k! h^k}. \quad (4.19)$$

Подставим теперь (4.19) в выражение для многочлена (4.18):

$$P_n(x) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x-x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2! h^2}(x-x_0)(x-x_1) + \dots + \frac{\Delta^n y_0}{n! h^n}(x-x_0) \times \dots \times (x-x_{n-1}). \quad (4.20)$$

Практически эта формула применяется в несколько ином виде.

Положим, $\frac{x-x_0}{h} = t$ т. е. $x = x_0 + ht$.

Тогда:

$$\frac{x-x_1}{h} = \frac{x-x_0-h}{h} = t-1,$$

$$\frac{x-x_2}{h} = \frac{x-x_0-2h}{h} = t-2$$

и т. д.

Окончательно имеем:

$$P_n(x) = P_n(x_0 + th) = y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \dots + \frac{t(t-1) \dots (t-n+1)}{n!} \Delta^n y_0 \quad (4.21)$$

Формула (4.21) называется *первой интерполяционной формулой Ньютона*. Эта формула применяется для интерполирования в начале отрезка интерполяции, когда t мало по абсолютной величине. Первую интерполяционную формулу Ньютона называют по этой причине формулой для интерполирования вперед.

4.4.3 Вторая интерполяционная формула Ньютона

Когда значение аргумента находится ближе к концу отрезка интерполяции, применять первую интерполяционную формулу становится невыгодно. В этом случае применяется формула для интерполирования назад—*вторая интерполяционная формула Ньютона*, которая отыскивается в виде:

$$P_n(x) = a_0 - a_1(x - x_n) + a_2(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + a_n(x - x_n) \times \dots \times (x - x_1), \quad (4.22)$$

Как и для первой формулы Ньютона, коэффициенты a_0, a_1, \dots, a_n находятся из условия совпадения значений функции и интерполяционного многочлена в узлах интерполяции:

$$a_k = \frac{\Delta^k y_k}{k! h^k}, \quad (4.23)$$

Подставляя (4.23) в (4.22) и переходя к переменной $\frac{x - x_n}{h} = t$ получим окончательный вид второй интерполяционной формулы Ньютона:

$$P_n(x) = P_n(x_n + th) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \dots + \frac{t(t+1) \times \dots \times (t+n-1)}{n!} \Delta^n y_0, \quad (4.24)$$

4.4.4 Пример вычисления значения функции, заданной таблицей в точке с помощью интерполяционных полиномов Ньютона для равностоящих узлов

Пусть функция задана следующей таблицей 4.5:

Таблица 4.5 - Значения функции

x	y
1.215	0.106044
1.220	0.113276
1.225	0.119671
1.230	0.125324
1.235	0.130328
1.240	0.134776
1.245	0.138759
1.250	0.142367
1.255	0.145688
1.260	0.148809

Определить значение функции $y(x)$ при следующих значениях аргумента:

1) $x_1 = 1.2273$; 3) $x_2 = 1.253$;

2) $x_3 = 1.210$; 4) $x_4 = 1.2638$;

I. Составим таблицу конечных разностей.

Таблица 4.6 - Таблица конечных разностей

x_i	y_i	Δy_i	$\Delta^2 y_i$	$\Delta^3 y_i$
1.215	0.106044	0.007232	-0.000837	0.000095
1.220	0.113276	0.006395	-0.000742	0.000093
1.225	0.119671	0.005653	-0.000649	0.000093
1.230	0.125324	0.005004	-0.000556	0.000091
1.235	0.130328	0.004448	-0.000465	0.000090
1.240	0.134776	0.003983	-0.000375	0.000088
1.245	0.138759	0.003608	-0.000287	0.000087
1.250	0.142367	0.003321	-0.000200	-
1.255	0.145688	0.003121	-	-
1.260	0.148809	-	-	-

При составлении таблицы разностей ограничиваемся разностями третьего порядка, так как они практически постоянны.

II. Вычислим значения функции в заданных точках.

Для вычисления значений функции при $x = 1,2273$ и $x = 1,210$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования вперед:

$$y(x) \approx y_0 + t\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{2!} \Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{3!} \Delta^3 y_0 + \dots$$

где $t=(x-x_0)/h$

1) Если $x=1.2273$, то примем $x_0=1.225$, тогда

$$t = \frac{1.2273 - 1.225}{0.005} = 0.46,$$

$$y(1.2273) \approx 0.119671 + 0.46 \cdot 0.005653 + \frac{0.46(-0.54)}{2} (-0.000649) + \frac{0.46(-0.54)(-1.54)}{6} 0.000093 =$$

$$= 0.119671 + 0.0026004 + 0.0000806 + 0.0000059 = 0.1223579 \approx 0.122358.$$

2) Если $x=1.210$, то примем $x_0=1.215$; тогда

$$t = \frac{1.210 - 1.215}{0.005} = -1$$

$$y(1.210) \approx 0.106044 + (-1) \cdot 0.007232 + \frac{(-1)(-2)}{2}(-0.000837) + \frac{(-1)(-2)(-3)}{6}0.000095 = 0.097880.$$

Для вычисления значений функции при $x=1.253$ и $x=1.2638$ воспользуемся формулой Ньютона для интерполирования назад:

$$y(x) \approx y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!} \Delta^2 y_{n-2} + \frac{t(t+1)(t+2)}{3!} \Delta^3 y_{n-3} + \dots,$$

где $t=(x-x_n)/h$.

3) Если $x=1.253$, то примем $x_n=1.255$; тогда

$$t = \frac{1.252 - 1.255}{0.005} = -0.4$$

$$\begin{aligned} y(1.253) &\approx 0.145688 + (-0.4) \cdot 0.003321 + \frac{(-0.4)0.6}{2}(-0.000287) + \frac{(-0.4)0.6 \cdot 1.6}{6}0.000088 = \\ &= 0.145688 - 0.0013284 + 0.0000344 - 0.0000056 = 0.1443884 \approx 0.144388. \end{aligned}$$

4) Если $x=1.2638$, то примем $x_n=1.260$, тогда

$$t = \frac{1.2638 - 0.260}{0.005} = 0.76,$$

$$\begin{aligned} y(1.2638) &\approx 0.148809 + 0.76 \cdot 0.003121 + \frac{0.76 \cdot 1.76}{2}(-0.000200) + \frac{0.76 \cdot 1.76 \cdot 2.76}{6}0.000087 = \\ &= 0.148809 + 0.0023720 - 0.0001328 + 0.0000535 = 0.1511007 \approx 0.151101. \end{aligned}$$

4.5 Интерполяция сплайнами

При большом количестве узлов интерполяции сильно возрастает степень интерполяционных многочленов, что делает их неудобными для вычислений. Высокой степени многочлена можно избежать, разбив отрезок интерполяции на несколько частей, с последующим построением на каждой части самостоятельного интерполяционного многочлена. Однако такое интерполирование наталкивается на существенный недостаток: в точках стыка разных интерполяционных многочленов будет разрывной их первая производная.

В этом случае удобно пользоваться особым видом кусочно-полиномиальной интерполяции - интерполяции сплайнами (от англ. spline - рейка). Суть этого подхода заключается в следующем.

Функция $S_m(x)$ называется интерполяционным сплайном порядка m для функции $f(x)$, заданной таблицей (см. таблицу 4.7)

Таблица 4.7 - Значения функции $f(x)$

x	x_0	x_1	...	x_n
$f(x)$	y_0	y_1	...	y_n

если:

1) на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) $S(x)$ является многочленом порядка m ;

2) $S(x)$ и ее производные до $(m-1)$ -го порядка включительно непрерывны на $[x_0, x_n]$;

3) $S(x_i) = y_i$ ($i = 0, 1, \dots, n$) - непосредственно условие интерполяции.

Можно доказать, что эти условия достаточны для существования сплайна порядка m ($m > 2$), но не гарантируют его единственности.

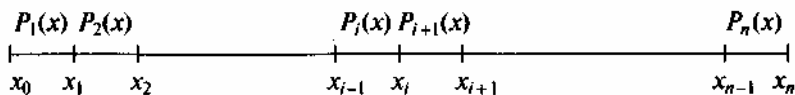
Остановимся на построении наиболее популярных в практике аппроксимации функций кубических сплайнов. Согласно определению кубический сплайн $S(x)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
 S(x) &= P_1(x), & x \in [x_0, x_1]; \\
 S(x) &= P_2(x), & x \in [x_1, x_2]; \\
 \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \quad \Lambda \\
 S(x) &= P_n(x), & x \in [x_{n-1}, x_n];
 \end{aligned}
 \tag{4.25}$$

где каждый из $P_i(x)$ — многочлен третьей степени:

$$P_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3, \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{4.26}$$

Привязку номера многочлена к узлам интерполяции помогает проследить следующая схема:



Последний пункт определения сплайна в сочетании с формулой (4.26) позволяет немедленно найти коэффициенты a_i : $y_i = S(x_i) = P_i(x_i) = a_i$ или

$$a_i = y_i. \tag{4.27}$$

Условие непрерывности $S(x)$ в каждом узле приводит к равенствам $P_i(x_i) = P_{i+1}(x_i)$ ($i = 1, \dots, n-1$). В развернутом виде с учетом (4.26) эти равенства примут вид

$$a_i = a_{i+1} + b_{i+1}(x_i - x_{i+1}) + c_{i+1}(x_i - x_{i+1})^2 + d_{i+1}(x_i - x_{i+1})^3, \quad (4.28)$$

Введем обозначение $h = x_i - x_{i+1}$. Понижая в равенствах (4.28) индекс на единицу (т. е. заменяя i на $i - 1$, что по существу ровно ничего не значит кроме изменения диапазона значений величины i) и учитывая (4.27), получим:

$$h_i b_i - h_i^2 c_i + h_i^3 d_i = y_i - y_{i-1}, \quad (4.29)$$

Условие непрерывности первой производной кубического сплайна, входящее в его определение, сводится к требованию $P_i'(x_i) = P_{i+1}(x_i)$ ($i = 1, n-1$). Дифференцируя формулу (4.26) и пользуясь введенными ранее обозначениями, получим

$$b_{i-1} - b_i + 2h_i c_i - 3h_i^2 d_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n), \quad (4.30)$$

Осталось использовать непрерывность второй производной сплайн функции, т. е. условие $P_i''(x_i) = P_{i+1}''(x_i)$. Оно порождает равенства

$$c_{i-1} - c_i + 3h_i d_i = 0 \quad (i = 2, \dots, n), \quad (4.31)$$

Совокупность равенств (4.29)—(4.31) образует систему $3n - 2$ линейных алгебраических уравнений относительно $3n$ неизвестных $\{b_i\}$, $\{c_i\}$, $\{d_i\}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Для однозначной разрешимости ее следует доопределить. Наиболее распространенный способ доопределения - потребовать «гладкости» второй производной сплайна на концах отрезка: $S''(x_0) = S''(x_n) = 0$, что в принятых обозначениях сводится к равенствам $P_1''(x_0) = 0$, $P_n''(x_n) = 0$, или с учетом (4.28),

$$\begin{aligned} c_1 - 3h_1 d_1 &= 0; \\ c_n &= 0 \end{aligned} \quad (4.32)$$

Отметим, что первое из уравнений (4.32) совпадает формально с (4.31) при $i = 0$, если ввести коэффициент c_0 (которого нет на самом деле в наборе $\{c_i\}$) и положить его равным нулю.

На практике удобно не решать непосредственно систему (4.29) — (4.32), а предварительно исключить из нее все неизвестные каких-либо двух групп. Начнем с исключения совокупности переменных $\{b_i\}$. Для этого выразим b_i из (4.29):

$$b_i = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} + h_i c_i - h_i^2 d_i, \quad (4.33)$$

Перепишем (4.33), понизив индекс на единицу:

$$b_{i-1} = \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}} + h_{i-1}c_{i-1} - h_{i-1}^2 d_{i-1}, \quad (4.34)$$

Вычтем (4.33) из (4.34) и подставим полученную разность $b_{i-1} - b_i$ в (4.30). После простых преобразований получим

$$h_i c_i + h_{i-1} c_{i-1} - 2h_i^2 d_i - h_{i-1}^2 d_{i-1} = \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{y_{i-1} - y_{i-2}}{h_{i-1}}, \quad (4.35)$$

Теперь исключим из (4.35) величины d_i . Для этого выразим d_i из (4.31)

$$d_i = \frac{c_i - c_{i-1}}{3h_i} \quad (i = 2, \dots, n), \quad (4.36)$$

Подставим это в (4.35) (понижив там, где это необходимо, индекс). Получим

$$h_{i+1}c_{i+1} + 2(h_i + h_{i+1})c_i + h_i c_{i-1} = 3\left(\frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} - \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i}\right), \quad (4.37)$$

Система (4.37) содержит лишь неизвестные $\{c_i\}$ и является системой линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. При этом необходимое для вычислений значение величины c_n уже известно - см. (4.32).

Найдя неизвестные $\{c_i\}$, по формулам (4.36) и первого из уравнений (4.32) найдем неизвестные $\{d_i\}$, а затем с помощью (4.33) неизвестные $\{b_i\}$. На этом построение кубического сплайна завершится.

4.6 Вопросы к самопроверке

- 1) Что такое интерполяция?
- 2) Сформулируйте задачу интерполяции.
- 3) Интерполяционный многочлен Лагранжа для не равностоящих узлов.
- 4) Интерполяционный многочлен Лагранжа для равностоящих узлов.
- 5) Что называется разностью первого порядка, второго порядка и т. д.
- 6) Первая интерполяционная формула Ньютона(вперед).
- 7) Вторая интерполяционная формула Ньютона(назад).
- 8) В чем суть интерполяции сплайнами?
- 9) Что такое сплайн?

5 Методы вычисления определенных интегралов

5.1 Основные понятия. Методы вычисления определенных интегралов

При вычислении определённого интеграла:

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (5.1)$$

где $f(x)$ непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция, иногда удаётся воспользоваться известной формулой Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (5.2)$$

Здесь $F(x)$ – одна из первообразных функций $f(x)$, т. е. такая функция, что $F'(x) = f(x)$. Однако даже в тех случаях, когда первообразную удаётся явно найти в аналитической форме, не всегда удаётся довести до числового ответа значение определённого интеграла. Если к тому же учесть, что иногда подынтегральная функция вовсе задаётся таблицей или графиком, то становится понятным, почему интегрирование по формуле (5.1) не получает широкого применения на практике.

В подобных случаях применяют различные методы приближённого (численного) интегрирования. Формулы, используемые для приближённого вычисления однократных интегралов, называют квадратурными формулами. Простой приём построения квадратурных формул состоит в том, что подынтегральная функция $f(x)$ заменяется на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом, например многочленом Лагранжа $L_n(x)$ и получается приближённое равенство.

5.2 Метод трапеций

Заменяем подынтегральную функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ интерполяционным многочленом Лагранжа $L_n(x)$ и получим приближённое равенство:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \int_a^b \sum_{i=0}^n y_i \prod_{i=0}^n \frac{(x - x_i)}{(x_i - x_j)} dx, \quad (5.3)$$

Обозначим

$$\prod_{n+1}(x) = (x - x_0) * (x - x_1) * \dots * (x - x_n).$$

Продифференцируем $\prod_{n+1}(x)$ по x ,

$$\prod_{n+1}^l(x) = \sum_{i=0}^n (x - x_0) \dots (x - x_{i-j}) (x - x_{i+j}) \dots (x - x_n).$$

При $x=x_i$ ($i=0, 1, \dots, n$) имеем:

$$\prod_{n+1}^l(x_i) = \sum_{i=0}^n (x_i - x_0) \dots (x_i - x_{i-j}) * (x_i - x_{i+j}) \dots (x_i - x_n).$$

Тогда формула Лагранжа имеет вид:

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x - x_i) \prod_{n+1}^l(x_i)} = \prod_{n+1} \sum_{i=0}^n \frac{y_i}{(x - x_0) \prod_{n+1}^l(x_i)}.$$

Подставляя полученное в (5.3) имеем:

$$\int_a^b f(x) \approx \sum_{i=0}^n y_i \int_a^b \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x - x_i) \prod_{n+1}^l(x_i)} dx,$$

т. о.

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n y_i A_i, \quad (5.4)$$

где

$$A_i = \int_a^b \frac{\prod_{n+1}(x)}{(x - x_i) \prod_{n+1}^l(x_i)} dx, \quad (5.5)$$

По поводу полученного можно заметить что:

1) Коэффициенты A_i не зависят от функции $f(x)$, т. к. они составлены с учётом узлов интерполяции;

2) Если $f(x)$ – полином степени n , то тогда формула (5.3) такая, что в этом случае $L_n(x) = f(x)$.

Как уже отмечалось выше, применение формулы (5.3) предполагает построение на отрезке интегрирования $[a, b]$ системы узлов интерполяции

x_0, x_1, \dots, x_n ($x_0 = a, x_n = b$), которыми отрезок делится на n частей. Длина $x_{i+1} - x_i = h$ ($i = 0, \dots, n-1$) называется шагом интегрирования. Естественно считать, что h шаг постоянен, т. е. $h = (b-a)/n$.

В этом случае можно применять интерполяционную формулу Лагранжа для равностоящих узлов:

$$L_n(x_0 + th) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)},$$

где

$$t = \frac{x - x_0}{h},$$

а

$$\prod_{n+1}(x) = h^{n+1} t^{[n+1]},$$

$$\prod_{n+1}^I(x_i) = h^n * i!(n-i)!(-1)^{n-i},$$

Тогда (5.5) можно записать в виде

$$A_i = \int_{x_0}^{x_n} \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dx \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

Перейдём в этом интеграле всюду к переменной t . Из подстановки

$$\frac{x - x_0}{h} = t,$$

получаем

$$dt = \frac{dx}{h} \rightarrow dx = h dt = \frac{b-a}{n} dt,$$

При $x = x_0$ имеем $t=0$, а при $x = x_n$ будет $t = \frac{x_n - x_0}{h} = n$.

Тогда

$$A_i = \frac{b-a}{n} \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt = (b-a)H_i, \quad (5.7)$$

где

$$H_i = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt \quad i = 0, 1, 2, \dots, n, \quad (5.8)$$

Формула (5.8) называется формулой Ньютона-Коттеса. При $n=1$ из (5.8) получаем

$$H_0 = - \int_0^1 \frac{t(t-1)}{t} dt = - \int_0^1 (t-1) dt = \frac{1}{2},$$

$$H_1 = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2},$$

Тогда по формуле (5.4) на отрезке $[x_0, x_1]$,

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a) \sum_{i=0}^n y_i H_i$$

имеем

$$\int_{x_0}^{x_1} f(x) dx = (x_1 - x_0)(H_0 y_0 + H_1 y_1) = \frac{h}{2}(y_0 + y_1) \quad (5.9)$$

Формула (5.9) называется формулой трапеции.

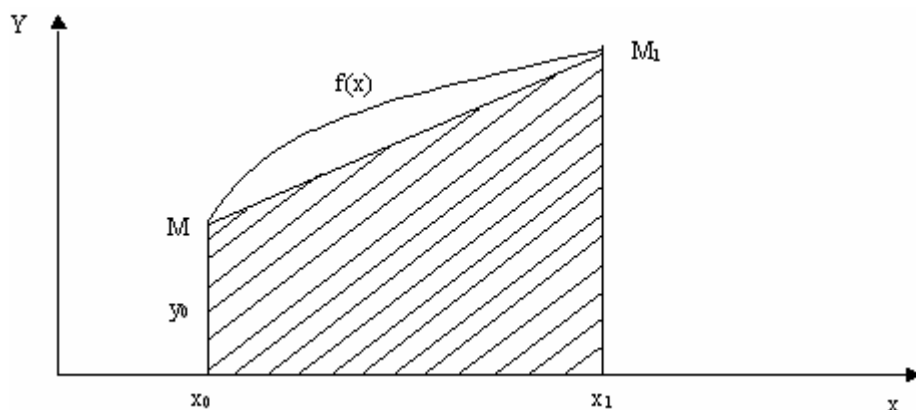


Рисунок 5.1 – Геометрическое обоснование формулы (5.9).

Распространяя формулу (5.9) на все отрезки разбиения получаем общую формулу трапеций для отрезка $[a, b]$;

$$\int_a^b f(x)dx = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right), \quad (5.10)$$

Если аналитическое выражение подынтегральной функции известно, может быть поставлен вопрос об оценке погрешности численного интегрирования.

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b L_n(x)dx + R_n(f).$$

Окончательный вид формулы для оценки погрешности метода интегрирования по формуле трапеций

$$|R_n| \leq M \frac{|b-a| \cdot h^2}{12}, \quad (5.11)$$

где

$$M = \max |f''(x)| \quad x \in [a, b]$$

За приближённое значение S интеграла $\int_a^b f(x)dx$, вычисленное по формуле трапеций с поправкой по Рунге, принимают:

$$S = S_{2n} + \frac{S_{2n} - S_n}{3}.$$

Погрешность этого результата оценивается величиной $\Delta = |S_{2n} - S_n|/3$.

5.3 Формула Симпсона

В предыдущем методе из формул (5.4), (5.7) имеем:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=0}^n y_i A_i = (b-a) \sum_{i=0}^n y_i H_i, \quad (5.12)$$

где

$$H_i = \frac{1}{n} \int_0^n \frac{(-1)^{n-i} t^{[n+1]}}{i!(n-i)!(t-i)} dt, \quad (5.13)$$

При $n=2$ из формулы (5.13) последовательно имеем ($i=0,1,2$):

$$H_0 = \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{(t-1)(t-2)}{2} dt = \frac{1}{6},$$

$$H_1 = -\frac{1}{2} \int_0^2 t(t-2) dt = \frac{2}{3},$$

$$H_2 = \frac{1}{4} \int_0^2 t(t-1) dt = \frac{1}{6}.$$

Тогда с учётом формулы (5.12) получим на отрезке $[x_0, x_2]$

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = (x_2 - x_0) \sum_{i=0}^2 y_i H_i = 2h \left(\frac{1}{6} y_0 + \frac{2}{3} y_1 + \frac{1}{6} y_2 \right),$$

т. е.

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x) dx = \frac{h}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2), \quad (5.14)$$

Геометрически, в соответствии со смыслом интерполяционной формулы Лагранжа при $n=2$, использование формулы (5.14) означает замену подынтегральной функции $f(x)$ параболой $L_2(x)$ проходящей через точки $M_i(x_i, y_i)$, ($i=0,1,2$), (см. рисунок 5.2)

Если считать n – чётное ($n=2m$), то, применяя формулу (5.14) последовательно к каждой паре частичных отрезков $[x_{i-2}, x_{2i}]$, ($i=1,2,3, \dots, m$), получим

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{2h}{3} \left(\frac{y_0}{2} + 2y_1 + y_2 + \dots + 2y_{2m-1} + \frac{y_{2m}}{2} \right), \quad (5.15)$$

Формула (5.15) называется формулой Симпсона. Иногда формулу Симпсона записывают в виде:

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2m-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2m-1}) + y_{2m}), \quad (5.16)$$

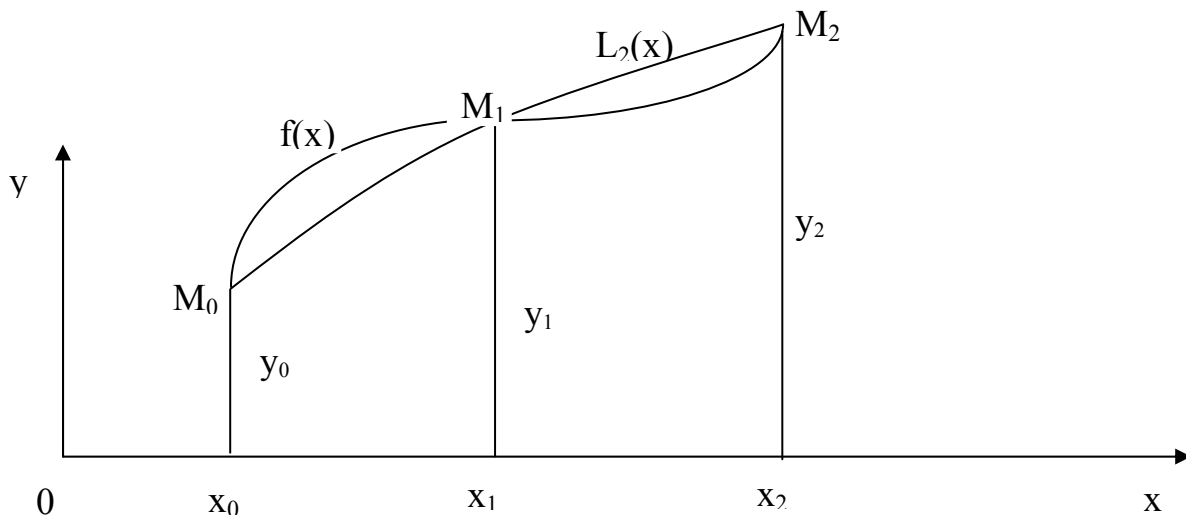


Рисунок 5.2 - Геометрическое обоснование формулы

Оценка остаточного члена формулы Симпсона даётся формулой:

$$R_1 \leq M \frac{|b-a| \cdot h^4}{180},$$

где

$$M = \max |f^{iv}(x)|, \quad x \in [a, b].$$

Алгебраический порядок точности формулы Симпсона равен 3. Это означает, что она точна для многочленов до третьей степени включительно. Оценка погрешности формулы Симпсона по остаточному члену R , часто оказывается мало эффективной из-за трудности оценки четвёртой производной подынтегральной функции.

На практике применяют правило Рунге. Для этого выбирают число n кратное 2 и вычисляют приближённое значение по формуле Симпсона с шагом $h=(b-a)/n$ (обозначим это приближение S_n). Затем вычисляют приближённое значение интеграла по формуле Симпсона с шагом $h/2$, т. е. $(b-a)/2n$ (обозначим S_{2n}).

За приближённое значение S интеграла $\int_a^b f(x)dx$, вычисленное по формуле Симпсона с поправкой по Рунге, принимают:

$$S = S_{2n} + \frac{S_{2n} - S_n}{15}.$$

Погрешность этого результата оценивается величиной $\Delta = |S_{2n} - S_n| / 15$

5.5 Вопросы к самопроверке

- 1) В чем суть численного интегрирования?
- 2) Формула Ньютона-Коттеса.
- 3) Формула прямоугольников, трапеций для вычисления определенного интеграла, их вывод.
- 4) Формула Симпсона для вычисления определенного интеграла.

6 Методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

6.1. Основные понятия. Способы решения обыкновенных дифференциальных уравнений

Уравнение, в котором неизвестная функция входит под знаком производной или дифференциала, называется дифференциальным уравнением.

Например:

$$\frac{dy}{dx} = 2(y - 3); \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = t + 1; \quad y' = x^2;$$

Если неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, зависит только от одной независимой переменной, то дифференциальное уравнение называется обыкновенным.

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 2; \quad 2sdt = tds;$$

Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется уравнением в частных производных.

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = 0;$$

Порядком дифференциального уравнения называется наивысший порядок производной (или дифференциала), входящей в уравнение.

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = t - 1; \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + \frac{d^2 z}{dy^2} = 0 - 2 - \text{порядок};$$

$$\frac{ds}{dt} \cos(t) + \sin(t) = 1; \quad (x^2 - y^2)dx + (x^2 + y^2)dy = 0; - 1 \text{ порядок};$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение n -го порядка в самом общем случае содержит независимую переменную, неизвестную функцию и её производные или дифференциалы до n -го порядка включительно и имеет вид:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0; \quad (6.1)$$

где

x – независимая переменная;

y – неизвестная функция;

$y', y'', \dots, y^{(n)}$ – производные этой функции.

Если левая часть дифференциального уравнения (6.1), является многочленом по отношению к производной максимального порядка от неизвестной функции, то степень этого многочлена, называется степенью дифференциального уравнения.

$$(y'')^4 + (y')^2 - y^6 + x^7 = 0; - \text{уравнение 2-го порядка 4-ой степени.}$$

$$(y')^2 + x^4 y^5 - y^8 + x^{10} = 0 - \text{уравнение 1-го порядка 2-ой степени.}$$

Дифференциальное уравнение n -го порядка, разрешённое относительно старшей производной может быть записано в виде:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}) = 0, \quad (6.2)$$

Решением (или интегралом) уравнения (6.2) называется всякая дифференцируемая функция $y = \varphi(x)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. такая, после подстановки, которой в уравнение (6.2) оно обращается в тождество.

График решения обыкновенного дифференциального уравнения называется интегральной кривой этого уравнения.

Решение дифференциального уравнения, содержащее столько независимых произвольных постоянных (параметров), каков его порядок, называется общим решением (или общим интегралом) этого уравнения.

Геометрически общее решение дифференциального уравнения представляет собой семейство интегральных кривых этого уравнения.

Частным решением дифференциального уравнения называется всякое решение, которое может быть получено из общего при определённых числовых значениях произвольных постоянных, входящих в общее решение.

Произвольные постоянные, входящие в общее решение определяются из так называемых начальных условий.

Задача с начальными условиями ставится так: найти решения $y = \varphi(x)$, уравнения $y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)})$, удовлетворяющее дополнительным условиям, состоящим в том, что решение $y = \varphi(x)$ должно принимать вместе со своими производными до $(n-1)$ – го порядка заданные числовые значения $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$, при заданном числовом значении $x=x_0$ независимой переменной x :

$$y = y_0, y' = y'_0, y'' = y''_0, \dots, y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \text{ при } x=x_0, \quad (6.3)$$

Условия (6.3) называются начальными условиями; числа $x_0, y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – начальными данными решения, а задача отыскание решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения (6.2), удовлетворяющего начальным условиям (6.3) – задачей с начальными условиями, или задачей Коши.

В случае уравнения первого порядка, т. е. при $n=1$, получаем задачу Коши для уравнения $y' = f(x, y)$, с начальным условием $x = x_0, y = y_0$.

Геометрически задача Коши (для уравнений первого порядка) состоит в том, что из всего множества интегральных кривых, представляющих собой общее решение, нужно найти ту интегральную кривую, которая проходит через точку M_0 , с координатами $x = x_0, y = y_0$.

Пример 6.1: Для дифференциального уравнения $\frac{dy}{dx} = 2x$, с начальным условием $y_0 = 2$, при $x_0 = 1$, общее решение имеет вид $y = x^2 + c$. Оно представляет собой семейство парабол. Если в общее решение подставить начальные условия, то $2 = 1 + c \rightarrow c = 1$, и следовательно частное решение, удовлетворяющее начальному условию, есть $y = x^2 + 1$. Геометрически это означает, что из всего семейства парабол, надо выбрать одну, проходящую через точку $M_0(1,2)$. (см. рисунок – 6.1)

Методы точного интегрирования дифференциальных уравнений пригодны лишь для сравнительно небольшой части уравнений, встречающихся на практике.

Поэтому большое значение приобретают методы приближённого решения дифференциальных уравнений, которые в зависимости от формы представления решения можно разделить на две группы:

1) аналитические методы, дающие приближенное решение дифференциального уравнения в виде аналитического выражения; (Метод Пикара, метод интегрирования с помощью степенных рядов);

2) численные методы, дающие приближенное решение в виде таблицы (Метод Эйлера, его модификации, Методы Рунге-Кутты, Адамса и т. д.).

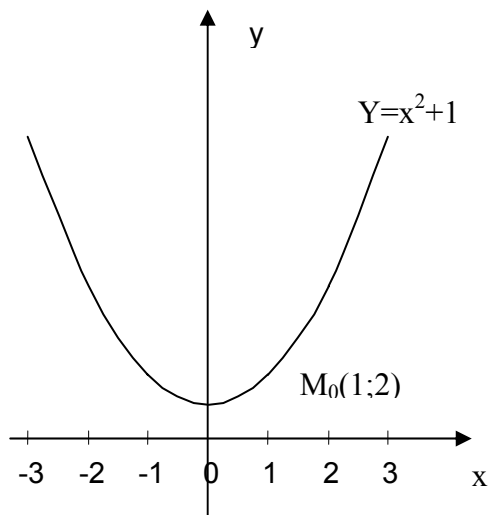


Рисунок 6.1 - График частного решения для ОДУ $y'=2x$ с начальным условием при $x_0=1, y_0=2$

6.2 Метод Эйлера

Пусть дано дифференциальное уравнение первого порядка

$$y'=f(x,y), \quad (6.4)$$

с начальными условиями

$$x=x_0, y(x_0)=y_0, \quad (6.5)$$

Требуется найти решение уравнения (6.4) на отрезке $[a,b]$.

Разобьем отрезок $[a,b]$ на n равных частей и получим последовательность $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, где $x_i=x_0+ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), а $h=(b-a)/n$ шаг

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y) dx = \int_{x_k}^{x_{k+1}} y' dx = y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k) = y_{k+1} - y_k$$

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x,y) dx, \quad (6.6)$$

Если в последнем интеграле подынтегральную функцию на участке $[x_k, x_{k+1}]$ принять постоянной и равной начальному значению в точке $x=x_k$, то получим

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = f(x_k, y_k) x \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = f(x_k, y_k) (x_{k+1} - x_k) = y'_k h$$

Тогда формула (6.6) примет вид

$$y_{k+1} = y_k + y'_k h, \quad (6.7)$$

Обозначим $y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, т.е. $y'_k h = \Delta y_k$, получим

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k, \quad (6.8)$$

Продолжая этот процесс, и каждый раз принимая подынтегральную формулу на соответствующем участке постоянной и равной ее значению в начале отрезка, получим таблицу решений дифференциального уравнения на заданном отрезке $[a, b]$. Равенство (6.7) означает, что на отрезке $[x_k, x_{k+1}]$ интегральная кривая $y=y(x)$ приближенно заменяется прямолинейным отрезком, выходящим из точки $M_k(x_k, y_k)$ с угловым коэффициентом $f(x_k, y_k)$. В качестве приближения искомой интегральной кривой получим ломаную линию с вершинами в точках $M_0(x_0, y_0), M_1(x_1, y_1), \dots, M_n(x_n, y_n)$.

Для геометрического построения ломаной Эйлера выберем полюс $P(-1, 0)$ и на оси ординат отложим отрезок $OA_0 = f(x_0, y_0)$ (рисунок 6.2).

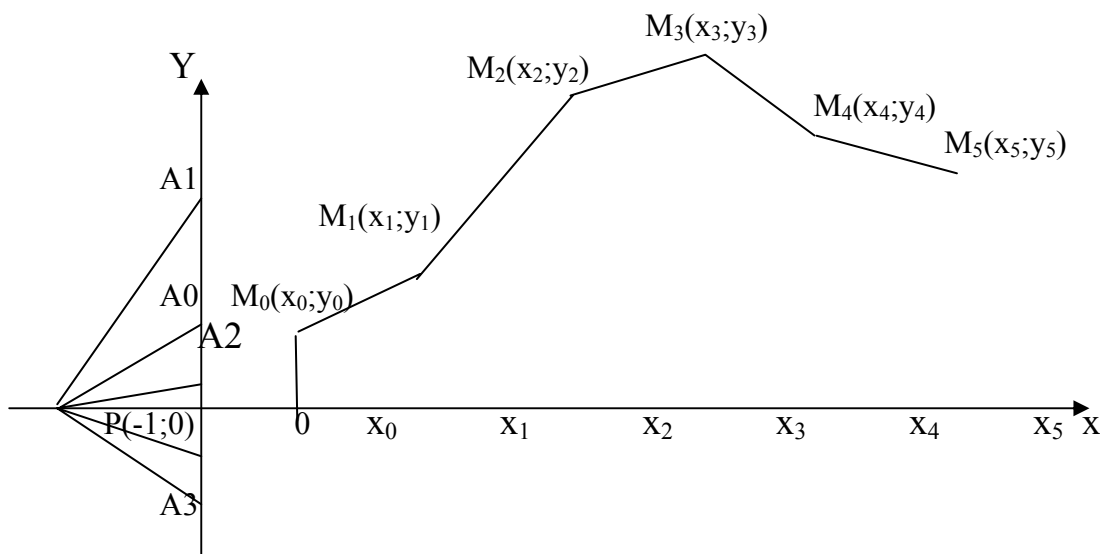


Рисунок 6.2 - Ломаная Эйлера

Очевидно, угловой коэффициент луча PA_0 будет равен $f(x_0, y_0)$; поэтому, чтобы получить первое звено ломаной Эйлера, достаточно из точки M_0 провести прямую M_0M_1 , параллельную лучу PA_0 , до пересечения с прямой $x=x_1$ в некоторой точке $M_1(x_1, y_1)$.

Приняв точку $M_1(x_1, y_1)$ за исходную, откладываем на оси ординат отрезок $OA_1=f(x_1, y_1)$ и через точку M_1 проводим прямую $M_1M_2 \parallel PA_1$ до пересечения с прямой $x=x_2$ и т.д.

Метод Эйлера является простейшим числовым методом интегрирования дифференциального уравнения.

Его недостатки:

- 1) малая точность;
- 2) систематическое накопление ошибок.

6.2.1 Пример ручного решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Эйлера

Проинтегрировать методом Эйлера дифференциальное уравнение $y'=y-x$ с начальным условием $x_0=0, y_0=1,5$ на отрезке $[0;1,5]$, приняв $h=0,25$. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Порядок выполнения ручного решения

Найдем n по формуле $n=(b-a)/h=(1.5-0)/0.25=6$. Значит, i меняется от 0 до 6. Для удобства решение представим в виде таблицы (см. таблицу 6.1).

Таблица 6.1 - Результаты решения ОДУ методом Эйлера вручную

i	x_i	y_i	$y'_i=y_i-x_i$	$\Delta y_i=h*y'_i$
0	0,00	1,5000	1,5000	0,3750
1	0,25	1,8750	1,6250	0,4063
2	0,50	2,2813	1,7813	0,4453
3	0,75	2,7266	1,9766	0,4941
4	1,00	3,2207	2,2207	0,5552
5	1,25	3,7759	2,5259	0,6315
6	1,50	4,4073		

- 1) В 1-ой строке, в 1-ом столбце запишем значение i равно 0;
- 2) Во 2-ом столбце запишем значение x_i равно 0;
- 3) В 3-ем столбце запишем значение y_i равно 1.5000;
- 4) В 4-ом столбце запишем вычисление значения y'_i по формуле $y'_i=y_i-x_i$, т. е. из 3-ого столбца этой строки вычтем содержимое 2-ого столбца этой строки;

5) В 5-ом столбце запишем вычисление значения $\Delta y_i = h * y'_i$, т. е. значение h равное 0.25 умножим на содержимое 4-ого столбца;

6) Во 2-ой строке в 1-ом столбце запишем значение на 1 больше, чем в предыдущей строке этого столбца, т. е. $i=i+1$;

7) Во 2-ой строке в 2-ом столбце запишем значение x на 0.25 больше, чем в предыдущей строке этого столбца, т. е. $x=x+0.25$;

8) Во 2-ой строке в 3-ем столбце запишем вычисление значения $y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$, т. е. к содержимому этого столбца из предыдущей строки прибавим содержимое из 5-ого столбца той же строки;

9) Затем повторить аналогичные действия, начиная с пункта 5 до тех пор, пока значения i не будет равно 6.

6.3 Усовершенствованный метод Эйлера

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y), \quad (6.9)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \quad (6.10)$$

Требуется найти решение уравнения (6.9) на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ ($i=0, 1, \dots, n$), где $h = (b-a)/n$ шаг интегрирования. Сущность усовершенствованного метода Эйлера состоит в следующем:

Сначала вычисляют вспомогательные значения искомой функции $y_{i+1/2}$ в точках $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ с помощью формулы

$$y_{i+1/2} = y_i + h/2 * y'_i, \quad (6.11)$$

Затем находят значение правой части уравнения (6.9) в средней точке $y'_{i+1/2} = f(x_{i+1/2}, y_{i+1/2})$ и определяют

$$y_{i+1} = y_i + h y'_{i+1/2}$$

6.3.1 Пример ручного решения обыкновенного дифференциального уравнения усовершенствованным методом Эйлера

Проинтегрировать усовершенствованным методом Эйлера дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0, y_0 = 1,5$ на отрезке

$[0;1,5]$, приняв $h=0,25$. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Порядок выполнения ручного решения

Найдем n по формуле $n=(b-a)/h=(1.5-0)/0.25=6$. Значит, i меняется от 0 до 6. Для удобства решение представим в виде таблицы.(см. таблицу –6.2)

Таблица 6.2 - Результаты решения ОДУ усовершенствованным методом Эйлера вручную

i	x_i	y_i	$y_i'=y_i-x_i$	$h/2*y_i'$	$x_{i+1/2}=x_i+h/2$	$y_{i+1/2}=y_i+h/2*y_i'$	$y'_{i+1/2}=y_{i+1/2}-x_{i+1/2}$	$\Delta y_i=h*y'_{i+1/2}$
0	0,00	1,5000	1,5000	0,1875	0,1250	1,6875	1,5625	0,3906
1	0,25	1,8906	1,6406	0,2051	0,3750	2,0957	1,7207	0,4302
2	0,50	2,3208	1,8208	0,2276	0,6250	2,5484	1,9234	0,4809
3	0,75	2,8017	2,0517	0,2565	0,8750	3,0581	2,1831	0,5458
4	1,00	3,3474	2,3474	0,2934	1,1250	3,6409	2,5159	0,6290
5	1,25	3,9764	2,7264	0,3408	1,3750	4,3172	2,9422	0,7355
6	1,50	4,7119						

1. В 1-ой строке, в 1-ом столбце запишем значение i равно 0;
2. Во 2-ом столбце запишем значение x_i равно 0;
3. В 3-ем столбце запишем значение y_i равно 1,5000;
4. В 4-ом столбце запишем вычисление значения $y_i'=y_i-x_i$, т. е. из содержимого 3-ого столбца текущей строки вычтем содержимое 2-ого столбца;
5. В 5-ом столбце запишем вычисление значения $h/2*y_i'$, т. е. 0,25 умножим на содержимое 4-ого столбца этой же строки;
6. В 6-ом столбце запишем вычисление значения $x_{i+1/2}=x_i+h/2$, т. е. к содержимому 2-го столбца этой строки прибавим половину шага;
7. В 7-ом столбце запишем вычисление значения $y_{i+1/2}=y_i+h/2*y_i'$, т. е. сложим содержимое 3-ого и 5-ого столбца;
8. В 8-ом столбце запишем вычисление значения $y'_{i+1/2}=y_{i+1/2}-x_{i+1/2}$, т. е. из содержимого 7-ого столбца текущей строки вычтем содержимое 6-ого столбца;
9. В 9-ом столбце запишем вычисление значения $\Delta y_i=h*y'_{i+1/2}$, т. е. умножим содержимое 8-ого столбца текущей строки на величину шага;
10. Во 2-ой строке в 1-ом столбце запишем значение на 1 больше, чем в предыдущей строке этого столбца, т. е. $i=i+1$;
11. Во 2-ой строке в 2-ом столбце запишем значение x на 0.25 больше, чем в предыдущей строке этого столбца, т. е. $x=x+0.25$;
12. Во 2-ой строке в 3-ем столбце запишем вычисление значения $y_i=y_0+\Delta y_0$, т. е. к содержимому этого столбца из предыдущей строки прибавим содержимое из 9-ого столбца той же строки;
13. Затем повторить аналогичные действия, начиная с пункта 4 до тех пор, пока значения i не будет равно 10.

6.4 Метод Рунге-Кутты

Метод Рунге-Кутты является одним из методов повышенной точности. Он имеет много общего с методом Эйлера.

Пусть на отрезке $[a, b]$ требуется найти численное решение уравнения.

$$y' = f(x, y), \quad (6.12)$$

с начальным условием

$$y(x_0) = y_0, \quad (6.13)$$

Разобьем отрезок $[a, b]$ на n равных частей точками $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, \dots, n$), где $h = (b - a)/n$ шаг интегрирования. В методе Рунге-Кутты, так же как и в методе Эйлера, последовательные значения y_i искомой функции y определяются по формуле:

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i, \quad (6.14)$$

Если разложить функцию y в ряд Тейлора и ограничиться членами до h^4 включительно, то приращение функции Δy можно представить в виде:

$$\Delta y = y(x+h) - y(x) = hy'(x) + h^2/2 * y''(x) + h^3/6 * y'''(x) + h^4/24 * y''''(x), \quad (6.15)$$

Где производные $y''(x)$, $y'''(x)$, $y''''(x)$ определяются последовательным дифференцированием из уравнения (6.12)

Вместо непосредственных вычислений по формуле (6.15) в методе Рунге-Кутты определяются четыре числа:

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(x, y) \\ k_2 &= hf(x+h/2, y+k_1/2), \\ k_3 &= hf(x+h/2, y+k_2/2) \\ k_4 &= hf(x+h, y+k_3) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Можно доказать, что если числам k_1, k_2, k_3, k_4 придать соответственно вес $1/6, 1/3, 1/3, 1/6$, то средневзвешенное этих чисел, т.е.

$$1/6 k_1 + 1/3 k_2 + 1/3 k_3 + 1/6 k_4, \quad (6.17)$$

с точностью до четвертых степеней равно значению Δy , вычисленному по формуле (6.15):

$$\Delta y = 1/6 k_1 + 1/3 k_2 + 1/3 k_3 + 1/6 k_4, \quad (6.18)$$

Т.о., для каждой пары текущих значений x_i и y_i по формулам (6.16) определяются значения:

$$\begin{aligned} k^{(i)}_1 &= hf(x_{(i)}, y_{(i)}) \\ k^{(i)}_2 &= hf(x_{(i)} + h/2, y_{(i)} + k_1/2), \\ k^{(i)}_3 &= hf(x_{(i)} + h/2, y_{(i)} + k_2/2) \\ k^{(i)}_4 &= hf(x_{(i)} + h, y_{(i)} + k_3) \end{aligned} \quad (6.19)$$

по формуле (6.18) находится

$$\Delta y_i = 1/6(k^{(i)}_1 + 2k^{(i)}_2 + 2k^{(i)}_3 + k^{(i)}_4)$$

И затем

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i$$

Числа k_1, k_2, k_3, k_4 имеют простой геометрический смысл. Пусть кривая M_0CM_1 (Рисунок – 6.3) представляет собой решение дифференциального уравнения (6.12) с начальным условием (6.13). Точка C этой кривой лежит на прямой \parallel оси OY и делящей отрезок $[x_i, x_{i+1}]$ пополам, B и G – точки пересечения касательной, проведенной к кривой в точке M_0 с ординатами AC и N_1M_1 .

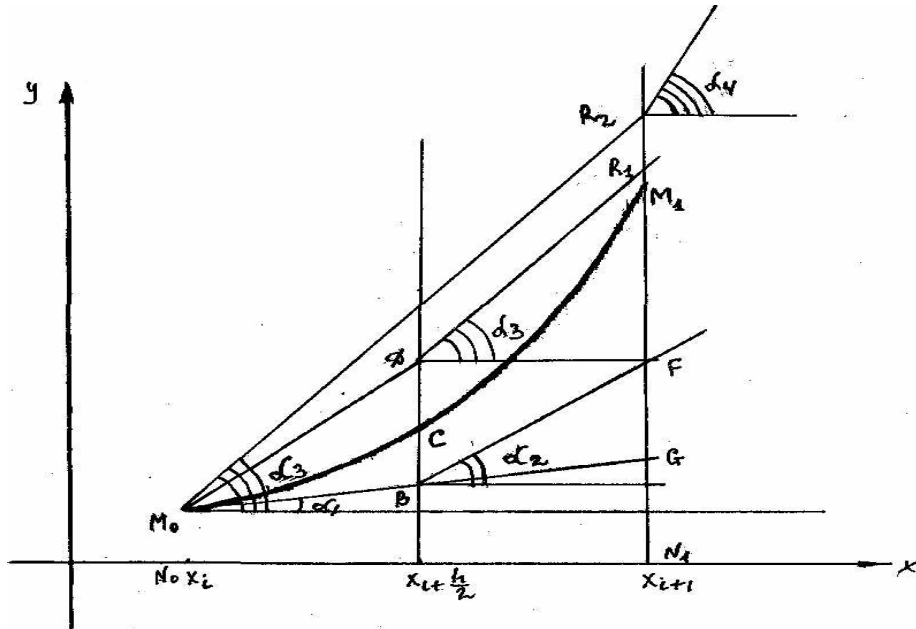


Рисунок 6.3 – Геометрическое обоснование метода Рунге-Кутта

Тогда число k_1 с точностью до множителя h есть угловой коэффициент касательной в точке M_0 к интегральной кривой M_0CM_1 , т.е. $k_1 = k^*_{y'(i)} = hf(x_i, y_i)$.

Точка В имеет координаты $x = x_i + h/2$, $y_i = y_i + k_1/2$, следовательно, число k_2 с точностью до множителя h есть угловой коэффициент касательной, проведенной к интегральной кривой в точке В (BF – отрезок касательной).

Через точку M_0 проведем прямую \parallel оси BF . Тогда точка D имеет координаты $x = x_i + h/2$, $y_i = y_i + k_1/2$ и k_3 с точностью до множителя h – угловой коэффициент касательной проведенной к интегральной кривой в т. D , (DR_1 – отрезок этой касательной). Наконец, через точку M_0 проведем прямую DR_1 , которая пересечет продолжение M_1N_1 в точке $k_2(x_i + h, y_i + k_3)$. Тогда k_4 с точностью до множителя h есть угловой коэффициент касательной, проведенной к интегральной кривой в т. R_2

6.4.1 Пример ручного решения обыкновенного дифференциального уравнения методом Рунге-Кутты

Проинтегрировать методом Рунге-Кутты дифференциальное уравнение $y' = y - x$ с начальным условием $x_0 = 0$, $y_0 = 1,5$ на отрезке $[0; 1,5]$, приняв $h = 0,25$. Вычисления вести с четырьмя знаками после запятой.

Порядок выполнения ручного решения

Найдем n по формуле $n = (b - a) / h = (1,5 - 0) / 0,25 = 6$. Значит, i меняется от 0 до 6. Для удобства решение представим в виде таблицы (см. таблицу – 6.3)

1. В 1-ой строке, в 1-ом столбце запишем значение i равно 0;
2. Во 2-ом столбце запишем значение x_i равно 0;
3. В 3-ем столбце запишем значение y_i равно 1,5;
4. В 4-ом столбце запишем вычисление значения $y_i' = y_i - x_i$, т. е. из содержимого 3-его столбца текущей строки вычтем содержимое 2-ого столбца текущей строки;
5. В 5-ом столбце запишем вычисление значения $k_1 = h \cdot (y_i - x_i)$, т. е. содержимое 4-ого столбца текущей строки умножим на величину шага равную 0,25;
6. В 6-ом столбце запишем вычисление значения $x_{i+1/2} = x_i + h/2$, т. е. к содержимому 2-ого столбца этой строки прибавим половину шага 0,125;
7. В 7-ом столбце запишем вычисление значения $y_{i+1/2} = y_i + k_1/2$, т. е. к содержимому 3-его столбца прибавим половину 5-ого столбца ($k_1/2$);
8. В 8-ом столбце запишем вычисление значения $k_2 = h \cdot (y_{i+1/2} - x_{i+1/2})$, т. е. из содержимого 7-ого столбца текущей строки вычтем содержимое 6-ого столбца и умножим на шаг 0,25;
9. В 9-ом столбце запишем вычисление значения $y_{i+1/2} = y_i + k_2/2$, т. е. к содержимому 3-его столбца прибавим половину 8-ого столбца ($k_2/2$);
10. В 10-ом столбце запишем вычисление значения $k_3 = h \cdot (y_{i+1/2} - x_{i+1/2})$, т. е. из содержимого 9-ого столбца текущей строки вычтем содержимое 6-ого столбца и умножим на шаг 0,25;

Таблица 6.3 – Результаты решения ОДУ методом Рунге-Кутты вручную

i	x_i	y_i	$y'_i=y_i-x_i$	$k_1=h^*(y_i-x_i)$	$x_{i+1/2}=x_i+h/2$	$y_{i+1/2}=y_i+k_1/2$	$k_2=h^*(y_{i+1/2}-x_{i+1/2})$
1	2	3	4	5	6	7	8
0	0,00	1,5000	1,5000	0,3750	0,1250	1,6875	0,3906
1	0,25	1,8920	1,6420	0,2053	0,3750	1,9946	0,4049
2	0,50	2,2804	1,7804	0,2225	0,6250	2,3917	0,4417
3	0,75	2,7044	1,9544	0,2443	0,8750	2,8265	0,4879
4	1,00	3,1731	2,1731	0,2716	1,1250	3,3089	0,5460
5	1,25	3,6981	2,4481	0,3060	1,3750	3,8511	0,6190
6	1,50	4,2938					

Продолжение таблицы – 6.3

$y_{i+1/2}=y_i+k_2/2$	$k_3=h^*(y_{i+1/2}-x_{i+1/2})$	$x_{i+1}=x_i+h$	$y_{i+1}=y_i+k_3$	$k_4=h^*(y_{i+1}-x_{i+1})$	$\Delta y_i=(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)/6$
9	10	11	12	13	14
1,6953	0,3926	0,2500	1,8926	0,4106	0,3920
2,0945	0,4299	0,5000	2,3219	0,4555	0,3884
2,5012	0,4691	0,7500	2,7494	0,4999	0,4240
2,9483	0,5183	1,0000	3,2227	0,5557	0,4687
3,4461	0,5803	1,2500	3,7534	0,6258	0,5250
4,0076	0,6581	1,5000	4,3562	0,7141	0,5957

11. В 11-ом столбце запишем вычисление значения $x_{i+1}=x_i+h$, т. е. к содержимому 2-ого столбца этой строки прибавим величину шага 0,25;

12. В 12-ом столбце запишем вычисление значения $y_{i+1}=y_i+k_3$, т. е. к содержимому 3-его столбца прибавим содержимое 10-ого столбца (k_3)

13. В 13-ом столбце запишем вычисление значения $k_4=h^*(y_{i+1}-x_{i+1})$, т. е. из содержимого 12-ого столбца текущей строки вычтем содержимое 11-ого столбца и умножим на шаг 0,25;

14. В 14-ом столбце запишем вычисление значения $\Delta y_i=(k_1+2*k_2+2*k_3+k_4)/6$, т. е. к содержимому 5-ого столбца текущей строки прибавим содержимое 8-ого столбца умноженное на 2, прибавим содержимое 10-ого столбца умноженное на 2, прибавим содержимое 13-ого столбца и полученную сумму разделим на 6;

15. Во 2-ой строке в 1-ом столбце запишем значение на 1 больше, чем в предыдущей строке этого столбца, т. е. $i=i+1$;

16. Во 2-ой строке в 2-ом столбце запишем значение x на 0,25 больше, чем в предыдущей строке этого столбца, т. е. $x = x + 0,25$;

17. Во 2-ой строке в 3-ем столбце запишем вычисление значения $y_1 = y_0 + \Delta y_0$, т. е. к содержимому этого столбца из предыдущей строки прибавим содержимое из 14-ого столбца той же строки;

18. Затем повторить аналогичные действия, начиная с пункта 5 до тех пор, пока значения i не будет равно 6.

6.5 Вопросы к самопроверке

- 1) Какое уравнение называется дифференциальным?
- 2) Какое дифференциальное уравнение называется обыкновенным?
- 3) Какое дифференциальное уравнение называется дифференциальным уравнением в частных производных?
- 4) Что называется порядком дифференциального уравнения?
- 5) Что является решением обыкновенного дифференциального уравнения?
- 6) Что является частным решением обыкновенного дифференциального уравнения?
- 7) Сформулируйте задачу Коши.
- 8) Общая формула нахождения приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения.
- 9) Формула Эйлера для нахождения приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения.
- 10) Геометрическая интерпретация формулы Эйлера.
- 11) Усовершенствованная формула Эйлера для нахождения приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения.
- 12) Формула Рунге-Кутты для нахождения приближенного решения обыкновенного дифференциального уравнения.
- 13) Геометрическая интерпретация метода Рунге-Кутты.

7 Методы минимизации и оптимизации функции одной и двух переменных

7.1. Основные понятия. Методы минимизации функций одной переменной

В прикладной математике задачи оптимизации - поиск максимума или минимума функции - составляют один из важнейших разделов, в котором очень широко используются численные методы.

На рисунке 7.1 проиллюстрирован график функции, у которого на отрезке $[a; b]$ имеется несколько максимумов (три) и минимумов (два). Самый «вы-

сокий» из максимумов (достигаемый при $x = a$) оказался на краю отрезка, самый «низкий» из минимумов (при $x=c$) достигается во внутренней точке отрезка. Эти максимум и минимум являются на данном отрезке глобальными, а остальные - локальными.

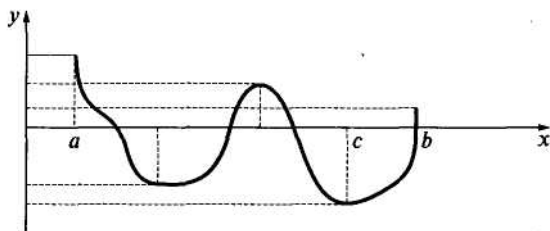


Рисунок 7.1 - Иллюстрация к экстремумам функции одной переменной

Если функция $y = f(x)$ является на отрезке $[a; b]$ дифференцируемой, то для поиска ее максимумов и минимумов существуют простые приемы. Напомним их: для того чтобы точка x_0 была точкой внутреннего (по отношению к отрезку) экстремума, необходимо, чтобы она была корнем уравнения $f'(x) = 0$. Если у функции существует вторая производная, то при $f''(x_0) > 0$ x_0 будет точкой минимума, а при $f''(x_0) < 0$ - максимума.

При поиске глобального максимума (минимума) функции на отрезке необходимо отыскать ее локальные экстремумы, сравнить их между собой и со значениями функции на концах отрезка и выбрать из указанной совокупности значений наибольшее (наименьшее).

7.1.1 Поиск минимума функции одной переменной

Рассмотрим задачу поиска минимума функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a; b]$, способами, не связанными с решением уравнения $f'(x) = 0$. При этом достаточно ограничиться поисками минимумов лишь во внутренних точках отрезка, поскольку вычисление значений функции на его концах - задача тривиальная.

Будем считать, что функция $f(x)$ является на отрезке $[a; b]$ унимодальной, т. е. монотонно убывающей слева от точки минимума и монотонно возрастающей справа от нее.

Приведем также более строгое описание унимодальности. Непрерывная функция $y=f(x)$ является унимодальной на отрезке $[a; b]$, если:

- 1) точка ξ , локального минимума функции принадлежит отрезку $[a; b]$;
- 2) для любых двух точек отрезка x_1 и x_2 , взятых по одну сторону от точки минимума, точке x_1 , более близкой к точке минимума, всегда соответствует меньшее значение функции, т.е. неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ справедливо как при $\xi < x_1 < x_2$ (рисунок 7.2, а), так и при $x_2 < x_1 < \xi$, (рисунок 7.2, б).

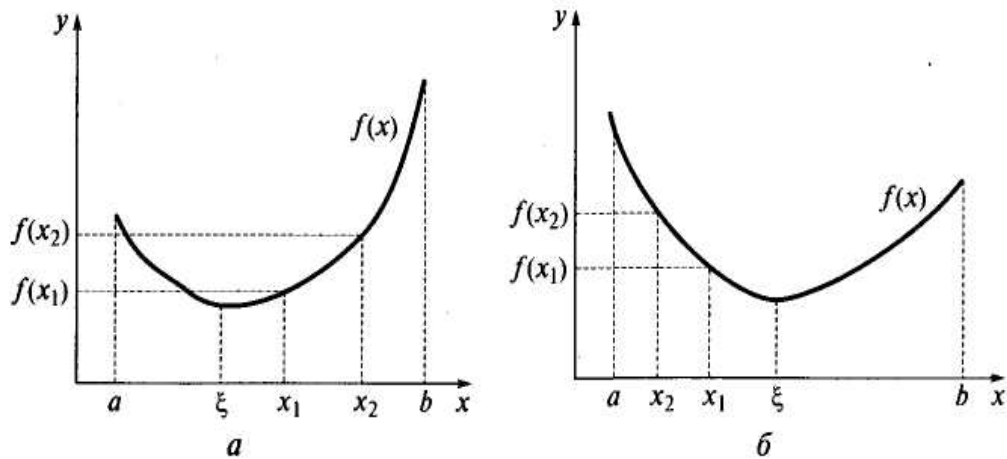


Рисунок 7.2 - К определению унимодальности функции $y=f(x)$

Очевидно, что если бы шла речь о максимуме функции, то унимодальность определялась бы обратными утверждениями.

7.1.2 Метод дихотомии

Метод дихотомии (половинного деления), рассмотренный при решении нелинейных алгебраических уравнений, как прием уточнения корня уравнения, легко переносится на задачу уточнения положения точки минимума унимодальной функции.

На рисунке 7.3 проиллюстрирован первый шаг указанного метода. Искомый минимум находится в точке ξ . Разделим отрезок $[a; b]$ пополам точкой $c=(a + b)/2$. Если (как это имеет место на рисунок 7.3) точка минимума оказалась левее точки c , то следующий отрезок, подлежащий делению пополам, есть $[a; c]$, иначе - $[c; b]$.

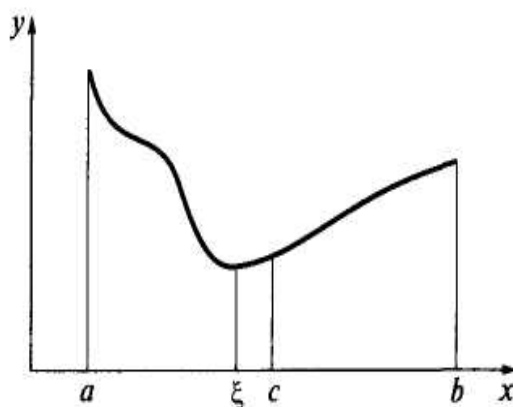


Рисунок 7.3 - К поиску минимума методом половинного деления

Поскольку реально в ходе вычислений мы не располагаем значением ξ , то возникает вопрос, как определять на каждом шаге, левый или правый отрезок подлежит делению. При решении уравнений методом половинного деления этот выбор был очевиден - по сопоставлению знаков $f(a)$, $f(c)$ и $f(b)$. В данном случае ни знаки, ни сравнения значений функции, ни о чем не говорят и приходится использовать слегка усложненный прием.

Пусть точность, с которой мы хотим оценить значение c , есть e . Будем вычислять не одно значение $f(c)$, а два: $f(c - e/2)$ и $f(c + e/2)$. Учитывая предполагаемую унимодальность функции $f(x)$, ясно, что при $f(c - e/2) < f(c + e/2)$ следующему делению пополам подлежит отрезок $[a; c]$ (или, что практически то же самое, $[a; c - e/2]$). Если же $f(c - e/2) > f(c + e/2)$, то делению подлежит отрезок $[c; b]$. Итерационный вычислительный процесс продлится до тех пор, пока длина очередного отрезка не станет меньше e . Наконец, нельзя исключить ситуацию, когда на очередном шаге $f(c - e/2) = f(c + e/2)$, т.е. искомая точка, в которой функция $f(x)$ имеет минимум, оказалась между $c - e/2$ и $c + e/2$; в этом случае результат решения задачи (с заданной точностью) есть c .

7.1.3. Метод золотого сечения

Деление отрезка именно пополам (для отыскания минимума функции) представляется естественным, но явно не единственным путем решения задачи. Интуитивно ясно, что если последовательно делить отрезок на две части другим способом, то можно достичь того же результата. В связи с этим вопросом возникает метод так называемого золотого сечения.

Золотое сечение это такое пропорциональное деление отрезка на части, при котором весь отрезок относится к большей части, как сама большая часть относится к меньшей; другими словами, меньший отрезок относится к большему, как больший ко всему (рисунок 7.4) $\beta : \gamma = \gamma : \alpha$.

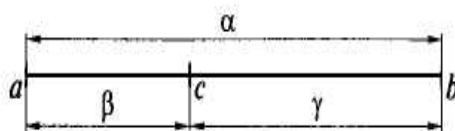


Рисунок 7.4 - «Золотая» пропорция

Из приведенного ранее соотношения получаем уравнение для определения γ (считая a заданным): $\gamma^2 = \alpha\beta$, или $\gamma^2 = \alpha(\alpha - \gamma)$. Решение последнего уравнения:

$$\gamma = \frac{\alpha}{2}(\sqrt{5} - 1) = 0.61803\alpha.$$

Обратим внимание, что заданный отрезок $[a; b]$ можно разделить на две части в соответствии с золотым сечением двумя способами: располагая меньший отрезок слева (см. рис. 7.4) или справа, т.е. на отрезке есть две точки золотого сечения.

Вернемся к решению задачи о минимизации унимодальной на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$. Найдем обе точки золотого сечения: левую (см. рисунок 7.4) -

$$c = a + \beta = a + (b - a) - \gamma = a + (b - a) - \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) = a + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - a) = , (7.1)$$

$$= a + 0.38197(b - a)$$

и симметричную ей правую -

$$d = b - \beta = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a) = a + 0.61803(b - a), (7.2)$$

Сравним значения $f(x)$ в этих точках. Если окажется, что $f(c) > f(d)$, то новый отрезок для поиска минимума есть $[c; b]$, если же $f(c) < f(d)$, то новый отрезок - $[a; d]$ (см. рисунок 7.6).

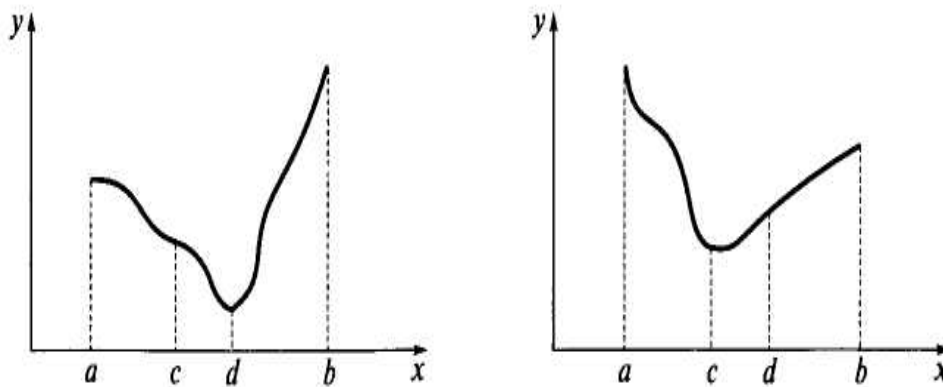


Рисунок. 7.5 - К выбору отрезка для поиска минимума функции на втором шаге

Допустим для определенности, что ситуация такова, как на рисунке 7.5 слева, т.е. на втором шаге минимум ищется на отрезке $[c; b]$. Продолжим использовать тот же прием: выполним золотое сечение этого отрезка.

Следующее утверждение является причиной эффективности этого метода в решении задачи минимизации: одна из двух точек нового сечения - уже из-

вестная нам точка d . Действительно, найдем левую точку золотого сечения отрезка $[c; b]$, для чего надо в формуле (7.1) заменить a на c :

$$x_1 = c + \frac{3 - \sqrt{5}}{2}(b - c) = K = a + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(b - a)$$

Таким образом, полученное значение действительно есть d , определяемое формулой (7.2). Благодаря указанному обстоятельству метод золотого сечения при минимизации унимодальной функции более экономичен, чем метод дихотомии: в последнем на каждом шаге вычисляется значение функции $f(x)$ в двух точках, а в методе золотого сечения - лишь в одной (кроме первого шага, на котором ищутся значения функции в двух точках золотого сечения).

7.2 Минимизация функции многих переменных

Для функций n переменных ($n > 2$) задача минимизации чаще всего решается методами, качественно отличающимися от описанных ранее методов деления области определения функции на части. Чтобы понять причину данного обстоятельства, а также описывать сами методы, желательно иметь возможность иллюстрировать описываемые процедуры. Понятно, что реальная наглядность возможна лишь при $n = 2$, однако она уже поможет понять ситуацию.

Ограничимся рассмотрением задачи о минимизации функций, унимодальных в некоторой области n -мерного пространства. При этом будем исходить из того, что перенос понятия унимодальности от случая функции одной переменной на случай нескольких переменных интуитивно вполне ясен.

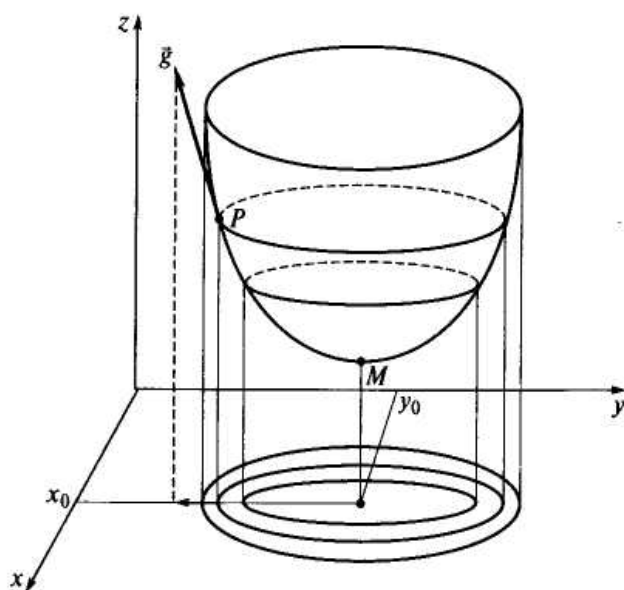


Рисунок 7.6 - К вопросу о минимуме функции двух переменных

На рисунке 7.6 изображен график функции двух переменных $f(x, y)$, унимодальной в некоторой области координатной плоскости (напомним, что графиком функции двух переменных является поверхность в трехмерном пространстве). Минимум функции достигается в точке (x_0, y_0) на плоскости xu , которая является проекцией точки М, «наинизшей» на графике. На том же рисунке изображен ряд сечений поверхности плоскостями, параллельными плоскости xu , и проекции этих сечения на указанную плоскость. Эти проекции, которые можно изображать в отрыве от трехмерного рисунка, являются удобным способом создания наглядного представления о поверхности с помощью двумерного рисунка. Совокупность таких плоских сечений составляет так называемое семейство линий уровня поверхности.

Важно, что эти линии можно получать не только проецированием сечений поверхности, как это изображено на рисунке 7.6, а и вовсе не располагая трехмерным геометрическим образом. Для этого составляется уравнение $f(x, y) = C$ и строятся в плоскости xu линии, соответствующие различным значениям C . Если линии расположены в соответствии с изменением C следующим образом (рисунке 7.7): $C_1 > C_2 > C_3 > C_4 > \dots$ и если функция $f(x, y)$ непрерывна, то очевидно, что ее локальный минимум достигается в некоторой точке, находящейся внутри области, ограниченной внутренней кривой.

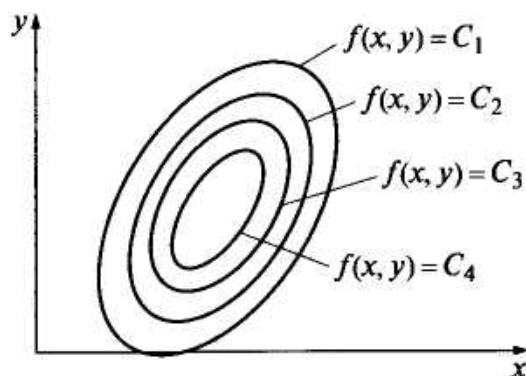


Рисунок 7.7 - Иллюстрация к установлению области нахождения минимума с помощью линии уровня

С помощью рисунка 7.7 легко понять, почему уже в случае двух переменных методы деления области на части не годятся для минимизации функции, как в случае функции одной переменной. Одно дело - делить на части отрезок на прямой, и совсем другое - область многомерного пространства. Представить себе эту процедуру нетрудно, но число областей, получающихся в результате такого деления, столь велико, что следует искать более эффективные способы минимизации.

Существует группа методов минимизации, основанных на иной идее, нежели последовательное деление области, содержащей минимум, на части. Это

так называемая группа методов спуска; с двумя из них мы познакомимся в следующих пунктах. Это итерационные методы

Общая идея методов спуска такова. Взяв за начало некоторую произвольную точку области, в которой функция $f(x, y)$ унимодальна (см. рисунок 7.6) и вычислив в ней значение этой функции, будем смещаться по некоторому алгоритму в другую точку, в которой значение функции меньше, чем в начальной, и т.д. На рисунке 7.6 это будет движением вниз (по оси z), т. е. «спуском», откуда и пошло название группы методов. В зависимости от способа смещения от точки к точке существует несколько разновидностей этих методов.

7.2.1. Метод покоординатного спуска

Пусть требуется найти минимум функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в n -мерном параллелепипеде $a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n$. Выберем начальную точку $M_0(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ и рассмотрим $f(x_1, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ как функцию только первой переменной x_1 . Применив к ней какой-либо из методов минимизации функций одной переменной, найдем то значение $x_1^{(1)}$, при котором реализуется минимум. Затем фиксируем найденное значение $x_1^{(1)}$ и, минимизировав $f(x_1^{(1)}, x_2, \dots, x_n^{(0)})$ по переменной x_2 , найдем соответствующее значение $x_2^{(1)}$. Далее фиксируем $x_1^{(1)}$ и $x_2^{(1)}$ и продолжаем указанный процесс пока не дойдем до переменной x_n , после чего вновь займемся минимизацией по x_1 . Действуя подобным образом, циклически меняя ролями переменные, получим последовательность точек, которая при благоприятных обстоятельствах сходится к точке минимума функции $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Если задана точность решения задачи ϵ , то итерационную процедуру минимизации можно прекратить, когда расстояние между двумя последовательными приближениями станет меньше ϵ (рисунок 7.8).

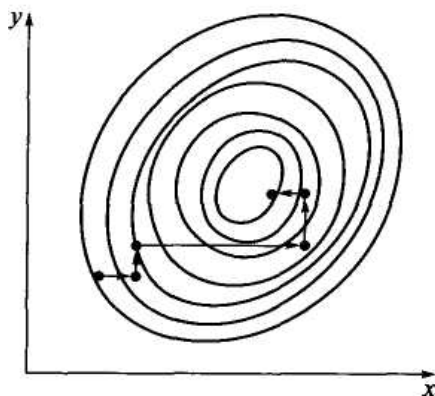


Рисунок 7.8 - Иллюстрация к минимизации функции методом по координатного спуска

7.2.2. Метод наискорейшего спуска

Большая часть методов спуска в той или иной форме связана с понятием градиента функции. Напомним, что градиент - это вектор, направленный в сторону наискорейшего возрастания функции в данной точке. На рисунке 7.6 изображен градиент функции в точке P - вектор \vec{g} . Его проекция на плоскость xu перпендикулярна соответствующей линии уровня (т.е. ее касательной). Компоненты этого вектора - частные производные функции $f(x, y)$, вычисленные в соответствующей точке:

$$g = \text{grad}f(x, y) = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\}.$$

Вектор, противоположный градиенту, называется антиградиент; он указывает направление в сторону наискорейшего убывания функции.

Методы соответствующей группы основаны на следующей идее: от начальной точки шаг за шагом следует продвигаться в сторону антиградиентов в последовательных точках. Базовый метод градиентного спуска основан на серии небольших шагов от каждой последующей точки в направлении антиградиента в этой точке; при малом размере шага траектория продвижения к минимуму, скорее всего, более короткая, нежели в методе покоординатного спуска (рисунке 7.9).

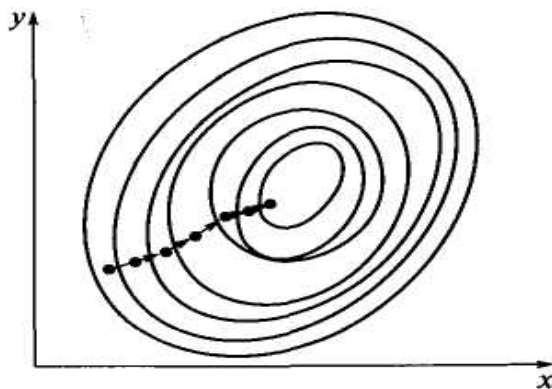


Рисунок 7.9 - Иллюстрация к минимизации функции методом градиентного спуска (проекция траектории спуска на плоскость xu в каждой точке перпендикулярна линиям уровня)

Однако длина траектории не является единственной определяющей для эффективности метода. Поскольку на каждом шаге требуется вычислять значения частных производных, что при малом значении шага может быть в совокупности весьма трудоемким делом, то часто прибегают к модификации этого метода, называемой методом наискорейшего спуска. В этом методе, выбрав на-

чальную точку, делают из нее в направлении антиградиента не фиксированный маленький шаг, а движутся до тех пор, пока функция убывает. Достигнув точки минимума, принимают ее за отправную и повторяют процесс. Хотя при этом траектория может быть длиннее, чем в базовом методе градиентного спуска, число промежуточных точек будет, как правило, меньше, что приводит в целом к большей эффективности этого метода. Иллюстрирует сказанное рисунок 7.10.

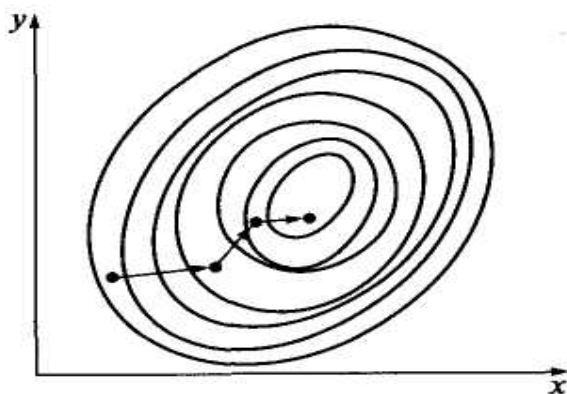


Рисунок 7.10 - Иллюстрация к минимизации функции методом наискорейшего спуска (проекция траектории спуска на плоскость xu перпендикулярна линии уровня лишь в начале каждого шага)

Опишем метод наискорейшего спуска более детально. Пусть требуется найти минимум функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ в n -мерном параллелепипеде $a_1 < x_1 < b_1, a_2 < x_2 < b_2, \dots, a_n < x_n < b_n$. Движению вдоль вектора антиградиента с шагом h из точки с координатами $(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ соответствуют формулы ($h > 0$):

$$\begin{aligned}
 x_1 &= \left(x_1 - h \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^{(0)}, \dots, x_n=x_n^{(0)}} \\
 x_1 &= \left(x_1 - h \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^{(0)}, \dots, x_n=x_n^{(0)}} , & (7.3) \\
 \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \Lambda \\
 x_1 &= \left(x_1 - h \frac{\partial f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} \right)_{x_1=x_1^{(0)}, \dots, x_n=x_n^{(0)}}
 \end{aligned}$$

На каждом шаге нужно решить задачу одномерной минимизации по h функции

$$\varphi(h) = f \left[\left(x_1 - h \frac{\partial f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)}{\partial x_1} \right), \right. \\ \left. \left(x_2 - h \frac{\partial f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)}{\partial x_2} \right), \mathbf{K}, \right. \\ \left. \left(x_n - h \frac{\partial f(x_1, x_2, \mathbf{K}, x_n)}{\partial x_n} \right) \right], \quad (7.4)$$

7.3 Вопросы к самопроверке

- 1) Каково соотношение между глобальными и локальными экстремумами функции, заданной на отрезке?
- 2) Чем отличаются прямые и косвенные методы минимизации функции?
- 3) Как описывается свойство унимодальности функции?
- 4) Почему при минимизации функции методом половинного деления на каждом шаге приходится вычислять ее значения в двух точках?
- 5) Почему метод золотого сечения при решении одной и той же задачи минимизации требует, как правило, меньшего объема вычислений, чем метод половинного деления?
- 6) В чем состоит общий замысел, лежащий в основе всех методов спуска?
- 7) Чем принципиально отличается метод покоординатного спуска от методов градиентного спуска?
- 8) Какая общая идея лежит в основе метода наискорейшего спуска и в чем причина его потенциальной эффективности?

Список использованных источников

1 Лапчик, М. П.. Элементы численных методов : учебник для спо / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчик. -М.: Академия, 2007. - 224 с

2 Исаков, В.Н. Элементы численных методов : учебное пособие для пед. вузов/ В.Н. Исаков. – М.: Академия, 2003. – 192 с.

3 Бахвалов, Н.С. Численные методы : учебное пособие для вузов/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 3 – изд., перераб. доп. – М.: Бинوم: Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.

4 Костомаров, Д.П., Вводные лекции по численным методам : учебное пособие для вузов/ Д.П.Костомаров, А.П.Фаворский. – М.: Логос, 2004. – 184 с.