МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса

Кафедра вычислительной техники и математики

П.Н.ШАЛЫМИНОВ

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ И ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ ПО ТЕМЕ «РЕШЕНИЕ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 519.6(075.32)
ББК 22.193 Я73
Ш 18

Рецензент
заместитель директора по научно-методической работе
Кузюшин С. А.

Шалыминов, П. Н.
Ш18 **Численные методы : методические указания к практическим и лабораторным работам по теме «Решение систем линейных алгебраических уравнений»/ П.Н. Шалыминов – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 37 с.**

Методические указания предназначены для изучения темы «Решение систем линейных алгебраических уравнения» по дисциплине «Численные методы» студентами очной и заочной формы обучения специальности 230105.01 Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем.

Методические указания составлены с учетом требований государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования «Государственные требования к минимуму содержания и уровню подготовки выпускников по специальности 230105.51 Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем (введены в действие с 21.01.03 г, примерная программа учебной дисциплины «Численные методы»).

ББК 22.193 Я73

Содержание

Введение

В данном методическом указании излагается краткий теоретический материал, алгоритмы и последовательность решения систем линейных алгебраических уравнений методами Гаусса, итераций, Зейделя с помощью персонального компьютера.

Методическое указание может быть использовано студентами очной и заочной формы обучения при изучении данной темы, которая есть в других дисциплинах, а также преподавателями этих дисциплин.

1 Решение систем линейных алгебраических уравнений

Цель работы. Изучить решение систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса, итерации, Зейделя, разработать блок схемы алгоритмов и программы решения систем линейных алгебраических уравнений.

1.1 Ход работы

1) Изучить теоретический материал по данной теме;
2) Для методов итерации и Зейделя исходные системы заменить равносильными;
3) Словесный алгоритм;
4) Разработать блок – схему алгоритма решения уравнения для каждого метода;
5) Составить программу;
6) Выполнить программу на ПК;
7) Оформить отчет.

1.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:
1) Тема работы;
2) Цель работы;
3) Ход работы;
4) Постановка задачи;
5) Замена исходной системы равносильной(для метода итераций и Зейделя);
6) Словесный алгоритм метода решения;
7) Блок схема алгоритма метода решения;
8) Распечатка программы метода решения;
9) Результаты работы программы.

1.3 Вопросы для допуска к выполнению работы

1) Какая система алгебраических уравнений называется линейной?
2) Какая система алгебраических уравнений называется не линейной?
3) Какие методы для решения систем линейных алгебраических уравнений называются (СЛАУ) точными?
4) Какие методы для решения систем линейных алгебраических уравнений называются (СЛАУ) итерационными?

5) Как записывается систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в матричной форме?

6) Что называется решением линейной, алгебраической системы?

7) Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной?

8) Какие системы линейных алгебраических уравнений называется равносильными?

9) Какая матрица называется расширенной?

10) Какая матрица называется транспонированной?

2 Методические указания к решению систем линейных алгебраических уравнений методами Гаусса, итераций, Зейделя

2.1 Метод Гаусса

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n, \end{cases} \tag{1}$$

при условии, что ее матрица А не вырождена, т.е. det $A<>0$.

Метод Гаусса решения системы (1) – это метод последовательных исключений неизвестных. Суть его состоит в преобразовании системы (1) к системе с треугольной матрицей, из которой затем последовательно (обратным ходом) получаются значения всех неизвестных.

Идея последовательного исключения неизвестных может быть реализована различными вычислительными системами.

Рассмотрим так называемую систему единственного деления.

Подвергнем систему (1) следующему преобразованию. Считая, что $a_{11}<>0$ (ведущий элемент), разделим на a_{11} коэффициента первого уравнения. Выполнения условия $a_{11}<>0$ можно добиться всегда путем перестановки уравнений системы. В результате деления получим:

$$x_1+a'_{12}x_2+a'_{13}x_3+\ldots+a'_{1n}x_n=b'_1, \tag{2}$$

Пользуясь уравнением (2), легко исключить неизвестные x_1 из 2-ого, 3-его и т.д. n-ого уравнения. Для этого коэффициенты уравнения (2) умножим на a_{21} и вычтем из 2-ого и результат запишем на место второго уравнения, затем на a_{31} и вычтем из 3-ого уравнения и т. д. В результате получим:

$$
\begin{array}{l}
x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 + \ldots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\
0 + a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \ldots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 + a'_{n2}x_2 + a'_{n3}x_3 + \ldots + a'_{nn}x_n = b'_n
\end{array}
\qquad (3)
$$

Затем все коэффициенты 2-ого уравнения из системы (3) разделим на a'_{22} и получим:

$$x_2 + a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2\ , \qquad (4)$$

Затем все коэффициенты уравнения из (4) умножим на коэффициенты a'_{32}, $a'_{42}, \ldots, a'_{n2}$ и вычтем соответственно из 3-его, 4-ого и т.д. n-ого уравнения и получим:

$$
\begin{array}{l}
x_1 + a''_{12}x_2 + a''_{13}x_3 + \ldots + a''_{1n}x_n = b''_1 \\
0 \;+\; x_2 + a''_{23}x_3 + \ldots + a''_{2n}x_n = b''_2 \\
0 \;+\; 0 + a''_{33}x_3 + \ldots + a''_{3n}x_n = b''_3 \\
0 \;+\; 0 + a''_{43}x_3 + \ldots + a''_{4n}x_n = b''_4\ , \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
0 \;+\; 0 + a''_{n3}x_3 + \ldots + a''_{nn}x_n = b''_n
\end{array}
\qquad (5)
$$

Повторив такие же преобразования с 3-им, 4-ым … и (n-1)-ым уравнением получим:

$$
\begin{array}{r}
x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = \beta_1 \\
x_2 + \alpha_{23}x_3 + \ldots + \alpha_{2n}x_n = \beta_2 \\
x_3 + \ldots + \alpha_{3n}x_n = \beta_3 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\
x_{n-1} + \alpha_{n-1n}x_n = \beta_{n-1} \\
\alpha_{nn}x_n = \beta_n
\end{array}
\qquad (6)
$$

Из системы (6) последовательно находятся значения всех неизвестных x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, … x_2, x_1,

$$
\begin{array}{l}
x_n = \beta_n/\alpha_{nn} \\
x_{n-1} = \beta_{n-1} - \alpha_{n-1n}x_n \\
x_{n-2} = \beta_{n-2} - \alpha_{n-2,n-1}x_{n-1} - \alpha_{n-2,n}x_n \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ , \\
x_1 = \beta_1 - \alpha_{12}x_2 - \alpha_{13}x_3 - \ldots - \alpha_{1n}x_n
\end{array}
\qquad (7)
$$

Таким образом, процесс решения системы (1) по методу Гаусса распадается на два этапа. Первый этап, состоящий в последовательном исключении неизвестных, называется прямым ходом. Второй – нахождение значений неизвестных - обратным ходом. Коэффициенты при неизвестных в системе (6) вычисляются по формулам:

$$\alpha_{1j}=a_{1j}/a_{11} \quad (j=1,2,\ldots,n;)$$
$$\alpha_{ij}=a_{ij}-a_{ik}*\alpha_{kj} \quad (j=1, 2, \ldots n;\ i=2, 3, \ldots n;\ k=1, 2, \ldots n;)$$
$$\beta_i=b_i-\beta_k*a_{ik} \quad (i=2, 3, \ldots n; k=1, 2, \ldots n;)$$

2.1.1 Пример решения систем линейных алгебраических уравнений методом Гаусса

Методом Гаусса решить систему:

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3=1 \\ 3x_1-x_2+2x_3=1 \\ 4x_1-x_2+5x_3=1 \end{cases}$$

Решение: Разделив 1-ое уравнение системы на 2 , получим систему

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ 3x_1-x_2+2x_3=1 \\ 4x_1-x_2+5x_3=1 \end{cases}$$

Вычтем из 2-ого уравнения, полученной системы 1-ое уравнение, умноженное на 3, а из 3-его уравнения 1-ое уравнение, умноженное на 4, и получим систему

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ \quad -2.5x_2-x_3=-0.5 \\ \quad -3x_2+x_3=-5 \end{cases}$$

Разделив 2-ое уравнение, полученной системы на -2,5 , получим:

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ \quad x_2+0.4x_3=0.2 \\ \quad -3x_2+x_3=-5 \end{cases}$$

Вычтем из 3-его уравнения, полученной системы 2-ое уравнение, умноженное на –3 и получим систему:

$$\begin{cases} x_1+0.5x_2+x_3=0.5 \\ \quad x_2+0.4x_3=0.2 \\ \quad\quad 2.2x_3=-4.4 \end{cases}$$

Из 3-его уравнения, полученной системы находим x_3=-2; подставив это значение во 2-ое уравнение, полученной системы получим x_2=0,2-0,4x_3=0,2-0,4(-2)=1; наконец, подставив значение x_3=-2 и x2=1 в 1-ое уравнение, полученной системы , находим x_1=0,5-0,5x_2-x_3=0,5-0,5 1 - (-2)=2. Итак, получаем ответ x_1=2, x_2=1, x_3=-2

Проверка:

$$
\begin{aligned}
&2*2+1+2*(-2)=1\\
&3*2-1+2*(-2)=1\\
&4*2-1+5*(-2)=-3
\end{aligned}
$$

2.1.2 Постановка задачи

Найти корни системы линейных алгебраических уравнений методом Гаусса:

$$
\begin{cases}
0.63x_1-0.76x_2+1.34x_3+0.37x_4=1.21\\
0.54x_1-0.83x_2+0.74x_3-1.27x_4=0.86\\
0.24x_1-0.44x_2+0.35x_3+0.55x_4=0.25\\
0.43x_1-1.21x_2+2.32x_3-1.41x_4=1.55
\end{cases}
$$

2.1.3 Словесный алгоритм метода Гаусса.

1) Используя циклы ввести коэффициенты матриц A и B, т. е. a_{ij} и b_i;
2) Открыть цикл по i, I=1,2,…n;
3) Запомнить элемент a_{ii}, $d=a_{ii}$;
4) Открыть цикл по j, j=i, i+1,…n;
5) Вычислить $a_{ij}=a_{ij}/d$;
6) Конец цикла по j;
7) Вычислить $b_i=b_i/d$;
8) Открыть цикл по i1, i1=i+1,i+2,….,n;
9) Запомнить a_{i1i}, $d=a_{i1i}$;
10) Открыть цикл по j1, j1=i, i+1,….,n;
11) Вычислить $a_{i1j1}=a_{i1j1}-a_{ij1}*d$;
12) Конец цикла по j1;
13) Вычислить $b_{i1}=b_{i1}-b_i*d$;
14) Конец цикла по i1;
15) Конец цикла по i;
16) Открыть циклы для вывода матриц a_{ij},b_i, результатов прямого хода;
17) Вычислить x_n по формуле $x_n=b_n/a_{n,n}$;
18) Открыть цикл по i, i=n-1,n-2,….,1;
19) s=0;

20) Открыть цикл по j, $j=n,n-1,\ldots,i+1$;
21) Вычислить s, $s=s+a_{ij}*x_j$;
22) Конец цикла по j;
23) Вычислить $x_i=b_i-s$;
24) Конец цикла по i;
25) Вывести результат x_i.

2.1.4 Блок схема алгоритма метода Гаусса

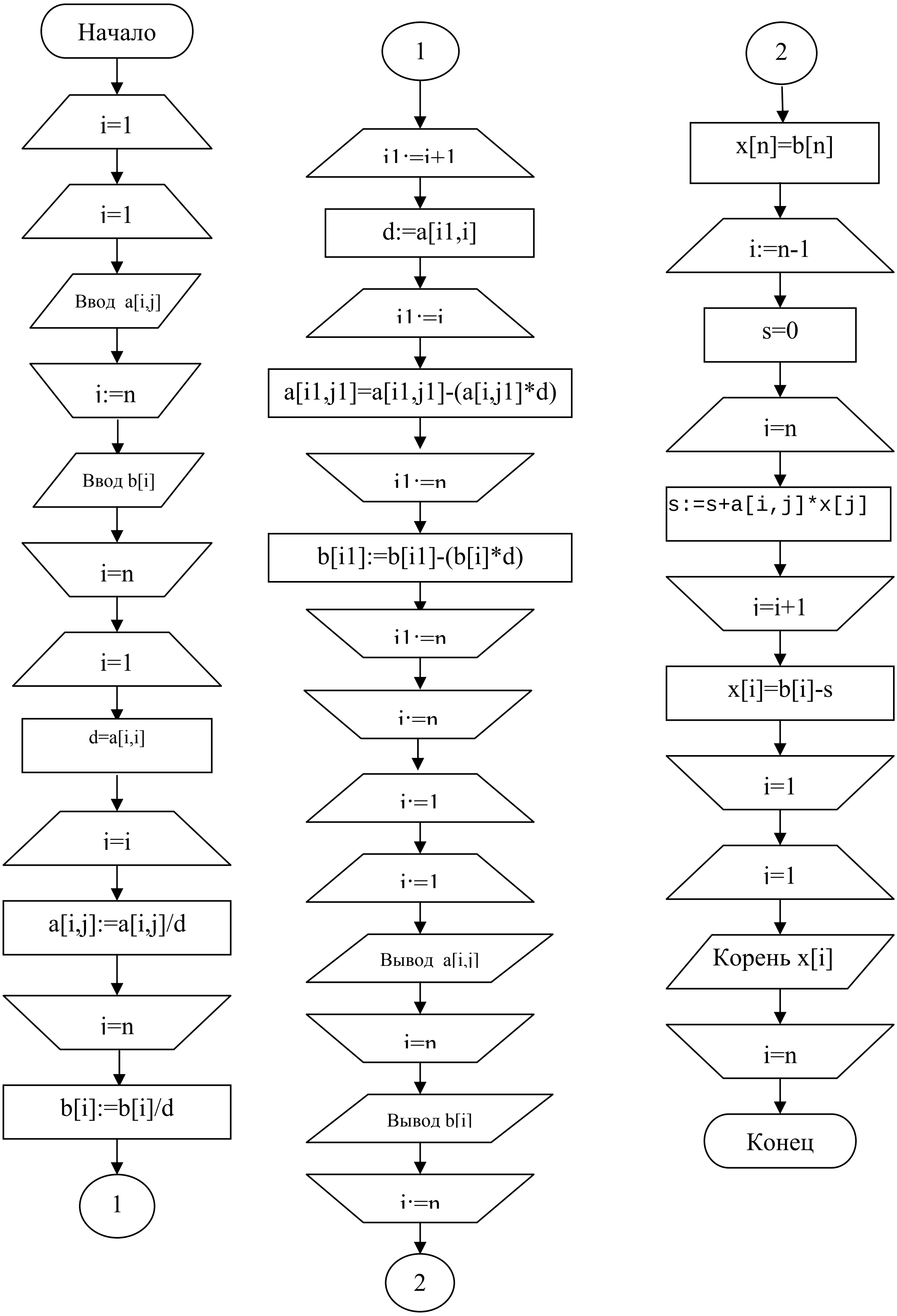

Рисунок 1 - Блок-схема алгоритма метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений

2.1.5 Распечатка программы метода Гаусса

```
Program gauss;
Uses Crt;
Const
   r=10;
Var a, a1:array[1..r, 1..r] of real
   b, b1, x:array[1..r] of real
   i, j, n, i1, j1:integer
   d, d1, s:real;
Begin
  ClrScr;
  Repeat
    write('   Введите размерность системы n=');
    readln(n);
    if n>r then writeln('   Задаваемая размерность должна быть не более
10');
  until(n<=r);
  writeln('   Введите коэффициенты матрицы А и В');
  For i:=1 To n Do begin
    For j:=1 To n Do begin
      write('   a[', i, ',', j, ']=');
      read(a[i, j]); a1[i, j]:=a[i, j];
    end;
    write('  b[', i, ']=');
    readln(b[i]); b1[i]:=b[i];
  end;
  For i:=1 To n Do begin
    d:=a[i, i];
    For j:=i To n Do a[i,j]:=a[i,j]/d;
    b[i]:=b[i]/d;
    For i1:=(i+1) To n Do begin
      d:=a[i1,i];
      For j1:=i To n Do a[i1,j1]:=a[i1,j1]-d*a[i,j1];
      b[i1]:=b[i1]-b[i]*d;
    end;
  end;
  Writeln;
  Writeln('   Результат прямого хода метода Гаусса');
  for i:=1 to n do begin
    for j:=1 to n do write('   ',a[i,j]:8:4);
    writeln('  ',b[i]:8:4);
  end;
  writeln;
```

```
 x[n]:=b[n]/a[n,n];
 For i:=(n-1) DownTo 1 Do begin
   s:=0;
   For j:=(i+1) To n Do s:=s+a[i,j]*x[j];
   x[i]:=b[i]-s;
 end;
 writeln;
 writeln('   Корни уравнения:');
 writeln;
 For i:=1 To n Do writeln('   x[', i, ']=', x[i]:0:4);
 writeln;
 writeln('   Результаты проверки решения системы');
 writeln;
 for i:=1 to n do begin
   s:=0;
   for j:=1 to n do s:=s+a1[i,j]*x[j];
   writeln('   Погрешность ',i,'-го уравнения =',(s-b1[i]):0:6
 end;
 readln;
End.
```

2.1.6 Результаты выполнения программы на ЭВМ

Результаты выполнения программы метода Гаусса для системы линейных алгебраических уравнений.

```
 Введите размерность системы n=4
 Введите коэффициенты матрицы A и B
 a[1,1]=0.63
 a[1,2]=-0.76
 a[1,3]=1.34
 a[1,4]=0.37
b[1]=1.21
 a[2,1]=0.54
 a[2,2]=-0.83
 a[2,3]=0.74
 a[2,4]=-1.27
b[2]=0.86
 a[3,1]=0.24
 a[3,2]=-0.44
 a[3,3]=0.35
 a[3,4]=0.55
b[3]=0.25
```

a[4,1]=0.43
a[4,2]=-1.21
a[4,3]=2.32
a[4,4]=-1.41
b[4]=1.55
a[4,3]=2.32
a[4,4]=-1.41
b[4]=1.55

Результат прямого хода метода Гаусса

1.0000	-1.2063	2.1270	0.5873	1.9206
0.0000	1.0000	2.2880	8.8880	0.9920
0.0000	0.0000	1.0000	9.5014	-0.3356
0.0000	0.0000	0.0000	1.0000	-0.1009

Корни уравнения:

x[1]=1.2120
x[2]=0.4627
x[3]=0.6234
x[4]=-0.1009

Результаты проверки решения системы

Погрешность 1-го уравнения =0.000000
Погрешность 2-го уравнения =0.000000
Погрешность 3-го уравнения =0.000000
Погрешность 4-го уравнения =0.000000

2.2 Метод итерации

При большом числе неизвестных линейной системы схема метода Гаусса, дающая точное решение, становится весьма сложной. В этих условиях для нахождения корней системы иногда удобнее пользоваться приближенными численными методами. Одним из них является метод итерации.

Пусть дана линейная система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=b_2\,, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\ldots+a_{nn}x_n=b_n\,, \end{cases} \qquad (8)$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii}<>0$ $(i=1,2, \ldots, n)$, разрешим первое уравнение системы (8) относительно x_1, второе относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1=\beta_1-\alpha_{12}x_2-\alpha_{13}x_3-\ldots-\alpha_{1n}x_n \\ x_2=\beta_2-\alpha_{21}x_1-\alpha_{23}x_3-\ldots-\alpha_{2n}x_n \\ x_3=\beta_3-\alpha_{31}x_1-\alpha_{32}x_2-\ldots-\alpha_{3n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n=\beta_n-\alpha_{n1}x_1-\alpha_{n2}x_2-\ldots-\alpha_{n-1n}x_{n-1} \end{cases}, \qquad (9)$$

где $\beta_i=b_i/a_{ii}$, $\alpha_{ij}=-a_{ij}/a_{ii}$ при $i<>j$, $\alpha_{ij}=0$ при $i=j$ $(i,j=1,2,\ldots,n)$.

Введя матрицы:

$$\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \Lambda & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \Lambda & \alpha_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \Lambda & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \Lambda \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (9) можно записать в матричной форме:

$$\overline{X}=\overline{\beta}+\overline{\alpha}\overline{X}, \qquad (10)$$

Систему (9) будем решать методом последовательных приближений. За первое приближение принимаем, например, столбец свободных членов $x^{(0)}=\beta$.

Далее, последовательно строим матрицы-столбцы

$x^{(1)}=\beta+\alpha\, x^{(0)}$ - первое приближение,
$x^{(2)}=\beta+\alpha\, x^{(1)}$ - второе приближение и т.д.

Вообще говоря, любое (k+1) –ое приближением вычисляют по формуле

$$x^{(k+1)}=\beta+\alpha\, x^{(k)}, \qquad k=(0,1,2,\ldots,n,\ldots)$$

Если последовательность приближений $x^{(0)}$, $x^{(1)}$, … $x^{(k)}$, … имеет предел

$$x=\lim_{n\to\infty} x^{(k)}$$

то этот предел является решением системы (9), а, следовательно, и системы (8).

Напишем формулы приближений в развернутом виде:

$$\left.\begin{array}{l} x_i^{(0)} = \beta_i \\ x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)} \\ (\alpha_{ii}=0,\ i=1,2,\ \ldots n,\ k=0,1,2,\ldots) \end{array}\right\} \quad , \quad \text{-формула итерации} \qquad (11)$$

Теорема. Если для приведенной (эквивалентной) системы (8) выполнено, по меньшей мере, одно из условий

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1\ (i = 1,2,\Lambda\ ,n)$ - сумма коэффициентов по строкам <1;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_{ij}| < 1\ (j = 1,2,\Lambda\ ,n)$ - сумма коэффициентов по столбцам <1;

3) $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} |\alpha_{ij}|^2} < 1,$

то процесс итерации (11) сходится к единственному решению этой системы, независимо от выбора начального приближения.

Следствие. Для системы $\sum\limits_{j=1}^{n} \boldsymbol{a_{ij} x_j} = \boldsymbol{b_i}$ (i=1,2,…,n) метод итерации сходится, если выполнено одно из неравенств:

1) $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|\ (i = 1,2,\Lambda\ ,n)$;

2) $\sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}| < |a_{ii}|\ (j = 1,2,\Lambda\ ,n)$.

Оценка погрешности по формуле $|x_{k+1}-x_k|<\varepsilon$.

2.2.1 Постановка задачи

Найти корни системы линейных алгебраических уравнений методом итераций:

$$\begin{cases} 2.23x_1-0.73x_2+1.27x_3=2.43 & \text{(I)} \\ 2.15x_1+3.17x_2-1.43x_3=-0.32 & \text{(II)} \\ 0.83x_1+0.72x_2+2.12x_3=1.42 & \text{(III)} \end{cases}$$

2.2.2 Замена исходной системы равносильной

Из исходной системы видим, что ни одно из условий следствия для исходной системы не выполняется.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы сумму остальных элементов строк.

$$\begin{cases} 4.38x_1-2.44x_2-0.16x_3=1.7 & \text{I (I+II)} \\ 1.58x_1+5.34x_2+1.54x_3= -0.32 & \text{II (2*III+II-I)} \\ 0.83x_1+0.72x_2+2.12x_3=1.42 & \text{III} \end{cases}$$

Из преобразованной системы видим, что:

$$2.44+0.16<4.38$$
$$1.58+1.54<5.34$$
$$0.83+0.72<2.12,$$

т. е. выполняется 1-ое условие из следствия, следовательно, можно преобразованную систему заменить эквивалентной.

Для получения эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений в первом уравнении системы слева оставим $4.38x_1$,а остальные элементы перенесем в правую часть, во втором уравнении оставим $5.34x_2$, а остальные элементы перенесем в правую часть, в третьем уравнении оставим $2.12x_3$, а остальные элементы перенесем в правую часть. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 4.38x_1=2.44x_2 + 0.16x_3 + 1.7 \\ 5.34x_2=-1.58x_1 - 1.54x_3 - 0.32 \\ 2.12x_3=-0.83x_1 - 0.72x_2 + 1.42 \end{cases}$$

В первом уравнении системы слева и справа прибавим $5.62x_1$, во втором $4.66x_2$, в третьем $7.88x_3$. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 10x_1=5.62x_1 + 2.44x_2 + 0.16x_3 + 1.7 \\ 10x_2=-1.58x_1 +4.66x_2- 1.54x_3 - 0.32 \\ 10x_3=-0.83x_1 - 0.72x_2 + 7.88x_3+ 1.42 \end{cases}$$

Разделим все элементы каждого уравнения на 10 и в итоге получим следующую эквивалентную систему:

$$\begin{cases} x1= 0.562x_1 + 0.244x_2 + 0.016x_3 + 0.17 \\ x2=-0.158x_1 + 0.466x_2 - 0.154x_3 - 0.032 \\ x3=-0.083x_1 - 0.072x_2 + 0.788x_3 + 0.067 \end{cases}$$

Из эквивалентной системы видно что:

$$0.562+0.244+0.016<1$$
$$0.158+0.466+0.154<1$$
$$0.083+0.072+0.788<1,$$

т. е. выполняется 1-ое условие из теоремы, следовательно, эквивалентная система будет сходиться и за первоначальное приближение, можно взять любое значение вектора X. За первоначальное приближение возьмем вектор свободных членов, т. е. 0.17,-0.032,0.67.

Исходными данными для решения данной системы методом итерации являются:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.562 & 0.244 & 0.016 \\ -0.158 & 0.466 & -0.154 \\ -0.083 & -0.072 & 0.788 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} 0.17 \\ -0.032 \\ 0.062 \end{bmatrix}$$

2.2.3 Словесный алгоритм метода итераций

1) Ввести размерность системы n;
2) Если размерность системы n>10, то сообщение об ошибке и перейти к пункту 1;
3) Используя, операторы цикла ввести коэффициенты эквивалентной системы $a_{i,j}$ и b_i;
4) Используя, операторы цикла задать первоначальное приближение $x1_i=b_i$;
5) Ввести погрешность e;
6) Открыть цикл по i=1,2,…,n;
7) $x0_i=x1_i$; Конец цикла по i;
8) Открыть цикл по i=1,2,…,n;
9) s=0;
10) Открыть цикл по j=1,2,…,n;
11) $s=s+a_{ij}*x0_j$; конец цикла по j;
12) $x1_i=b_i+s$; Конец цикла i;
13) p=true;
14) Открыть цикл по i=1,2,…,n;
15) Если $|x0_i-x1_i|>e$, то p=false;
16) Если p=true, то перейти к пункту 6;
17) Используя оператор цикла вывести $x1_i$;
18) Конец.

2.2.4 Блок схема алгоритма метода итераций

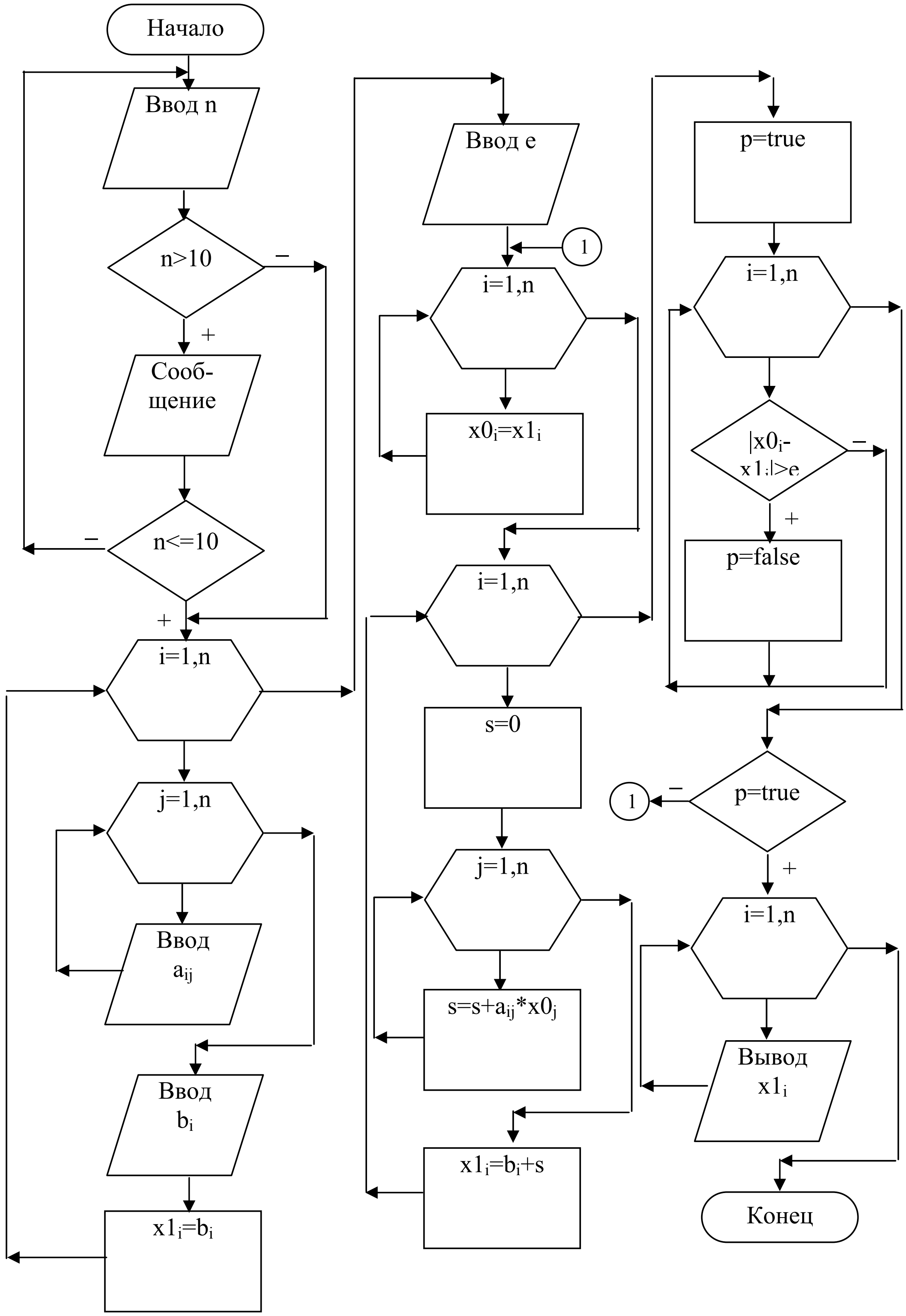

Рисунок 2 - Блок-схема алгоритма метода итерации для решения систем линейных алгебраических уравнений

2.2.5 Распечатка программы метода итерации

```
Program iteracia;
uses crt;
const r=10;
var
   a:array[1..r, 1..r] of real;
   b,x0,x1:array[1..r] of real;
   i,j,n:integer;
   s,e:real;
   p:boolean;
begin
  clrscr;
  repeat
   write('   Введите размерность матрицы n=');
   readln(n);
   if n>r then writeln('   Задаваемая размерность не должна быть больше
10');
  until(n<=r);
  writeln;
  writeln('   Введите коэффициенты эквивалентной системы ');
  writeln;
  for i:=1 to n do begin
   for j:=1 to n do begin
     write('   a[',i,',',j,']=');
     readln(a[i,j])
 end;
   write('   b[',i,']=');
   readln(b[i]);
   x1[i]:=b[i];
 end;
 writeln;
 write('   Введите погрешность e=');
 readln(e);
 repeat
   for i:=1 to n do x0[i]:=x1[i];
   for i:=1 to n do begin
     s:=0;
     for j:=1 to n do s:=s+a[i,j]*x0[j];
     x1[i]:=b[i]+s;
   end;
   p:=true;
   for i:=1 to n do
      if abs(x0[i]-x1[i])>e then p:=false;
```

```
  until p=true;
  writeln;
  writeln('   Корни уравнения:');
  writeln;
  for i:=1 to n do writeln('   x', i, '=', x1[i]:0:6);
  writeln;
  writeln('   Результаты проверки решения системы');
  writeln;
  for i:=1 to n do begin
    s:=0;
    for j:=1 to n do s:=s+a[i,j]*x1[j];
    writeln('   Погрешность ',i,'-го уравнения =',(x1[i]-s-b[i]):0:6);
  end;
  readln;
end.
```

2.2.6 Результаты выполнения программы на ЭВМ

Результаты выполнения программы метода итерации для системы линейных алгебраических уравнений.

```
Введите размерность матрицы n=3

Введите коэффициенты эквивалентной системы

a[1,1]=0.562
a[1,2]=0.244
a[1,3]=0.016
b[1]=0.170
a[2,1]=-0.158
a[2,2]=0.466
a[2,3]=-0.154
b[2]=-0.032
a[3,1]=-0.083
a[3,2]=-0.072
a[3,3]=0.788
b[3]=0.067

Введите погрешность e=0.0001
Корни уравнения:
x[1]=0.274333
x[2]=-0.222962
x[3]=0.284025
```

Результаты проверки решения системы

Погрешность 1-го уравнения =0.000016
Погрешность 2-го уравнения =0.000023
Погрешность 3-го уравнения =-0.000070

2.3 Метод Зейделя

Метод Зейделя представляет собой модификацию метода итерации. Основная его идея заключается в том, что при вычислении (к+1)-ого приближения неизвестной x_i учитываются уже вычисленные ранее (к+1)-ые приближения неизвестных $x_1, x_2, x_3, \dots, x_{i-1}$.

Пусть дана линейная система:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\dots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\dots+a_{2n}x_n=b_2\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+a_{n3}x_3+\dots+a_{nn}x_n=b_n\ , \end{cases} \qquad (12)$$

Предполагая, что диагональные коэффициенты $a_{ii}<>0$ (i=1,2, …, n), разрешим первое уравнение системы (12) относительно x_1, второе относительно x_2 и т.д. Тогда получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} x_1=\beta_1-\alpha_{12}x_2-\alpha_{13}x_3-\dots-\alpha_{1n}x_n \\ x_2=\beta_2-\alpha_{21}x_1-\alpha_{23}x_3-\dots-\alpha_{2n}x_n \\ x_3=\beta_3-\alpha_{31}x_1-\alpha_{32}x_2-\dots-\alpha_{3n}x_n\ , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n=\beta_n-\alpha_{n1}x_1-\alpha_{n2}x_2-\dots-\alpha_{n-1n}x_{n-1} \end{cases} \qquad (13)$$

где $\beta_i=b_i/a_{ii}$, $\alpha_{ij}=-a_{ij}/a_{ii}$ при $i<>j$, $\alpha_{ij}=0$ при i=j (i,j=1,2,…,n).

В общем виде ее можно записать

$$x_i=\beta_i+\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}x_j \quad (i=1,2,\Lambda\ ,n)$$

Введя матрицы:

$$\alpha=\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \Lambda & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \Lambda & \alpha_{2n} \\ \Lambda & \Lambda & \Lambda & \Lambda \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \Lambda & \alpha_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \beta=\begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \Lambda \\ \beta_n \end{bmatrix},$$

систему (13) можно записать в матричной форме:

$$\overline{X} = \overline{\beta} + \overline{\alpha}\overline{X} \ , \qquad (14)$$

Выберем произвольное начальное приближение корней $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, \Lambda\ , x_n^{(0)}$, стараясь, конечно, чтобы они в какой-то мере соответствовали искомым неизвестным x_1, x_2, x_3, …,x_n.

Далее, предполагая, что k-е приближения $x_i^{(k)}$ корней известны, согласно Зейделю будем строить (к+1)-ые приближения корней по следующим формулам:

$$x_1^{(k+1)} = \beta_1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$

$$x_2^{(k+1)} = \beta_2 + \alpha_{21} x_1^{(k+1)} + \sum_{j=2}^{n} \alpha_{2j} x_j^{(k)}$$

$$x_3^{(k+1)} = \beta_3 + \alpha_{31} x_1^{(k+1)} + \alpha_{32} x_2^{(k+1)} + \sum_{j=3}^{n} \alpha_{3j} x_j^{(k)}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_i^{(k+1)} = \beta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} \alpha_{ij} x_j^{(k)}$$ -формула Зейделя

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n^{(k+1)} = \beta_n + \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_{nj} x_j^{(k+1)} + \alpha_{nn} x_n^{(k+1)}$$

Обычно метод Зейделя дает лучшую сходимость, чем метод простой итерации, но приводит к более громоздким вычислениям.

Достаточным условием сходимости метода Зейделя для приведенной системы (13) является выполнение одного из условий:

1) $\sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1 \ (i = 1,2,\Lambda\ ,n)$ - сумма коэффициентов по строкам <1;

2) $\sum_{i=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right| < 1 \ (j = 1,2,\Lambda\ ,n)$ - сумма коэффициентов по столбцам <1;

3) $\sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left|\alpha_{ij}\right|^2} < 1$.

Для исходной системы $\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{a}_{ij} \boldsymbol{x}_j = \boldsymbol{b}_i$ (i=1,2,…,n) метод Зейделя сходится, если выполнено одно из неравенств:

1) $\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right| \ (i = 1,2,\Lambda\ ,n)$;

2) $\sum_{i=1}^{n}\left|a_{ij}\right| < \left|a_{ii}\right| \ (j = 1,2,\Lambda\ ,n)$.

2.3.1 Постановка задачи

Найти корни системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя:

$$\begin{cases} 0.64x_1-1.05x_2+2.93x_3=1.18 & \text{I} \\ 1.05x_1-1.41x_2+0.16x_3=-0.27 & \text{II} \\ -2.93x_1+0.16x_2-1.51x_3=0.72 & \text{III} \end{cases}$$

2.3.2 Замена исходной системы равносильной

Из исходной системы видим, что ни одно из условий следствия для исходной системы не выполняется.

Приведем систему к виду, в котором элементы главной диагонали превосходили бы сумму остальных элементов строк.

Для этого, переставим в исходной системе 1-ое и 3- ье уравнения

$$\begin{cases} -2.93x_1+0.16x_2-1.51x_3=0.72 & \text{III} \\ 1.05x_1-1.41x_2+0.16x_3=-0.27 & \text{II} \\ 0.64x_1-1.05x_2+2.93x_3=1.18 & \text{I} \end{cases}$$

Для получения эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений в первом уравнении системы слева оставим $-2.93x_1$,а остальные элементы перенесем в правую часть, во втором уравнении оставим $-1.41x_2$, а остальные элементы перенесем в правую часть, в третьем уравнении оставим $2.93x_3$, а остальные элементы перенесем в правую часть и 1-ое и 2-ое уравнение умножим на –1. В результате получим следующую систему:

$$\begin{cases} 2.93x_1=-0.72+0.16x_2-1.51x_3 \\ 1.41x_2= 0.27+1.05x_1+0.16x_3 \\ 2.93x_3= 1.18 -0.64x_1+1.05x_2 \end{cases}$$

Для удобства выполнения операции деления, в первом уравнении слева и справа прибавим $7.07x_1$, во втором уравнении $8.59x_2$, в третьем $7.07x_3$ и получим

$$\begin{cases} 10x_1 = -0.72+7.07x_1+0.16x_2-1.51x_3 \\ 10x_2 = 0.27+1.05x_1+8.59x_2+0.16x_3 \\ 10x_3 = 1.18-0.64x_1+1.05x_2+7.07x_3 \end{cases}$$

Разделим все коэффициенты при неизвестных на 10 и получим:

$$\begin{cases} x_1 = -0.072+0.707x_1+0.016x_2-0.151x_3 \\ x_2 = 0.27+0.105x_1+0.859x_2+0.016x_3 \\ x_3 = 0.118-0.064x_1+0.105x_2+0.707x_3 \end{cases}$$

Таким образом, получили равносильную (эквивалентную) систему, в которой сумма коэффициентов при неизвестных по строкам меньше 1, т. е.

$$0.707+0.016+0.151<1,$$
$$0.105+0.859+0.016<1,$$
$$0.064+0.105+0.707<1.$$

Следовательно, полученная эквивалентная система сходится.

Исходными данными для решения системы методом Зейделя являются:

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0.707 & 0.016 & -0.151 \\ 0.105 & 0.859 & 0.016 \\ -0.064 & 0.105 & 0.707 \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} -0.072 \\ 0.27 \\ 0.118 \end{bmatrix}$$

2.3.3 Словесный алгоритм метода Зейделя

1) Ввести размерность системы n;
2) Если размерность системы n>10, то сообщение об ошибке и перейти к пункту 1;
3) Используя операторы цикла ввести коэффициенты эквивалентной системы $a_{i,j}$ и b_i;
4) Используя операторы цикла задать первоначальное приближение $x1_i=b_i$;
5) Ввести погрешность e;
6) Открыть цикл по i=1,2,…,n;
7) $x0_i=x1_i$; Конец цикла по i;
8) Открыть цикл по i=1,2,…,n;
9) s=0;
10) Открыть цикл по j=1,2,…,n;
11) если j<i то $s=s+a_{ij}*x1_j$ иначе $s=s+a_{ij}*x0_j$; конец цикла по j;
12) $x1_i=b_i+s$; Конец цикла i;
13) p=true;

14) Открыть цикл по $i=1,2,\ldots,n$;
15) Если $|x0_i-x1_i|>e$, то p=false;
16) Если p=true, то перейти к пункту 6:
17) Используя оператор цикла вывести $x1_i$;
18) Конец.

2.3.4 Блок схема алгоритма метода Зейделя

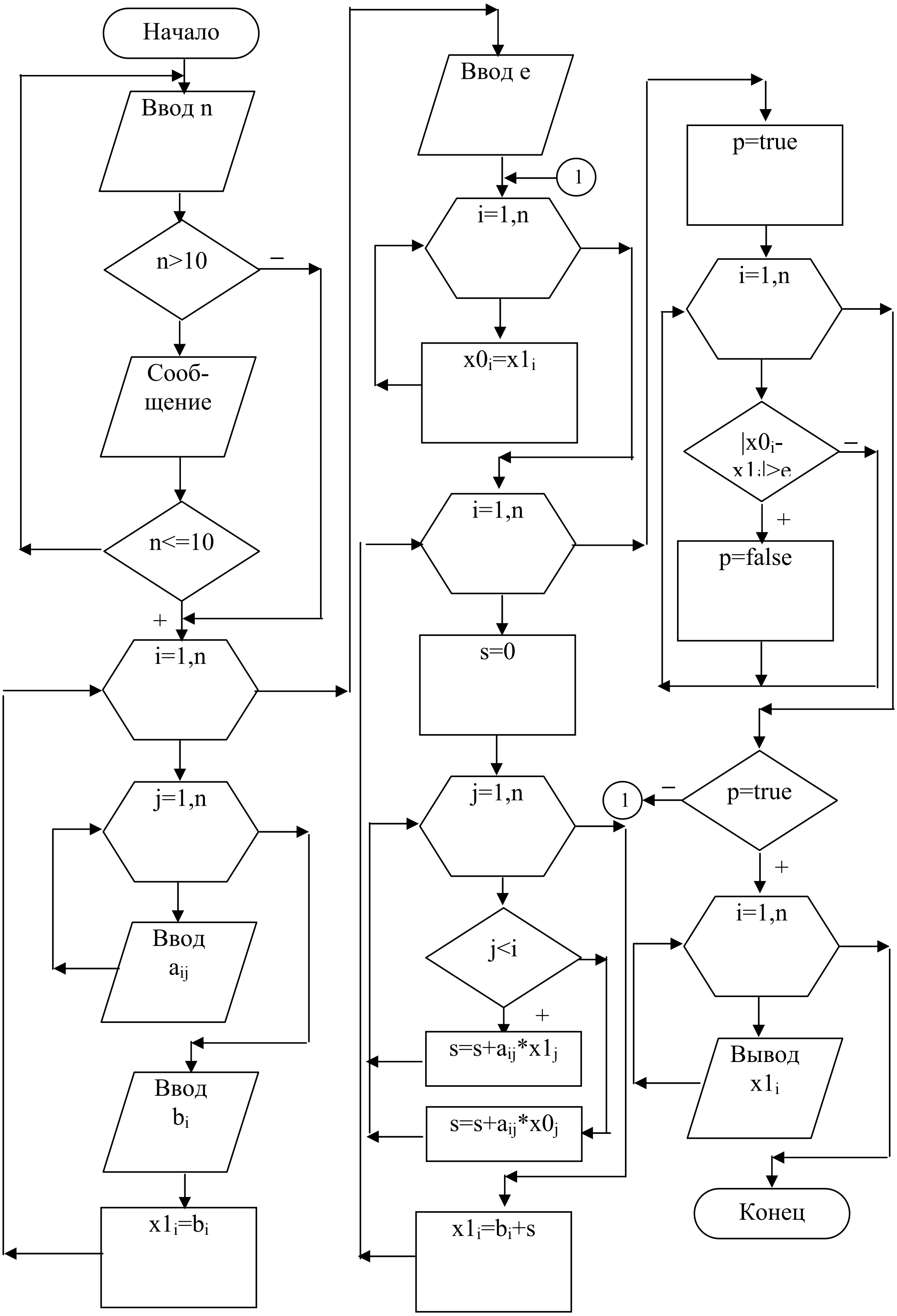

Рисунок 3 - Блок-схема алгоритма метода Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений

2.3.5 Распечатка программы метода Зейделя

```
Program zeidel;
uses crt;
const r=10;
var
   a:array[1..r, 1..r] of real;
   b,x0,x1:array[1..r] of real;
   i,j,n:integer;
   s,e:real;
   p:boolean;
begin
  clrscr;
  repeat
   write('   Введите размерность матрицы n=');
   readln(n);
   if n>r then writeln('   Задаваемая размерность не должна быть больше
10');
  until(n<=r);
  writeln;
  writeln('   Введите коэффициенты эквивалентной системы ');
  writeln;
  for i:=1 to n do begin
   for j:=1 to n do begin
     write('   a[',i,',',j,']=');
     readln(a[i,j])
 end;
   write('   b[',i,']=');
   readln(b[i]);
   x1[i]:=b[i];
 end;
 writeln;
 write('   Введите погрешность e=');
 readln(e);
 repeat
   for i:=1 to n do x0[i]:=x1[i];
   for i:=1 to n do begin
     s:=0;
     for j:=1 to n do
       if j<i then s:=s+a[i,j]*x1[j] else s:=s+a[i,j]*x0[j];
     x1[i]:=b[i]+s;
   end;
   p:=true;
   for i:=1 to n do
```

```
    if abs(x0[i]-x1[i])>e then p:=false;
  until p=true;
  writeln;
  writeln('   Корни уравнения:');
  writeln;
  for i:=1 to n do writeln('   x', i, '=', x1[i]:0:6);
  writeln;
  writeln('   Результаты проверки решения системы');
  writeln;
  for i:=1 to n do begin
   s:=0;
   for j:=1 to n do s:=s+a[i,j]*x1[j];
   writeln('   Погрешность ',i,'-го уравнения =',(x1[i]-s-b[i]):0:6);
  end;
  readln;
end.
```

2.3.6 Результаты выполнения программы на ЭВМ

Результаты работы программы метода Зейделя для системы линейных алгебраических уравнений.

```
Введите размерность матрицы n=3

Введите коэффициенты эквивалентной системы
a[1,1]=0.707
a[1,2]=0.016
a[1,3]=-0.151
b[1]=-0.072
a[2,1]=0.105
a[2,2]=0.859
a[2,3]=0.016
b[2]=0.27
a[3,1]=-0.064
a[3,2]=0.105
a[3,3]=0.707
b[3]=0.118

Введите погрешность e=0.0001

Корни уравнения:
x1=-0.730187
x2=1.496333
```

x3=1.098544

Результаты проверки решения системы

Погрешность 1-го уравнения =-0.000006
Погрешность 2-го уравнения =0.000076
Погрешность 3-го уравнения =0.000026

3 Варианты заданий

3.1 Задание № 1

Используя схему Гаусса, решить систему уравнений с точностью до 0,001.

№ 1

$4.4x_1 – 2.5x_2 + 19.2x_3 – 10.8x_4 = 4.3$
$5.5x_1 – 9.3x_2 – 14.2x_3 + 13.2x_4 = 6.8$
$7.1x_1 – 11.5x_2 + 5.3x_3 – 6.7x_4 = -1.8$
$14.2x_1 + 23.4x_2 – 8.8x_3 + 5.3x_4 = 7.2$

№ 2

$8.2x_1 – 3.2x_2 +14.2x_3 +14.8x_4 = -8.4$
$5.6x_1 – 12x_2 +15x_3 – 6.4x_4 = 4.5$
$5.7x_1 + 3.6x_2 – 12.4x_3 – 2.3x_4 = 3.3$
$6.8x_1 = 13.2x_2 – 6.3x_3 –8.7x_4 = 14.3$

№ 3

$5.7x_1 – 7.8x_2 – 5.6x_3 – 8.3x_4 = 2.7$
$6.6x_1 + 13.1x_2 – 6.3x_3 + 4.3x_4 = -5.5$
$14.7x_1 – 2.8x_2 + 5.6x_3 – 12.1x_4 = 8.6$
$8.5x_1 + 12.7x_2 – 23.7x_3 +5.7x_4 =14.7$

№ 4

$3.8x_1 + 14.2x_2 + 6.3x_3 – 15.5x_4 = 2.8$
$8.3x_1 – 6.6x_2 + 5.8x_3 + 12.2x_4 = -4.7$
$6.4x_1 – 8.5x_2 – 4.3x_3 + 8.8x_4 = 7.7$
$17.1x_1 – 8.3x_2 + 14.4x_3 – 7.2x_4 = 13.5$

№ 5

$15.7x_1 + 6.6x_2 – 5.7x_3 +11.5x_4 = -2.4$
$8.8x_1 – 6.7x_2 + 5.5x_3 – 4.5x_4 = 5.6$
$6.3x_1 – 5.7x_2 – 23.4x_3 +6.6x_4 = 7.7$
$14.3x_1 + 8.7x_2 – 15.7x_3 – 5.8x_4 = 23.4$

№ 6

$4.3x_1 – 12.1x_2 + 23.2x_3 – 14.1x_4 =15.5$
$2.4x_1 – 4.4x_2 + 3.5x_3 + 5.5x_4 =2.5$
$5.4x_1 + 8.3x_2 – 7.4x_3 – 12.7x_4 = 8.6$
$6.3x_1 – 7.6x_2 + 1.34x_3 + 3.7x_4 = 12.1$

№ 7

$14.4x_1 – 5.3x_2 +14.3x_3 - 12.7x_4= 14.4$
$23.4x_1 – 14.2x_2 – 5.4x_3 + 2.1x_4 = 6.6$
$6.3x_1 – 13.2x_2 –6.5x_3 + 14.3x_4 = 9.4$
$5.6x_1 +8.8x_2 – 6.7x_3 – 23.8x_4 = 7.3$

№ 8

$1.7x_1 +10x_2 – 1.3x_3 +2.1x_4 = 3.3$
$3.1x_1 + 1.7x_2 –2.1x_3 + 5.4x_4 = 2.1$
$3.3x_1 – 7.7x_2 +4.4x_3 – 5.1x_4 = 1.9$
$10x_1 – 20.1x_2 + 24x_3 + 1.7x_4 = 1.8$

№ 9

$1.7x_1 – 1.8x_2 + 1.9x_3 – 57.4x_4 = 10$
$1.1x_1 – 4.3x_2 +1.5x_3 – 1.7x_4 = 19$
$1.2x_1 + 1.4x_2 + 1.6x_3 + 1.8x_4 = 20$
$7.1x_1 – 1.3x_2 – 4.1x_3 + 5.2x_4 = 10$

№ 10

$6.1x_1 +6.2x_2 – 6.3x_3 + 6.4x_4 = 6.5$
$1.1x_1 – 1.5x_2 + 2.2x_3 – 3.8x_4 = 4.2$
$5.1x_1 – 5.0x_2 + 4.9x_3 – 4.8x_4 = 4.7$
$1.8x_1 + 1.9x_2 + 2.0x_3 – 2.1x_4 = 2.2$

№ 11

$2.2x_1 – 3.1x_2 + 4.2x_3 – 5.1x_4 = 6.01$
$1.3x_1 +2.2x_2 – 1.4x_3 + 1.5x_4 = 10$
$6.2x_1 – 7.4x_2 + 8.5x_3 – 9.6x_4 = 1.1$
$1.2x_1 + 1.3x_2 + 1.4x_3 + 4.5x_4 = 1.6$

№ 12

$35.8x_1 + 2.1x_2 – 34.5x_3 – 11.8x_4 = 0.5$
$27.1x_1 – 7.5x_2 + 11.7x_3 – 23.5x_4 = 12.8$
$11.7x_1 + 1.8x_2 – 6.5x_3 +7.1x_4 = 1.7$
$6.3x_1 + 10x_2 + 7.1x_3 + 3.4x_4 = 20.8$

№ 13

$35.1x_1 + 1.7x_2 + 37.5x_3 – 2.8x_4 = 7.5$
$45.2x_1 + 21.1x_2 – 1.1x_3 – 1.2x_4 = 11.1$
$-21.1x_1 + 31.7x_2 + 1.2x_3 – 1.5x_4 = 2.1$
$31.7x_1 + 18.1x_2 – 31.7x_3 + 2.2x_4 = 0.5$

№ 14

$1.1x_1 + 11.2x_2 + 11.1x_3 – 13.1x_4 = 1.3$
$-3.3x_1 + 1.1x_2 +31x_3 – 21x_4 =1.1$
$7.5x_1 + 1.3x_2 + 1.1x_3 + 10X_4 = 20$
$1.7X_1 + 7.5x_2 – 1.8x_3 + 2.1x_4 = 1.1$

№ 15

$7.5x_1 + 1.8x_2 – 2.1x_3 – 7.7x_4 = 1.1$
$-10x_1 + 1.3x_2 – 20x_3 – 1.4x_4 = 1.5$
$2.8x_1 – 1.7x_2 + 3.9x_3 + 4.8x_4 = 1.2$
$10x_1 + 31.4x_2 – 2.1x_3 – 10x_4 = -1.1$

№ 16

$30.1x_1 – 1.4x_2 + 10x_3 –1.5x_4 = 10$
$-17.5x_1 + 11.1x_2 + 1.3x_3 – 7.5x_4 = 1.3$
$1.7x_1 – 21.1x_2 + 7.1x_3 – 17.1x_4 = 10$
$2.1x_1 + 2.1x_2 + 3.5x_3 + 3.3x_4 = 1.7$

№ 17

$7.3x_1 – 8.1x_2 + 12.7x_3 – 6.7x_4 = 8.8$
$11.5x_1 + 6.2x_2 – 8.3x_3 + 9.2x_4 = 21.5$
$8.2x_1 – 5.4x_2 + 4.3x_3 – 2.5x_4 = 6.2$
$2.4x_1 + 11.5x_2 – 3.3x_3 + 14.2x_4 = -6.2$

№ 18

$4.8x_1 + 12.5x_2 – 6.3x_3 – 9.7x_4 = 3.5$
$22x_1 – 31.7x_2 + 12.4x_3 – 8.7x_4 = 4.6$
$15x_1 + 21.1x_2 – 4.5x_3 + 14.4x_4 = 15$
$8.6x_1 – 14.4x_2 + 6.2x_3 + 2.8x_4 = - 1.2$

№ 19

$6.4x_1 + 7.2x_2 – 8.3x_3 + 42x_4 = 2.23$
$5.8x_1 – 8.3x_2 + 14.3x_3 – 6.2x_4 = 17.1$
$8.6x_1 + 7.7x_2 – 18.3x_3 + 8.8x_4 = -5.4$
$13.2x_1 – 5.2x_2 – 6.5x_3 + 12.2x_4 = 6.5$

№ 20

$14.2x_1 + 3.2x_2 – 4.2x_3 + 8.5x_4 = 13.2$
$6.3x_1 – 4.3x_2 + 12.7x_3 – 5.8x_4 = -4.4$
$8.4x_1 – 22.3x_2 – 5.2x_3 + 4.7x_4 = 6.4$
$2.7x_1 + 13.7x_2 + 6.4x_3 – 12.7x_4 = 8.5$

№ 21

$7.3x_1 + 12.4x_2 – 3.8x_3 – 14.3x_4 = 5.8$
$10.7x_1 – 7.7x_2 +12.5x_3 + 6.6x_4 = -6.6$
$15.6x_1 + 6.6x_2 + 14.4x_3 – 8.7x_4 = 12.4$
$7.5x_1 + 12.2x_2 – 8.3x_3 + 3.7x_4 = 9.2$

№ 22

$13.2x_1 – 8.3x_2 – 4.4x_3 + 6.2x_4 = 6.8$
$8.3x_1 + 4.2x_2 – 5.6x_3 + 7.7x_4 = 12.4$
$5.8x_1 – 3.7x_2 + 12.4x_3 – 6.2x_4 = 8.7$
$3.5x_1 + 6.6x_2 – 13.8x_3 – 9.3x_4 = -10.8$

№ 23

$8.1x_1 + 1.2x_2 – 9.1x_3 + 1.7x_4 = 10$
$1.1x_1 – 1.7x_2 + 7.2x_3 – 3.4x_4 = 1.7$
$1.7x_1 – 1.8x_2 + 10x_3 + 2.3x_4 = 2.1$
$1.3x_1 + 1.7x_2 – 9.9x_3 + 3.5x_4 =27.1$

№ 24

$3.3x_1 – 2.2x_2 – 10x_3 + 1.7x_4 = 1.1$
$1.8x_1 + 21.1x_2 +1.3x_3 – 2.2x_4 = 2.2$
$-10x_1 + 1.1x_2 + 20x_3 – 4.5x_4 = 10$
$70x_1 – 1.7x_2 – 2.2x_3 + 3.3x_4 = 2.1$

№ 25

$1.7x_1 + 9.9x_2 – 20x_3 – 1.7x_4 = 1.7$
$20x_1 + 0.5x_2 + 30.1x_3 – 1.1x_4 = 2.1$
$10x_1 – 20x_2 + 30.2x_3 + 0.5x_4 = 1.8$
$3.3x_1 – 0.7x_2 + 3.3x_3 + 20x_4 = -1.7$

№ 26

$1.7x_1 – 1.3x_2 – 1.1x_3 –1.2x_4 = 2.2$
$10x_1 – 10x_2 –1.3x_3 + 1.3x_4 = 1.1$
$3.5x_1 + 3.3x_2 + 1.2x_3 + 1.3x_4 = 1.2$
$1.3x_1 + 1.1x_2 – 1.3x_3 – 1.1x_4 =10$

№ 27

$1.1x_1 + 11.3x_2 – 1.7x_3 + 1.8x_4 = 10$
$1.3x_1 – 11.7x_2 + 1.8x_3 + 1.4x_4 = 1.3$
$1.1x_1 – 10.5x_2 – 1.7x_3 – 1.5x_4 = 1.1$
$1.5x_1 – 0.5x_2 + 1.8x_3 – 1.1x_4 = 10$

№ 28

$1.4x_1 + 2.1x_2 – 3.3x_3 + 1.1x_4 = 10$
$10x_1 – 1.7x_2 + 1.1x_3 – 1.5x_4 = 1.7$
$2.2x_1 + 34.4x_2 – 1.1x_3 – 1.2x_4 =20$
$1.1x_1 – 1.3x_2 + 1.2x_3 + 1.4x_4 = 1,3$

№ 29

$1.3x_1 – 1.7x_2 + 3.3x_3 + 1.7x_4 = 1.1$
$10x_1 + 5.5x_2 – 1.3x_3 + 3.4x_4 = 1.3$
$1.1x_1 + 1.8x_2 – 2.2x_3 – 1.1x_4 = 10$
$1.3x_1 – 1.2x_2 + 2.1x_3 + 2.2x_4 = 1.8$

№ 30

$1.2x_1 + 1.8x_2 – 2.2x_3 – 4.1x_4 = 1.3$
$10x_1 – 5.1x_2 + 1.2x_3 + 5.5x_4 = 1.2$
$2.2x_1 – 30.1x_2 + 3.1x_3 + 5.8x_4 = 10$
$10x_1 + 2.4x_2 – 30.5x_3 – 2.2x_4 = 34.1$

3.2 Задание № 2

Методом итераций решить с точностью 0,001 систему линейных уравнений, приведя её к виду, удобному для итераций.

№ 1

$2.7x_1 + 3.3x_2 + 1.3x_3 = 2.1$
$3.5x_1 – 1.7x_2 + 2.8x_3 = 1.7$
$4.1x_1 + 5.8x_2 – 1.7x_3 = 0.8$

№ 2

$1.7x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.7$
$2.1x_1 +3.4x_2 +1.8x_3 = 1.1$
$4.2x_1 – 1.7x_2 + 1.3x_3 = 2.8$

№ 3

$3.1x_1 + 2.8x_2 + 1.9x_3 = 0.2$
$1.9x_1 + 3.1x_2 +2.1x_3 = 2.1$
$7.5x_1 + 3.8x_2 + 4.8x_3 = 5.6$

№ 4

$9.1x_1 + 5.6x_2 +7.8x_3 = 9.8$
$3.8x_1 + 5.1x_2 + 2.8x_3 = 6.7$
$4.1x_1 + 5.7x_2 +1.2x_3 = 5.8$

№ 5

$3.3x_1 + 2.1x_2 + 2.8x_3 = 0.8$
$4.1x_1 + 3.7x_2 + 4.8x_3 = 5.7$
$2.7x_1 + 1.8x_2 + 1.1x_3 = 3.2$

№ 6

$7.6x_1 + 5.8x_2 +4.7x_3 = 10.1$
$3.8x_1 + 4.1x_2 + 2.7x_3 = 9.7$
$2.9x_1 + 2.1x_2 + 3.8x_3 = 7.8$

№ 7

$3.2x_1 – 2.5x_2 + 3.7x_3 = 6.5$
$0.5x_1 + 0.34x_2 + 1.7x_3 = - 0.24$
$1.6x_1 + 2.3x_2 – 1.5x_3 = 4.3$

№ 8

$5.4x_1 – 2.3x_2 + 3.4x_3 = - 3.5$
$4.2x_1 + 1.7x_2 – 2.3x_3 = 2.7$
$3.4x_1 + 2.4x_2 + 7.4x_3 = 1.9$

№ 9

$3.6x_1 + 1.8x_2 – 4.7x_3 = 3.8$
$2.7x_1 – 3.6x_2 + 1.9x_3 = 0.4$
$1.5x_1 + 4.5x_2 + 3.3x_3 = - 1.6$

№ 10

$5.6x_1 + 2.7x_2 – 1.7x_3 = 1.9$
$3.4x_1 – 3.6x_2 – 6.7x_3 = - 2.4$
$0.8x_1 + 1.3x_2 + 3.7x_3 = 1.2$

№ 11

$2.7x_1 + 0.9x_2 – 1.5x_3 = 3.5$
$4.5x_1 – 2.8x_2 + 6.7x_3 = 2.6$
$5.1x_1 + 3.7x_2 – 1.4x_3 = - 0.14$

№ 12

$4.5x_1 – 3.5x_2 + 7.4_3 = 2.5$
$3.1x_1 – 0.6x_2 – 2.3x_3 = - 1.5$
$0.8x_1 + 7.4x_2 – 0.5x_3 = 6.4$

№ 13

$3.8x_1 + 6.7x_2 – 1.2x_3 = 5.2$
$6.4x_1 + 1.3x_2 – 2.7x_3 = 3.8$
$2.4x_1 – 4.5x_2 + 3.5x_3 = - 0.6$

№ 14

$5.4x_1 – 6.2x_2 – 0.5x_3 = 0.52$
$3.4x_1 + 2.3x_2 + 0.8x_3 = - 0.8$
$2.4x_1 – 1.1x_2 + 3.8x_3 = 1.8$

№ 15

$7.8x_1 + 5.3x_2 + 4.8x_3 = 1.8$
$3.3x_1 + 1.1x_2 + 1.8x_3 = 2.3$
$4.5x_1 + 3.3x_2 + 2.8x_3 = 3.4$

№ 16

$3.8x_1 + 4.1x_2 – 2.3x_3 = 4.8$
$2.1x_1 + 3.9x_2 – 5.8x_3 = 3.3$
$1.8x_1 + 1.1x_2 – 2.1x_3 = 5.8$

№ 17

$1.7x_1 – 2.2x_2 + 3.0x_3 = 1.8$
$2.1x_1 + 1.9x_2 – 2.3x_3 = 2.8$
$4.2x_1 + 3.9x_2 – 3.1x_3 = 5.1$

№ 18

$2.8x_1 + 3.8x_2 – 3.2x_3 = 4.5$
$2.5x_1 – 2.8x_2 + 3.3x_3 = 7.1$
$6.5x_1 – 7.1x_2 + 4.8x_3 = 6.3$

№ 19

$3.3x_1 + 3.7x_2 + 4.2x_3 = 5.8$
$2.7x_1 + 2.3x_2 – 2.9x_3 =6.1$
$4.1x_1 + 4.8x_2 – 5.0x_3 = 7.0$

№ 20

$7.1x_1 + 6.8x_2 + 6.1x_3 = 7.0$
$5.0x_1 + 4.8x_2 + 5.3x_3 = 6.1$
$8.2x_1 + 7.8x_2 + 7.1x_3 = 5.8$

№ 21

$3.7x_1 + 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.0$
$4.1x_1 + 4.5x_2 – 4.8x_3 = 4.9$
$- 2.1x_1 – 3.7x_2 + 1.8x_3 = 2.7$

№ 22

$4.1x_1 + 5.2x_2 – 5.8x_3 = 7.0$
$3.8x_1 – 3.1x_2 + 4.0x_3 = 5.3$
$7.8x_1 + 5.3x_2 – 6.3x_3 = 5.8$

№ 23

$3.7x_1 – 2.3x_2 + 4.5x_3 = 2.4$
$2.5x_1 + 4.7x_2 – 7.8x_3 = 3.5$
$1.6x_1 + 5.3x_2 + 1.3x_3 = - 2.4$

№ 24

$6.3x_1 + 5.2x_2 – 0.6x_3 = 1.5$
$3.4x_1 – 2.3x_2 + 3.4x_3 = 2.7$
$0.8x_1 + 1.4x_2 + 3.5x_3 = - 1.2$

№ 25

$1.5x_1 + 2.3x_2 – 3.7x_3 = 4.5$
$2.8x_1 + 3.4x_2 + 5.8x_3 = - 3.2$
$1.2x_1 + 7.3x_2 – 2.3x_3 = 5.6$

№ 26

$0.9x_1 + 2.7x_2 – 3.8x_3 = 2.4$
$2.5x_1 + 5.8x_2 – 0.5x_3 = 3.5$
$4.5x_1 – 2.1x_2 + 3.2x_3 = - 1.2$

№ 27

$2.4x_1 + 2.5x_2 – 2.9x_3 = 4.5$
$0.8x_1 + 3.5x_2 – 1.4x_3 = 3.2$
$1.5x_1 – 2.3x_2 + 8.6x_3 = -5.5$

№ 28

$5.4x_1 – 2.4x_2 + 3.8x_3 = 5.5$
$2.5x_1 + 6.8x_2 – 1.1x_3 = 4.3$
$2.7x_1 – 0.6x_2 + 1.5x_3 = - 3.5$

№ 29

$2.4x_1 + 3.7x_2 – 8.3x_3 = 2.3$
$1.8x_1 + 4.3x_2 + 1.2x_3 = - 1.2$
$3.4x_1 – 2.3x_2 + 5.2x_3 = 3.5$

№ 30

$3.2x_1 – 11.5x_2 + 3.8x_3 = 2.8$
$0.8x_1 + 1.3x_3 – 6.4x_3 = - 6.5$
$2.4x_1 + 7.2x_2 – 1.2x_3 = 4.5$

3.3 Задание № 3

Решить систему линейных уравнений методом Зейделя, с точностью до 0,001 приведя её к виду, удобному для итераций.

№ 1

$0.34x_1 + 0.71x_2 + 0.63x_3 = 2.08$
$0.71x_1 – 0.65x_2 – 0.18x_3 = 0.17$
$1.17x_1 – 2.35x_2 + 0.75x_3 = 1.28$

№ 2

$3.75x_1 – 0.28x_2 + 0.17x_3 = 0.75$
$2.11x_1 – 0.11x_2 – 0.12x_3 = 1.11$
$0.22x_1 – 3.17x_2 + 1.81x_3 = 0.05$

№ 3

$0.21x_1 – 0.18x_2 + 0.75x_3 = 0.11$
$0.13x_1 + 0.75x_2 – 0.11x_3 = 2.00$
$3.01x_1 – 0.33x_2 + 0.11x_3 = 0.13$

№ 4

$0.13x_1 – 0.14x_2 – 2.00x_3 = 0.15$
$0.75x_1 + 0.18x_2 – 0.77x_3 = 0.11$
$0.28x_1 – 0.17x_2 + 0.39x_3 = 0.12$

№ 5

$3.01x_1 – 0.14x_2 – 0.15x_3 = 1.00$
$1.11x_1 + 0.13x_2 – 0.75x_3 = 0.13$
$0.17x_1 – 2.11x_2 +0.71x_3 = 0.17$

№ 6

$0.92x_1 – 0.83x_2 + 0.62x_3 = 2.15$
$0.24x_1 – 0.54x_2 + 0.43x_3 = 0.63$
$0.73x_1 – 0.81x_2 – 0.67x_3 = 0.88$

№ 7

$1.24x_1 – 0.87x_2 – 3.17x_3 = 0.46$
$2.11x_1 – 0.45x_2 + 1.44x_3 = 1.50$
$0.48x_1 + 1.25x_2 – 0.63x_3 = 0.35$

№ 8

$0.64x_1 – 0.83x_2 + 4.2x_3 = 2.23$
$0.58x_1 – 0.83x_2 + 1.43x_3 = 1.71$
$0.86x_1 + 0.77x_2 + 0.88x_3 = -0.54$

№ 9

$0.32x_1 – 0.42x_2 – 0.86x_3 = 1.32$
$0.63x_1 – 1.43x_2 – 0.58x_3 = -0.44$
$0.84x_1 – 2.23x_2 – 0.52x_3 = 0.64$

№ 10

$0.73x_1 + 1.24x_2 – 0.38x_3 = 0.58$
$1.25x_1 + 0.66x_2 – 0.78x_3 = 0.66$
$0.75x_1 + 1.22x_2 – 0.83x_3 = 0.92$

№ 11

$0.62x_1 – 0.44x_2 – 0.86x_3 = 0.68$
$0.83x_1 + 0.42x_2 – 0.56x_3 = 1.24$
$0.58x_1 – 0.37x_2 – 0.52x_3 = 0.64$

№ 12

$1.26x_1 – 2.34x_2 + 1.17x_3 = 3.14$
$0.75x_1 + 1.24x_2 – 0.48x_3 = -1.17$
$3.44x_1 – 1.85x_2 + 1.16x_3 = 1.83$

№ 13

$0.46x_1 + 1.72x_2 + 2.53x_3 = 2.44$
$1.53x_1 – 2.32x_2 – 1.83x_3 = 2.83$
$0.75x_1 + 0.86x_2 + 3.72x_3 = 1.06.$

№ 14

$2.47x_1 + 0.65x_2 – 1.88x_3 = 1.24$
$1.34x_1 + 1.17x_2 + 2.54x_3 = 2.35$
$0.86x_1 – 1.73x_2 – 1.08x_3 = 3.15$

№ 15

$4.24x_1 + 2.73x_2 – 1.55x_3 = 1.87$
$2.34x_1 + 1.27x_2 + 3.15x_3 = 2.16$
$3.05x_1 – 1.05x_2 – 0.63x_3 = -1.25$

№ 16

$0.43x_1 + 1.24x_2 – 0.58x_3 = 2.71$
$0.74x_1 + 0.83x_2 + 1.17x_3 = 1.26$
$1.43x_1 – 1.58x_2 + 0.83x_3 = 1.03$

№ 17

$0.43x_1 + 0.63x_2 + 1.44x_3 = 2.18$
$1.64x_1 – 0.83x_2 – 2.45x_3 = 1.84$
$0.58x_1 + 1.55x_2 + 3.18x_3 = 0.74$

№ 18

$1.24x_1 + 0.62x_2 – 0.95x_3 = 1.43$
$2.15x_1 – 1.18x_2 + 0.57x_3 = 2.43$
$1.72x_1 – 0.83x_2 + 1.57x_3 = 3.88$

№ 19

$0.62x_1 + 0.56x_2 – 0.43x_3 = 1.16$
$1.32x_1 – 0.88x_2 + 1.76x_3 = 2.08$
$0.73x_1 + 1.42x_2 – 0.34x_3 = 2.18$

№ 20

$1.06x_1 + 0.34x_2 + 1.26x_3 = 1.17$
$2.54x_1 – 1.16x_2 + 0.55x_3 = 2.43$
$1.34x_1 – 0.47x_2 – 0.83x_3 = 3.26$

№ 21

$3.15x_1 – 1.72x_2 – 1.23x_3 = 2.15$
$0.72x_1 + 0.67x_2 + 1.18x_3 = 1.43$
$2.57x_1 – 1.34x_2 – 0.68x_3 = 1.03$

№ 22

$1.73x_1 – 0.83x_2 + 1.82x_3 = 0.36$
$0.27x_1 + 0.53x_2 – 0.64x_3 = 1.23$
$0.56x_1 - 0.48x_2 + 1.95x_3 = -0.76$

№ 23

$0.95x_1 + 0.72x_2 - 1.14x_3 = 2.15$

$0.63x_1 + 0.24x_2 + 0.38x_3 = 0.74$

$1.23x_1 - 1.08x_2 - 1.16x_3 = 0.97$

№ 24

$2.18x_1 + 1.72x_2 - 0.93x_3 = 1.06$

$1.42x_1 + 0.18x_2 + 1.12x_3 = 2.07$

$0.92x_1 - 1.14x_2 - 2.53x_3 = -0.45$

№ 25

$2.23x_1 - 0.73x_2 + 1.27x_3 = 2.43$

$2.15x_1 + 3.17x_2 - 1.43x_3 = -0.73$

$0.83x_1 + 0.72x_2 + 2.12x_3 = 1.42$

№ 26

$0.65x_1 - 0.93x_2 + 0.45x_3 = -0.72$

$1.15x_1 + 0.43x_2 - 0.72x_3 = 1.24$

$0.56x_1 - 0.18x_2 + 1.03x_3 = 2.15$

№ 27

$1.16x_1 - 0.28x_2 + 2.16x_3 = 1.16$

$0.65x_1 + 0.76x_2 - 1.18x_3 = 0.28$

$0.53x_1 + 1.07x_2 - 0.63x_3 = 1.27$

№ 28

$2.16x_1 - 2.83x_2 + 1.15x_3 = 2.32$

$1.71x_1 + 2.17x_2 - 0.83x_3 = 1.25$

$0.35x_1 - 0.72x_2 + 1.03x_3 = 0.82$

№ 29

$1.02x_1 + 0.72x_2 - 0.65x_3 = 1.27$

$0.74x_1 - 1.24x_2 - 1.73x_3 = 0.77$

$1.78x_1 + 2.32x_2 + 0.74x_3 = 1.16$

№ 30

$1.53x_1 - 1.63x_2 - 0.76x_3 = 2.18$

$0.86x_1 + 1.17x_2 + 1.84x_3 = 1.95$

$0.32x_1 - 0.65x_2 + 1.11x_3 = -0.47$

4 Вопросы к защите лабораторной работы

1) Какая система алгебраических уравнений называется линейной?
2) Какая система алгебраических уравнений называется не линейной?
3) Какие методы для решения систем линейных алгебраических уравнений называются (СЛАУ) точными?
4) Какие методы для решения систем линейных алгебраических уравнений называются (СЛАУ) итерационными?
5) Как записывается систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) в матричной форме?
6) Что называется решением линейной, алгебраической системы?
7) Какая система линейных алгебраических уравнений называется совместной?
8) Какие системы линейных алгебраических уравнений называется равносильными?
9) Какая матрица называется расширенной?
10) Какая матрица называется транспонированной?
11) Прямой ход метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.
12) Обратный ход метода Гаусса для решения систем линейных алгебраических уравнений.
13) Блок схема метода Гаусса.
14) Суть метода итераций для решения систем линейных алгебраических уравнений.
15) Условие сходимости приближенных решений для исходной системы линейных алгебраических уравнений методом итераций.

16) Условие сходимости приближенных решений для равносильной системы линейных алгебраических уравнений методом итераций.

17) Блок схема метода итераций.

18) Общая формула метода итераций для решения системы линейных алгебраических уравнений.

19) Суть метода Зейделя для решения систем линейных алгебраических уравнений.

20) Условие сходимости приближенных решений для исходной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.

21) Условие сходимости приближенных решений для равносильной системы линейных алгебраических уравнений методом Зейделя.

22) Блок схема метода Зейделя.

23) Общая формула метода Зейделя для решения системы линейных алгебраических уравнений.

Список использованных источников

1 Лапчик, М. П.. Элементы численных методов : учебник для спо / М. П. Лапчик, М. И. Рагулина, Е. К. Хеннер; под ред. М. П. Лапчик. -М.: Академия, 2007. - 224 с

2 Исаков, В.Н. Элементы численных методов : учебное пособие для пед. вузов/ В.Н. Исаков. – М.: Академия, 2003. – 192 с.

3 Бахвалов, Н.С. Численные методы : учебное пособие для вузов/ Н.С. Бахвалов, Н.П. Жидков, Г.М. Кобельков. 3 – изд., перераб. доп. – М.: Бином: Лаборатория знаний, 2003. – 632 с.

4 Костомаров, Д.П., Вводные лекции по численным методам : учебное пособие для вузов/ Д.П.Костомаров, А.П.Фаворский. – М.: Логос, 2004. – 184 с.