МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса

Кафедра вычислительной техники и математики

Т.В.АТЯСКИНА

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 517(075.32)
ББК 22.176 я 73
А - 92

Рецензент
преподаватель кафедры вычислительной техники и математики КЭиБ ГОУ ОГУ Попова Л.А.

Атяскина, Т.В.

А-92 **Математические методы [Текст]: методические указания к лабораторным работам. /Т.В.Атяскина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. –40 с.**

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ, обеспечивающих учебный процесс по дисциплине “Математические методы” в колледже электроники и бизнеса ОГУ для студентов 3 курса в 6 семестре специальности 230105 “программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем” очной формы обучения.

Методические указания составлены с учетом Государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов - утвержденного 30.12.2003 Министерством Образования Российской Федерации.

ББК 22.176 я 73

Содержание

Введение

По мере развития науки и техники перед человеком все чаще встает проблема: «Как найти правильное решение?». Для облегчения решения этой задачи реальные процессы (или объекты) заменяются их аналогами или моделями. Затем производится анализ поведения модели в тех или иных условиях с помощью персонального компьютера. В этом случае говорят о компьютерном моделировании. Но персональный компьютер может работать только с математическими моделями, которые с помощью языков программирования переводятся в набор машинных кодов, которые и обрабатывает персональный компьютер. Какое же место занимают математические модели и как они получаются?

Построение математической модели процесса, явления или объекта начинается с построения упрощенного варианта модели, в котором учитываются только основные черты. В результате прослеживаются основные связи между входными параметрами, ограничениями и показателем эффективности. Общего подхода к построению модели нет. В каждом конкретном случае при построении математической модели учитывается большое количество факторов: цель построения модели, круг решаемых задач, точность описания модели и точность выполнения вычислений. Математическая модель должна отражать все существенные факторы, определяющие ее поведение, и при этом быть простой и удобной для восприятия результатов. Каждая математическая модель процесса, явления или объекта в своей основе имеет математический количественный метод.

Применение математических количественных методов для обоснования выбора того или иного управляющего решения во всех областях человеческой деятельности называется исследованием операций. Целью исследования операций является нахождение с использованием специального математического аппарата решения, удовлетворяющего заданным условиям.

1 Лабораторная работа 1. Нахождение кратчайших путей в графе

Цель работы: Приобретение навыков нахождения кратчайших путей в графе методами Краскала и Прима и составление программы решения задач.

1.1 Ход работы:

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) составить постановку задачи, выбрав предметную область;
3) решить задачу алгоритмами Краскала и Прима аналитически;
4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi (Реализация одного алгоритма - оценка «3» или «4»; реализация двух алгоритмов – оценка «5»);
5) оформить отчет по лабораторной работе.

1.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:
1) тему работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) постановку задачи, с указанием предметной области;
5) модель задачи;
6) аналитическое решение задачи алгоритмами Краскала и Прима;
7) распечатку программы решения задачи;
8) результаты решения задачи.

1.3 Методические указания к лабораторной работе 1

1.3.1 Понятие графа

Графом G=(X,U) называется пара двух конечных множеств: X – множество точек (вершин) и U – множество линий (ребер), соединяющих некоторые пары точек.

Если граф имеет ребро, у которого начало и конец совпадают, то это ребро называется **петлей**.

Если ребро графа имеет направление, то оно называется **дугой**.

1.3.2 Виды графов

Существуют следующие виды графов:

1) Граф, состоящий из вершин и соединяющих их ребер, называется **неориентированным (н-граф)**;

2) Граф, состоящий из вершин и соединяющих их дуг, называется **ориентированным (орграф)**;

3) Ребра, соединяющие одну и ту же пару вершин, называются *параллельными или кратными*. Граф, содержащий кратные ребра называется **мультиграфом**;

4) Граф, в котором проведены все возможные ребра, но не имеющий петель и кратных ребер, называется **полным**;

5) Граф, содержащий как ребра, так и дуги называется **смешанным**;

1.3.3 Матричное представление графа

Матрицей смежности графа G - называется квадратная матрица порядка n, где n – число вершин графа G и определяется следующим образом:

$$A_{nxn}=[a_{ij}] = \begin{cases} 1 \text{ – есть ребро (дуга) } (x_i;\, x_j) \text{ или петля;} \\ 0 \text{ – нет ребра (дуги) } (x_i;\, x_j). \end{cases}$$

Матрицей ициденции графа G с n вершинами и m дугами называется матрица

$$B_{nxm}=[b_{ij}] = \begin{cases} 1, \text{ если } x_i \text{ – начало дуги } (x_i;\, x_j), \text{ или петля,} \\ -1, \text{ если } x_i \text{ – конец дуги } (x_i;\, x_j), \\ 0, \text{ если нет дуги } (x_i;\, x_j). \end{cases}$$

В матрицу инциденции н-графа заносят 1, если ребро инцидентно соответствующей вершине, 0 – в противном случае.

Путь – это упорядоченная последовательность ребер ориентированного графа, в которой конец предыдущего ребра совпадает с началом следующего и все ребра единственны.

Матрицей достижимости графа G называется квадратная матрица порядка n, где n – число вершин графа и определяется следующим образом:

$$D_{nxn}=[d_{ij}] = \begin{cases} 1, \text{ если есть путь из } x_i \text{ в } x_j, \\ 0, \text{ если нет пути из } x_i \text{ в } x_j. \end{cases}$$

Граф не содержащий циклов называется **ациклическим**.

Связанный ациклический граф называется **деревом**.

Н-граф называется **неориентированным деревом**, если он связан и не содержит циклов, а значит петель и кратных рёбер.

Дерево – это минимально связный граф, в том смысле, что при удалении хотя бы одного ребра он теряет связность.

Теорема: В дереве с n вершинами всегда n-1 ребро.

Ориентированным деревом или **ордеревом**, или корневым деревом называют орграф со следующими свойствами:

1) Существует единый узел, полустепень захода которого равна нулю, он называется корнем дерева;

2) Полустепень захода всех остальных узлов равна единице;

3) Каждый узел достижим из корня.

Остовом графа называется подграф являющийся деревом.

Если граф полный, то в графе существует 2^{2^n} остовов, где n – число вершин графа.

1.3.4 Алгоритм Краскала

1) Строится нуль-граф (одни вершины без ребер).
2) Упорядочиваются ребра графа в порядке не убывания их весов.
3) Выбираются из упорядоченного списка ребра, такие чтобы они не образовывали цикл в графе.
4) Если выбрано n-1 ребро (n – число вершин графа), то алгоритм заканчивает работу.
5) Остов должен включать в себя все вершины графа.

Пример: Найти кратчайший остов в графе (рисунок 1) алгоритмом Краскала.

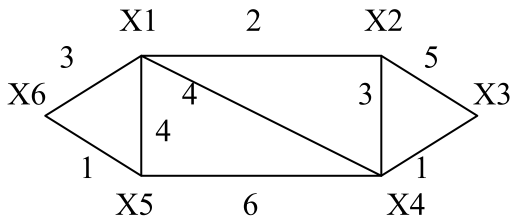

Рисунок 1 – Взвешенный граф

Решение:

1) Построим таблицу ребер данного графа, в порядке неубывания их весов (таблица 1).

Таблица 1 – Список ребер графа в порядке неубывания весов

Начало	Конец	Вес
X5	X6	1
X3	X4	1
X1	X2	2
X1	X6	3
X2	X4	3
X1	X4	4
X1	X5	4
X2	X3	5
X4	X5	6

2) Из таблицы 1 выбираем ребра, которые не образуют цикл в графе и строим кратчайший остов (рисунок 2).

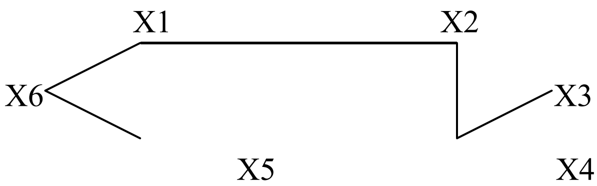

Рисунок 2 – Кратчайший остов графа

3) Вычислим длину кратчайшего остова: d = 1+1+2+3+3 = 10

Для реализации алгоритма Краскала на ПК необходимо:

1) Построить матрицу смежности исходного графа;
2) Составить список ребер с их весами и отсортировать их одним из способов сортировки. Для того чтобы уменьшить время сортировки можно сортировать не весь список, а N-1 ребро, с минимальным весом;
3) Для проверки на цикл можно использовать построение матрицы достижимости после каждого добавления ребра. Добавляем ребро XiXj, смотрим есть ли единица в матрице достижимости на месте XiXj, если есть, то ребро XiXj не перебрасываем в матрицу смежности исходного остова, так как получаем цикл, если единицы нет, то ребро XiXj заносим в матрицу смежности остова.

1.3.5 Алгоритм Прима

Данный алгоритм определяет кратчайший остов в графе.

Суть данного метода заключается в том, что построение кратчайшего остова выполняется путем добавления к строящемуся остову некоторой ближайшей к нему вершины и соответствующего ребра.

Обозначения:

Ts – множество вершин строящегося остова

As – множество ребер строящегося остова

Для вершины X_1 делаем пометку X_1^*. Выписываем связи всех остальных вершин с помеченной вершиной: [помеченная вершина; вес] – если связь есть или [0;∞] – если связи нет. Среди имеющихся связей выбираем вершину, которая имеет с помеченной вершиной наименьшее соединение. Такую вершину добавляем к множеству Ts, а соответствующее ребро к множеству As. Алгоритм заканчивает свою работу, если n=N(Ts), где n – количество вершин графа, N(Ts) – количество вершин остова.

Пример: Найти кратчайший остов в графе (рисунок 3) алгоритмом Прима.

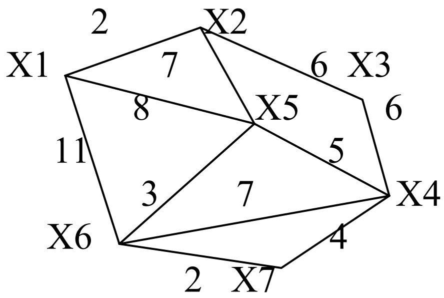

Рисунок 3 – Граф с весами

Решение:

1) Выписываем связи вершин графа с помеченной вершиной:

X1*:	X2*:	X3*:
x2-[x1; 2]-min	x3-[x2; 6]-min	x4-[x3; 6]-min
x3-[0, ∞]	x4-[0, ∞]	x5-[0, ∞]
x4-[0,∞]	x5-[x2; 7]	x6-[0, ∞]
x5-[x1; 8]	x6-[0, ∞]	x7-[0, ∞]
x6-[x1; 11]	x7-[0, ∞]	
x7-[0,∞]		

X4*: X7*: X6*:

x5[x4; 5] x5[0, ∞] x5[x6; 3]-min

x6[x4; 7] x6[x7; 2]-min

x7[x4; 4]-min

Ts = {x1, x2, x3, x4, x7, x6, x5}

As = { (x1;x2), (x2;x3),(x3;x4),(x4;x7),(x7;x6),(x6;x5)}

2) Используя найденные множества Ts и As, построим кратчайший остов данного графа (рисунок 4).

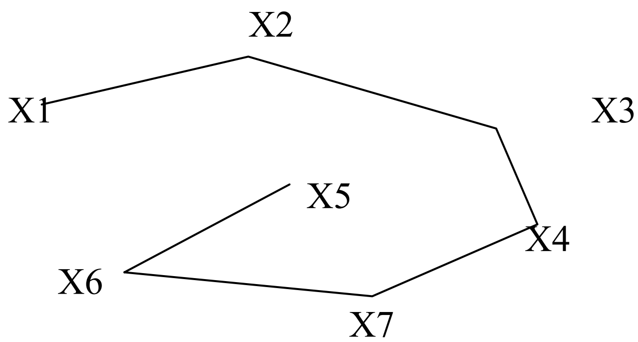

Рисунок 4 – Кратчайший остов графа

3) Найдем длину получившегося остова: d = 2+6+6+4+2+3 = 23

1.4 Задание для лабораторной работы 1

Составить постановку задачи, выбрав предметную область (составить граф не менее чем из 8 вершин). Решить задачу алгоритмами Краскала и Прима аналитически;

Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi (Реализация одного алгоритма - оценка «3» или «4»; реализация двух алгоритмов – оценка «5»);

1.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 1

1) Что называется графом? Приведите пример.

2) Какие графы называются ориентированными? Какие графы – неориентированные?

3) Какой граф называется взвешенным?

4) Что называется матрицей смежности, матрицей инциденции, матрицей достижимости.

5) Что называется полным графом? Какая закономерность между вершинами и ребрами в полном графе?

6) Что называется деревом? Приведите пример.

7) Что называется остовом? Приведите пример.

8) Какое количество остовов в полном графе?

9) Что называется кратчайшим остовом?

10) Что называется циклом в графе?

11) Алгоритм Краскала.

12) Алгоритм Прима.

2 Лабораторная работа 2. Решение задач линейного программирования

Цель работы: Приобретение навыков построения математической модели задач линейного программирования, решению задач графическим способом.

2.1 Ход работы:

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условия задач.

3) построить математическую модель задачи линейного программирования (задание №1).

4) решить задачу линейного программирования графическим способом (задание №2).

5) оформить отчет по лабораторной работе.

2.2 Содержание отчета:

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировку заданий;

5) математическую модель задания №1;

6) графическое решение задания №2;

2.3 Методические указания к лабораторной работе 2

2.3.1 Общая постановка задач линейного программирования

Линейное программирование – это раздел математики ориентируемый на нахождении экстремума в задачах, которые описываются линейными уравнениями.

Задачей линейного программирования называется задачей исследования операций, математическая модель которой имеет вид:

$$F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \rightarrow \min (\max) \tag{2}$$

Целевая функция (2) - линейная форма.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leq b_j \text{ (или } \geq b\text{)}, \; i = \overline{1,m} = 1,2\ldots m \tag{3}$$

или

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n > b_m \end{cases} \tag{4}$$

Все переменные должны быть $x_j \geq 0$, $j = \overline{1,n}$

Система (4) - система ограничений задачи линейного программирования (ЗЛП).

Если математическая модель ЗЛП имеет вид:

$$\begin{gathered} F(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \rightarrow \min \\ \sum_{1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, i = \overline{1,m} \end{gathered} \tag{5}$$

$x_j \geq 0$, $b_i \geq 0$, то ЗЛП представлена в **канонической форме**.

2.3.2 Построение математических моделей задач линейного программирования

Рассмотрим процесс построения математических моделей ЗЛП на примерах.

Пример 1 - Задача о диете

Из имеющихся в распоряжении видов пищи нужно составить такую диету, которая, с одной стороны, обеспечивала бы удовлетворение минимальных потребностей организма в питательных веществах (белках, жирах, углеводах, витаминах и т.д.) и вместе с тем требовала бы наименьших затрат.

Рассмотрим простую математическую модель этой задачи.

Пусть имеются два вида продуктов, $П_1$ и $П_2$, содержащих питательные вещества А, В, С. Известно, сколько питательных веществ того или иного вида содержится в 1 кг пищи $П_1$ или $П_2$; эти сведения указаны в таблице 2.

Таблица 2 – Условие задачи о диете

	A	B	C
в 1 кг $П_1$	a_1	b_1	c_1
в 1 кг $П_2$	a_2	b_2	c_2

Кроме этих данных, нам известны; a, b, c – ежесуточная потребность организма в А, В, С (соответственно) и s_1 и s_2 – стоимость 1 кг пищи $П_1$, $П_2$ (соответственно).

Требуется рассчитать количество x_1 продукта $П_1$ и количество x_2 продукта $П_2$ так, чтобы обеспечить необходимое количество питательных веществ при минимальных затратах на пищу.

Очевидно, общая стоимость пищи будет $S = s_1x_1 + s_2x_2$.

Общее количество вещества *А* в обоих видах пищи равно $a_1x_1 + a_2x_2$. Оно должно быть не меньше a: $a_1x_1 + a_2x_2 \geq a$.

Аналогичные неравенства должны выполняться для B и C: $b_1x_1 + b_2x_2 \geq b$, $c_1x_1 + c_2x_2 \geq c$.

Таким образом, приходим к следующей задаче.

Дана система трех линейных неравенств с двумя неизвестными x_1, x_2 и линейная функция $S = s_1x_1 + s_2x_2$ (6).

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 \geq a \\ b_1x_1 + b_2x_2 \geq b \\ c_1x_1 + c_2x_2 \geq c \end{cases} \qquad (6)$$

Требуется среди неотрицательных решений (x_1, x_2) системы (6) выбрать такое, при котором функция S, достигает наименьшего значения (минимизируется).

Пример 2 - Задача о распределения ресурсов

Предприятие имеет в своем распоряжении определенное количество ресурсов (сырье, оборудование и т.д.), из этих ресурсов выпускается определенное количество товаров.

Известно количество единиц каждого из ресурсов, используемых при производстве единицы каждого вида товара. Известен также доход, полученный предприятием от выпуска одной единицы товара. При этих условиях требуется выпустить такое количество товаров, чтобы доход их был максимальным.

Пусть предприятие имеет 3 вида ресурсов: R_1, R_2, R_3 в количестве b_1, b_2, b_3 единиц соответственно (таблица 3). Предприятие выпускает товары 2 видов: T_1 и T_2. Известно, что a_{ij} – количество единиц ресурса R_i, используемого для выпуска 1 единицы товара T_j и c_1, c_2 – доход от 1 единицы товара T_1 и T_2. При этих условиях требуется выпустить количество товаров T_1 и T_2, чтобы доход был максимальным.

Таблица 3 – Условие задачи о распределении ресурсов

Ресурсы	Товары		Кол-во ресурсов
	T_1	T_2	
R_1	a_{11}	a_{12}	b_1
R_2	a_{21}	a_{22}	b_2
R_3	a_{31}	a_{32}	b_3

Обозначим: x_1 – количество товара T_1; x_2 – количество товара T_2 $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

Для выпуска товаров с использованием ресурса R_1 понадобиться следующее количество единиц этого ресурса: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2$. Так как ресурса R_1 должно хватить на выпуск товара T_1 и T_2, то затраты не должны превышать наличие этого ресурса, таким образом $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1$.

Из условия задачи составим систему ограничений (7).

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 \le b_3 \end{cases} \qquad (7)$$

Составим линейную форму: $F(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max$

Требуется среди неотрицательных решений (x_1, x_2) системы (7) выбрать такое, при котором функция F, достигает наибольшего значения (максимизируется).

К подобным схемам могут быть сведены различные задачи о составлении сплавов, смесей горючего, задачи об определении состава животноводческих кормовых смесей наименьшей стоимости, о составлении смеси химических удобрений и т. д.

Пример 3 - Транспортная задача

Уголь, добываемый в нескольких месторождениях, отправляется ряду потребителей: заводам, электростанциям и т. п. Известно, сколько угля добывается в каждом из месторождений, скажем, за месяц, и сколько его требуется на тот же срок любому из потребителей. Известны расстояния между месторождениями и потребителями, а также условия сообщения между ними; учитывая эти данные, можно подсчитать, во что обходится перевозка каждой тонны угля из любого месторождения в любой пункт потребления. Требуется при этих условиях спланировать перевозки угля таким образом, чтобы затраты на них были минимальными.

Примем, что имеются лишь два месторождения M_1 M_2 и три потребителя $П_1$ $П_2$, $П_3$. Количества угля в M_1 и M_2 равны соответственно a_1 и a_2; потребности пунктов $П_1$ $П_2$, $П_3$ пусть будут соответственно b_1, b_2, b_3 - Будем считать, что суммарные запасы равны суммарным потребностям: $a_1 + a_2 = b_1 + b_2 + b_3$. Наконец, заданы числа C_{ij} (i = 1, 2; j= 1, 2, 3) - стоимости перевозки тонны угля из M_i в $П_j$ Задача состоит в нахождении шести чисел x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, где x_{ij} - количество угля, предназначенное к отправке из M_i в $П_j$. Для удобства обозрения составим таблицу 4.

Таблица 4 – Транспортная задача

	в П1	в $П_2$	в $П_3$	Всего отправлено
Из М1	X_{11}	X_{12}	X_{13}	a_1
Из М2	X_{21}	X_{22}	X_{23}	a_2
Всего привезено	b_1	b_2	b_3	

Общее количество угля, вывезенное из M_1 должно равняться a_1; отсюда имеем условие $x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1$

Аналогичное условие должно выполняться для M_2: $x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2$.

Общее количество угля, привезенное в $П_1$ должно равняться b_1; отсюда $x_{11} + x_{21} = b_1$. Аналогично получаем условия: $x_{12} + x_{22} = b_2$, $x_{13} + x_{23} = b_3$.

Предполагаем, что стоимость перевозки прямо пропорциональна количеству перевозимого угля, т.е. перевозка из M_i в $П_j$ стоит $c_{ij} \cdot x_{ij}$. Тогда общая стоимость всех перевозок будет $S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$

Таким образом, приходим к следующей задаче.

Дана система (8)

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} = a_1, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} = a_2, \\ x_{11} + x_{21} = b_1, \\ x_{12} + x_{22} = b_2, \\ x_{13} + x_{23} = b_3. \end{cases} \tag{8}$$

и линейная функция $S=c_{11}x_{11}+c_{12}x_{12}+c_{13}x_{13}+c_{21}x_{21}+c_{22}x_{22}+c_{23}x_{23}$. Требуется среди неотрицательных решений x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} системы (8) выбрать такое, при котором функция S достигает наименьшего значения (минимизируется).

2.3.3 Графическое решение задач линейного программирования

Графический способ решения ЗЛП целесообразно использовать для решения задач с двумя переменными, когда ограничения выражены неравенствами.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \rightarrow \max (\min)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{9}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

Алгоритм графического способа решения задач линейного программирования заключается:

1) Построить прямые уравнения, которые получаются в результате замены в ограничения знаков неравенств на знаки равенств;

2) Найти полуплоскости, определяемые каждым из ограничений задачи;

3) Определить многоугольник решений;

4) Построить вектор $\vec{C} = (c_1;c_2)$ – вектор градиент;

5) Построить прямую $F = c_1x_1 + c_2x_2 = 0$, проходящую через начало координат и перпендикулярную вектору $\vec{C}$;

6) Передвигать прямую F в направлении вектора $\vec{C}$, в результате чего либо находят точку, в которой целевая функция принимает экстремум (максимум или минимум), либо устанавливают неограниченность функции на множестве планов;

7) Определить координаты точки экстремума функции и вычислить значение целевой функции в этой точки.

Пример: Предприятие изготавливает два вида продукции – $П_1$ и $П_2$, которая поступает в оптовую продажу. Для производства продукции используются два вида сырья – А и В. Максимально возможные запасы сырья в сутки составляют 9 и 13 единиц соответственно. Расход сырья на единицу продукции вида $П_1$ и вида $П_2$ дан в таблице 5.

Таблица 5 - Расход сырья продукции

Сырье	Расход сырья на 1 ед. продукции		Запас сырья, ед.
	$П_1$	$П_2$	
А	2	3	9
В	3	2	13

Опыт работы показал, что суточный спрос на продукцию $П_1$ никогда не превышает спроса на продукцию $П_2$ более чем на 1 ед. кроме того, известно, что спрос на продукцию $П_2$ никогда не превышает 2 ед. в сутки.

Оптовые цены единицы продукции равны: 3д.е. – для $П_1$ 4 д.е. для $П_2$.

Какое количество продукции каждого вида должно производить предприятие, чтобы доход от реализации продукции был максимальным?

Решение: Для построения математической модели остается только идентифицировать переменные и представить цель и ограничения в виде математических функций этих переменных.

Предположим, что предприятие изготовит x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 единиц продукции $П_2$. поскольку производство продукции $П_1$ и $П_2$ ограничено имеющимися в распоряжении в распоряжении предприятия сырьем каждого вида и спросом на данную продукцию, а также учитывая, что количество изготавливаемых изделий не может быть отрицательным, должны выполняться следующие неравенства:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 9; \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ x_2 \le 2; \\ x_1 \le 0; \quad x_2 \le 0. \end{cases}$$

Доход от реализации x_1 единиц продукции $П_1$ и x_2 продукции $П_2$ составит $F = 3x_1 + 4x_2$.

Таким образом, мы приходим к следующей математической задаче: среди всех неотрицательных решений данной системы линейных неравенств требуется найти такое, при котором функция F принимает максимальное значение F_{max} .

Найдем решение данной задачи графическим способом.

Построим многоугольник решений. Для этого в системе координат $X_1 0 X_2$ на плоскости изобразим граничные прямые:

$$
\begin{aligned}
&2x1 + 3x2 = 9 && (L1);\\
&3x1 + 2x2 = 13 && (L2);\\
&x1 - x2 = 1 && (L3);\\
&x2 = 2 && (L4).
\end{aligned}
$$

Взяв какую-либо точку, например, начало координат, установим, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство. Полуплоскости, определяемые неравенствами, на рисунке показаны стрелками. Областью решений являются многоугольник *OABCD.*

Для построения прямой $Z = 3x_1 + 4x_2 = 0$ строим вектор-градиент $\vec{C} = (3;4)$ и через точку 0 проводим прямую, перпендикулярную ему. Построенную прямую Z = 0 перемещаем параллельно самой себе в направление вектора C. Из рисунка 9 следует, что по отношению к многоугольнику решений опорной эта прямая становится в точке C, где функция принимает максимальное значение. Точка C лежит на пересечении прямых L_1 и L_3. для определения ее координат решим систему уравнений:

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 = 9;\\
x_1 - x_2 = 1.
\end{cases}
$$

Оптимальный план задачи x1 = 2,4; x2 = 1,4. подставляя значения x_1 и x_2 в линейную функцию, получим:

$$Z_{max} = 3 * 2{,}4 + 4 * 1{,}4 = 12{,}8.$$

Полученное решение означает, что объем производства продукции $П_1$ должен быть равен 2,4 ед., а продукции $П_2$ – 1,4 ед. доход, получаемый в этом случае, составит: Z = 12,8 д.е.

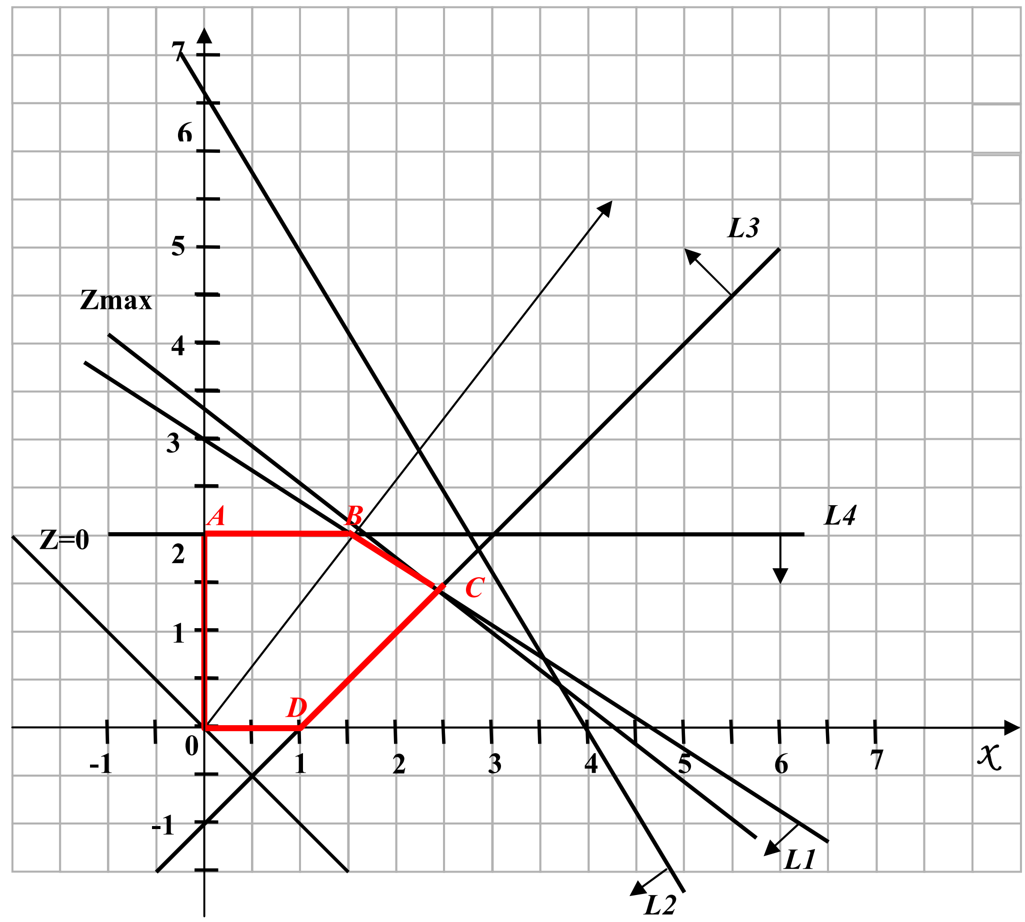

Рисунок 5 – Геометрическая интерпретация решения задач линейного программирования

Свойства задач линейного программирования

При нахождении решения ЗЛП графическим способом могут встретиться следующие случаи (рисунки 6-9):

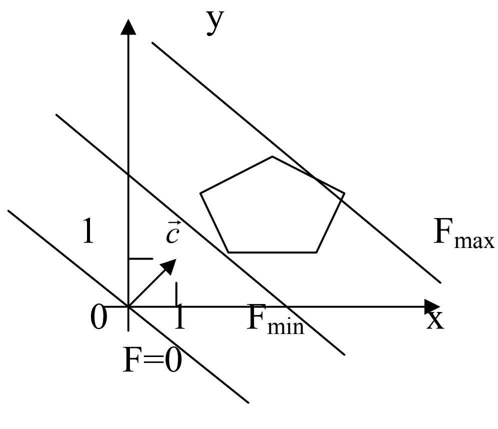

Рисунок 6 – Единственное решение ЗЛП

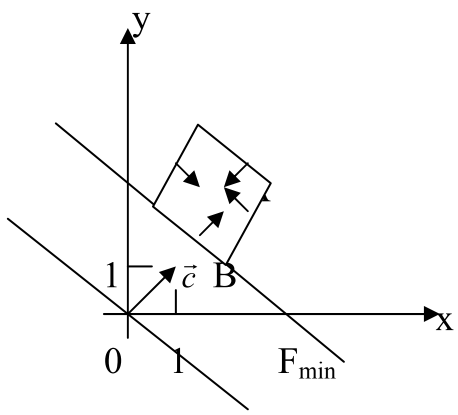

Рисунок 7 - Бесчисленное множество решений ЗЛП
(любая точка отрезка АВ)

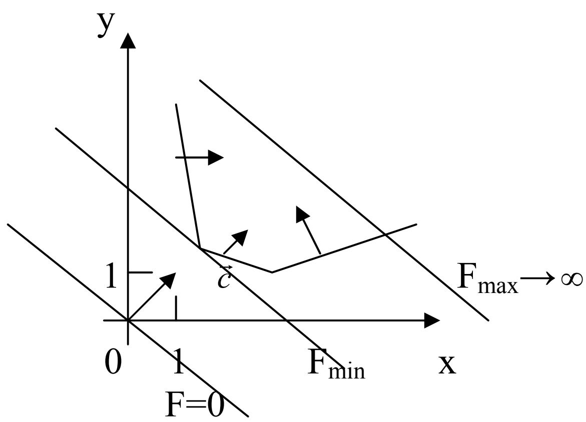

Рисунок 8 – ЗЛП не имеет максимальное решение

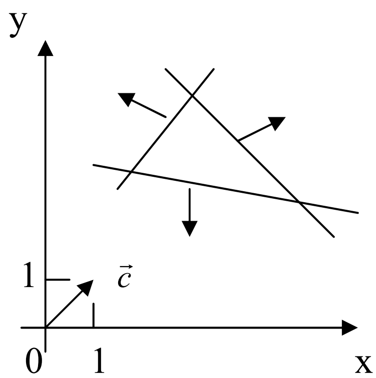

Рисунок 9 – ЗЛП не имеет многоугольника решений

2.4 Задания для лабораторной работы 2

Задание №1

Построить математическую модель задачи линейного программирования, согласно номера своего варианта.

Вариант 1

Автотранспортному предприятию (АТП) необходимо освободить из-под груза складские помещения клиента. Вывоз груза следует осуществить в два рейса колоннами автомобилей. Условия перевозки требуют, чтобы в составе каждой колонны, предназначенной для вывоза груза в первый район, было 8 автомобилей ЗИЛ-131 и 8 автомобилей ЗИЛ-130; в колоннах второго рейса 8 автомобилей ЗИЛ-130 и 16 — МАЗ-500. Каждая из колонн может сделать за сутки одинаковое количество поездок. Парк подвижного состава АТП состоит из 32 автомобилей ЗИЛ-131 грузоподъемностью 3 т, 48 автомобилей ЗИЛ-130 грузоподъем-ностью 4 т, 48 автомобилей МАЗ-500 грузоподъемностью 7,5 т.

Определите количество колонн, которое нужно направить в каждый район, чтобы перевезти наибольшее количество груза.

Вариант 2

Четыре овощехранилища каждый день обеспечивают картофелем три магазина. Магазины подали заявки соответственно на 17, 12 и 32 т. Овощехранилища имеют соответственно 20, 20, 15 и 25 т. Тарифы (в д.е. за 1 т) указаны в следующей таблице 6.

Таблица 6 – Условие задачи варианта 2

Овощехранилища	Магазины		
	1	2	3
1	2	7	4
2	3	2	1
3	5	6	2
4	3	4	7

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Вариант 3

Имеются два склада готовой продукции: A_1 и A_2 с запаса-ми однородного груза 200 и 300 т. Этот груз необходимо достав трем потребителям: B_1, B_2 и B_3 в количестве 100, 150, 250 т соот-ветственно. Стоимость перевозки 1 т груза из склада A_1 потреби-телям B_1, B_2 и

B_3 равна 5, 3, 6 д.е., а из склада A_2 тем же потребителям — 3, 4, 2 д.е. соответственно.

Составьте план перевозок, минимизирующий суммарные транспортные расходы.

Вариант 4

При откорме каждое животное должно получить не менее 9 ед. белков, 8 ед. углеводов и 11 ед. протеина. Для составления рациона используют два вида корма, представленных в следующей таблице 7.

Таблица 7 – Условие задачи варианта 4

Питательные вещества	Количество единиц питательных веществ на 1 кг	
	Корма 1	Корма 2
Белки	3	1
Углеводы	1	2
Протеин	1	6

Стоимость 1 кг корма первого вида - 4 д.е., второго - 6 д.е.

Составьте дневной рацион питательности, имеющий минимальную стоимость.

Варианта 5

Хозяйство располагает следующими ресурсами: площадь 100 ед., труд - 120 ед., тяга - 80 ед. Хозяйство производит четыре вида продукции $П_1$, $П_2$, $П_3$, $П_4$. Организация производства харак- теризуется следующей таблицей 8.

Таблица 8 – Условие задачи варианта 5

Продукция	Затраты на 1 ед. продукции			Доход от единицы
	площадь	тр	тяг	
П1	2	2	2	1
П2	3	1	3	4
П,	4	2	1	3
П4	5	4	1	5

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий хозяйству максимальную прибыль.

Вариант 6

Цех выпускает трансформаторы двух видов. Для изготовле- ния трансформаторов обоих видов используются железо и проволока. Общий запас железа - 3 т, проволоки - 18 т. На один трансформатор первого вида расходуются 5 кг железа и 3 кг проволоки, а на один трансформатор второго вида расходуются 3 кг железа и 2 кг проволоки. За каждый реализованный трансформатор первого вида завод получает прибыль 3 д. е., второго - 4 д. е.

Составьте план выпуска трансформаторов, обеспечивающий заводу максимальную прибыль.

Вариант 7

Совхоз отвел три земельных массива размером 5000, 8000, 9000 га на посевы ржи, пшеницы, кукурузы. Средняя урожайность в центнерах на 1 га по массивам указана в следующей таблице 9.

Таблица 9 – Условие задачи варианта 7

Посевы	Массивы		
	I	II	III
Рожь	12	14	15
Пшеница	14	14	22
Кукуруз	30	35	25

За 1 ц ржи совхоз получает 2 д. е., за 1 ц пшеницы - 2,8 д. е., за I ц кукурузы — 1,4 д. е. Сколько гектаров и на каких массивах совхоз должен отвести на каждую культуру, чтобы получить максимальную выручку, если по плану он обязан сдать не менее 1900 т ржи, 158 000 т пшеницы и 30 000 т кукурузы?

Вариант 8

Из трех продуктов - I, II, III составляется смесь. В ее смеси должно входить не менее 6 ед. химического вещества А, 8 ед. вещества В и не менее 12 ед. вещества С. Структура химических веществ приведена в следующей таблице 10.

Таблица 10 – Условие задачи варианта 8

Продукт	Содержание химического вещества в 1 ед. продукции			Стоимость 1 ед. продукции
	A	B	C	
I	2	1	3	2
II	1	2	4	3
III	3	1,5	2	2,5

Составьте наиболее дешевую смесь.

Вариан 9

В институте проводится конкурс на лучшую стенгазету. Одному студенту дано следующее поручение:

• купить акварельной краски по цене 30 д. е. за коробку, цветные карандаши по цене 20 д. е. за коробку, линейки по цене 12 д.е. блокноты по цене 10

д. е.;

• красок нужно купить не менее трех коробок, блокнотов - столько, сколько коробок карандашей и красок вместе, линеек не более пяти. На покупки выделяется не менее 300 д. е.

В каком количестве студент должен купить указанные предметы, чтобы общее число предметов было наибольшим?

Вариант 10

Цех выпускает три вида деталей - А, В, С. Каждая деталь обрабатывается тремя станками. Организация производства в цехе характеризуется следующей таблицей 11.

Таблица 11 – Условие задачи варианта 10

Станок	Длительность обработки детали,			Фонд времени, час
	А	В	С	
I	12	10	9	220
II	15	18	20	400
III	6	4	4	100
Отпvскная цена за одну деталь	30	32	30	

Составьте план загрузки станков, обеспечивающий цеху получение максимальной прибыли.

Вариант 11

Предприятие должно выпускать два вида продукции — А и В, используя при этом последовательно четыре станка. Данные о технологическом процессе указаны в следующей таблице 12.

Таблица 12 – Условие задачи варианта 11

Станок	Трудоемкость на 1 ед.		Фонд времени, час.
	A	B	
1	3	3	15
2	2	6	18
3	4	0	16
4	1	2	8
Прибыль на 1 ед. продукции (д. е.)	2	3	

Составьте план выпуска продукции, обеспечивающий предприятию наибольшую прибыль.

Вариант 12

На предприятии для производства запасных частей автомобилей используются три вида ресурсов. Выпускаются три вида запасных частей. Организация производства на предприятии характеризуется следующей таблицей 13.

Таблица 13 – Условие задачи варианта 12

Ресурсы	Расход материалов на производство одной запасной части, кг			Запас кг
	1	2	3	
I	5	5	2	1200
II	4	-	3	300
III	-	2	4	800
Прибыль от реализации одной запасной части (д. е.)	5	8	6	

Составьте план производства запасных частей, обеспечивающий предприятию максимальную прибыль.

Вариант 13

Нефтеперерабатывающий завод получает четыре полуфабриката: 400 тыс. л. алкилата, 250 тыс. л. крекинг-бензина, 350 тыс. л. бензина прямой перегонки и 100 тыс. л. изопентона. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуется три сорта авиационного бензина: бензин А-2:3:5:2, бензин В-3:1:2:1, бензин С-2:2:1:3. Стоимость 1 тыс. л. указанных сортов бензина характеризуется числами 120 д. е., 100 д. е., 150 д. е.

Составьте план выпуска разных сортов авиационного бензина из условия получения максимальной стоимости всей продукции.

Вариант 14

Планируется нанесение удара по некоторому объекту тремя различными видами оружия: оружием А -в течение 3 мин., оружием Б - в течение 5 мин., оружием В - в течение 4 мин. Возможности средств обеспечения стрельбы таковы, что при применении оружия А в течение 3 мин., оружия Б в течение 2 мин., оружия В в течение 4 мин. общее количество залпов не должно превышать 15. При применении оружия А в течение 2 мин. и оружия В в течение 3 мин. общее количество залпов не должно превышать 8 ед. Кроме того, для преодоления противодействия противника необходимо, чтобы количество залпов оружием В за 1 мин. было больше, чем 5 ед.

Рассчитайте темп стрельбы (количество залпов в 1 мин.) всеми видами оружия, при котором общее количество залпов в ударе будет наибольшим.

Вариант 15

Для участия в соревнованиях спортклуб должен выставить команду, состоящую из спортсменов I и II разрядов. Соревнования проводятся по бегу, прыжкам в высоту, прыжкам в длину. В беге должны участвовать 5 спортсменов, в прыжках в длину — 8 спортсменов, а в прыжках в высоту - не более 10. Количество очков, гарантируемых спортсмену каждого разряда по каждому виду, указано в следующей таблице 14.

Таблица 14 – Условие задачи варианта 15

Разря	Бег	Прыжки в высоту	Прыжки в
I	4	5	5
II	2	3	3

Распределите спортсменов в команды так, чтобы сумма очков команды была наибольшей, если известно, что в команде I разряд имеют только 10 спортсменов.

Вариант 16

Звероферма выращивает черно-бурых лисиц и песцов. На звероферме имеется 10 000 клеток. В одной клетке могут быть либо две лисы, либо 1 песец. По плану на ферме должно быть не менее 3000 лис и 6000 песцов. В одни сутки необходимо выдавать каждой лисе корма - 4 ед., а каждому песцу - 5 ед. Ферма ежедневно может иметь не более 200 000 единиц корма. От реализации одной шкурки лисы ферма получает прибыль 10 д.е., а от реализации одной шкурки песца — 5 д. е.

Какое количество лисиц и песцов нужно держать на ферме чтобы получить наибольшую прибыль?

Вариант 17

Имеются два элеватора, в которых сосредоточено ответственно 4200 и 1200 т зерна. Зерно необходимо перевезти трем хлебозаводам в количестве 1000, 2000 и 1600 т каждому. Расстояние от элеватора до хлебозаводов указано в следующей таблице 15.

Таблица 15 – Условие задачи варианта 17

Элеваторы	Хлебозаводы		
	1	2	3
1	20	30	50
2	60	20	40

Затраты на перевозку 1 т продукта на 1 км составляют 25 д.е. Спланируйте перевозки зерна из условия минимизации транспортных расходов.

Вариант 18

Из двух сортов бензина образуются две смеси — А и В. Смесь А содержит бензина 60 % 1-го сорта и 40 % 2-го сорта; смесь В — 80 % 1-го сорта и 20 % 2-го сорта. Цена 1 кг смеси А — 10 д.е., а смеси В — 12 д.е.

Составьте план образования смесей, при котором будет получен максимальный доход, если в наличии имеется бензина 50 т 1-го сорта и 30 т 2-го сорта.

Вариант 19

Имеются две почвенно-климатические зоны, площади которых соответственно равны 0,8 и 0,6 млн. га. Данные об урожайности зерновых культур приведены в следующей таблице 16.

Таблица 16 – Условие задачи варианта 19

Зерновые культуры	Урожайность (ц/га)		Стоимость 1 ц, д. е.
	1-я зона	2-я зона	
Озимые	20	25	8
Яровые	25	20	7

Определите размеры посевных площадей озимых и яровых культур, необходимые для достижения максимального выхода продукции в стоимостном выражении.

Вариант 20

Для полива различных участков сада, на которых растут сливы, яблони, груши, служат три колодца. Колодцы могут дать соответственно 180, 90 и 40 ведер воды. Участки сада требуют для полива соответственно 100, 120 и 90 ведер воды. Расстояния (в метрах) от колодцев до участков сада указаны в следующей таблице 17.

Таблица 17 – Условие задачи варианта 20

Колодцы	Участки		
	сливы	яблони	Груши
1	10	5	12
2	23	28	33
3	43	40	39

Как лучше организовать полив?

Вариант 21

Предприятие производит сборку автомашин двух марок: A_1 и A_2. Для этого требуются следующие материалы: S_1- комплекты заготовок металлоконструкций в количестве b_1=17 шт., необходимые для сборки автомашин марок A_1 и A_2 (соответственно 2 и 3 ед.); S_2 - комплекты резиновых изделий в количестве b_2 = 11 шт. (соответственно 2 и 1 ед:); S_3 -двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_3 = 6 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_1; S_4 - двигатели с арматурой и электрооборудованием в количестве b_4 = 5 комплектов, необходимых по одному для каждой автомашины марки A_1 Стоимость автомашины марки A_1 - c_1 = 7 тыс. ден. ед., а автомашины A_2 - c_2 = 5 тыс. ден. ед. Определить план выпуска, обеспечивающий предприятию максимальную выручку.

Вариант 22

Для сохранения нормальной жизнедеятельности человек должен в сутки потреблять белков не менее 120 усл. ед., жиров не менее 70 и витаминов не менее 10 усл. ед. Содержание их в продуктах $П_1$ и $П_2$ равно соответственно (0,2; 0,075; 0) и (0,1; 0,1; 0,1). Стоимость 1 ед. продукта $П_1$ - 2 ден. ед., $П_2$ - 3 ден. ёд. Требуется так организовать питание, чтобы его стоимость была минимальной, а организм получил необходимое количество питательных веществ.

Вариант 23

Определить оптимальный план выпуска изделий с целью получения наибольшей прибыли от их реализации. Условия задачи приведены в таблице 18.

Таблица 18 – Условие задачи варианта 23

Изделия	Нормы расхода сырья на одно изделие			Стоимость ед. изделия, руб.
	Томаты, кг	Специи, кг	Эл. энергия, кВт-ч	
Томаты	2,1	0,09	7	28
Томаты	2,3	0,07	9	35
Томатная паста	3,2	0,7	8	34
Запасы сырья	1500	400	4200	

Вариант 24

Кондитерская фабрика на одной поточной линии может выпускать четыре вида шоколадных конфет. Определить план выпуска каждого сорта конфет и обеспечить наибольший экономический эффект. Данные приведены в таблице 19.

Таблица 19 – Условие задачи варианта 24

Сорт конфет	Нормы расхода сырья на производство 1 кг конфет, кг					Цена 1 кг, руб.
	Шоколад	Сахар	Вафли	Фундук	Крахмал	
Мишка	0,2	0,4	0,1	-	0,3	245
Белочка	0,1	0,5	—	0,3	0,1	280
Трюфели	0,65	0,3	—	—	0,05	320
Юбилейные	0,15	0,4	—	—	0,45	210
Запасы сырья, кг	850	1350	45	95	1500	

Вариант 25

Швейная фабрика выпускает мужские костюмы четырех артикулов. Составить план выпуска костюмов и минимизировать затраты на их изготовление по данным, приведенным в таблице 20.

Таблица 20 – Условие задачи варианта 25

Артикул костюма	Трудоемкость, ч			Эл. энергия, кВт-ч	Тепл. энергия, ккал	Себестоимость одного костюма, руб.
	закройщика	швеи	Контролера			
17831	3,5	6	0,5	11,2	580	750
21326	2,5	4	1	8,2	470	590
22337	4,2	5,5	1,2	14	540	810
27468	3	4,5	0,8	10,2	610	550
Нормы затрат	390	490	100	1000	57000	

Задание №2

Решить задачи линейного программирования графическим способом, согласно своего варианта.

Во всех задачах $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$.

Вариант 1

$W = 2x_1 - 5x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 4 \end{cases}$$

Вариант 2

$W = x_1 - 4x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 \geq 8 \\ -3x_1 + 10x_2 \leq 16 \end{cases}$$

Вариант 3

$F = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 30 \\ 2x_1 + x_2 \leq 20 \end{cases}$$

Вариант 4

$W = 2x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 1 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \end{cases}$$

Вариант 5

$F = 2x_1 + 3x_2 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 \geq 4 \\ x_2 \geq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \end{cases}$$

Вариант 6

$W = x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 3 \\ -x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Вариант 7

$W = x_1 - 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \leq 5 \end{cases}$$

Вариант 8

$W = 2x_1 + 5x_1 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 500 \\ x_1 \leq 400 \\ x_2 \leq 300 \end{cases}$$

Вариант 9

$W = x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 7 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 1 \end{cases}$$

Вариант 10

$W = 2x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \le 15 \\ 4x_1 + 3x_2 \le 11 \end{cases}$$

Вариант 11

$W = 2x_1 + 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 4 \\ -x_1 + 2x_2 \le 8 \end{cases}$$

Вариант 12

$W = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 \ge 1 \\ x_2 \ge 0.6 \\ 0.1x_1 + 0.4x_2 \le 2 \end{cases}$$

Вариант 13

$W = x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 \le 20 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 30 \end{cases}$$

Вариант 14

$W = 5x_1 + x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 \le 11 \\ x_1 \le 2.75 \\ 3x_2 \le 1.1 \end{cases}$$

Вариант 15

$W = 2x_1 + 7x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 \ge 3 \\ x_2 \ge 4 \\ 2x_1 + 2x_2 \le 9 \end{cases}$$

Вариант 16

$W = x_1 – 2x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} x_1 + 10x_2 \le 1 \\ -2x_1 + 24x_2 \le 1 \end{cases}$$

Вариант 17

$W = x_1 + 3x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 8x_2 \le 17 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

Вариант 18

$W = 2x_1 + 4x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 15 \\ x_1 + 6x_2 \le 7 \end{cases}$$

Вариант 19

$W = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 \ge 3 \\ -4x_1 + 6x_2 \le 2 \end{cases}$$

Вариант 20

$W = 4x_1 + 6x_2 \to \max;$

$$\begin{cases} x_1 + 15x_2 \le 32 \\ x_1 \le 31 \\ x_2 \le 2 \end{cases}$$

Вариант 21

$W = 4x_1 – x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 4x_1 + 6x_2 \le 9 \\ -5x_1 + 8x_2 \le 4 \end{cases}$$

Вариант 22

$W = 2x_1 + x_2 \to \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ -2x_1 + 9x_2 \le 21 \end{cases}$$

Вариант 23

$W = x_1 + 5x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 + 3x_2 \le 7 \end{cases}$$

Вариант 24

$W = 2x_1 + x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \ge 7 \\ -2x_1 + 9x_2 \le 21 \end{cases}$$

Вариант 25

$W = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max;$

$$\begin{cases} x_1 \ge 4 \\ x_2 \ge 5 \\ 3x_1 + x_2 \le 16 \end{cases}$$

Вариант 26

$W = 3x_1 - 2x_2 \rightarrow \min;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 8 \\ -3x_1 + 8x_2 \le 4 \end{cases}$$

2.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 2

1) Какие задачи относятся к задачам линейного программирования?
2) Что называется системой ограничения и целевой функцией задачи линейного программирования?
3) Что означает понятие каноническая форма записи задачи линейного программирования?
4) Какое решение называется оптимальным?
5) Как определяется область допустимых решений?
6) Что означает понятие вектор решений (вектор-градиент)?
7) В каком случае задача линейного программирования не имеет решение?

3 Лабораторная работа 3. Симплекс-метод решения задач линейного программирования

Цель работы: Приобретение навыков решения задач линейного программирования симплекс-методом.

3.1 Ход работы:

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условия задач из лабораторной работы №2.
3) решить задачу линейного программирования с использованием симплекс-таблиц.
4) оформить отчет по лабораторной работе.

3.2 Содержание отчета

Отчет по лабораторной работе должен содержать:

1) тему работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировку задания;
5) решение задачи своего варианта с использованием симплекс-таблиц.

3.3 Методические указания к лабораторной работе 2

3.3.1 Алгоритм симплекс-метода с помощью симплекс таблиц

Алгоритм симплекс-метода с помощью симплекс таблиц:

1) В последней строке симплекс таблице находят наименьший положительный элемент, не считая свободного члена. Столбец соответствующий этому элементу считается разрешающим;

2) Вычисляют отношения свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца (симплекс отношение), находят наименьшее из этих симплекс отношений, оно соответствует разрешающей строке;

3) На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца находится разрешающий элемент;

Замечание: Если имеется несколько одинаковых по величине симплекс отношений, то выбирается любое из них, то же самое относится к положительным элементам последней строки симплекс таблице.

4) Далее переходят к следующей таблице, неизвестные переменные соответствуют разрешающей строке и столбцу меняются местами. При этом базисная переменная становится свободной переменной и наоборот.

5) Как только получается таблица, в которой в последней строке все элементы отрицательны, считается, что минимум найден. Минимальное значение функции равно свободному члену в строке целевой функции, а оптимальное решение определяется свободными членами при базисных переменных, все свободные переменные в этом случае равны нулю.

6) Если в разрешающем столбце все элементы отрицательны, то задача решений не имеет (минимум не достигается).

Замечание: Для того чтобы решать ЗЛП с помощью симплекс таблиц, необходимо её представить в канонической форме.

Пример: Найти минимум целевой функции $F = x_4 - x_5 \to \min$, если система ограничений имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - x_4 + 2x_5 \\ x_2 = 2 + 2x_4 - x_5 \\ x_3 = 3 - 3x_4 - x_5 \end{cases}$$

Решение:

x_4, x_5 – свободные переменные

x_1, x_2, x_3 – базисные переменные (зависят от свободных)

Для составления симплекс-таблиц (таблицы 21-23) систему ограничений и функцию F необходимо представить в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 + x_4 - 2x_5 = 1 \\ x_2 - 2x_4 + x_5 = 2 \\ x_3 + 3x_4 + x_5 = 3 \end{cases}$$

$F - x_4 + x_5 = 0$

Таблица 21 – Первый шаг симплекс-метода

	Базисные переменные	Свободный член	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5 ↓ P	Симплекс отношение
	X_1	1	1	0	0	1	-2	-
$\vec{P}$	X_2	2	0	1	0	-2	1	2
	X_3	3	0	0	1	3	1	3
	F	0	0	0	0	-1	1	-

Таблица 22 – Второй шаг симплекс-метода

	Базисные переменные	Свободный член	X_1	X_2	X_3	X_4 ↓ P	X_5	Симпл отнош
	X_1	5	1	2	0	-3	0	-
	X_5	2	0	1	0	-2	1	-
$\vec{P}$	X_3	1	0	-1	1	5	0	1/5
	F	-2	0	-1	0	1	0	-

Таблица 23 – Третий шаг симплекс-метода

Базисные переменные	Свободный член	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	Симплекс-отношение
X_1	28/5	1	7/5	3/5	0	0	
X_5	12/5	0	3/5	2/5	0	1	
X_4	1/5	0	-1/5	1/5	1	0	
F	-11/5	0	-4/5	-1/5	0	0	

Ответ: $F_{min} = -\frac{11}{5}$; $x = (\frac{28}{5}; 0; 0; \frac{1}{5}; \frac{12}{5})$.

3.4 Задания для лабораторной работы 3

Согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи из лабораторной работы №2 (любую одну задачу из двух). Решить задачу линейного программирования с использованием симплекс-таблиц.

3.5 Дополнительное задание

Решите задачу линейного программирования симплекс-методом, согласно своего варианта:

1) $\max L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 10; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

2) $\max L = 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 16; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 14; \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

3) $\min L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 3x_4 = 9; \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

4) $\min L = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 3x_4 = 10; \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

5) $\max L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 12; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 15; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

6) $\max L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 3; \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 5; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

7) $\min L = 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 8; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 10; \end{cases}$$

$x_j \geq 0;\ j = 1.4$

8) $\min L = x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 4; \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 4; \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 2; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

9) $\min L = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 6; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

10) $\min L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

11) $\min L = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 4; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 6; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

12) $\min L = x_1 - 2x_2 + 3x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1; \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 13; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

13) $\min L = 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_4 = 6; \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 7; \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 7; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

14) $\min L = 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ 2x_1 + 2x_3 + x_4 = 8; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

15) $\min L = 2x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6; \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 6; \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 10; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

16) $\min L = x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 5; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4; \\ 2x_2 + x_3 = 4; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

17) $\min L = x_1 + x_2 - 2x_3 + 2x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 5; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3; \\ 2x_1 + x_3 = 6; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

18) $\min L = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 3x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_4 = 4; \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 6; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

19) $\min L = -2x_2 + x_3;$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - x_4 = 12; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

20) $\min L = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 8; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 10; \\ x_1 + x_2 + x_3 - 2x_4 = 6; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

21) $\min L = 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 6; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 4; \\ x_1 + x_3 = 1; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

22) $\min L = x_1 + x_2 + x_3 + x_4;$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 22; \\ 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 = 24; \\ 3x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 26; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

23) $\min L = x_1 - x_2 + x_3 - x_4;$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_3 + 2x_4 = 2; \\ -x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 = 5; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.4 \end{cases}$$

24) $\min L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4;$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6; \\ x_2 + x_3 + x_4 = 9; \\ x_3 + x_4 + x_5 = 12; \\ x_4 + x_5 + x_6 = 15; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.6 \end{cases}$$

25) $\min L = 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5$;

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_4 = 1; \\ x_1 + x_2 + x_5 = 2; \\ x_j \geq 0;\ j = 1.5 \end{cases}$$

3.6 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 3

1) В чем состоит практическая реализация симплекс – таблиц?
2) Какие переменные называются базисными переменными?
3) Какие переменные называются свободными переменными?
4) Как найти разрешающую строку, разрешающий столбец, разрешающий элемент в симплекс – таблице?
5) Как найти симплекс – отношение в симплекс – таблице?
6) В каком случае задача линейного программирования не имеет решения?

Список использованных источников

1 **Бережная Е.В.** Математические методы моделирования экономических систем [Текст] / Е.В Бережная, В.И. Бережной. –М.: Финансы и статистика, 2002. –368 с.

2 **Агальцов В.П.** Математические методы в программировании [Текст] /В.П. Агальцов., И.В. Волдайская. –М.: Форум - Инфра-М, 2006. -224 с.

3 **Кузнецов А.В.** Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование [Текст] /А.В. Кузнецов, Р.А. Рутковский – Мн.: Вышэйшая школа, 2002. -447 с.

4 **Москинова Г.И.** Дискретная математика .Математика для менеджеров в примерах и упражнениях [Текст] /Г.И.Москинова. –М.: Логос, 2002.-240 с.

5 **Партыка Т.Л.** Математические методы [Текст] /Т.Л. Партыка, И.И. Попов. –М.: Форум - Инфра-М, 2005. -464 с.

6 **Струченков В.И.** Методы оптимизациии [Текст] /В.И.Струченков. – М.: Экзамен, 2005. – 256 с.

7 **Черноруцкий И.Г.** Методы оптимизации в теории управлении [Текст] /Черноруцкий И.Г. –СПб: Питер, 2004. –256с.

8 **Рыжиков Ю.И.** Имитационное моделирование. Теория и технология [Текст] /Ю.И. Рыжиков –СПб.: Корона принт, 2004. –384 с.

9 **Акулич И.Л.** Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] /И.Л. Акулич. –М.: Высшая школа, 1993. –336 с.

10. **Пинегина М.В.** Математические методы и модели в экономике [Текст] /Пинегина М.В.. –М.: Экзамен, 2004. –212 с.