МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса

Кафедра вычислительной техники и математики

П.Н.ШАЛЫМИНОВ

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ПРИБЛИЖЕННЫМИ МЕТОДАМИ»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 519.6(075.32)
ББК 22.193 Я73
Ш 18

Рецензент
заместитель директора по научно-методической работе
Кузюшин С. А.

**Шалыминов, П. Н.**

Ш18 **Численные методы : методические указания к практическим и лабораторным работам по теме «Решение нелинейных алгебраических уравнений приближенными методами»/ П.Н. Шалыминов – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 42 с.**

Методические указания предназначены для изучения темы «Приближенные методы решения нелинейных (трансцендентных) алгебраических уравнения» по дисциплине «Численные методы» студентами очной и заочной формы обучения специальности 230105.01 Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем.

Методические указания составлены с учетом требований государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования «Государственные требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальности 230105.51 Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем (введены в действие с 21.01.03 г, примерная программа учебной дисциплины «Численные методы»).

ББК 22.193 Я73

# Содержание

# Введение

В данном методическом указании излагается краткий теоретический материал, алгоритмы и последовательность решения нелинейных алгебраических уравнений приближенными методами (половинного деления, хорд, Ньютона(касательных), итераций) с помощью персонального компьютера.

Методическое указание  может быть использовано студентами очной и заочной формы обучения при изучении данной темы, которая  есть в других дисциплинах, а также преподавателями этих дисциплин.

# 1 Решение нелинейных алгебраических уравнений приближенными методами (половинного деления, хорд, касательных (Ньютона), итераций)

**Цель работы.** Изучить приближенные методы решения нелинейных алгебраических уравнений, научиться строить графики, отделять корни, разрабатывать блок схемы алгоритмов и программы приближенных методов.

## 1.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) Построить графики уравнений и отделить корни по индивидуальному заданию для каждого метода, используя электронные таблицы Excel;
3) Составить словесный алгоритм для каждого метода;
4) Разработать блок – схему алгоритма решения уравнения для каждого метода;
5) Составить программу на программирования Turbo Pascal;
6) Выполнить программу на ПК;
7) Распечатать результаты выполнения программы;
8) Составить отчет по работе;
9) Защитить работу.

## 1.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:
1) Тема работы;
2) Цель работы;
3) Ход работы;
4) Постановка задачи;
5) Графики функций уравнения;
6) Словесный алгоритм метода решения;
7) Блок схема алгоритма метода решения;
8) Распечатка программы метода решения;
9) Результаты работы программы.

### 1.3 Вопросы для допуска к выполнению работы

1) Что такое уравнение?
2) Что такое алгебраическое уравнение?
3) Что такое линейное алгебраическое уравнение?
4) Что такое нелинейное алгебраическое уравнение?
5) Что такое корень уравнение?
6) Что такое изолированный корень?
7) Этапы приближенного нахождения изолированных действительных корней.
8) Условия существования корня на отрезке [a,b].
9) Условия существования единственного корня на отрезке [a,b].

## 2 Методические указания к решению нелинейных алгебраических уравнений приближенными методами

### 2.1 Метод половинного деления

Пусть дано уравнение:

$$f(x)=0, \tag{1}$$

Функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и выполняется условие $f(a)*f(b)<0$ (см. рисунок 1).

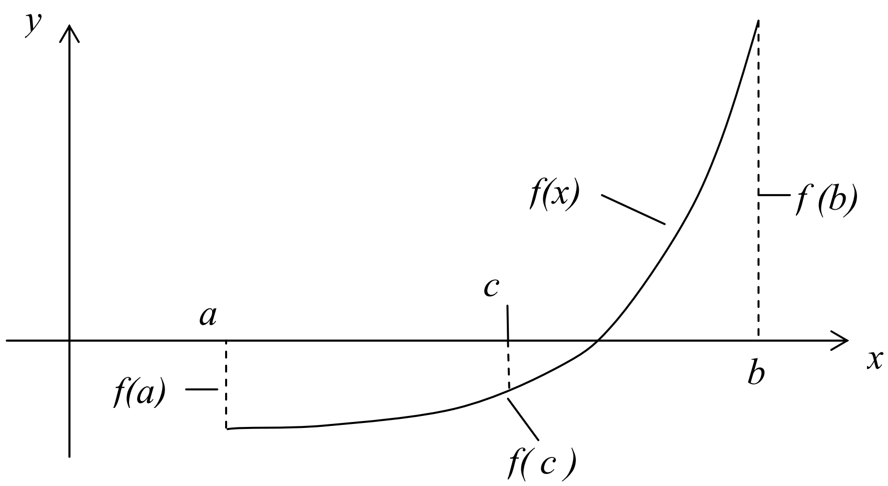



Рисунок 1 – График функции $f(x)$

Для нахождения корня уравнения *f(x)=0*, делим отрезок *[a,b]* пополам, т. е. *c=(a+b)/2*.

Если *f( c )=0,* то *x=c* – корень уравнения.

Если $f(c)\neq 0$, то выбираем ту из половин *[a,c]*, *[c,b]*, на концах которой функция *f(x)* имеет противоположные знаки. В нашем случае это отрезок *[c,b]*. Новый, суженный отрезок $[a_1,b_1]$ снова делим пополам и проводим тоже рассмотрение, что и выше.

2.1.1 Постановка задачи

Найти корни уравнения $(1\text{-}x)^{0.5}\text{-}tan(x)=0$ с точностью до $\varepsilon=0{,}001$ с помощью метода половинного деления**.**

2.1.2 Построение графиков и отделение корней с помощью электронной таблицы Excel

Строим таблицу с помощью электронной таблицы *Excel*.

Для этого приведем наше уравнение к виду $(1\text{-}x)^{0.5}= tan(x)$ и строим два графика $y=(1\text{-}x)^{0.5}$ и *y1= tan(x).*

1) Запускаем электронную таблицу *Excel* двойным щелчком левой кнопки мыши по значку ярлыка *Excel* на рабочем столе;

2) В ячейку *B2* введем уравнение *f(x)=(1-x)^0,5-tan(x)=0*;

3) Разобьем данное уравнение на два простых *y=(1-x)^0,5* и *y1=tan(x)* и введем их соответственно в *B3* и *B4*;

4) В ячейку *B5* введем первую производную *f'(x)=((1-x)^0,5-tan(x))'=-0,5/(1-x)^0,5-1/cos(x)^2***;**

5) В ячейку *B6* введем вторую производную *f''(x)=(-0,5/(1-x)^0,5-1/cos(x)^2)' = -0,25/(1-x)^(3/2)-2*sin(x)/cos(x)^3***;**

6) Строим таблицу значений для получившихся уравнений;

7) В ячейку *B8* введем *x*, в *C8 –1*;

8) Установим курсор в ячейку ***C8*** и выполним команду *Правка, Заполнить, Прогрессия*. В появившемся диалоговом окне в поле *Шаг* введем *0,2*, в поле *Предельное значение 1* и нажимаем *ОК*;

9) Установим курсор в ячейку *B8* и выделяем блок ячеек *B8:M8* и выполним команду *Вставка, Имя, Присвоить*;

10) В появившемся диалоговом окне щелкнуть по кнопке *Добавить*, а затем *ОК*;

11) В ячейке *A9* введем *y=(1-x)^0,5*, в *B9* символ *y*, в *C9* формулу *=(1-x)^0,5*;

12) Выделим ячейку *C9* и щелкнем по кнопке *Копировать* на панели инструментов. Выделим блок ячеек *D9:M9* и щелкнем по кнопке *Вставить* на панели инструментов;

13) В ячейке *A10* введем *y1=tan(x)*, в *B10* символы *y1*, в *C10* формулу *=tan(x)*;

14) Выделим ячейку *C10* и щелкнем по кнопке *Копировать* на панели инструментов. Выделим блок ячеек *D10:M10* и щелкнем по кнопке *Вставить* на панели инструментов;

15) В ячейке *A11* введем *f(x)*, в *C11* формулу нашего уравнения *=(1-x)^0,5-tan(x)*;

16) Выделим ячейку *C11* и щелкнем по кнопке *Копировать* на панели инструментов. Выделим блок ячеек *D11:M11* и щелкнем по кнопке *Вставить* на панели инструментов. В полученном результате заметим, что в ячейке *I11* и *L11* функция имеет разные знаки, т. е выполняется условие существования корня на выбранном отрезке. Значит, в качестве интервала, в котором существует корень рассматриваемого уравнения можно взять интервал *(0.20;0.80)*;

17) В ячейке *A12* введем *f'(x)*, в *I12* формулу 1-ой производной *=-0,5/(1-x)^0,5-1/cos(x)^2*. Скопируем ее в ячейку *L12*. В результате получим, что на концах выбранного интервала 1-ая производная имеет одинаковые знаки, т. е. выполняется одно из условий существования единственного корня на выбранном отрезке;

18) В ячейке *A13* введем *f''(x)*, в *I13* формулу 2-ой производной *=-0,25/(1-x)^(3/2)-2*sin(x) /cos(x)^3*. Скопируем ее в ячейку *L13*. В результате получим, что на концах выбранного интервала 2-ая производная имеет одинаковые знаки, т. е. выполняется второе условие существования единственного корня на выбранном отрезке;

Результаты выполненной работы приведены в таблице 1

f(x)=(1-x)^0,5-tan(x)=0
y=(1-x)^0,5
y1=tan(x)
f'(x)=((1-x)^0,5-tan(x))'=-0,5/(1-x)^0,5-1/cos(x)^2
f''(x)=(-0,5/(1-x)^0,5-1/cos(x)^2)'=-0,25/(1-x)^(3/2)-2*sin(x)/cos(x)^3

Таблица 1 – Значения функций *y=(1-x)^0.5* и *y1=tan(x)*

| | x | -1,00 | -0,80 | -0,60 | -0,40 | -0,20 | 0,00 | 0,20 | 0,40 | 0,60 | 0,80 | 1,00 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y=(1-x)^0,5 | y | 1,41 | 1,34 | 1,26 | 1,18 | 1,10 | 1,00 | 0,89 | 0,77 | 0,63 | 0,45 | 0,00 |
| y1=tan(x) | y1 | -1,56 | -1,03 | -0,68 | -0,42 | -0,20 | 0,00 | 0,20 | 0,42 | 0,68 | 1,03 | 1,56 |
| f(x) | | 2,97 | 2,37 | 1,95 | 1,61 | 1,30 | 1,00 | 0,69 | 0,35 | -0,05 | -0,58 | -1,56 |
| f'(x) | | | | | | | | -1,60 | | | -3,18 | |
| f''(x) | | | | | | | | -0,77 | | | -7,04 | |

Строим график:

1) Выделяем блок ячеек *B9:M10*;

2) Выполняем команду *Вставка, Диаграмма*. В появившемся диалоговом окне выбираем вкладку *Нестандартные, Гладкие графики* и щелкнем по кнопке *Далее*;

3) В появившемся диалоговом окне выбираем режим *Ряды в строках* и выбираем вкладку *Ряд*. В появившемся диалоговом окне щелкаем в поле *Подписи оси X*, в котором появляется мигающий курсор. В таблице выделяем блок ячеек *B8:M8* и щелкаем по кнопке *Далее*;

4) На экране появляется диалоговое окно с вкладками: *Заголовки, Оси, Линии сетки, Легенда, Подписи данных, Таблицы данных*, с помощью которых можно установить параметры создаваемой диаграммы, а затем щелкаем по кнопке *Далее*;

5) В появившемся диалоговом окне *Поместить диаграмму на листе*, выбираем режим *Имеющимся* и щелкаем по кнопке *Готово*;

6) В построенном графике (см. рисунок 2) видим, что действительно на интервале *[0.20;0.80]* находится абсцисса пересечения наших графиков.

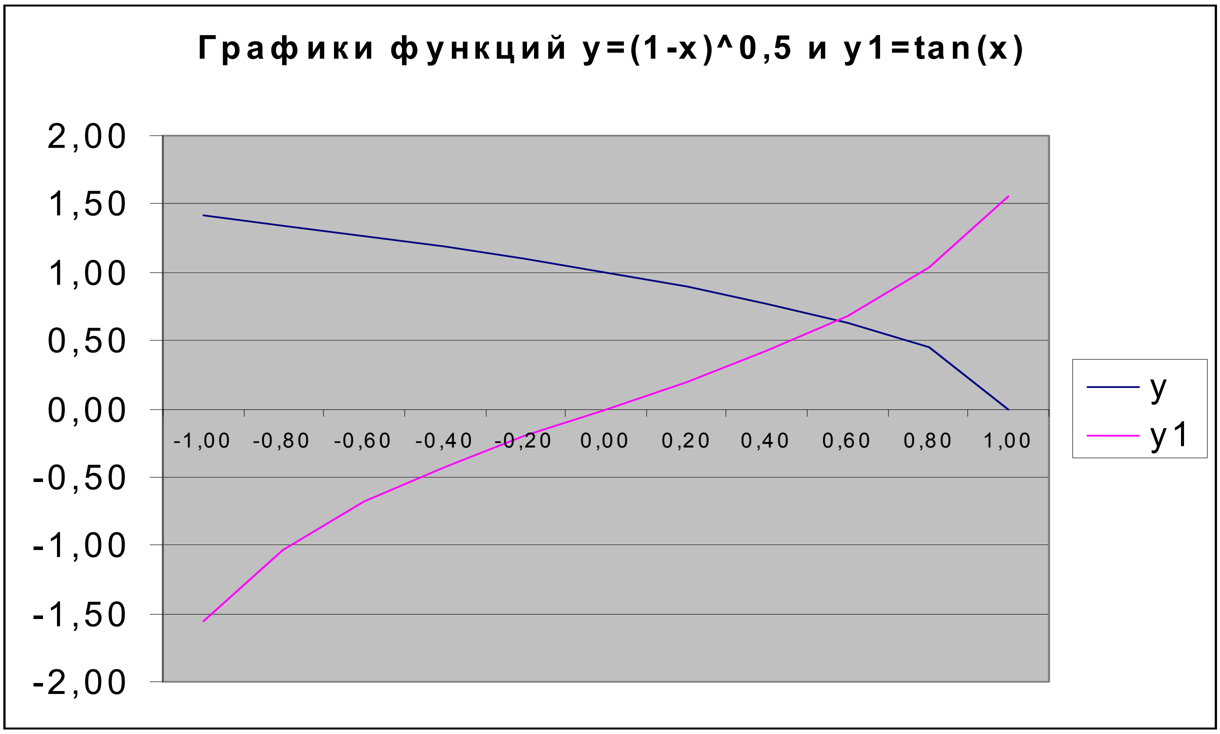



Рисунок 2 – Графики функций *y=(1-x)^0.5* и *y1=tan(x)*

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале *[0.2,0.8]*.

Проверим условие существования корня на отрезке [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0. f(0.2)=0.69, f(0.8)=-0.58. Следовательно, f(0)*f(1)<0, т. е. корень существует.

Проверим условие существования единственного корня на отрезке [a,b], т.е. f’(a)*f’(b)>0. f’(0.2)=-1.60, f’(0.8)=-3.18. Следовательно, f’(0.2)*f’(0.8)>0, т. е. существует единственный корень.

### 2.1.3 Словесный алгоритм решения уравнения методом половинного деления

Составим словесный алгоритм решения задачи:

1) введите начало, конец интервала, точность вычисления-a, b, e;
2) если условие f(a)*f(b)>0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 8;
3) вычислить середину отрезка по формуле c=(a+b)/2;
4) если f(c)=0, то c – корень, вывести на печать и перейти к пункту 8;
5) если f(a)*f(c)<0, то b=c, иначе a=c;
6) если |b-a|>e и f(c)<>0, то перейти к пункту 3;
7) c – корень, вывести на печать;
8) конец программы.

2.1.4 Блок – схема алгоритма решения уравнения методом половинного деления

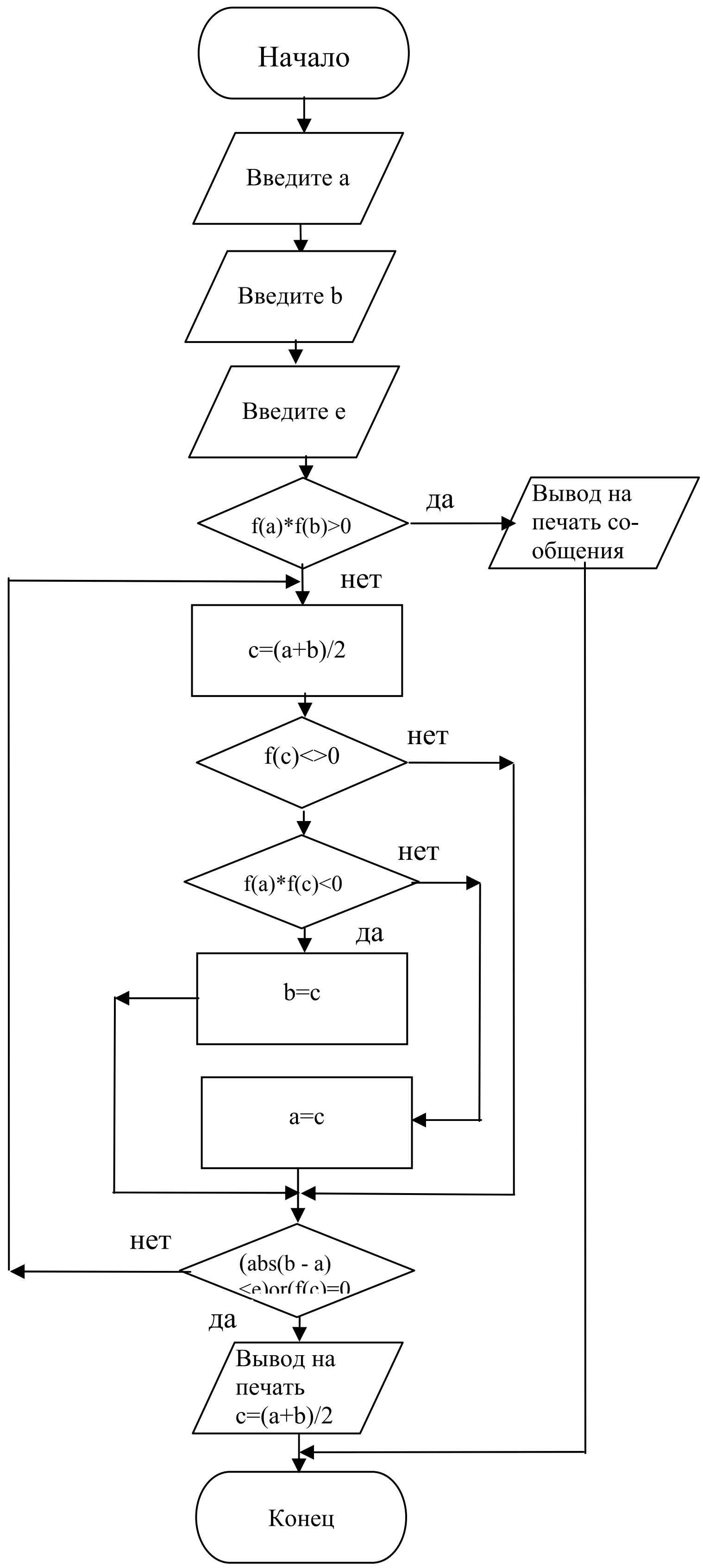



Рисунок 3 - Блок-схема алгоритма решения уравнения методом половинного деления

2.1.5 Распечатка программы метода половинного деления

```
Program PolDel;
 Uses crt;
var
 a, b, c, e : real;
{Описание функции уравнения }
function f(x:real):real;
begin
  f:=exp(0.5*ln(1-x))-sin(x)/cos(x);
end;
begin
  clrScr;
  write('Введите начало интервала a=');
  readln(a);
  write('Введите конец интервала b=');
  readln(b);
  write('Введите погрешность e=');
  readln(e);
  if f(a)*f(b)>=0 then writeln('На данном интервале корня нет')
    else begin
      repeat
        c:=(a+b)/2;
        if f(c)<>0 then
           if f(a)*f(c)<0 then b:=c else a:=c;
      until (abs(a-b)<e) or (f(c)=0);
      c:=(a+b)/2;
      writeln('Приближённый корень x=', c:0:5);
      writeln('Значение функции f(x)=', f(c):0:5);
      readln;
    end;
end.
```

2.1.6 Распечатка результатов работы программы

Результаты работы программы метода половинного деления для уравнения (1-x)^0,5-tan(x)=0.

Введите начало интервала, *a*= 0.2
Введите конец интервала *b*= 0.8
Введите погрешность: 0.001
Приближенный корень x=0.57705
Значение функции f(x)= -0.00062

## 2.2 Метод хорд

Пусть дано уравнение:

$$f(x)=0, \tag{2}$$

где функция *f(x)* непрерывна на отрезке *[a, b]* и *f(a)*f(b)<0*. Пусть для определенности *f(a)<0* и *f(b)>0* . Тогда, вместо того чтобы делить отрезок *[a, b]* пополам более естественно разделить его в отношении *f(a)/f(b)* (см. рисунок 4).

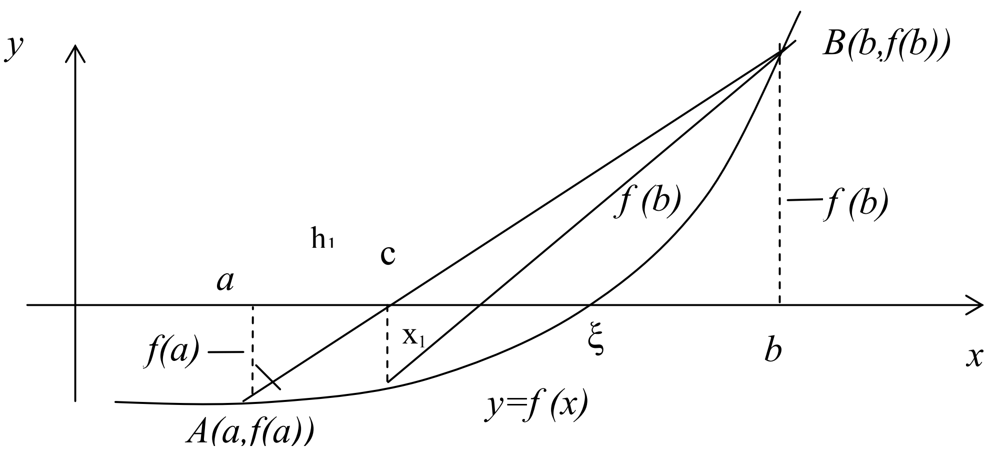



Рисунок 4- График функции *f(x) (f''(x)>0, f(b)>0)*

Это дает нам приближенное значение корня

$$x_1=a+h_1, \tag{3}$$

Из подобия треугольников aAc и bBc имеем

$$-\frac{f(a)}{f(b)}=\frac{h_1}{b-(a+h_1)}, \tag{4}$$

определяем $\boldsymbol{h_1}$**:**

$$h_1=-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a), \tag{5}$$

Подставляя в формулу (3) вместо $h_1$ полученное, имеем:

$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a), \tag{6}$$

Далее применяем тот же процесс к тому из отрезков *[a, x1]* или *[x1, b]*, на концах которого функция *f(x)* имеет противоположные знаки, получим второе приближение корня $x_2$ и т. д..

(6) - формула приближенного значения корня, полученного по методу хорд.

Геометрически способ пропорциональных частей эквивалентен замене кривой *y=f(x)* проходящей через точки *A(a,f(a))* и *B(b,f(b))*. В самом деле, уравнение хорды *AB* есть:

$$\frac{x-a}{b-a}=\frac{y(x)-f(a)}{f(b)-f(a)}, \tag{7}$$

Отсюда, полагая $x=x_1$ и тогда $y(x_1)=0$ , получим:

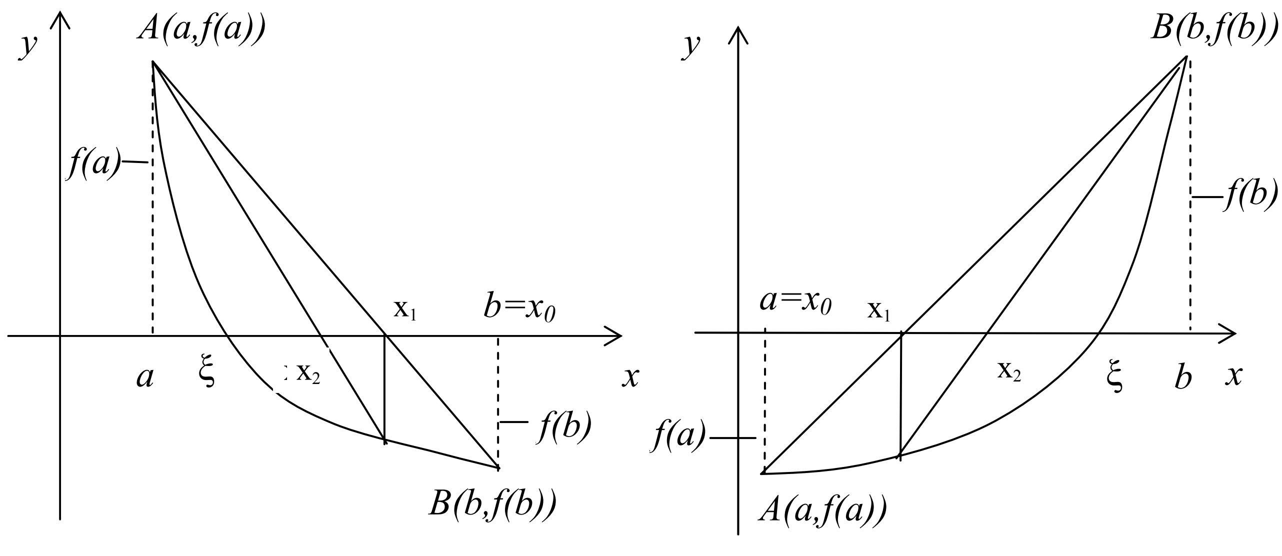
$$x_1=a-\frac{f(a)}{f(b)-f(a)}(b-a), \tag{8}$$

Формула (8) полностью эквивалентна формуле (6).

В методе хорд:

***1) Неподвижен тот конец, для которого знак функции f(x) совпадает со знаком ее второй производной f''(x);***

**2)** ***Последовательные приближения*** $x_n$ ***лежат по ту сторону корня*** $\xi$ ***, где функция f(x) имеет знак, противоположный знаку ее второй производной f''(x)*** **(**см. рисунок 5).




а) *f''(x)>0, f(a)>0* ) б) *f''(x)>0, f(b)>0*

Рисунок 5 – График функции *f(x)*

Если точка A неподвижна (рисунок 5 - а)), вычисление приближенного корня производится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a), \qquad (9)$$

Если точка B неподвижна (Рисунок 5 - б)), вычисление приближенного корня производится по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \qquad (10)$$

2.2.1 Постановка задачи

Найти корни уравнения $x^3$*-6*x-8=0* с точностью до *ε=0,001* с помощью метода хорд**.**

2.2.2 Построение графиков и отделение корней с помощью электронной таблицы Excel

Исходное уравнение представим в виде $x^3$*=6*x+8* и рассмотрим графики двух функций *y=6*x+8* и *y1=* $x^3$.

Строим с помощью электронной таблицы *Excel* таблицу 2.

$f(x)=x^3-6*x-8=0$

$y=6*x+8$

$y1=x^3$

$f'(x)=(x^3-6*x-8)'=3*x^2-6$

$f''(x)=(3*x^2-6)'=6*x$

Таблица 2 – Значения функций *y=6*x+8* и *y1=* $x^3$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | | | *a* | | *b* | |
| | x | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 | 4 |
| y=6*x+8 | y | 2 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 |
| y1=x^3 | y1 | -1,00 | -0,13 | 0,00 | 0,13 | 1,00 | 3,38 | 8,00 | 15,63 | 27,00 | 42,88 | 64,00 |
| f(a)*f(b)>0 | проверка существования корня | | | | | | | | -7,38 | | 13,9 | |
| f'(a)*f(b)>0 | проверка первой производной | | | | | | | | 12,8 | | 30,8 | |
| f''(a)*f''(b)>0 | проверка второй производной | | | | | | | | 15 | | 21 | |
| f(a)*f''(a)<0 | выбор начального приближения | | | | | | | | -111 | | 291 | |
| | | | | | | | | | $x_0$ | | | |

Строим графики функций (см. рисунок 6).

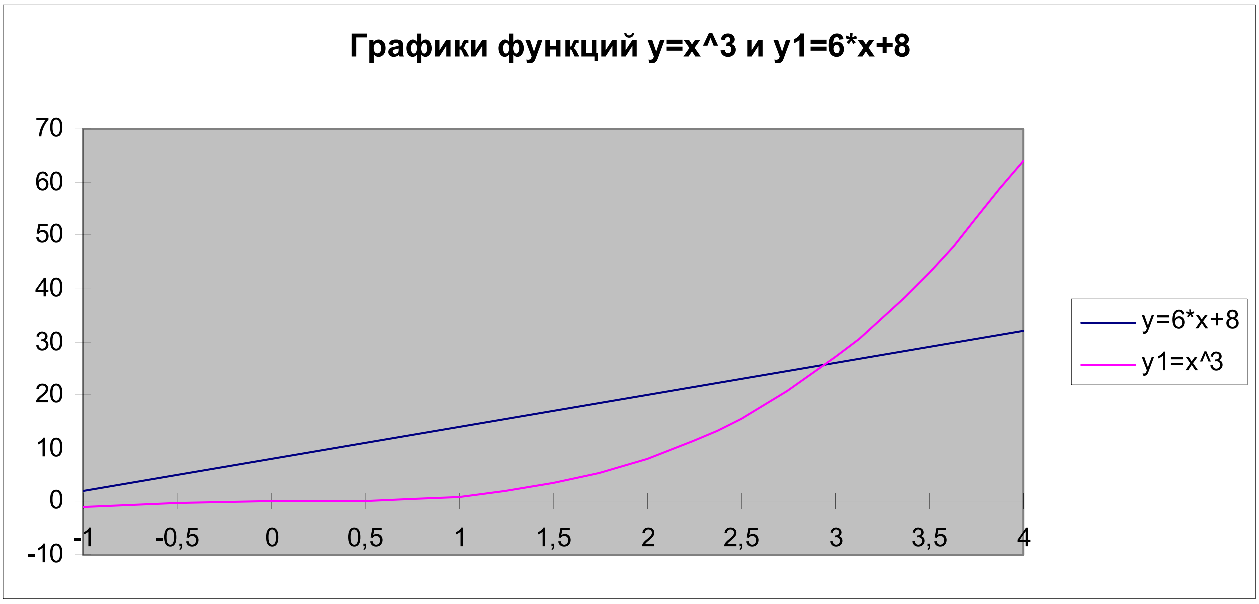



Рисунок 6 – Графики функций $y=6*x+8$ и $y1=x^3$

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале *[2.5,3.5]*.

Проверим условие существования корня на отрезке [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0. f(2.5)=-7.38, f(3.5)=13.9. Следовательно, f(2.5)*f(3.5)<0, т. е. корень существует.

Проверим условие существования единственного корня на отрезке [a,b], т.е. f'(a)*f'(b)>0. f'(2.5)=12.8, f'(3.5)=30.8. Следовательно, f'(2.5)*f'(3.5)>0, т. е. на выбранном интервале существует единственный корень.

За точку начального приближения $x_0$ в методе хорд берется тот конец выбранного интервала, в котором функция f(x) имеет знак, противоположный знаку ее второй производной f''(x), т. е. $f(x_0)*f''(x_0)<0$. f(2.5)=-7.38, f''(2.5)=12.8. Следовательно, f(2.5)*f''(2.5)<0, т. е. $x_0=2.5$.

### 2.2.3 Словесный алгоритм решения уравнения методом хорд

Составим словесный алгоритм решения задачи:

1) Введите начало, конец интервала, точность вычисления-a, b, e;
2) Если условие f(a)*f(b)>0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 9;
3) Если условие f'(a)*f'(b)<0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 9;
4) Если условие f''(a)*f''(b)<0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 9;
5) Если f(a)*f''(a)>0, то $x_0$=b, p=1, иначе $x_0$=a, p=0;

6) Если p=0, то $x_1=x_0-f(x_0)/(f(b)-f(x_0))*(b-x_0)$, иначе $x_1=x_0-f(x_0)/(f(x_0)-f(a))*(x_0-a)$;

7) Если $|x_1-x_0|>e$, то $x_0=x_1$ и перейти к пункту 6;

8) $x_1$ – корень, вывести на печать;

9) Конец программы.

2.2.4 Блок – схема алгоритма решения уравнения методом хорд

**Ошибка!**

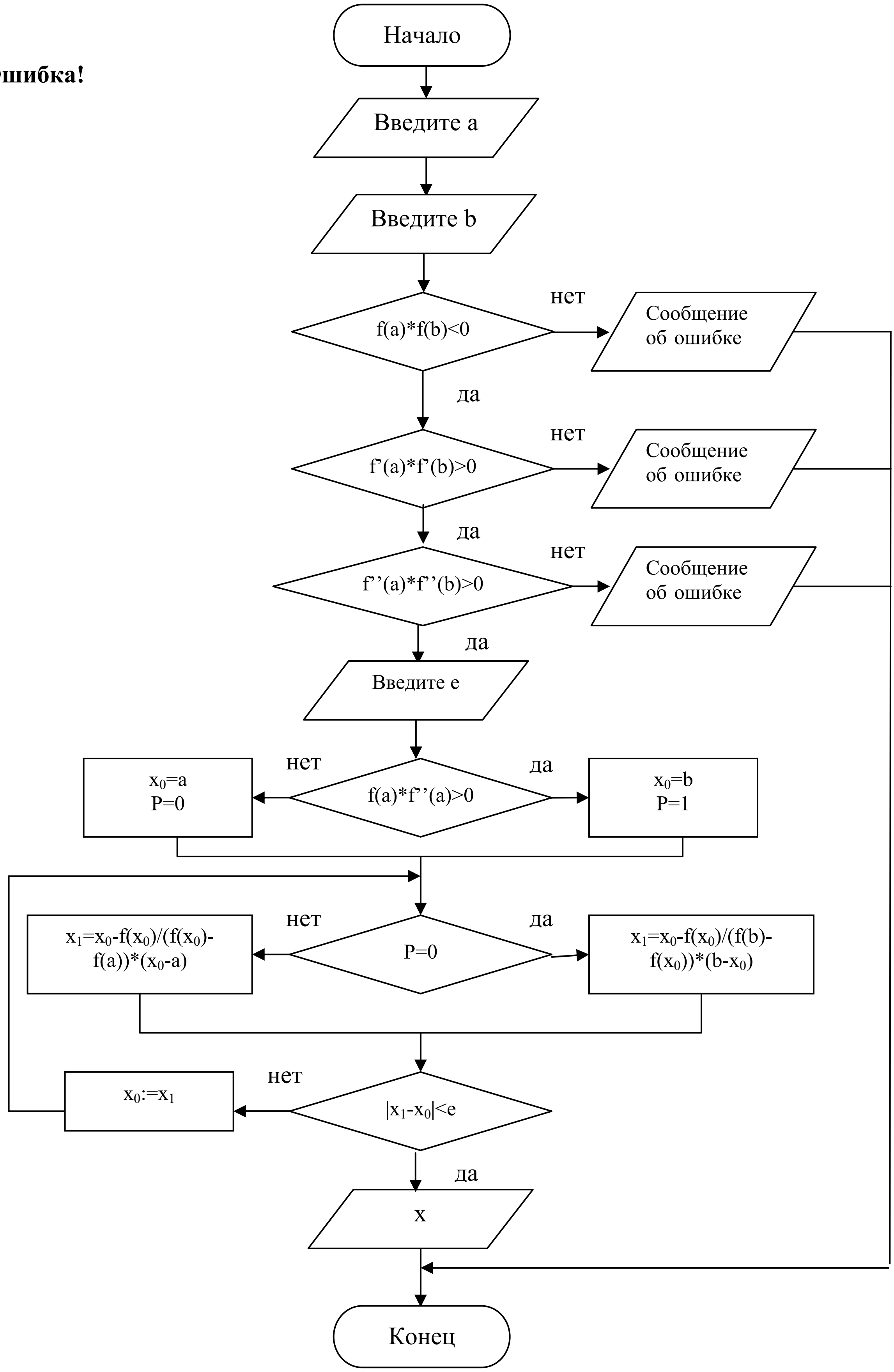



Рисунок 7 - Блок-схема алгоритма решения уравнения методом хорд

2.2.5 Распечатка программы метода хорд

```
Program MetHord;
Uses Crt;
var
     a, b, x0, x1, e, p : real;
{ Описание функции уравнения }
function f(x:real):real;
 begin
  f:=x*x*x-6*x-8;
 end;
{ Описание функции 1-ой производной}
function f1(x:real):real;
 begin
  f1:=3*x*x-6;
 end;
{Описание функции 2-ой производной}
function f2(x:real):real;
 begin
  f2:=6*x
 end;
begin
 ClrScr;
 write('Введите начало интервала a=');
 readln(a);
 write('Введите конец интервала b=');
 readln(b);
  if (f(a)*f(b)>=0) then
  writeln('Условие f(a)*f(b)<0 не выполняется. Введите другие значения a и
b')
 else if (f1(a)*f1(b)<=0) then
  writeln('Условие f1(a)*f1(b)>0 не выполняется. Проверьте 1-ую производ-
ную')
 else if (f2(a)*f2(b)<=0) then
   writeln('Условие f''(a)*f''(b)<0 не выполняется. Проверьте 2-ую производ-
ную')
 else begin
   write('Введите погрешность e=');
   readln(e);
   if f(a)*f2(a)>0 then begin
    x1:=b; p:=1;
   end
   else begin
    x1:=a; p:=0;
   end;
```

```
 repeat
  x0:=x1;
  if p=0 then x1:=x0-f(x0)/(f(b)-f(x0))*(b-x0)
   else x1:=x0-f(x0)/(f(x0)-f(a))*(x0-a);
 until abs(x1-x0)<e;
 writeln('Приближённый корень x=', x1:0:5);
 writeln('Значение функции f(x)=', f(x1):0:5);
 readln;
end;
end.
```

2.2.6 Распечатка результатов работы программы

Результаты работы программы метода хорд для уравнения $x^3$-6x-8=0

Введите начало интервала a= 2.5
Введите конец интервала b= 3.5
Введите погрешность: 0.001
Приближенный корень= 2.95119
Значение функции= -0.00377

### 2.3 Метод Ньютона (касательных)

Пусть корень $\xi$ уравнения:

$$f(x)=0, \tag{11}$$

отделен на отрезке *[a, b]*. На данном отрезке первая и вторая производные $f'(x)$ и $f''(x)$ непрерывны и сохраняют постоянные знаки. Зададим *n-ое* приближение корня $x_n$, тогда можно записать, что

$$\xi=x_n+h_n, \tag{12}$$

где $h_n$- малая величина.

$$f(\xi)=0 \text{ или } f(x_n+h_n)=0, \tag{13}$$

Применяя формулу Тейлора, получим:

$$f(x_n+h_n)\approx f(x_n)+f'(x_n)*h_n=0, \tag{14}$$

тогда:

$$h_n = -\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} , \tag{15}$$

Подставим (15) в (12), с учетом (14) получим:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \tag{16}$$

где $x_{n+1}$- новое приближение корня.

Если $f(x_{n+1}) <= \varepsilon$, тогда $x_{n+1}$ корень уравнения $f(x)=0$ с заданной степенью точности $\varepsilon$**.**

Геометрически метод Ньютона эквивалентен замене дуги кривой $y= f(x)$ касательной, проведенной в некоторой точке кривой в соответствии с рисунком 8.

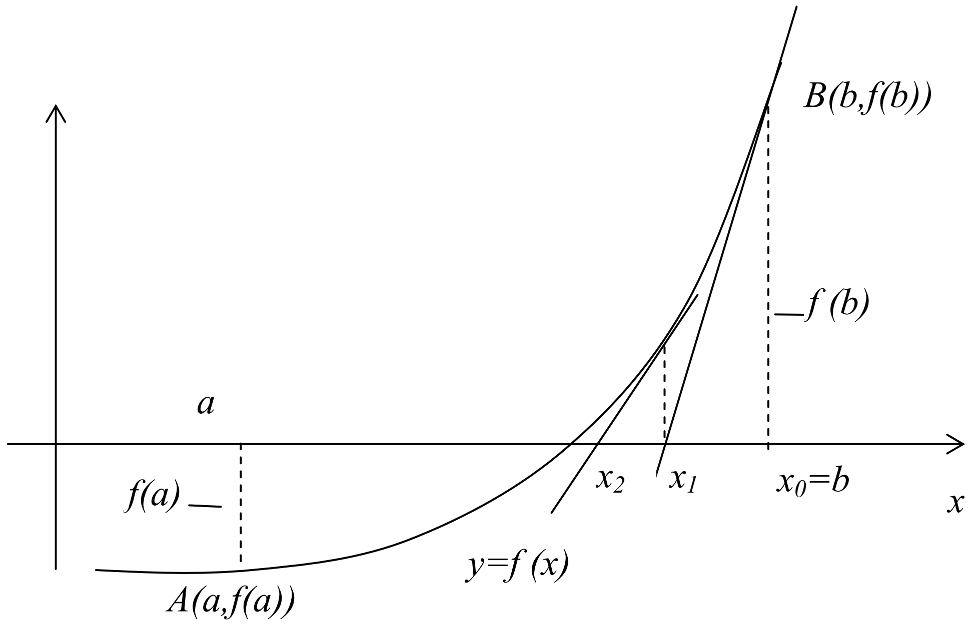



Рисунок 8- График функции $f(x)$ $(f''(x)>0, f(b)>0)$

где $x_n$-$x_{n+1}$=$h$. $x_{n+1}$- точка пересечения касательной к точке $B$ с осью $X$. При выборе начального приближения $x_n$ необходимо задавать $x_n$ в той части отрезка $[a, b]$, в которой выполняется условие $f(x_n)*f''(x_n)>0$.

Из формулы (16) видно, что, чем меньше численное значение $f'(x)$ в окрестности данного корня, тем меньше поправка, которую надо учитывать в первом приближении, а, значит, быстрее сходимость.

2.3.1 Постановка задачи

Найти корни уравнения $x^3$*-3*$x^2$*-24*x-3=0* с точностью до $\varepsilon$*=0,001* с помощью метода Ньютона(касательных)**.**

2.3.2 Построение графиков и отделение корней с помощью электронной таблицы Excel

Исходное уравнение представим в виде $x^3=3*x^2+24*x+3$ и рассмотрим графики двух функций $y= 3*x^2+24*x+3$ и $y1= x^3$.

Строим с помощью электронной таблицы *Excel* таблицу 3.

f(x)=$x^3$-3$x^2$-24x-3=0
y=3*$x^2$+24*x+3
y1=x^3
f'(x)=(x^3-3*x^2-24*x-3)'=3*x^2-6*x-24
f''(x)=(3*x^2-6*x-24)'=6*x-6

Таблица 3 – Значения функций $y= 3*x^2+24*x+3$ и $y1= x^3$

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *a* | *b* | | | | | | |
| | x | -0,50 | -0,40 | -0,30 | -0,20 | -0,10 | 0,00 | 0,10 | 0,20 | 0,30 | 0,40 | 0,50 |
| y=3*x^2+24*x+3 | y | -8,25 | -6,12 | -3,93 | -1,68 | 0,63 | 3,00 | 5,43 | 7,92 | 10,47 | 13,08 | 15,75 |
| y1=x^3 | y1 | -0,13 | -0,06 | -0,03 | -0,01 | 0,00 | 0,00 | 0,00 | 0,01 | 0,03 | 0,06 | 0,13 |
| f(a)*f(b)<0 | проверка существования корня | | | | 1,67 | -0,63 | | | | | | |
| f'(a)*f'(b)>0 | проверка первой производной | | | | -22,68 | -23,37 | | | | | | |
| f''(a)*f''(b)>0 | проверка второй производной | | | | -1,00 | -0,50 | | | | | | |
| f(a)*f''(a)>0 | проверка условия выбора $x_0$ | | | | -1,67 | 0,32 | | | | | | |
| | | | | | | $x_0$ | | | | | | |

Строим графики функций (см. рисунок 9)/

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале *[-0.2,-0.1]*.

Проверим условие существования корня на отрезке [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0. f(-0.2)=1.67, f(-0.1)=-0.63. Следовательно, f(-0.2)*f(-0.1)<0, т. е. корень существует.

Проверим условие существования единственного корня на отрезке [a,b], т.е. f'(a)*f'(b)>0. f'(-0.2)=-22.68, f'(-0.1)=-23.37. Следовательно, f'(-0.2)*f'(-0.1)>0, т. е. на выбранном интервале существует единственный корень.

За точку начального приближения $x_0$ в методе Ньютона(касательных) берется тот конец выбранного интервала, в котором функция f(x) имеет знак, совпадающий со знаком ее второй производной f'' (x), т. е. f($x_0$)*f''($x_0$)>0. f(-0.1)=-0.63, f''(-0.1)=-0.5. Следовательно, f(-0.1)*f''(-0.1)>0, т. е. $x_0$=-0.2.

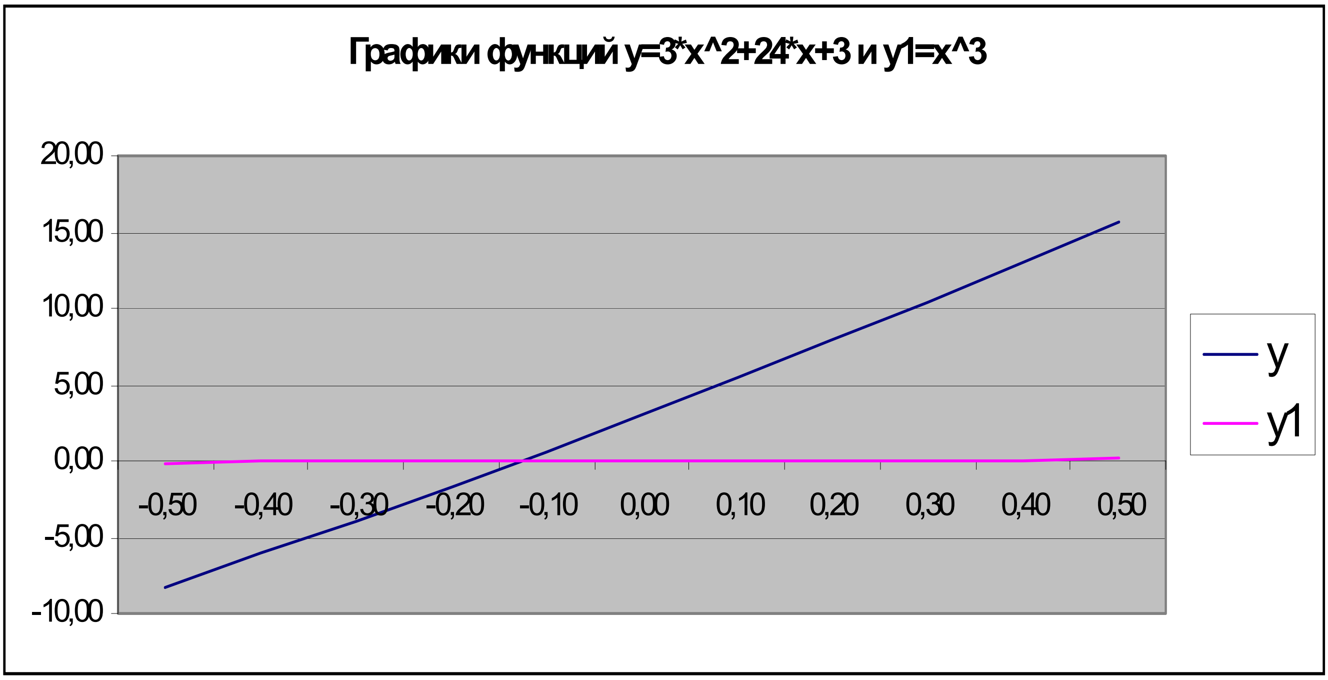



Рисунок 9 – Графики функций $y=3*x^2+24*x+3+8$ и $y1=x^3$

2.3.3 Словесный алгоритм решения уравнения методом Ньютона (касательных)

Составим словесный алгоритм решения задачи:

1) введите начало, конец интервала, точность вычисления-a, b, e;
2) если условие f(a)*f(b)>0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 12;
3) если условие f'(a)*f'(b)<0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 12;
4) если условие f'''(a)*f''(b)<0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 12;
5) если условие f'(a)<f'(b), то m1=f'(a), иначе m1=f(b);
6) если условие f''(a)<f''(b), то m2=f'(b), иначе m2=f(a);
7) e0=sqrt(2*m1*e/m2);
8) если f(a)*f''(a)>0, то $x_0$=a, иначе $x_0$=b;
9) $x_1=x_0-f(x_0)/f'(x_0)$;
10) если $|x_1-x_0|>e$, то $x_0=x_1$ и перейти к пункту 9;
11) $x_1$ – корень, вывести на печать;
12) конец программы.

### 2.3.4 Блок – схема алгоритма решения уравнения методом Ньютона

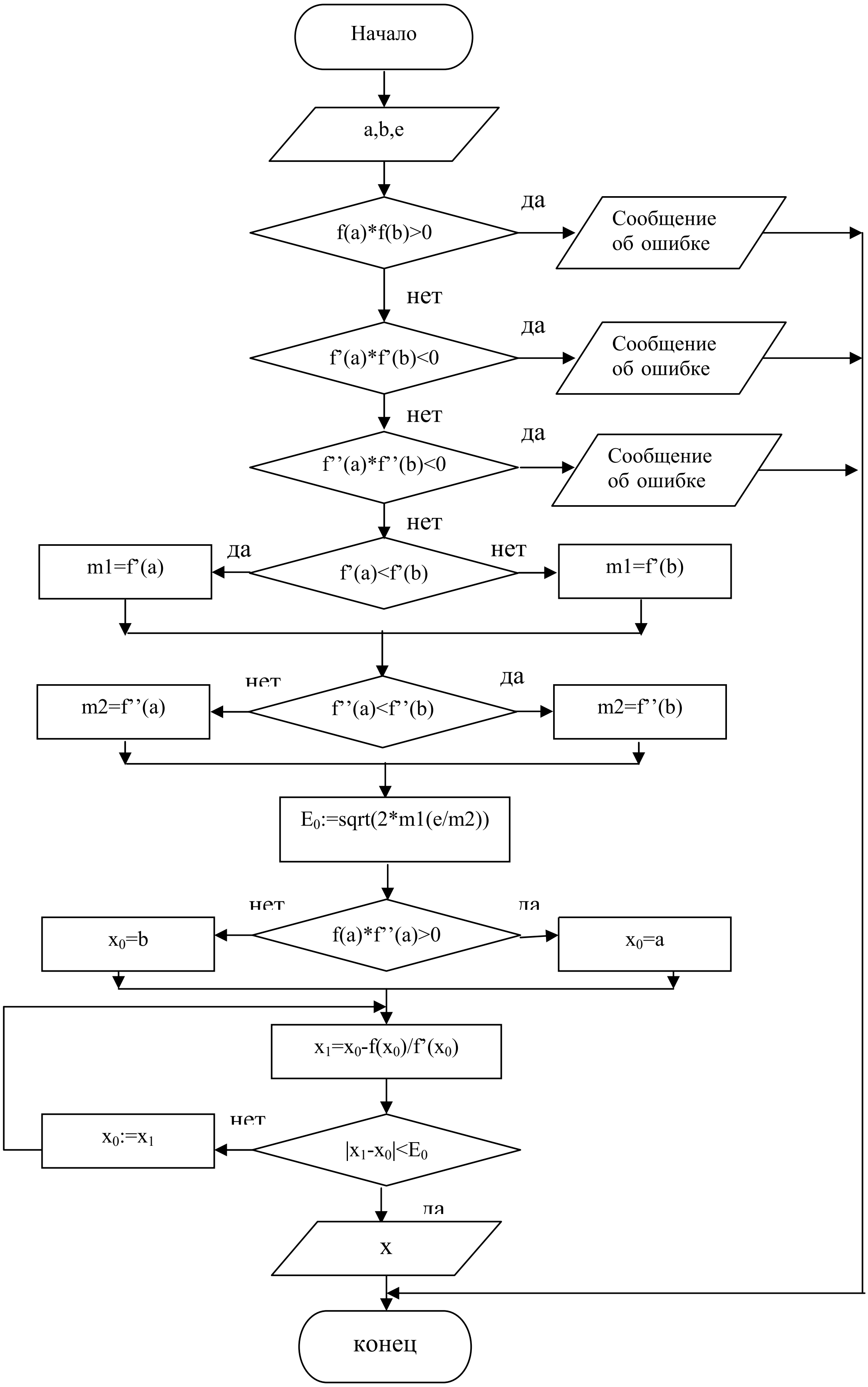



Рисунок 10 - Блок-схема алгоритма решения уравнения методом Ньютона

2.3.5 Распечатка программы метода Ньютона

```
program MetNuton;
Uses Crt;
var
     a, b, x0, x1, e, m1, m2, e0 : real;
{Описание функции уравнения}
function f(x:real):real;
 begin
  f:=x*x*x-3*sqr(x)-24*x-3;
 end;
{ Описание функции 1-ой производной исходного уравнения }
function f1(x:real):real;
 begin
  f1:=3*sqr(x)-6*x-24;
 end;
{ Описание функции 2-ой производной исходного уравнения }
function f2(x:real):real;
 begin
  f2:=6*x-6;
 end;
begin
 ClrScr;
 write('Введите начало интервала a=');
 readln(a);
 write('Введите конец интервала b=');
 readln(b);
  if (f(a)*f(b)>=0) then
  writeln('Условие f(a)*f(b)<0 не выполняется. Введите другие значения a и
b')
 else if (f1(a)*f1(b)<=0) then
  writeln('Условие f1(a)*f1(b)>0 не выполняется. Проверьте 1-ую производ-
ную')
 else if (f2(a)*f2(b)<=0) then
   writeln('Условие f''(a)*f''(b)<0 не выполняется. Проверьте 2-ую производ-
ную')
 else begin
  write('Введите погрешность e=');
  readln(e);
  if f1(a)<f1(b) then m1:=f1(a) else m1:=f1(b);
  if f2(a)>f2(b) then m2:=f2(a) else m2:=f2(b);
  e0:=sqrt(2*m1*e/m2);
  if f(a)*f2(a)>0 then x1:=a else x1:=b;
  repeat
    x0:=x1;
```

```
  x1:=x0-f(x0)/f1(x0);
 until abs(x1-x0)<e0;
 writeln('Приближённый корень x=', x1:0:5);
 writeln('Значение функции f(x)=', f(x1):0:5);
 readln;
end;
end.
```

2.3.6 Распечатка результатов работы программы

Результаты работы программы метода Ньютона для уравнения $x^3$-$3x^2$-24x-3=0

Введите начало интервала a = -0.2
Введите конец интервала b = -0.1
Введите погрешность e= 0.001
Приближенный корень x= -0.12700
Значение функции= -0.00243

## 2.4 Метод итераций

Пусть дано уравнение:

$$f(x)=0\ , \tag{17}$$

где $f(x)$ – непрерывная функция, и требуется определить его вещественные корни. Заменим уравнение (17) равносильным уравнением:

$$x=\varphi(x)\ , \tag{18}$$

Выберем каким-либо способом грубо приближенное значение корня $\boldsymbol{x_0}$ и подставим его в первую часть уравнения (18). Тогда получим некоторое число:

$$x_1=\varphi(x_0), \tag{19}$$

Подставляя теперь в правую часть равенства (19) вместо $\boldsymbol{x_0}$ число $\boldsymbol{x_1}$, получим новое число $x_2=\varphi(x_1)$. Повторяя этот процесс, будем иметь последовательность чисел:

$$x_n=\varphi(x_{n-1})\quad (n=1,2,3,\ldots), \tag{20}$$

$x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$ – последовательность приближений (итерационная последовательность).

Если эта последовательность – сходящаяся, т.е. существует придел $\xi = lim\ x_n$, то, переходя к пределу в равенстве (20) и предполагая функцию $\varphi(x)$ – непрерывной, найдем: $lim\ x_n = \varphi(lim\ x_{n-1})$ или

$$\xi = \varphi(\xi), \tag{21}$$

Таким образом, предел $\xi$ является корнем уравнения (18) и может быть вычислен по формуле (20) с любой степенью точности.

Геометрически способ итерации может быть пояснен следующим образом (см. рисунок 11).

Построим на плоскости XOY график функции $y=x$ и $y=\varphi(x)$. Каждый действительный корень $\xi$ уравнения (2.18) является абсциссой точки пересечения M кривой $y=\varphi(x)$ с прямой $y=x$.

Отправляясь от некоторой точности $A_0[x_0, \varphi(x_0)]$, строим ломаную $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$(лестница) (см. рисунок 11), звенья которой попеременно параллельны оси $OX$ и $OY$, вершины $A_0, A_1, A_2, \ldots$ лежат на кривой $y=\varphi(x)$, а вершины $B_1, B_2, B_3\ldots$ - на прямой $y=x$. Общие абсциссы точек $A_1$ и $B_1$, $A_2$ и $B_2$, …, очевидно, представляют собой соответственно последовательные приближения $x_1, x_2, \ldots$ корня $\xi$.

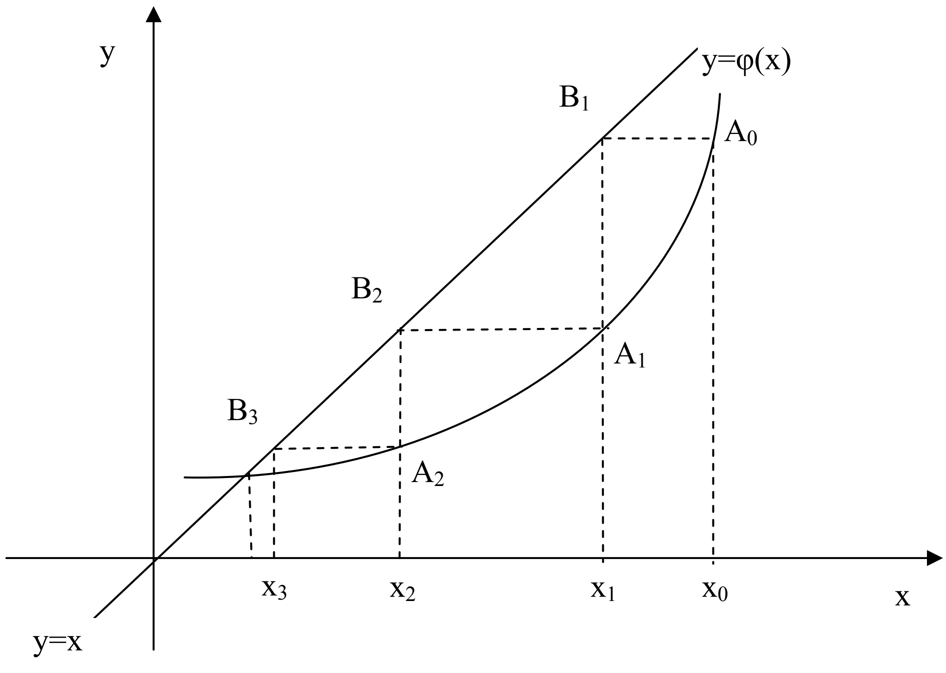



Рисунок 11 – График сходящегося итерационного процесса «лестница»

Возможен также другой вид ломаной $A_0B_1A_1B_2A_2\ldots$(спираль) (см. рисунок 12). Легко сообразить, что решение в виде «лестница» получается, если производная $\varphi'(x)$ положительна, а решение в виде «спираль», если производная $\varphi'(x)$ отрицательна.

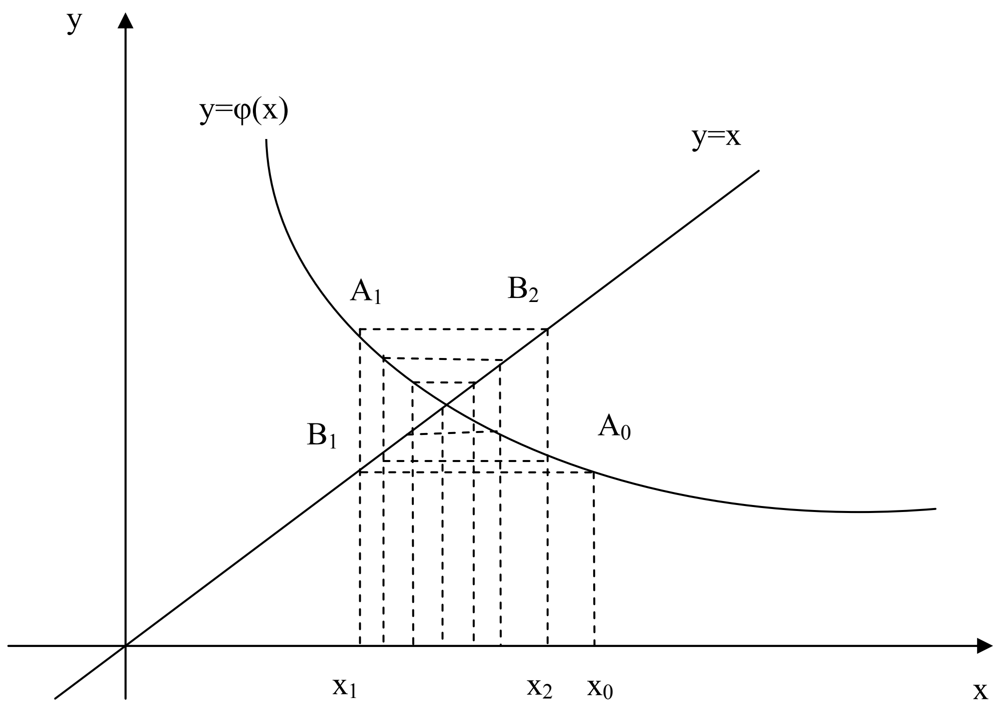



Рисунок 12 – График сходящегося итерационного процесса «спираль»

На рассмотренных рисунках $|\varphi'(x)| <1$ , и процесс итерации сходится. Однако, если рассмотреть рисунок 13, где $|\varphi'(x)| >1$, то процесс итерации может быть расходящимся. Поэтому для практического применения метода итерации нужно выяснить достаточные условия сходимости итерационного процесса.

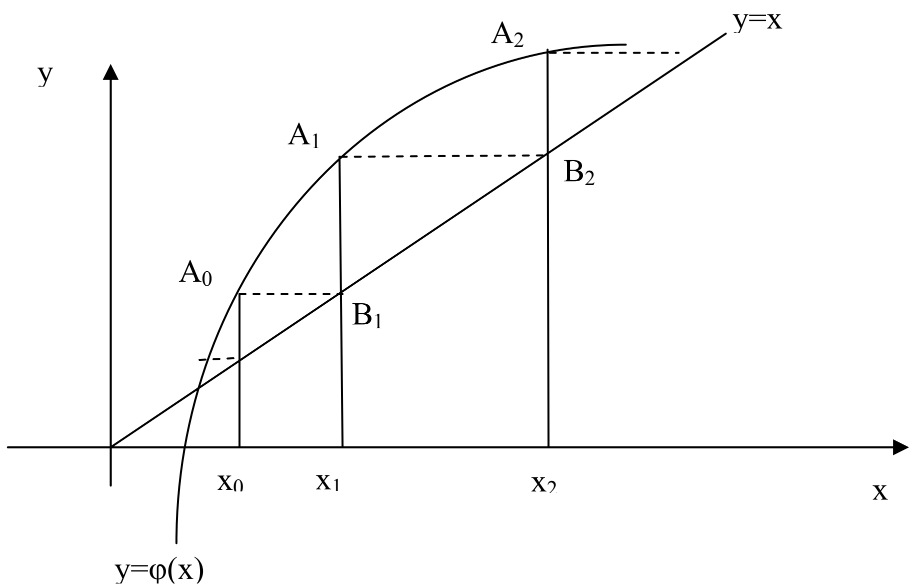



Рисунок 13 – График расходящегося итерационного процесса

***Теорема:*** Пусть функция $\varphi(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a,b]$, причем, все ее значения $\varphi(x)$ принадлежат $[a,b]$. Тогда, если существует правильная дробь $q$ такая, что:

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1, \qquad (22)$$

при $a<x<b$, то:

1) процесс итерации:

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad (n=1,2,3,\ldots), \qquad (23)$$

сходится независимо от начального значения $x_0 \in [a,b]$;

2) предельное значение $\xi = \lim x_n$ является единственным корнем уравнения:

$$x=\varphi(x), \qquad (24)$$

Отсюда ясно, что сходимость процесса итерации будет тем быстрее, чем меньше число $q$.

Процесс итерации следует продолжать до тех пор, пока для двух последних приближений $x_{n-1}$ и $x_n$ не будет обеспечено выполнение неравенства:

$$|x_n - x_{n-1}| \leq ((1-q)/q)*\varepsilon, \text{ при } 0<\varphi'(x)<q$$

и

$$|x_n - x_{n-1}| \leq \varepsilon, \text{ при } \varphi'(x)<0.$$

2.4.1 Постановка задачи

Найти корни уравнения $3\text{^}x+x+2=0$ с точностью до $\varepsilon=0,001$ с помощью метода итерации**.**

2.4.2 Построение графиков и отделение корней с помощью электронной таблицы Excel

Исходное уравнение представим в виде $x=-(3^x+2)$ и рассмотрим графики двух функций $y=-(3^x+2)$ и $y=x$.

Строим с помощью электронной таблицы *Excel* таблицу хорошо.

$3^x+x+2=0$

$x=-3^x-2=-(3^x+2)$

$\varphi(x)=-3^x-2=-(3^x+2)$

$y=x$

$\varphi'(x)=-3^x*LN(3)$

Таблица 4 – Значения функций ***y=-(3^x+2)*** и ***y= x***

| | | a | | | b | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -3 | -2,5 | -2 | -1,5 | -1 | -0,5 | 0 | 0,5 | 1 | 1,5 | 2 |
| φ(x) | -2,04 | -2,06 | -2,11 | -2,19 | -2,33 | -2,58 | -3,00 | -3,73 | -5,00 | -7,20 | -11,00 |
| y | -3,00 | -2,50 | -2,00 | -1,50 | -1,00 | -0,50 | 0,00 | 0,50 | 1,00 | 1,50 | 2,00 |
| f(a)*f(b) | | -0,44 | | | 1,33 | | | | | | |
| abs(φ'(x))<1 | | 0,07 | | | 0,37 | | | | | | |
| | | $x_0$ | | | | | | | | | |

Строим графики функций (см. рисунок 14).

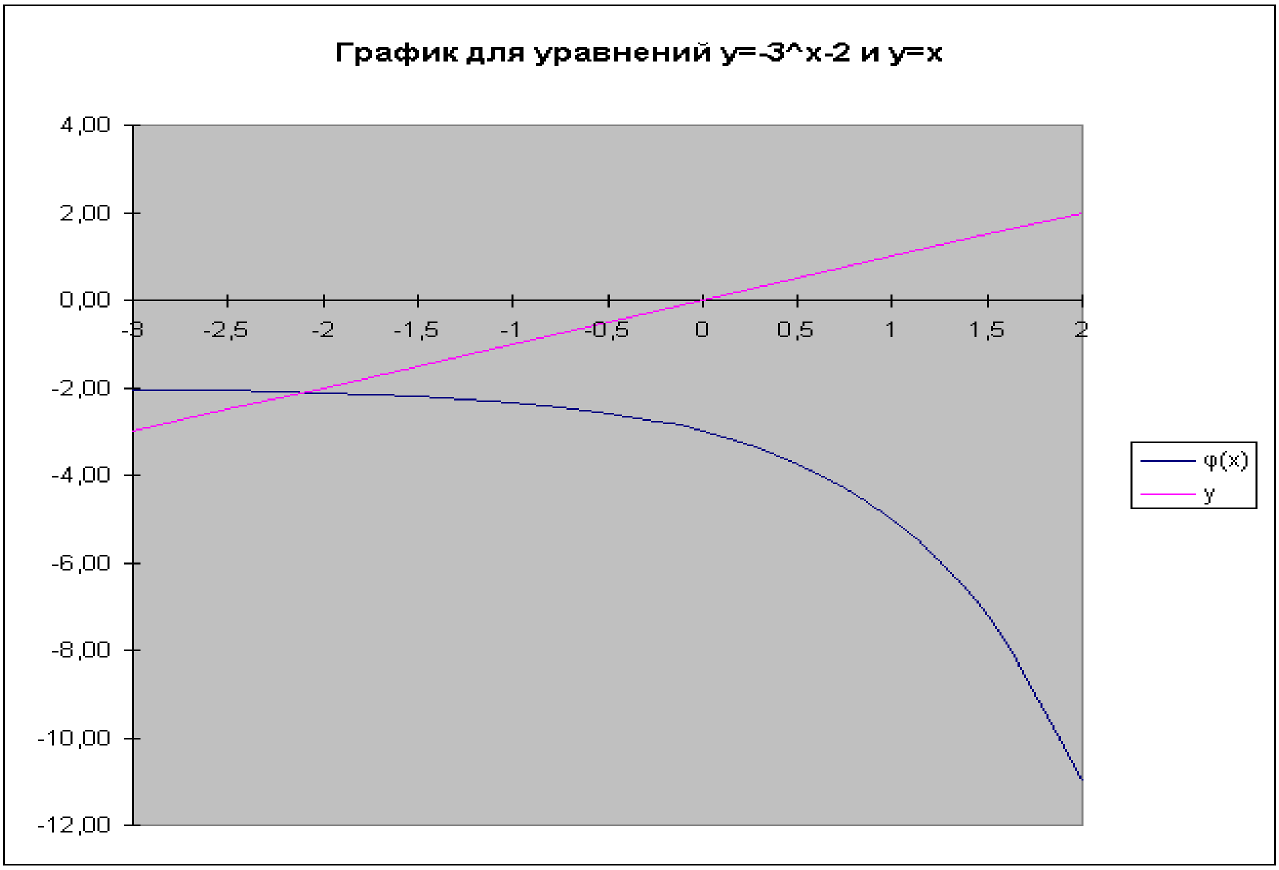



Рисунок 14 – Графики функций $y=-(3^x+2)$ и $y=x$

Абсцисса пересечения графиков является корнем уравнения, который находится в интервале *[-2.5,-1]*.

Проверим условие существования корня на отрезке [a,b], т.е. f(a)*f(b)<0. f(-2.5)=-0.44, f(-1)=1.33. Следовательно, f(-2.5)*f(-1)<0, т. е. корень существует.

Проверим условие сходимости эквивалентного уравнения на полученном интервале, т. е. abs(φ'(x))<1. Abs(φ'(-2.5))=0.07<1, abs(φ'(-1))=0.37<1. Следовательно, для эквивалентного уравнения метод итераций применить можно и за $x_0$ рекомендуется взять тот конец интервала, в котором первая производная эквивалентной функции по модулю имеет наименьшее значение, т. е. $x_0=-2.5$.

### 2.4.3 Словесный алгоритм решения уравнения методом итераций

Составим словесный алгоритм решения задачи:

1) введите начало, конец интервала, точность вычисления-a, b, e;
2) если условие f(a)*f(b)>0, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 9;
3) если условие |φ'(a)|>1 или |φ'(b)|>1, то вывести сообщение об ошибке и перейти к пункту 9;
4) если условие |φ'(a)|< |φ'(b)|, то q= φ'(a), x=a, иначе q= φ'(b), x=b ;
5) если условие φ'(a)<0, то e1=e, иначе e1=((1-q)/q)*e;
6) $x_0$=x;
7) x= φ($x_0$);
8) если |x-$x_0$|>e1, то перейти к пункту 6;
9) x – корень, вывести на печать.

2.4.4 Блок схема алгоритма решения уравнения методом итераций

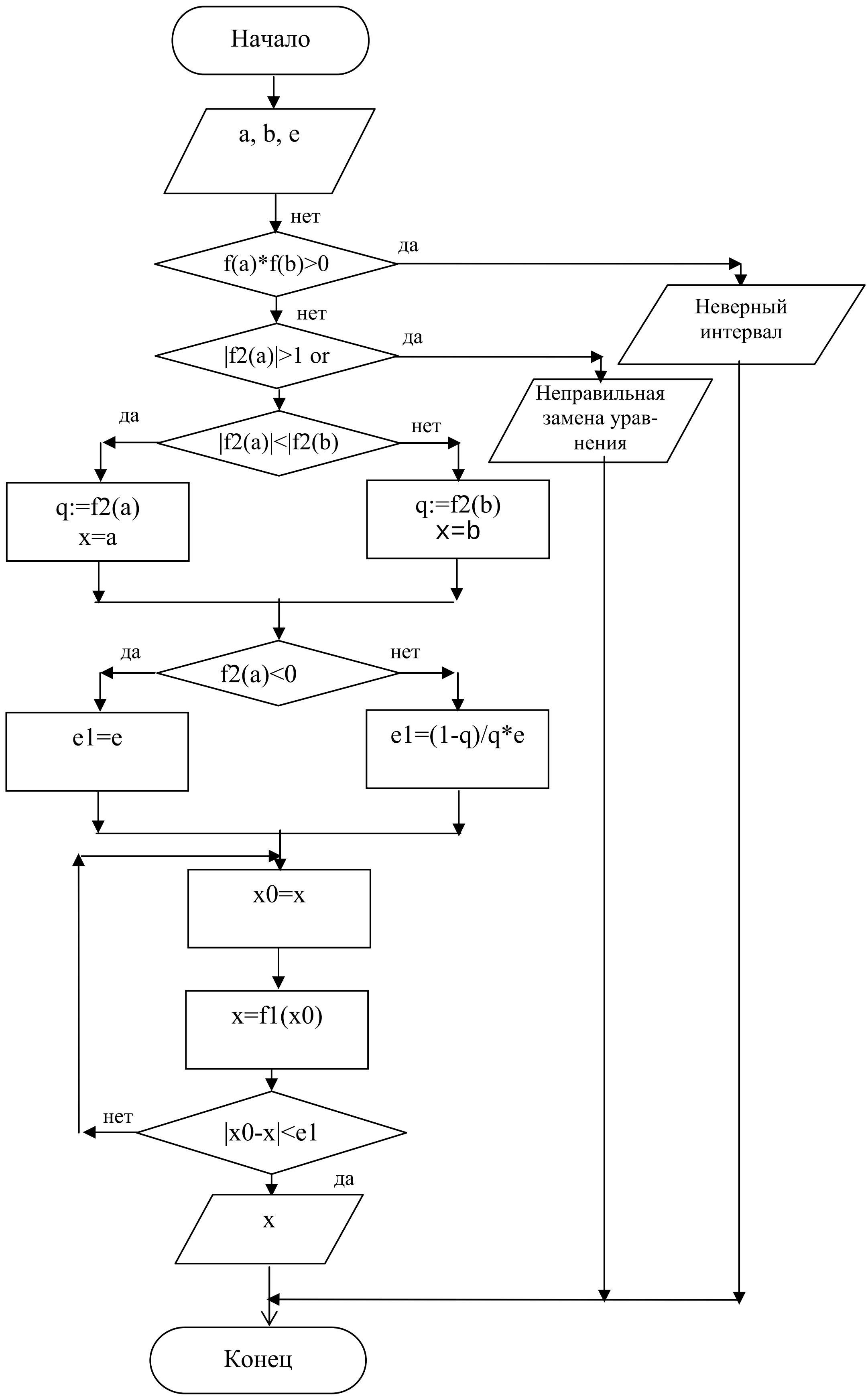



Рисунок 15 - Блок-схема алгоритма решения уравнения методом итераций

2.4.5 Распечатка программы метода итераций

```
Program Iteracii;
 Uses Crt;
 Var
   a,q,b,x,x1,e,e1,x0:real;
   n:integer;
{Описание функции уравнения}
 Function f(x:real):real ;
   Begin
     f:=exp(x*ln(3))+x+2;
   end;
{Описание равносильной функции уравнения}
Function f1(x:real):real;
   Begin
     f1:=-(exp(x*ln(3))+2);
   end;
{Описание 1-ой производной равносильной функции уравнения}
Function f2(x:real):real;
   Begin
     f2:=-(exp(x*ln(3)));
   end;
Begin
  ClrScr;
  Write('Введите начало интервала a=');
  Readln(a);
  Write('Введите конец интервала b=');
  Readln(b);
  Write('Введите значение погрешности e=');
  Readln(E);
  If f(a)*f(b)>0 then
       writeln('Условие f(a)*f(b)<0 не выполняется. Введите другие значения a и b')
  else if (abs(f2(a))>1) or (abs(f2(b))>1) then
       writeLn('Условие, производная от φ(x) по модулю <=q<1 не выполняется);
       else begin
         If abs(f2(a))<abs(f2(b)) then begin x:= a;q:=f2(a); end
           else begin x:=b; q:=f2(b); end;
         If (f2(a)<0) then e1:=e else e1:=((1-q)/q)*e;
         Repeat
           x0:=x;
           x:=f1(x0);
         Until abs(x0-x)<=e1;
         WriteLn('Корень=',x:4:2);
```

```
      WriteLn('Значение функции f(x)=', f(x):0:5);
    end;
  ReadKey;
End.
```

2.4.6 распечатка результатов работы программы

Результаты работы программы метода итерации для уравнения 3^x+x+2=0:

Введите начало интервала a=-2.5
Введите конец интервала b=-1
Введите значение погрешности e=0.001
Корень=-2.10
Значение функции= -0.0045

# 3 Варианты заданий

## 3.1 Задание № 1

Отделить корни нелинейных алгебраических уравнений графически с помощью электронной таблицы Excel.

№ 1
1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 5 = 0$
2. $\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{3x^3} = 0;$

№ 2
1. $5^x - 6x - 3 = 0$
2. $\mathrm{arctg}(x - 1) + 2x = 0$

№ 3
1. $2x^2 - 0{,}5^x - 3 = 0$
2. $[\log_2(-x)](x+2) = -1$

№ 4
1. $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$
2. $2\mathrm{arcctg}(x) - x + 3 = 0$

№ 5
1. $(x + 2)^2 2^x = 1$
2. $2\sin(x + \frac{\pi}{3}) = 0{,}5x^2 - 1$

№ 6
1. $5^x + 3x + 2 = 0$
2. $\mathrm{Cos}(x + 0{,}5) = x^3$

№ 7
1. $x^4 - x - 1 = 0$
2. $2e^x = 5x + 3$

№ 8
1. $3^x + 2x - 2 = 0$
2. $(x - 2)\cos(x) = 1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

№ 9
1. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$
2. $(x - 4)^2\log_{0,5}(x - 3) = -1$

№ 10
1. $[(x - 2)^2 - 1]2^x = 1$
2. $\sin(x - 0{,}5) - x + 0{,}8 = 0$

№ 11
1. $x^2 2^x = 1$
2. $tg(x) = x + 1$, $-\pi/2 \le x \le \pi/2$

№ 12
1. $x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 1 = 0$
2. $(x + 2)\log_2(x) = 1$

№ 13
1. $x^4 + 4x^3 - 8x^2 - 17 = 0$
2. $0{,}5^x - 1 = (x + 2)^2$

№ 14
1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
2. $\cos(x + 3) = x^2$

№ 15
1. $3^{x-1} - 4 - x = 0$
2. $(x - 3)^2\log_{0,5}(x - 2) = -1$

№ 16
1. $x^2 - 3 + 0{,}5^x = 0$
2. $arcctg(x) + 2x - 1 = 0$

№ 17
1. $x^4 - x - 1 = 0$
2. $arctg(x) - \dfrac{1}{3x^3} = 0$

№ 18
1. $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$
2. $x^2 - 4 + 0{,}5^x = 0$

№ 19
1. $e^x + x + 1 = 0$
2. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$

№ 20
1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 - 5 = 0$
2. $x\log_3(x + 1) = 1$

№ 21
1. $3^x - 2x + 5 = 0$
2. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$

№ 22
1. $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$
2. $(x - 4)^2\log_{0,5}(x - 3) = -1$

№ 23
1. $arctg\,(x - 1) + 3x - 2 = 0$
2. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$

№ 24
1. $arcctg(x - 1) + 2x - 3 = 0$
2. $x^4 - x - 1 = 0$

№ 25
1. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$
2. $2\sin(x + \dfrac{\pi}{3}) = x^2 - 0{,}5$

№ 26
1. $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$
2. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$

№ 27
1. $arctg(x - 1) + 2x = 0$
2. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$

№ 28
1. $3^x - 2x - 5 = 0$
2. $3x^4 + 8x^3 + 6x^2 - 10 = 0$

№ 29
1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$
2. $0{,}5^x + 1 = (x - 2)^2$

№ 30
1. $\sin(x + 1) = 0{,}5x - 0{,}3$
2. $(x - 1)^2 2^x = 2$

### 3.2 Задание № 2

Отделить корни нелинейных алгебраических уравнений графически с помощью электронной таблицы Excel и уточнить один из них методом половинного деления

№ 1
1. $0{,}5^x + 1 = (x-2)^2$
2. $(x-3)Cos(x) = 1$, $-2\pi \le x \le 2\pi$

№ 2
1. $x^4 - x^3 - 2x^2 + 3x - 3 = 0$
2. $x\lg(x + 1) = 1$

№ 3

1. $2^x + 5x + 3 = 0$
2. $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 0{,}5x = 0$

№ 4

1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$
2. $x^2 - 20\sin(x) = 0$

№ 5

1. $x^2 - 2 + 0{,}5^x = 0$
2. $(x - 1)^2 \lg(x - 11) = 1$

№ 6

1. $3x^4 - 8x^3 - 18x^2 + 2 = 0$
2. $2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$

№ 7

1. $2x^4 - x^2 - 10 = 0$
2. $x\log_3(x + 1) = 1$

№ 8

1. $2x^4 - 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$
2. $2\mathrm{arctg}(x) - 3x + 2 = 0$

№ 9

1. $3^{x-1} - 2 - x = 0$
2. $5\sin(x) = x$

№ 10

1. $2x^4 + 8x^3 + 8x^2 - 1 = 0$
2. $[\log_2(x + 2)](x - 1) = 1$

№ 11

1. $x^4 - 18x^2 + 6 = 0$
2. $2\mathrm{arctg}(x) - \frac{1}{2x^3} = 0$

№ 12

1. $3^x + 2x - 5 = 0$
2. $(x - 2)^2 \lg(x + 11) = 1$

№ 13

1. $e^{-2x} - 2x + 1 = 0$
2. $x^2\cos(2x) = -1$

№ 14

1. $2e^x + 3x + 1 = 0$
2. $x\log_3(x + 1) = 2$

№ 15

1. $2x^3 - 9x^2 - 60x + 1 = 0$
2. $5\sin(x) = x - 1$

№ 16

1. $3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 1 = 0$
2. $\sin(x + 1) = 0{,}5x$

№ 17

1. $(x - 1)^2\, 2^x = 1$
2. $\mathrm{tg}^3(x) = x - 1,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$

№ 18

1. $3^x + 2x - 3 = 0$
2. $(x - 2)^2 \lg(x + 11) = 1$

№ 19

1. $0{,}5^x - 3 = (x + 2)^2$
2. $x^2\cos(2x) = -1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

№ 20

1. $2e^x - 2x - 3 = 0$
2. $\cos(x + 0{,}5) = x^3$

№ 21

1. $2x^2 - 0{,}5^x - 2 = 0$
2. $x\lg(x + 1) = 1$

№ 22

1. $3^x + 2 + x = 0$
2. $5\sin(x) = x - 0{,}5$

№ 23

1. $(x - 2)^2 2^x = 1$
2. $x^2 - 20\sin(x) = 0$

№ 24

1. $(x - 1)^2 2^x = 1$
2. $\mathrm{tg}^3(x) = x + 1,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$

№ 25

1. $2^x - 3x - 2 = 0$
2. $2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$

№ 26

1. $0{,}5^x - 3 = -(x + 1)^2$
2. $x^2\cos(2x) = -1$

№ 27

1. $(0{,}5)^x + 1 = (x - 2)^2$
2. $(x - 3)\cos(x) = 1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

№ 28

1. $2x^2 - 0{,}5^x - 3 = 0$
2. $x\lg(x + 1) = 1$

№ 29

1. $(x-2)^2 2^x = 1$
2. $x^2 - 10\sin(x) = 0$

№ 30

1. $3^x + 5x - 2 = 0$
2. $(x+3)\mathrm{Cos}(x) = 1,\ -2\pi \le x \le 2\pi$

### 3.3 Задание № 3

Отделить корни нелинейных алгебраических уравнений графически с помощью электронной таблицы Excel и уточнить один из них методом хорд

| | | |
|---|---|---|
| № 1 | 1) $x - \sin(x) = 0.25$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 8 = 0$ |
| № 2 | 1) $tg(0.58x + 0.1) = x^2$ | 2) $x^3 - 6x - 8 = 0$ |
| № 3 | 1) $\sqrt{x} - \cos(0.387x) = 0$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$ |
| № 4 | 1) $tg(0.4x + 0.4) = x^2$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$ |
| № 5 | 1) $\lg(x) - \frac{7}{2x+6} = 0$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$ |
| № 6 | 1) $tg(0.5x + 0.2) = x^2$ | 2) $x^3 + x - 5 = 0$ |
| № 7 | 1) $3x - \cos(x) - 1 = 0$ | 2) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0$ |
| № 8 | 1) $x + \lg(x) = 0.5$ | 2) $x^3 + 3x + 1 = 0$ |
| № 9 | 1) $tg(0.5x + 0.1) = x^2$ | 2) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0$ |
| № 10 | 1) $x^2 + 4\sin(x) = 0$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$ |
| № 11 | 1) $ctg(1.05x) - x^2 = 0$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.3x - 1.2 = 0$ |
| № 12 | 1) $tg(0.4x + 0.3) = x^2$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ |
| № 13 | 1) $x\lg(x) - 1.2 = 0$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$ |
| № 14 | 1) $1.8x^2 - \sin(10x) = 0$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$ |
| № 15 | 1) $ctg(x) - \frac{x}{4} = 0$ | 2) $x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$ |
| № 16 | 1) $tg(0.3x + 0.4) = x^2$ | 2) $x^3 + 4x - 6 = 0$ |
| № 17 | 1) $x^2 - 20\sin(x) = 0$ | 2) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0.8 = 0$ |
| № 18 | 1) $ctg(x) - \frac{x}{3} = 0$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$ |
| № 19 | 1) $tg(0.47x + 0.2) = x^2$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.3x + 1.2 = 0$ |
| № 20 | 1) $x^2 + 4\sin(x) = 0$ | 2) $x^3 - 2x + 4 = 0$ |
| № 21 | 1) $ctg(x) - \frac{x}{2} = 0$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0$ |
| № 22 | 1) $2x - \lg(x) - 7 = 0$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$ |
| № 23 | 1) $tg(0.44x + 0.3) = x^2$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 1.2 = 0$ |
| № 24 | 1) $3x - \cos(x) - 1 = 0$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1 = 0$ |
| № 25 | 1) $ctg(x) - \frac{x}{10} = 0$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$ |
| № 26 | 1) $x^2 + 4\sin(x) = 0$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 2 = 0$ |
| № 27 | 1) $tg(0.36x + 0.4) = x^2$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.4x - 1.4 = 0$ |
| № 28 | 1) $x + \lg(x) = 0,5$ | 2) $x^3 + 0.4x^2 + 0.6x - 1.6 = 0$ |

№ 29 1) $ctg(x) - \frac{x}{5} = 0$ 2) $x^3 + x - 3 = 0$

№ 30 1) $2\lg(x) - \frac{x}{2} + 1 = 0$ 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x + 1.4 = 0$

### 3.4 Задание № 4

Отделить корни нелинейных алгебраических уравнений графически с помощью электронной таблицы Excel и уточнить один из них методом Ньютона(касательных)

| | | | |
|---|---|---|---|
| № 1 | $2x^3 - 3x^2 - 12x - 5 = 0$ | № 2 | $x^3 - 3x^2 - 24x - 3 = 0$ |
| № 3 | $x^3 - 3x^2 + 3 = 0$ | № 4 | $x^3 - 12x + 6 = 0$ |
| № 5 | $x^3 + 3x^2 - 24x - 10 = 0$ | № 6 | $2x^3 - 3x^2 - 12x + 10 = 0$ |
| № 7 | $2x^3 + 9x^2 - 21 = 0$ | № 8 | $x^3 - 3x^2 + 2{,}5 = 0$ |
| № 9 | $x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ | № 10 | $x^3 + 3x^2 - 3{,}5 = 0$ |
| № 11 | $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$ | № 12 | $x^3 - 3x^2 - 24x - 8 = 0$ |
| № 13 | $2x^3 + 9x^2 - 10 =0$ | № 14 | $x^3 - 12x + 10 = 0$ |
| № 15 | $x^3 + 3x^2 - 3 = 0$ | № 16 | $2x^3 - 3x^2 - 12x + 1 = 0$ |
| № 17 | $x^3 - 3x^2 - 24x - 5 = 0$ | № 18 | $x^3 - 4x^2 + 2 = 0$ |
| № 19 | $x^3 + 12x - 5 = 0$ | № 20 | $x^3 + 3x^2 - 24x = 0$ |
| № 21 | $2x^3 - 3x^2 - 12x + 12 = 0$ | № 22 | $2x^3 + 9x^2 - 6 = 0$ |
| № 23 | $x^3 - 3x^2 + 1{,}5 = 0$ | № 24 | $x^3 + 3x^2 - 24x + 10 = 0$ |
| № 25 | $x^3 + 3x^2 - 24x - 3 = 0$ | № 26 | $3x^3 - 12x - 10 = 0$ |
| № 27 | $2x^3 + 9x^2 - 4 = 0$ | № 28 | $2x^3 - 3x^2 - 12x + 8 = 0$ |
| № 29 | $x^3 + 3x^2 - 1 = 0$ | № 30 | $x^3 - 3x^2 + 3{,}5 = 0$ |

### 3.5 Задание № 5

Отделить корни нелинейных алгебраических уравнений графически с помощью электронной таблицы Excel и уточнить один из них методом итерации.

| | | |
|---|---|---|
| № 1 | 1) $\ln(x) + (x + 1)^3 = 0$ | 2) $x^3 + 2x^2 + 2 = 0$ |
| № 2 | 1) $x\,2^x = 1$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 9x - 10 = 0$ |
| № 3 | 1) $\sqrt{x+1} = \frac{1}{x}$ | 2) $x^3 - 2x + 2 = 0$ |
| № 4 | 1) $x - \cos(x) = 0$ | 2) $x^3 + 3x - 1 = 0$ |
| № 5 | 1) $3x + \cos(x) + 1 = 0$ | 2) $x^3 + x - 3 = 0$ |
| № 6 | 1) $x + \ln(x) = 0{,}5$ | 2) $x^3 + 0.4x^2 + 1.6x = 0$ |
| № 7 | 1) $2 - x = \ln(x-1)$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.4x - 1.4 = 0$ |

| | | |
|---|---|---|
| № 8 | 1) $(x-1)^2 = \frac{1}{2}e^x$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 2 = 0$ |
| № 9 | 1) $(2 - x)e^x = 0{,}5$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 12x + 3 = 0$ |
| № 10 | 1) $2{,}2x - 2^x = 0$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1 = 0$ |
| № 11 | 1) $x^2 + 4\sin(x+1) = 0$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x + 1.2 = 0$ |
| № 12 | 1) $2x - \lg(x+1) = 7$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 5 = 0$ |
| № 13 | 1) $5x - 8\ln(x+3) = 8$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.5x - 1.4 = 0$ |
| № 14 | 1) $3x - e^x = 0$ | 2) $x^3 + 2x + 4 = 0$ |
| № 15 | 1) $x (x + 1)^2 = 1$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 12 = 0$ |
| № 16 | 1) $x = (x + 1)^3$ | 2) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x + 0.8 = 0$ |
| № 17 | 1) $x^2 = \sin(x+1)$ | 2) $x^3 + 4x - 6 = 0$ |
| № 18 | 1) $x^3 = \sin(x+0{,}5)$ | 2) $x^3 + 0.1x^2 + 0.4x - 1.2 = 0$ |
| № 19 | 1) $x = \sqrt{\lg(x + 2)}$ | 2) $x^3 + 3x^2 + 6x - 1 = 0$ |
| № 20 | 1) $x^2 = \ln(x + 1)$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$ |
| № 21 | 1) $2x + \lg(x-1.2) = - 0.5$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x - 2 = 0$ |
| № 22 | 1) $2x + \cos(x-1.5) = 0.5$ | 2) $x^3 - 0.2x^2 + 0.3x - 1{,}2 = 0$ |
| № 23 | 1) $\sin(0.5x) + 1 = x^2, x > 0$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 12x - 9 = 0$ |
| № 24 | 1) $5x + \lg(x - 1) = 0.5$ | 2) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 2 = 0$ |
| № 25 | 1) $\sin(0.5 + x) = 2x - 0.5$ | 2) $x^3 + 3x + 1 = 0$ |
| № 26 | 1) $\lg(2 + x) + 2x = 3$ | 2) $x^3 + 0.2x^2 + 0.5x - 1.2 = 0$ |
| № 27 | 1) $\lg(1 + 2x) = 2 - x$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 9x + 2 = 0$ |
| № 28 | 1) $2\sin(x - 0.6) = 1.5 - x$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.4x - 1.5 = 0$ |
| № 29 | 1) $x + \lg(1 + x) = 1.5$ | 2) $x^3 - 3x^2 + 6x + 3 = 0$ |
| № 30 | 1) $x + \cos(x-1.2) = 1$ | 2) $x^3 - 0.1x^2 + 0.3x - 0.6 = 0$ |

## 4 Вопросы к защите лабораторной работы

1) Геометрическое обоснование метода половинного деления.
2) Какую последовательность образуют левые концы отрезков, а какую правые?
3) Блок схема алгоритма метода половинного деления.
4) Вывод формулы метода хорд.
5) Геометрическое обоснование метода хорд.
6) Условие выбора начального приближения $x_0$ в методе хорд.
7) Формула хорд в зависимости от выбранного начального приближения $x_0$.
8) Где лежат последовательные приближения $x_n$.
9) Блок схема алгоритма метода хорд.
10) Математический вывод формулы Ньютона для решения нелинейных алгебраических уравнений.
11) Геометрическое обоснование метода Ньютона.
12) Условие выбора начального приближения $x_0$ в методе Ньютона.

13) Условия существования единственного корня на отрезке [a,b] для метода Ньютона.

14) Формула точности приближения метода Ньютона.

15) Блок схема алгоритма метода Ньютона.

16) Формула метода Ньютона.

17) Суть метода итерации для решения нелинейных алгебраических уравнений.

18) Условие выбора начального приближения $x_0$ в методе итераций.

19) Условия существования единственного корня на отрезке [a,b] для метода итераций.

20) Геометрическое обоснование метода итераций.

21) Формула точности приближения метода итераций.

22) Блок схема алгоритма метода итераций.

## Список использованных источников

1 Лапчик, М. П.. Элементы численных методов : учебник для спо / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчик. -М.: Академия, 2007. - 224 с

2 Исаков, В.Н. Элементы численных методов : учебное пособие для пед. вузов/ В.Н. Исаков. – М.: Академия, 2003. – 192 с.

3 Бахвалов, Н.С. Численные методы : учебное пособие для вузов/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 3 – изд., перераб. доп. – М.: Бином: Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.

4 Костомаров, Д.П., Вводные лекции по численным методам : учебное пособие для вузов/ Д.П.Костомаров, А.П.Фаворский. – М.: Логос, 2004. – 184 с.