МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Колледж электроники и бизнеса

Кафедра вычислительной техники и математики

Т.В.АТЯСКИНА

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ЛАБОРАТОРНЫМ РАБОТАМ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 004.2:51-7(075.3)
ББК 22.18:32.973 я 73
А- 92

Рецензент
заместитель директора по НМР Кузюшин С.А.

Атяскина, Т.В.
А- 92 **Математическое программирование [Текст]: методические указания к лабораторным работам /Т.В.Атяскина. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. –85 с.**

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ, обеспечивающих учебный процесс по дисциплине “Математическое программирование” в колледже электроники и бизнеса ОГУ для студентов 4 курса специальности 230105 “Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем” очной формы обучения.

Методические указания составлены с учетом Государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по направлению подготовки дипломированных специалистов - утвержденного 30.12.2003 Министерством образования Российской Федерации.

ББК 22.18:32.973 я 73

Содержание

Введение

Предмет «Математическое программирование» является дисциплиной по выбору для специальности 230105 «Программное обеспечение вычислительной техники и автоматизированных систем». Он базируется на дисциплинах «Математические методы», «Дискретная математика», «Объектно-ориентированное программирование», «Технология разработки программных продуктов». Вместе с тем знания, умения и навыки, приобретенные при изучении дисциплины «Математическое программирование» используются при написании курсового проекта по «Математическим методам».

Курс рассчитан на 60 часов лабораторно-практических занятий. Итоговый контроль в виде зачета предусмотрен в седьмом семестре четвертого курса.

В данном пособии изложены 8 лабораторных работ по предмету «Математическое программирование». В начале каждой лабораторной работы даны теоретические сведения, необходимые для решения всех последующих примеров и задач. Далее рассматриваются примеры типовых практических задач с подробными пояснениями. Где это возможно, решения сопровождаются геометрическими интерпретациями.

В учебном процессе дисциплины «Математическое программирование» используется язык программирования Delphi, реализующий изучаемые методы оптимизации. Однако задания каждой лабораторной работы содержат аналитическое решение задач вручную. Решение вручную позволяет обучающимся глубже ознакомиться с математическим смыслом рассматриваемых методов и сознательно освоить математические идеи этих методов, что имеет важное познавательное значение.

1 Лабораторная работа 1. Решение транспортных задач методом «северо-западного угла» и методом минимального элемента

Цель работы: Приобретение навыков решения стандартных транспортных задач линейного программирования методом «минимального элемента» и методом «северо-западного угла» и составление программы решения задач.

1.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условие транспортной задачи;
3) решить задачу методом «минимального элемента» и методом «северо-западного угла» аналитически;
4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;
5) распечатать текст и результаты программы в отчет;
6) оформить отчет по лабораторной работе;
7) защитить лабораторную работу.

1.2 Содержание отчета

1) тема работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировка задания;
5) аналитическое решение задачи своего варианта;
6) распечатка текста программы решения задачи;
7) распечатка результатов решения задачи.

1.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 1

1.3.1 Общий вид транспортной задачи

Одной из типичных задач линейного программирования является транспортная задача, которая возникает при планировании наиболее рациональных перевозок груза.

В общем виде транспортную задачу принято рассматривать в виде таблицы (таблица 1).

Таблица 1 – Общий вид транспортной задачи

Поставщики	Потребители				Запасы груза
	B_1	B_2	…	B_m	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1m} x_{1m}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2m} x_{2m}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_n	c_{n1} x_{n1}	c_{n2} x_{n2}	…	c_{nm} x_{nm}	a_n
Потребности в грузе	b_1	b_2	…	b_m	

где A_i – поставщики груза ($i=\overline{1;n}$);

B_j – потребители груза ($j=\overline{1;m}$);

a_i – запасы груза ($i=\overline{1;n}$);

b_J – потребители в грузе ($j=\overline{1;m}$);

c_{ij} – стоимость (тариф) каждой перевозки ($i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;m}$);

x_{ij} – количество распределенного товара от i-го поставщика j-му потребителю($i=\overline{1;n}$, $j=\overline{1;m}$).

Если в транспортной задаче выполняется условие $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$, то транспортная задача называется **закрытой**, иначе - **открытой**.

Для написания модели необходимо все ограничения и целевую функцию представить в виде математических уравнений:

1. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i$ ($i=\overline{1;n}$);

2. $\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j$ (j=$\overline{1;m}$);

3. $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{m} b_j$

4. $x_{ij} \geq 0$ (i=$\overline{1;n}$;j=$\overline{1;m}$);

5. $Z_{\min} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}x_{ij}$.

Методами отыскания начального плана (опорного решения) для решения транспортной задачи являются:

1) метод «северо-западного угла»;

2) метод минимального элемента;

3) метод Фогеля.

1.3.2 Метод «северо-западного угла»

Заполнение таблицы начинается с левого верхнего угла (северо-запаного), передвигаясь дальше по столбцу или по строке. В клетку (1;1) заносят меньшее из чисел a_1 или b_1 , т.е x_{11}=min(a_1; b_1).

Если a_1>b_1, то x_{11}=b_1. Следовательно, x_{i1}=0, i = 2,3...n., т.е. потребности первого потребителя удовлетворены полностью.

Двигаясь дальше по первой строке, записываем в соседнюю клетку

x_{12} = min(a_1-b_1; b_2).

Если b_1>a_1, то x_{11}=a_1. Следовательно, x_{1j}=0, j=2,3...n., т.е. запасы первого поставщика исчерпаны полностью.

Двигаясь дальше по первому столбцу, записываем в соседнюю клетку x_{21} = min(a_2 ; b_1-a_1) и т.д.

Таким образом, пересчитывая запасы и потребности, столбец с исчерпанным запасом или строку с удовлетворенной потребностью исключаем из дальнейшего расчета. Снова находим северо-западный угол, заполняем эту клетку, вычеркиваем строку или столбец и т.д пока не будут исчерпаны все запасы и не удовлетворены все потребности в грузе.

Пример 1

Пять песчано-гравийных карьеров добывают в сутки 60, 70, 120, 130, 100 у.е. гравия. Для строительства трех дорог необходимо гравий в количестве 140, 180, 160 у.е. соответственно. Стоимость перевозок из одного карьера на один объект приведена в таблице 2 в денежных единицах (д.е).

Построить опорный план перевозок по правилу «северо-западного угла» и определить значения целевой функции построенного плана.

Таблица 2 – Исходные данные задачи

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	2	8	9	60
№ 2	3	5	8	70
№ 3	4	1	4	120
№ 4	2	4	7	130
№ 5	4	1	2	100
Потребности в гравии	140	180	160	

Решение задачи рассмотрим в таблице 3.

Таблица 3 - Оптимальное решение методом «северо-западного угла»

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	2 60	8 0	9 0	60
№ 2	3 70	5 0	8 0	70
№ 3	4 10	1 110	4 0	120
№ 4	2 0	4 70	7 60	130
№ 5	4 0	1 0	2 100	100
Потребности в гравии	140	180	160	480

X_{11} = min(60; 140)=60;
X_{21} = min(70; 140-60)=70;
X_{31} = min(120; 10)=10;
X_{32} = min(120-10; 180)=60;
X_{42} = min(130; 180-110)=70;
X_{43} = min(130-70; 160)=60;
X_{53} = min(100; 160-60)=100.

Таким образом, опорный план равен:

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \\ 10 & 110 & 0 \\ 0 & 70 & 60 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Найдем сумму затрат на перевозки:

Z = 60*2+70*3+10*4+110*1+70*4+60*7+100*2=1380 д.е.

Теорема: Число положительных компонент в опорном плане $N \le n+m-1$, где n – число строк, m – число столбцов плана.

Если условие $N \le n+m-1$ выполняется, то план называется **невырожденным**, иначе **вырожденным.**

1.3.3 Метод минимального элемента

Метод минимального элемента состоит из следующих шагов:

1) В клетку с минимальной единичной стоимостью записывают наибольшее возможное количество груза для поставки.
2) Производится корректировка оставшихся запасов и потребностей.
3) Выбирается следующая клетка с наименьшим тарифом, в которую планируется наибольшее возможное количество груза для поставки и т.д. до тех пор, пока оставшиеся запасы и потребности не станут равны нулю.
4) Если наименьший тариф соответствует более чем одной клетке, то выбор осуществляется случайным образом.

Рассмотрим решение примера 1 методом минимального элемента, используя таблицу 4.

Таблица 4 - Оптимальное решение методом минимального элемента

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	2 60	8 0	9 0	60
№ 2	3 0	5 0	8 70	70
№ 3	4 0	1 120	4 0	120
№ 4	2 80	4 0	7 50	130
№ 5	4 0	1 60	2 40	100
Потребности в гравии	140	180	160	480

C_{52} = 1- min, X_{52}= min (100; 180)=100.
C_{32}=1- min, X_{32}= min (120; 180-100)=80.
C_{11}=2 – min, X_{11}= min (60;140)=60.
C_{41}=2 – min, X_{11}=min(130;140-60)=80.
C_{33}=3 - min, X_{33}=min(120-180;160)=40.
C_{43}=7 - min, X_{43}=min(130-80;160-40)=50
C_{23}=8 – min, X_{23}=min(70;160-90)=70

Таким образом, опорный план равен:

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 70 \\ 0 & 120 & 0 \\ 80 & 0 & 50 \\ 0 & 60 & 40 \end{pmatrix}$$

Затраты на перевозки равны:

Z = 60*2+80*2+70*8+120*1+60*1+50*7+40*2=1450 д.е.

1.4 Задания для лабораторной работы 1

Построить опорные планы перевозок по правилу «северо-западного угла» и по правилу «минимального элемента» (таблицы 5-17), согласно своего варианта. Определить значения целевых функций построенных планов. Составить программы решения задач в среде программирования Delphi.

Таблица 5 – Исходные данные варианта № 1

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***4***	***8***	***1***	***5***	100
A2	***6***	***3***	***2***	***9***	45
A3	***2***	***9***	***1***	***4***	55
Потребность в грузе B_j	50	50	25	75	

Таблица 6 – Исходные данные варианта № 2

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***4***	***7***	***2***	***3***	30
A2	***3***	***1***	***0***	***4***	190
A3	***5***	***6***	***3***	***7***	250
Потребность в грузе B_j	70	120	150	130	

Вариант № 3

В пунктах А и В находятся соответственно 150 и 90 т горючего. Пунктам 1, 2, 3 требуются соответственно 60, 70, 110 т горючего. Стоимость перевозки 1 т горючего из пункта А в пункты 1, 2, 3 равна 60, 10, 40 тыс. р. за 1 т. соответственно, а из пункта В в пункты 1, 2, 3 — 120, 20, 80 тыс. р. за 1 т. соответственно. Составьте план перевозок горючего, минимизирующий общую сумму транспортных расходов.

Таблица 7 – Исходные данные варианта № 4

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***5***	***1***	***2***	***3***	300
A2	***6***	***3***	***7***	***1***	200
A3	***4***	***5***	***3***	***2***	500
A4	***2***	***4***	***6***	***4***	700
Потребность в грузе B_j	230	420	650	400	

Таблица 8 – Исходные данные варианта № 5

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***4***	***1***	***8***	***3***	50
A2	***5***	***7***	***0***	***9***	190
A3	***7***	***1***	***3***	***2***	110
Потребность в грузе B_j	70	30	150	100	

Таблица 9 – Исходные данные варианта № 6

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***1***	***1***	***2***	***3***	155
A2	***4***	***3***	***9***	***1***	145
A3	***4***	***5***	***7***	***2***	560
A4	***2***	***0***	***6***	***4***	140
Потребность в грузе B_j	400	420	130	50	

Таблица 10 – Исходные данные варианта № 7

Поставщики груза	Потребители				Запасы груза A_i
	B1	B2	B3	B4	
A1	***5***	***1***	***2***	***3***	30
A2	***6***	***3***	***7***	***1***	20
A3	***4***	***5***	***3***	***2***	500
A4	***2***	***4***	***6***	***4***	130
Потребность в грузе B_j	40	42	188	410	

Вариант № 8

Три завода выпускают грузовые автомобили, которые отправляются четырем потребителям. Первый завод поставляет 90 платформ грузовиков, второй – 30 платформ, третий – 40 платформ. Требуется поставить платформы следующим потребителям: первому – 70 шт., второму – 30, третьему – 20, четвертому – 40 шт.

Стоимость перевозки одной платформы от поставщика до потребителя указана в таблице 11.

Таблица 11 – Стоимость перевозки

Поставщики	Потребители			
	1	2	3	4
I	18	20	14	10
II	10	20	40	30
III	16	22	10	20

Составьте оптимальный план доставки грузовых автомобилей.

Вариант № 9

Груз, хранящийся на трех складах и требующий для перевозки 60, 80, 106 автомашин соответственно, необходимо перевезти в четыре магазина. Первому магазину требуется 44 машины груза, второму — 70, третьему — 50 и четвертому — 82 машины. Стоимость пробега одной автомашины за 1 км составляет 10 д. е. Расстояния от складов до магазинов указаны в таблице 12.

Таблица 12 – Расстояния от складов до магазинов

Склады	Магазины			
	1	2	3	4
1	13	17	6	8
2	2	7	10	41
3	12	18	2	22

Составьте оптимальный по стоимости план перевозки груза от складов до магазинов.

Вариант № 10

На складах А, В, С находится сортовое зерно 100, 150, 250 т, которое нужно доставить в четыре пункта. Пункту 1 необходимо поставить 50 т, пункту 2 - 100, пункту 3 - 200, пункту 4 - 150 т сортового зерна. Стоимость доставки 1 т зерна со склада А в указанные пункты соответственно равна (д. е.) 80, 30, 50, 20; со склада В - 40, 10, 60, 70; со склада С - 10, 90, 40, 30.

Составьте оптимальный план перевозки зерна из условия минимума стоимости перевозки.

Таблица 13 – Исходные данные варианта № 11

Поставщики	Потребители						Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	5	3	1	4	2	6	1780
A2	4	2	3	6	1	3	2000
A3	1	3	7	4	5	2	1530
A4	3	4	6	7	1	5	2860
Потребность в грузе B_j	850	1870	1950	1670	1000	830	

Таблица 14 – Исходные данные варианта № 12

Поставщики	Потребители						Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	
A1	7	1	4	6	5	8	600
A2	1	3	5	2	4	6	800
A3	4	5	6	3	1	7	550
A4	5	3	7	2	8	4	730
A5	2	4	3	5	6	3	900
Потребность в грузе B_j	750	580	440	620	550	640	

Таблица 15 – Исходные данные варианта № 13

Поставщики	Потребители					Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	
A1	4	1	2	5	6	100
A2	7	3	4	2	5	70
A3	6	4	7	1	8	130
A4	2	5	6	4	7	150
Потребность в грузе B_j	80	120	70	130	50	

Таблица 16 – Исходные данные варианта № 14

Поставщики	Потребители							Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	
A1	5	1	4	3	6	7	2	1040
A2	4	2	6	5	1	8	3	2700
A3	7	3	1	4	2	5	6	1885
A4	2	5	7	1	4	3	4	1457
Потребность в грузе B_j	590	740	875	1537	1200	1500	640	

Таблица 17 – Исходные данные варианта № 15

Поставщики	Потребители							Запас груза A_i
	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	
A1	8	1	9	3	6	7	2	70
A2	1	2	2	4	1	8	3	50
A3	5	3	1	3	2	5	8	150
A4	2	5	7	1	6	3	4	330
Потребность в грузе B_j	20	40	75	25	200	140	100	

1.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 1

1) Какие задачи линейного программирования называются транспортными?
2) Каковы особенности математической модели транспортной задачи?
3) Какие транспортные задачи называются закрытыми?
4) Какие транспортные задачи называются открытыми?
5) Какие условия должны выполняться в транспортных задачах?
6) Укажите методы нахождения опорного решения.
7) Какой план в транспортных задачах называется вырожденным?
8) Алгоритм нахождения опорного плана методом «северо-западного угла».
9) Алгоритм нахождения опорного плана методом минимального элемента.

2 Лабораторная работа 2. Решение транспортных задач методом Фогеля

Цель работы: Приобретение навыков решения стандартных транспортных задач линейного программирования методом Фогеля и составление программы решения задач.

2.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условие транспортной задачи из лабораторной работы №1;
3) решить транспортную задачу методом Фогеля аналитически;
4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;
5) распечатать текст и результаты программы в отчет;
6) оформить отчет по лабораторной работе;
7) защитить лабораторную работу.

2.2 Содержание отчета

1) тема работы;
2) цель работы;
3) ход работы;

4) формулировка задания;
5) аналитическое решение задачи своего варианта;
6) распечатка текста программы решения задачи;
7) распечатка результатов решения задачи.

2.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 2

2.3.1 Метод Фогеля

По каждой строке и каждому столбцу определяем разность между двумя наименьшими тарифами, записываем ее. Из этих разностей выбираем наибольшую, выделяем ее. В строке или столбце, где имеется наибольшая разность, заносим в клетку с минимальным тарифом максимально допустимую доставку. После этого записываем остаток груза по строкам и столбцам. В строках и столбцах с нулевым остатком проставляются нули во все незанятые клетки. Занятые клетки на следующих этапах не рассматриваются.

Пример 2

Рассмотрим условие задачи примера 1 из лабораторной работы 1.

Построим опорный план перевозок, используя метод Фогеля и определим, значения целевой функции построенного плана.

Решение задачи рассмотрим в таблице 18.

Таблица 18 - Оптимальное решение методом Фогеля

Карьеры	Дорога 1	Дорога 2	Дорога 3	Запасы гравия
№ 1	2 60	8 0	9 0	60
№ 2	3 70	5 0	8 0	70
№ 3	4 0	1 120	4 0	120
№ 4	2 10	4 60	7 60	130
№ 5	4 0	1 0	2 100	100
Потребности в гравии	140	180	160	480

C_{12}-C_{11}=6 – max, C_{11}=2 - min

X_{11}=min(60;140)=60.

C_{31}-C_{32}=3 – max, C_{32}=1 - min
X_{32}=min(120;180)=120.
C_{43}-C_{53}=5 – max, C_{53}=2 - min
X_{53}=min(100;160)=100.
C_{22}-C_{21}=2 – max, C_{21}=3-min
X_{21}=min(70;140-60)=70.
C_{41} =2 –min
X_{41}=min(130;140-130)=10.
C_{42} =4 –min
X_{42}=min(130-10;180-120)=60.
X_{43}=min(130-70;160-100)=60.

Таким образом, опорный план равен:

$$X = \begin{pmatrix} 60 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 \\ 0 & 120 & 0 \\ 10 & 60 & 60 \\ 0 & 0 & 100 \end{pmatrix}$$

Найдем сумму затрат на перевозки:

Z = 60*2+70*3+10*2+120*1+60*4+60*7+100*2=1330 д.е.

2.4 Задания для лабораторной работы 2

Построить опорный план перевозок методом Фогеля. Определить значения целевой функции построенного плана. Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi.

2.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 2

1) Какие задачи линейного программирования называются транспортными?
2) Каковы особенности математической модели транспортной задачи?
3) Какие транспортные задачи называются закрытыми?
4) Какие транспортные задачи называются открытыми?
5) Какие условия должны выполняться в транспортных задачах?
6) Укажите методы нахождения опорного решения.
7) Какой план в транспортных задачах называется вырожденным?
8) Алгоритм нахождения опорного плана методом Фогеля.

3 Лабораторная работа 3. Решение задач методом динамического программирования

Цель работы: Приобретение навыков решения стандартных задач методом динамического программирования и составление программы решения задач.

3.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;
3) решить задачу методом динамического программирования аналитически.
4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;
5) распечатать текст и результаты программы в отчет;
6) оформить отчет по лабораторной работе;
7) защитить лабораторную работу.

3.2 Содержание отчета

1) тема работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировка задания;
5) аналитическое решение задачи своего варианта;
6) распечатка текста программы решения задачи;
7) распечатка результатов решения задачи.

3.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 3

3.3.1 Метод динамического программирования

Под динамическим программированием понимают некоторый специальный метод оптимизации, суть которого состоит в отыскании оптимального решения путем выполнения вычислений в несколько шагов (этапов). Вся задача оптимизации разделяется на несколько шагов, причем все шаги могут быть уникальными или одинаковыми и чередоваться друг с другом.

При использовании динамического программирования многошаговая задача решается дважды: от конца к началу (определение условно-оптимального решения) и от начала к концу (определение безусловно-оптимального решения). Первый этап длительный и трудоемкий, второй - короткий и уточняет решение первого этапа.

3.3.2 Основное функциональное уравнение динамического программирования

$$F_i(x_{i-1};U_i) = \underset{U_i}{extr}\,(Z_i(x_{i-1};U_i) + F_{i+1}(x_i))\ ,\ i = \overline{1,N}\,, \qquad (1)$$

где:

x_{i-1} - множество состояний, в которых система находится перед i-м шагом;

x_i - множество состояний системы в конце i-го шага;

U_i – множество управлений на i-ом шаге, под воздействием которых система переходит в одно из состояний множества x_i;

$F_i(x_{i-1};U_i)$ - условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от i-го до n-го шага включительно;

$Z_i(x_{i-1};U_i)$ - значение целевой функции на i-ом шаге для всех управлений из множества U_i;

$F_{i+1}(x_i)$ - условно-оптимальное значение целевой функции на интервале от (i+1)-го шага до N-го включительно.

На последнем N шаге справедлива следующая формула:

$$F_N(x_{N-1};U_N) = \underset{U_N}{extr}\,Z_N(x_{N-1};U_N)\,, \qquad (2)$$

Пример 3

На данной сети дорог (рисунок 1) указаны стоимости доставки единицы груза из пункта в пункт. Найти наиболее экономный маршрут перевозки груза из пункта 1 в пункт 10.

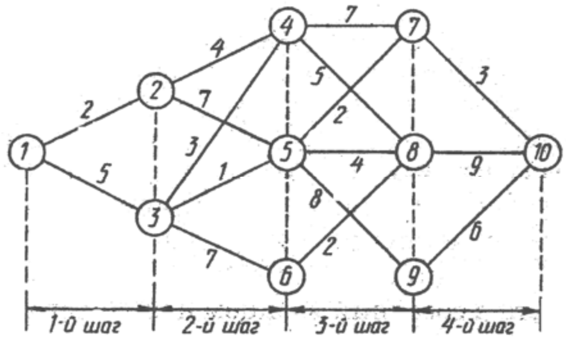

Рисунок 1 – Сеть дорог по доставке груза

Решение: Разобьем все пункты сети на группы (таблица 19). К группе I отнесем пункт 1 , к группе II – пункты, в которые можно попасть непосредственно из пункта 1 (пункты 2 и 3), к группе III отнесем пункты, в которые можно попасть непосредственно из любого пункта группы II (4,5 и 6) и т.д. В результате движения транспорта с грузом из пункта 1 в пункт 10 можно рассматривать как четырехшаговый процесс.

Таблица 19 – Разбиение сети дорог на группы

I	II	III	IV	V
	2	4	7	
1	3	5	8	10
		6	9	

В качестве физической системы выступает транспорт с грузом, перемещающий из начального состояния c_1 (пункта 1) в конечное состояние c_{10} (пункт 10), и сеть дорог. Множество x_i – множество пунктов назначения на i-м шаге.

Управление U_i на i – м шаге состоит в выборе дороги (i,j), по которой следует направлять груз из данного пункта в соседний в общем направлении к пункту 10.

Значение z_i целевой функции на i – м шаге – это затраты на перевозку единицы груза из данного пункта в выбранный соседний пункт.

1) Первый этап условной оптимизации начнем с анализа четвертого шага. N=4, функциональное уравнение имеет вид (формула 3):

$$F_4(x_3,u_4)=\min_{u_4} z_4(x_3,u_4), \qquad (3)$$

$x_4=\{c_{10}\}$; $x_3=\{c_7,c_8,c_9\}$; $u_4=\{(7,10),(8,10),(9,10)\}$; $z_4=\{3,9,6\}$.

Анализ четвертого шага оформим в таблице 20.

Таблица 20 – Первый этап условной оптимизации

X_3	U_4	X_4	F_4
C_7	**(7,10)**	**C_{10}**	**3**
C_8	(8,10)	C_{10}	9
C_9	(9,10)	C_{10}	6

2) Переходя ко второму этапу условной оптимизации – анализу третьего шага, запишем функциональное уравнение при i=3 (формула 4):

$$F_3(x_2,u_3)=\min_{u_3} (z_3(x_2,u_3)+F_4(x_3)), \qquad (4)$$

Анализ третьего шага рассмотрим в таблице 21.

Таблица 21 – Второй этап условной оптимизации

X_2	U_3	X_3	Z_3	F_4	Z_3+F_4	F_3
C_4	(4,7)	C_7	7	3	10	10
	(4,8)	C_8	5	9	14	-
<u>C_5</u>	**<u>(5,7)</u>**	C_7	2	3	5	**<u>5</u>**
	(5,8)	C_8	4	9	13	-
	(5,9)	C_9	8	6	14	-
C_6	(6,8)	C_8	2	9	11	11

3) Третий этап условной оптимизации – анализ второго шага – осуществляется совершенно аналогично второму этапу. Функциональное уравнение для второго шага запишется в следующей форме (формула 5), i=2.

$$F_2(x_1,u_2)=\min_{u_2}(z_2(x_1,u_2)+F_3(x_2)) \qquad (5)$$

Анализ второго шага рассмотрим в таблице 22.

Таблица 22 – Третий этап условной оптимизации

X_1	U_2	X_2	Z_2	F_3	Z_2+F_3	F_2
C_2	(2,4)	C_4	4	10	14	-
	(2,5)	C_5	7	5	12	12
<u>C_3</u>	(3,4)	C_4	3	10	13	-
	<u>(3,5)</u>	**<u>C_5</u>**	1	5	6	**<u>6</u>**
	(3,6)	C_6	7	11	18	-

4) Заключительным этапом процедуры условной оптимизации является анализ первого шага. Функциональное уравнение для этого шага имеет вид (формула 6), i=1

$$F_1(x_0,u_1)=\min_{u_1}(z_1(x_0,u_1)+F_2(x_1)), \qquad (6)$$

Результаты вычислений приведены в таблице 23.

Таблица 23 – Четвертый этап условной оптимизации

X_0	U_1	X_1	Z_1	F_2	$Z_1 + F_2$	F_1
<u>**C_1**</u>	(1,2)	C_2	2	12	14	-
	<u>**(1,3)**</u>	<u>**C_3**</u>	5	6	12	<u>**11**</u>

При безусловной оптимизации остается пройти еще раз весь оптимизируемый процесс, но уже в прямом направлении, начиная с первого и кончая четвертым шагом, и «прочитать» искомое оптимальное управление, которое будет составлено из найденных ранее шаговых условно-оптимальных управлений. Таким образом, рассматривая таблицы решения с последней по первую, получаем наиболее экономный маршрут перевозки, который проходит через пункты 1, 3, 5, 7, 10 при этом транспортные расходы составляют 11 ден. ед. на единицу груза.

3.4 Задания для лабораторной работы 3

На данной сети дорог (рисунок 2) имеется несколько маршрутов, по которым можно доставлять груз из пункта 1 в пункт 10. Известны стоимости c_{ij} перевозки единицы груза между пунктами сети. Требуется:

1) методом динамического программирования найти на сети наиболее экономный маршрут доставки груза из пункта 1 в пункт 10 и соответствующие ему затраты;

2) выписать оптимальные маршруты перевозки груза из всех остальных пунктов сети в пункт 10 и указать отвечающие им минимальные затраты на доставку.

Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi.

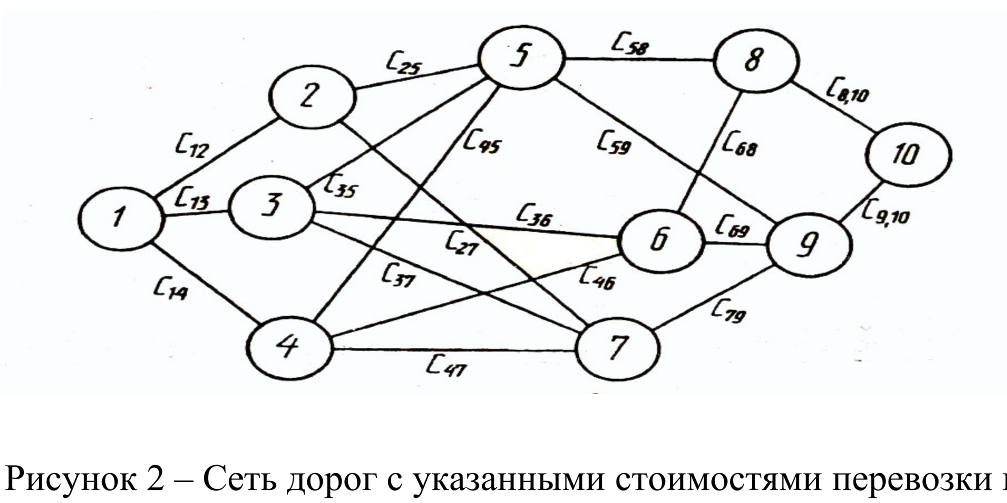

Рисунок 2 – Сеть дорог с указанными стоимостями перевозки груза

Все необходимые числовые данные вариантов №1 - №15 приведены в таблице 24.

Таблица 24- Стоимости перевозки груза

Тариф	Номер варианта														
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**
C_{12}	7	4	9	1	5	8	3	6	1	4	2	4	5	3	3
C_{13}	3	8	2	6	3	1	5	2	9	6	5	6	2	5	5
C_{14}	5	4	5	2	8	5	4	6	3	1	7	7	4	7	6
C_{25}	2	6	3	5	2	9	1	7	8	3	9	8	6	9	4
C_{27}	7	1	7	3	5	2	6	3	7	5	4	4	7	2	3
C_{35}	9	9	4	6	8	6	2	9	4	7	6	6	8	5	7
C_{36}	3	3	6	8	1	8	7	2	9	3	2	7	1	8	9
C_{37}	1	5	8	4	7	4	4	8	3	6	1	8	4	1	4
C_{45}	8	4	1	7	5	5	6	5	7	2	3	2	5	4	6
C_{46}	4	8	3	2	9	2	8	2	4	5	5	1	7	8	7
C_{47}	5	2	5	9	1	6	3	9	8	9	2	8	8	3	4
C_{58}	2	7	8	5	3	1	7	4	6	1	6	9	5	5	3
C_{59}	6	4	7	3	5	8	2	6	3	8	7	3	3	7	1
C_{68}	1	9	1	6	8	3	9	7	1	2	8	5	4	9	2
C_{69}	9	6	4	1	4	6	2	4	8	3	2	7	1	1	3
C_{79}	4	1	5	4	9	2	8	6	9	5	6	3	4	3	4
$C_{8,10}$	3	7	9	6	2	5	1	7	1	3	7	2	5	2	5
$C_{9,10}$	8	2	5	1	7	9	3	6	4	8	9	3	9	1	8

3.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 3

1) Что понимается под динамическим программированием?
2) Какие задачи можно решать методом динамического программирования?
3) Объяснить алгоритм решения задач динамического программирования.
4) Основное функциональное уравнение динамического программирования.
5) На какие 2 этапа распадается вычислительная процедура метода динамического программирования? В чем заключаются эти этапы?

4 Лабораторная работа 4. Метод сетевого планирования и управления

Цель работы: Приобретение навыков решения задач методом сетевого планирования и управления и составление программы решения задач.

4.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;
3) решить задачу методом сетевого планирования и управления аналитически.
4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;
5) распечатать текст и результаты программы в отчет;
6) оформить отчет по лабораторной работе;
7) защитить лабораторную работу.

4.2 Содержание отчета

1) тема работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировка задания;
5) аналитическое решение задачи своего варианта;
6) распечатка текста программы решения задачи;
7) распечатка результатов решения задачи.

4.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 4

4.3.1 Метод сетевого планирования и управления

Сетевое планирование применяется для создания оптимального плана выполнения работ в сфере промышленного производства, строительства, организации научно-исследовательских работ и т.д. Исходным материалом для сетевого планирования является программа выполнения работ, которая содержит перечень работ с указанием длительности выполнения каждой. На основе этих данных строится сетевая модель (график).

Сетевая модель – графическое отображение выполняемых работ в их технологической последовательности с указанием времени выполнения каждой работы (рисунок 3).

Основными элементами сетевой модели являются:

1) Событие – фиксируемый момент времени завершения i-й работы и начало выполнения (i+1)-й работы. На сетевом графике событие обозначается кружком с порядковым номером.

2) Работа – это активные действия по созданию материального или интеллектуального продукта с привлечением различных ресурсов: финансовых, материальных, энергетических и т.д. Различают несколько видов работ:

- действительная работа, определение дано выше (на сетевом графике изображается сплошной линией со стрелкой);
- фиктивная работа – логическая связь между событиями, не требующая затрат каких-либо ресурсов (изображается на сетевом графике пунктирной линией).

3) Путь – это непрерывная последовательность событий и работ, которые включаются только один раз.

4) Критический путь – это путь, который содержит работы, не имеющие резервы по времени для своей реализации. Работы, имеющие резервы по времени, называются некритическими.

5) Исходное событие. Каждая сетевая модель имеет одно исходное событие, из которого вытекает одна или несколько работ. Исходное событие не имеет входящих работ.

6) Завершающее событие. Каждая сетевая модель имеет одно завершающее событие, в котором заканчивается одна или несколько работ. Завершающее событие не имеет выходящих работ.

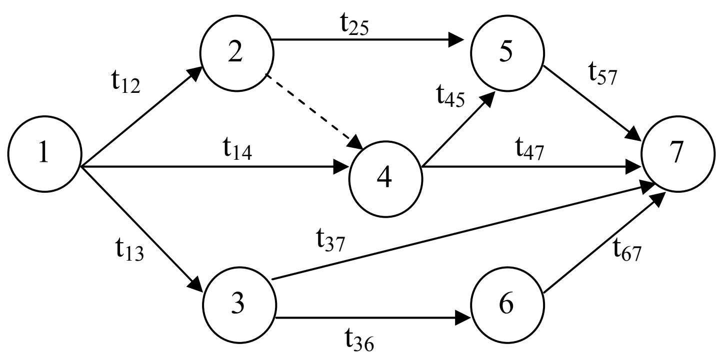

Рисунок 3 - Пример сетевой модели

4.3.2 Расчет временных параметров

Главной характеристикой сетевого графика является длина критического пути. Расчет критического пути выполняют в два этапа (от начала к концу сетевого графика и от конца к началу сетевого графика). На первом этапе определяют ранние сроки наступления событий, а на втором – поздние сроки наступления событий.

1) Ранние сроки наступления событий вычисляются по формуле (7).

$$t_р(j)=\max\{ t_р(i)+t(i, j) \}, \qquad (7)$$

где $t_р(i)$, $t_р(j)$ – соответственно ранние сроки свершения предыдущего и последующего событий;
$t(i, j)$ – время выполнения работ.

2) Поздние сроки наступления событий вычисляются по формуле (8).

$$t_п(i)=\min\{ t_п(j) - t(i, j) \}, \qquad (8)$$

где $t_п(i)$, $t_п(j)$ – соответственно поздние сроки свершения предыдущего и последующего событий;
$t(i, j)$ – время выполнения работ.

3) Полный резерв времени вычисляется по формуле (9).

$$R(j)=t_п(j) - t_р(j), \qquad (9)$$

Для оперативного контроля, полученные параметры наносят на сетевую модель, где каждое событие представляется в виде рисунка 4.

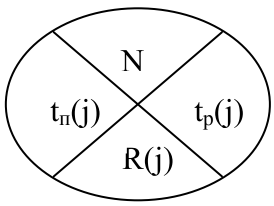

Рисунок 4 – Обозначение события сетевой модели с параметрами

Пример 4

На основании технологической последовательности и предварительных расчетов построена сетевая модель (рисунок 5). Требуется определить величину критического пути и полный резерв времени.

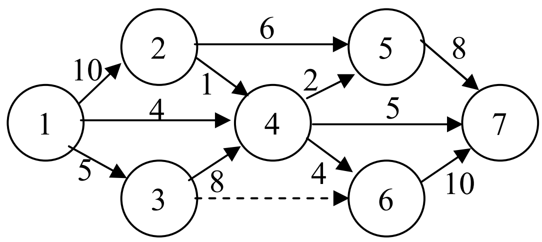

Рисунок 5 – Сетевая модель примера 3

Решение:

1) Вычислим ранние сроки свершения событий по формуле (7):

$$t_p(1) = 0$$

$$t_p(2) = \max\{t_p(1) + t_{12}\} = \max\{0 + 10\} = 10$$

$$t_p(3) = \max\{t_p(1) + t_{13}\} = \max\{0 + 5\} = 5$$

$$t_p(4) = \max\begin{Bmatrix} t_p(1) + t_{14} \\ t_p(2) + t_{24} \\ t_p(3) + t_{34} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 4 \\ 10 + 1 \\ 5 + 8 \end{Bmatrix} = 13$$

$$t_p(5) = \max\begin{Bmatrix} t_p(2) + t_{25} \\ t_p(4) + t_{45} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 10 + 6 \\ 13 + 2 \end{Bmatrix} = 16$$

$$t_p(6) = \max\begin{Bmatrix} t_p(3) + t_{36} \\ t_p(4) + t_{46} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 5 + 0 \\ 13 + 4 \end{Bmatrix} = 17$$

$$t_p(7) = \max\begin{Bmatrix} t_p(4) + t_{47} \\ t_p(5) + t_{57} \\ t_p(6) + t_{67} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 13 + 5 \\ 16 + 8 \\ 17 + 10 \end{Bmatrix} = 27$$

2) Вычислим поздние сроки свершения событий по формуле (8):

$$t_n(7) = t_p(7) = 27$$

$$t_n(6) = \min\{t_n(7) - t_{67}\} = \min\{27 - 10\} = 17$$

$$t_n(5) = \min\{t_n(7) - t_{57}\} = \min\{27 - 8\} = 19$$

$$t_n(4) = \min\begin{Bmatrix} t_n(7) - t_{47} \\ t_n(6) - t_{46} \\ t_n(5) - t_{45} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 27 - 5 \\ 17 - 4 \\ 19 - 2 \end{Bmatrix} = 13$$

$$t_n(3) = \min\begin{Bmatrix} t_n(6) - t_{36} \\ t_n(4) - t_{34} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 17 - 0 \\ 13 - 8 \end{Bmatrix} = 5$$

$$t_n(2) = \min\begin{Bmatrix} t_n(5) - t_{25} \\ t_n(4) - t_{24} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 19 - 6 \\ 13 - 1 \end{Bmatrix} = 12$$

$$t_n(1) = \min\begin{Bmatrix} t_n(4) - t_{14} \\ t_n(3) - t_{13} \\ t_n(2) - t_{12} \end{Bmatrix} = \min\begin{Bmatrix} 13 - 4 \\ 5 - 5 \\ 12 - 10 \end{Bmatrix} = 0$$

3) Вычислим полный резерв времени каждого события по формуле (9)

R(1)= 0 – 0 = 0
R(2)= 12 – 10= 2
R(3)= 5 – 5 = 0
R(4)= 13 – 13 = 0
R(5)= 19 – 16 = 3
R(6)= 17 – 17 = 0
R(7)= 27 – 27 = 0

Занесем все параметры на сетевую модель (рисунок 6).

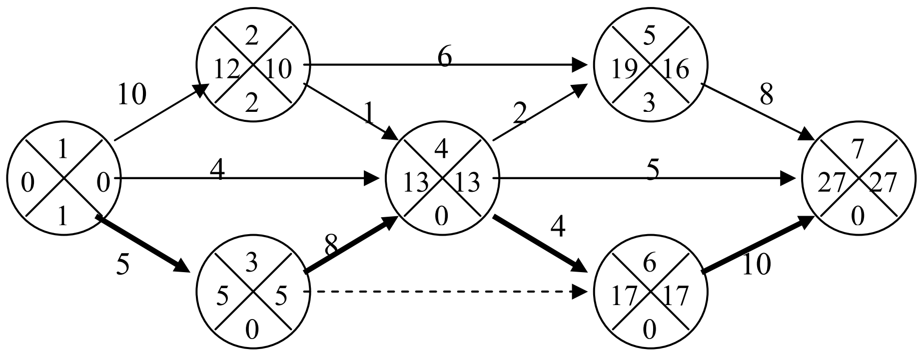

Рисунок 6 – Сетевая модель примера 3 с временными параметрами

Ответ: Длина критического пути равна 27. На критическом пути находятся события: 1, 3, 4, 6, 7.

4.4 Задания для лабораторной работы 4

Рассчитать непосредственно на сетевом графике комплекса работ, согласно своего варианта (рисунок 7), ранние и поздние сроки свершения событий, резервы времени событий, минимальное время выполнения комплекса (критический срок). Выделить на сетевом графике критический путь.

Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi.

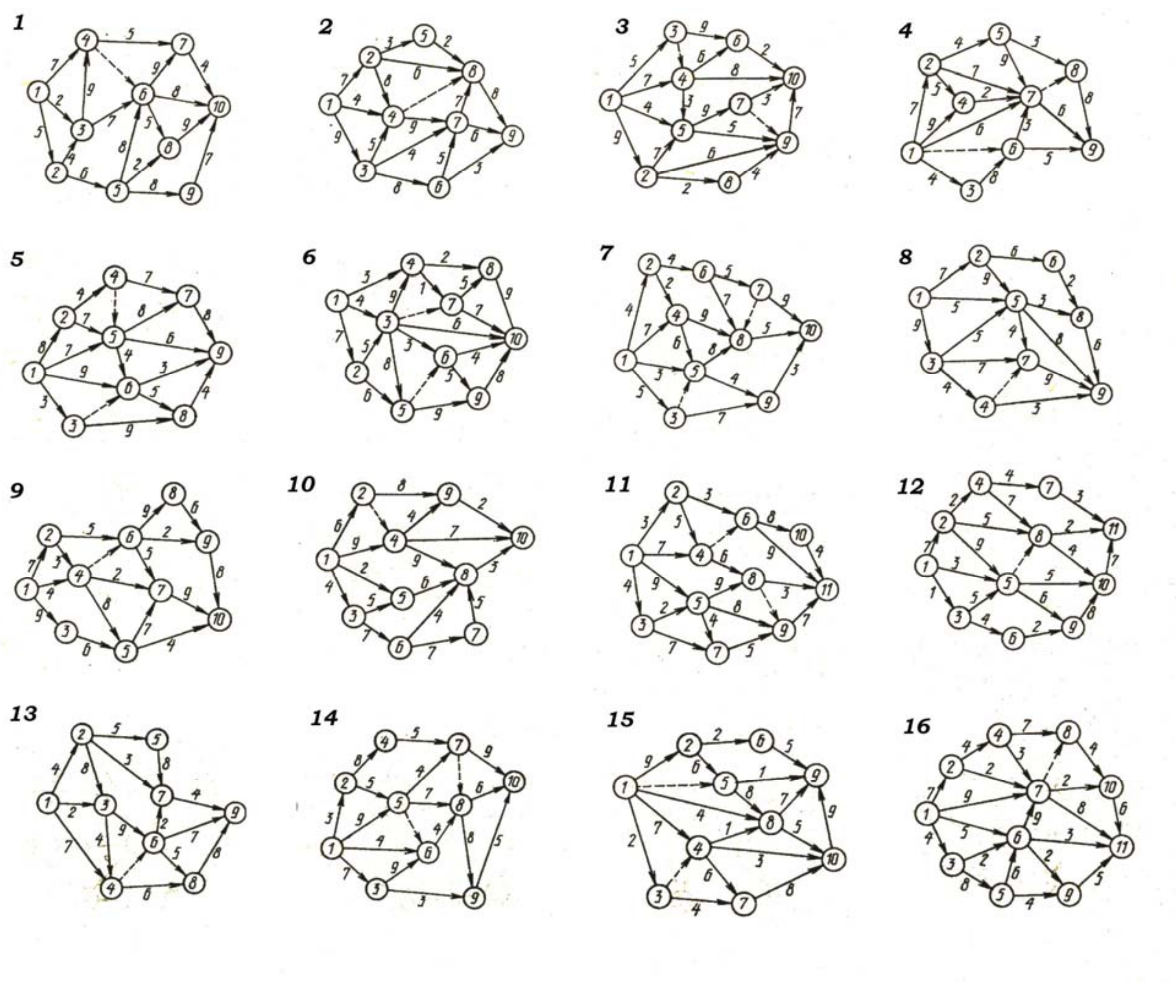

Рисунок 7 – Варианты заданий для лабораторной работы 4

4.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 4

1) Что такое событие?
2) Какая работа называется действительной, фиктивной работой?
3) Дайте определение исходному событию, завершающему событию?
4) Чем отличается критический путь от любого другого пути?
5) Какие работы и события называются критическими?
6) Что называется сетевой моделью?
7) Основные правила построения сетевой модели.
8) Как вычисляются ранние сроки свершения событий?
9) Как вычисляются поздние сроки свершения событий?
10) Что такое резервы времени и как они определяются?

5 Лабораторная работа 5. Решение многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации

Цель работы: Приобретение навыков решения стандартных многокритериальных задач методом аддитивной оптимизации и составление программы решения задач.

5.1 Ход работы:

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;
3) решить многокритериальную задачу методом аддитивной оптимизации аналитически;
4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;
5) распечатать текст и результаты программы в отчет;
6) оформить отчет по лабораторной работе;
7) защитить лабораторную работу.

5.2 Содержание отчета:

1) тема работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировка задания;
5) аналитическое решение задачи своего варианта;

6) распечатка текста программы решения задачи;

7) распечатка результатов решения задачи.

5.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 5

5.3.1 Многокритериальные задачи

Математические модели исследуемых явлений или процессов могут быть заданы в виде таблиц, элементами которых являются значения частных критериев эффективности функционирования системы, вычисленные для каждой из сравниваемых стратегий при строго заданных внешних условиях.

Выбор оптимального решения по комплексу нескольких критериев является **задачей многокритериальной**.

Один из подходов к решению многокритериальных задач управления связан с процедурой образования обобщенной функции $F_i(a_{i1},a_{i2}, \ldots a_{in})$, монотонно зависящей от критериев $a_{i1},a_{i2}, \ldots a_{in}$. Данная процедура называется **процедурой (методом) свертывания критериев**. Существует несколько методов свертывания, например метод аддитивной оптимизации.

5.3.2 Метод аддитивной оптимизации

Аддитивный критерий оптимальности определяется по формуле (10).

$$F_i\left(a_{ij}\right)=\sum_{j=1}^{n}\lambda_j \cdot a_{ij}, \ \mathrm{i} = 1,2, \ldots \mathrm{m}, \tag{10}$$

где a_{ij} - частные критерии;

λ_j - весовые коэффициенты.

$$\sum_{j=1}^{n}\lambda_j = 1, \lambda_j \geq 0, \tag{11}$$

Обобщенная функция цели (10) может быть использована для свертывания частных критериев оптимальности, если:

- частные критерии количественно соизмеримы по важности;
- частные критерии являются однородными.

Если частные критерии не однородны, т.е. имеют различные единицы измерения, то в этом случае требуется нормализация критериев. Под **нормализацией критериев** понимается такая последовательность процедур, с помощью которой все критерии приводятся к единому, безразмерному масштабу измерения. Рассмотрим некоторые способы нормализации.

Определим максимум и минимум каждого частного критерия, т.е.

$$a_j^+ = \max a_{ij}, i = \overline{1;m}, \tag{12}$$

$$a_j^- = \min a_{ij}, i = \overline{1;m}, \tag{13}$$

Выделим группу критериев a_j, $j = \overline{1,k}$, которые максимизируются при решении задачи, и группу критериев a_j, $j = \overline{k+1,n}$, которые минимизируются при решении задачи.

В соответствии с принципом максимальной эффективности нормализованные критерии определяются из соотношений (14), (15), (16), (17).

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{1,k}, \tag{14}$$

$$\tilde{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{k+1,n}, \tag{15}$$

или

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, j = \overline{1,k}, \tag{16}$$

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, j = \overline{k+1,n}, \tag{17}$$

Оптимальным будет тот вариант, который обеспечивает максимальное значение функции цели:

$$F_i\left(a_{ij}\right) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \tilde{a}_{ij}, i = \overline{1,m}, \tag{18}$$

В соответствии с принципом минимальной потери нормализованные критерии определяются соотношениями (19), (20), (21), (22).

$$\tilde{a}_{ij} = 1 - \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{1,k}, \tag{19}$$

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij}}{a_j^+}, j = \overline{k+1,n}, \tag{20}$$

или

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_j^+ - a_{ij}}{a_j^+ - a_j^-}, j = \overline{1,k}, \tag{21}$$

$$\tilde{a}_{ij} = \frac{a_{ij} - a_j^-}{a_j^+ - a_j^-}, j = \overline{k+1, n}, \qquad (22)$$

При этом оптимальным будет тот вариант, который обеспечивает минимальное значение функции цели.

Пример 5

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по обеспечению нового производства оборудованием. С помощью экспериментальных наблюдений были определены значения частных критериев функционирования соответствующего оборудования, выпускаемого тремя заводами-изготовителями. На основе экспертных оценок были также определены веса частных критериев. Все данные приведены в таблице 25.

Таблица 25 – Данные примера 5

Варианты оборудования	Частные критерии			
	Производительность, д.е.	Стоимость, д.е.	Энергоемкость, у.е.	Надежность, у.е.
Оборудование завода 1	5	7	5	6
Оборудование завода 2	3	4	7	3
Оборудование завода 3	4	6	2	4
Весовые коэффициенты	0,4	0,2	0,1	0,3

Решение:

1) Определим max каждого частного критерия:

$a_1^+ = 5, \quad a_2^+ = 7, \; a_3^+ = 7, \; a_4^+ = 6$

2) При решении задачи максимизируются первый (производительность) и четвертый (надежность) критерии, а минимизируются второй (стоимость) и третий (энергоемкость) критерии.

3) Исходя из принципа максимизации эффективности, нормализуем критерии, используя формулы (14), (15):

$$\tilde{a}_{i1} = \frac{a_{i1}}{a_1^+}, i = \overline{1,3}$$

$\tilde{a}_{11} = \frac{a_{11}}{a_1^+} = \frac{5}{5} = 1$; $\quad \tilde{a}_{21} = \frac{a_{21}}{a_1^+} = \frac{3}{5} = 0,6$; $\quad \tilde{a}_{31} = \frac{a_{31}}{a_1^+} = \frac{4}{5} = 0,8$.

$$\tilde{a}_{i4} = \frac{a_{i4}}{a_4^+}, i = \overline{1,3}$$

$$\tilde{a}_{14} = \frac{a_{14}}{a_4^+} = \frac{6}{6} = 1; \qquad \tilde{a}_{24} = \frac{a_{24}}{a_4^+} = \frac{3}{6} = 0,5; \qquad \tilde{a}_{34} = \frac{a_{34}}{a_4^+} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

$$\tilde{a}_{i2} = 1 - \frac{a_{i2}}{a_2^+}, i = \overline{1,3}$$

$$\tilde{a}_{12} = 1 - \frac{a_{12}}{a_2^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \qquad \tilde{a}_{22} = 1 - \frac{a_{22}}{a_2^+} = 1 - \frac{4}{7} = \frac{3}{7}; \qquad \tilde{a}_{32} = 1 - \frac{a_{32}}{a_2^+} = 1 - \frac{6}{7} = \frac{1}{7}.$$

$$\tilde{a}_{i3} = 1 - \frac{a_{i3}}{a_3^+}, i = \overline{1,3}$$

$$\tilde{a}_{13} = 1 - \frac{a_{13}}{a_3^+} = 1 - \frac{5}{7} = \frac{2}{7}; \qquad \tilde{a}_{23} = 1 - \frac{a_{23}}{a_3^+} = 1 - \frac{7}{7} = 0; \qquad \tilde{a}_{33} = 1 - \frac{a_{33}}{a_3^+} = 1 - \frac{2}{7} = \frac{5}{7}.$$

4) Определим обобщенную функцию цели по каждому варианту, используя формулу (18).

$$F_1 = \lambda_1 \cdot \tilde{a}_{11} + \lambda_2 \cdot \tilde{a}_{12} + \lambda_3 \cdot \tilde{a}_{13} + \lambda_4 \cdot \tilde{a}_{14} = 0,4 \cdot 1 + 0,2 \cdot 0 + 0,1 \cdot \frac{2}{7} + 0,3 \cdot 1 \approx 0,729$$

$$F_2 = \lambda_1 \cdot \tilde{a}_{21} + \lambda_2 \cdot \tilde{a}_{22} + \lambda_3 \cdot \tilde{a}_{23} + \lambda_4 \cdot \tilde{a}_{24} = 0,4 \cdot 0,6 + 0,2 \cdot \frac{3}{7} + 0,1 \cdot 0 + 0,3 \cdot 0,5 \approx 0,476$$

$$F_3 = \lambda_1 \cdot \tilde{a}_{31} + \lambda_2 \cdot \tilde{a}_{32} + \lambda_3 \cdot \tilde{a}_{313} + \lambda_4 \cdot \tilde{a}_{34} = 0,4 \cdot 0,8 + 0,2 \cdot \frac{1}{7} + 0,1 \cdot \frac{5}{7} + 0,3 \cdot \frac{2}{3} \approx 0,603$$

5) Оптимальным является первый вариант оборудования, т.к. $F_{max}=F_1=0,729$.

5.4 Задания для лабораторной работы 5

Вариант № 1

Для шести проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовых коэффициентов приведены в таблице 26.

Таблица 26 – Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скорости (К1)	Прочности (К2)	Перегрузки (К3)	Устойчи-вости (К4)	Металло-емкости (К5)	Мощ-ности (К6)
1	1,1	0,798	0,92	1,0	1,0	0,77
2	1,0	1,1	0,65	0,92	0,94	0,92
3	1,0	0,93	0,924	1,0	0,98	0,95
4	0,87	0,96	0,91	0,915	0,99	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,90	0,7	0,82
6	0,88	0,78	0,75	0,967	0,8	1,0
Коэф-ты веса	0,210	0,195	0,174	0,157	0,124	0,140

Найти оптимальное транспортное устройство.

Вариант № 2

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные представлены в таблице 27:

Таблица 27 - Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производи-тельность, д. е.	стоимость оборудования, д. е.	объем памяти у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
Коэффициенты веса	0,25	0,20	0,32	0,23

Вариант № 3

Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в таблице 28.

Таблица 28 – Показатели технических систем

Варианты технических систем	Относительные единичные показатели					
	слож-ности	веса	времени подго-товки	автома-тизации	мощно-сти	унифика-ции
I	1,0	0,88	1,0	1,0	0,72	0,614
I I	0,72	1,2	0,8	0,78	0,81	0,420
III	0,658	0,358	0,765	0,782	0,525	0,915
IV	0,425	0,97	0,755	0,70	0,98	0,31
V	0,467	0,555	0,865	0,705	0,865	0,650
Коэффици-енты веса	0,157	0,124	0,210	0,195	0,174	0,140

Найти оптимальную техническую систему.

Вариант № 4

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в таблице 29.

Таблица 29 - Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества		
	мощность, л. с.	крутящий момент, кгс • м	масса, кг
1	180	67	850
2	176	70	1000
3	176	68	860
4	181	67	820
5	177	68	860
6	180	66	800
Коэффициенты	0,4	0,24	0,36

Найдите оптимальный вариант двигателя.

Вариант №5

Показатели эффективности работы предприятий приведены в таблице 30.

Таблица 30 – Показатели эффективности работы предприятий

№ предприятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	прибыль, д. е.	себестоимость единицы продукции, д. е.	доходы, д. е.	фондоотдача, у. е.	производительность, у. е.
1	30.0	40,0	20,0	0,2	300
II	25,0	20,0	30,0	0,3	200
III	40,0	45,0	54,0	0,1	250
IV	28,0	30,0	35,0	0,4	160
V	15,0	12,0	20,0	0,25	280
VI	50,0	30,0	40,0	0,21	120
Весовые коэффициенты	0,32	0,23	0,15	0,20	0,10

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант № 6

Для пяти проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в таблице 31.

Таблица 31 - Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скорости (К1)	Прочности (К2)	Перегрузки (К3)	Устойчивости (К4)	Мощности (К6)
1	0,78	0,98	0,72	1,0	0,87
2	1,0	1,0	0,65	0,9	0,94
3	0,90	0,93	0,92	1,0	0,96
4	0,87	0,95	0,81	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,3	0,90	0,82
Коэф-ты веса	0,310	0,190	0,173	0,147	0,18

Найти оптимальное транспортное устройство.

Вариант № 7

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования.

Исходные данные представлены в таблице 32.

Таблица 32 - Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования д. е.	объем памяти у. е.	надежность, у. е.
I	100	5	5	8
II	150	6	8	5
III	120	4	6,5	6
IV	200	7	6	4
V	130	5	7	7
Коэффициенты веса	0,20	0,25	0,23	0,32

Вариант № 8

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в таблице 33.

Таблица 33 - Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества		
	мощность, л. с.	крутящий момент, кгс • м	масса, кг
1	183	71	855
2	186	72	900
3	172	69	840
4	181	66	830
5	175	68	860
6	180	66	800
7	175	67	1000
Коэффициенты	0,26	0,40	0,34

Найдите оптимальный вариант двигателя.

Вариант № 9

Показатели эффективности работы предприятий приведены в таблице 34.

Таблица 34 - Показатели эффективности работы предприятий

№ пред-приятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	прибыль, д. е.	себестои-мость единицы продукции, д. е.	доходы, д. е.	фондоотдача, у. е.	произво-дительность, у. е.
I	32,0	43,0	30,0	0,1	200
II	27,0	25,0	40,0	0,4	300
III	30,0	40,0	44,0	0,3	260
IV	28,0	37,0	37,0	0,25	280
V	17,0	22,0	35,0	0,25	250
Весовые коэффи-циенты	0,22	0,33	0,15	0,25	0,10

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант № 10

Для семи проектов транспортных устройств определены относительные единичные показатели технологического совершенства конструкции. Численные значения единичных показателей и соответствующие весовые коэффициенты приведены в таблице 35.

Таблица 35 – Показатели транспортных устройств

Варианты транспортных устройств	Скоро сти (К1)	Проч ности (К2)	Перег рузки (К3)	Мощ ност (К6)
1	0,89	0,78	0,82	0,77
2	1,2	1,0	0,65	0,94
3	1,0	0,94	0,92	0,95
4	0,97	0,95	0,91	0,85
5	0,87	0,97	1,0	0,86
6	0,98	0,88	0,85	1,0
Коэф-ты веса	0,220	0,185	0,165	0,430

Найти оптимальное транспортное устройство.

Вариант № 11

Показатели эффективности работы предприятий приведены в таблице 36.

Таблица 36 – Показатели эффективности работы предприятий

№ пред-приятия	Показатели эффективности работы предприятий				
	прибыль, д. е.	себестоимость единицы продукции, д. е.	доходы, д. е.	фондоотдача, у. е.	произво-дительность, у. е.
1	40,0	43,0	26,0	0,4	200
II	35,0	23,0	40,0	0,35	300
III	45,0	42,0	56,0	0,15	260
IV	38,0	35,0	45.0	0,2	180
V	25,0	22,0	26,0	0,24	260
VI	50,0	34,0	40,0	0,21	120
VII	48,0	33,0	35,0	0,31	150
Весовые коэффи-циенты	0,23	0,33	0,14	0,10	0,20

Выберите наиболее эффективно работающее предприятие.

Вариант № 12

Абсолютные показатели качества двигателей различных вариантов приведены в таблице 37.

Таблица 37 - Показатели качества двигателей

Варианты двигателей	Показатели качества			
	мощность, л. с.	прочность	Крутящий момент, кгс • м	масса, кг
1	170	0,92	67	950
2	186	0,95	70	1000
3	176	0.96	68	960
4	183	0,89	67	920
5	187	0,93	68	960

Найдите оптимальный вариант двигателя.

Вариант № 13

Для пяти проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в таблице 38.

Таблица 38 – Показатели технических систем

Варианты технических систем	Сложность	Веса	Время подготовки	Автоматизация	Мощность
I	0,540	0,88	1,0	0,80	0,82
II	0,620	1,0	0,9	0,88	0,81
III	0,558	0,558	0,965	0,82	0,65
IV	0,525	0,97	0,855	0,70	0,98
V	0,567	0,565	0,865	0,75	0,86
Коэффициенты веса	0,177	0,124	0,240	0,295	0,164

Найти оптимальную техническую систему.

Вариант № 14

Для четырех проектов технических систем определены относительные единичные показатели технического совершенства конструкции и коэффициенты весомости единичных показателей. Численные значения единичных показателей и коэффициентов весомости приведены в таблице 39.

Таблица 39 - Показатели технических систем

Варианты технических систем	Относительные единичные показатели					
	Сложность	Веса	Время подготовки	Автоматизация	Мощность	Унификация
I	0,8	0,98	1,0	1,0	0,72	0,614
iI	0,82	1,0	0,78	0,78	0,82	0,620
III	0,65	0,88	0,76	0,78	0,625	0,915
IV	0,56	0,97	0,75	0,70	0,98	0,71
Коэффициенты веса	0,124	0,157	0,210	0,174	0,195	0,140

Найти оптимальную техническую систему.

Вариант № 15

Одной из фирм требуется выбрать оптимальную стратегию по техническому обеспечению процесса управления производством. С помощью статистических данных и информации соответствующих заводов-изготовителей были определены локальные критерии функционирования необходимого оборудования. Исходные данные представлены в таблице 40.

Таблица 40 - Локальные критерии эффективности оборудования

Варианты оборудования	Локальные критерии эффективности оборудования			
	производительность, д. е.	стоимость оборудования д. е.	объем памяти у. е.	надежность, у. е.
I	200	6	6	7
II	170	6	8	5
III	120	5	6,5	6
IV	220	7	7	6
V	150	4	7	7
VI	170	4	6	5
Коэффициенты	0,32	0,25	0,23	0,20

5.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 5

1) Математическая модель задач принятия решений в условиях определенности.

2) Какие задачи называются многокритериальными?

3) Какие существуют методы свертывания критериев в многокритериальных задачах?

4) В чем заключается метод аддитивной оптимизации?

5) Что такое весовой коэффициент?

6) Как определяется обобщенная функция цели в методе аддитивной оптимизации?

7) В чем заключается алгоритм нормализации критериев?

6 Лабораторная работа 6. Нахождение оптимального решения в условиях неопределенности

Цель работы: Приобретение навыков нахождения оптимального решения в условиях неопределенности методами Вальда и Сэвиджа и составление программы решения задач.

6.1 Ход работы:

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);

2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;

3) найти оптимальное решение в условиях неопределенности, используя критерии Вальда и Сэвиджа;

4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

5) распечатать текст и результаты программы в отчет;

6) оформить отчет по лабораторной работе;

7) защитить лабораторную работу.

6.2 Содержание отчета

1) тема работы;

2) цель работы;

3) ход работы;

4) формулировка задания;

5) аналитическое решение задачи своего варианта;
6) распечатка текста программы решения задачи;
7) распечатка результатов решения задачи.

6.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 6

6.3.1 Принятие решения в условиях неопределенности

Данные, необходимые для принятия решения в условиях неопределенности, обычно задаются в форме матрицы, строки которой соответствуют возможным действиям (управленческим решениям) R_j, а столбцы – возможным состояниям «природы» S_i, где происходит реализация действий.

Каждому R_j-му действию и каждому возможному S_i-му состоянию «природы» соответствует результат (исход) – V_{ij}. (таблица 41).

Таблица 41 – Матрица возможных результатов

	S_1	S_2	...	S_i		S_n
R_1	V_{11}	V_{12}		V_{1i}		V_{1n}
R_2	V_{21}	V_{22}		V_{2i}		V_{2n}
…						
R_j	V_{j1}	V_{j2}		V_{ji}		V_{jn}
…						
R_m	V_{m1}	V_{m2}		V_{mi}		V_{mn}

Следовательно, математическая модель задачи принятия решений определяется множеством состояний $\{S_i\}$, множеством планов (стратегий) $\{R_j\}$ и матрицей возможных результатов $\|V_{ji}\|$.

Для принятия решения в условиях неопределенности используется ряд критериев. Рассмотрим некоторые из них.

6.3.2 Критерий Вальда

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет потери лица, принимающего решения, то при выборе оптимальной стратегии используется **минимаксный критерий**. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наибольший элемент $\max\limits_{i}\{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j, которому будет соответствовать наименьший элемент из этих наибольших элементов:

$$W = \min_{j} \max_{i} \{V_{ji}\}, \quad (23)$$

Если в исходной матрице результат V_{ji} представляет выигрыш лица, принимающего решения, то при выборе оптимальной стратегии используется **максиминный критерий**. Для определения оптимальной стратегии R_j необходимо в каждой строке матрицы результатов найти наименьший элемент $\min_{j} \{V_{ji}\}$, а затем выбирается действие R_j, которому будет соответствовать наибольший элемент из этих наименьших элементов:

$$W = \max_{j} \min_{i} \{V_{ji}\}, \quad (24)$$

6.3.3 Критерий Сэвиджа

Критерий Сэвиджа использует матрицу рисков $\|r_{ji}\|$. Элементы данной матрицы можно определить по формуле (25).

$$r_{ji} = \begin{cases} \max\limits_{j}\{V_{ji}\} - V_{ji}, \textit{если } V - \text{выигрыш} \\ V_{ji} - \min\{V_{ji}\}, \textit{если } \text{V - потери} \end{cases}, \quad (25)$$

Независимо от того, является ли V_{ji} выигрышами или потерями, r_{ji} в обоих случаях определяет величину потерь лица, принимающего решения. Следовательно, можно применять к r_{ji} только минимаксный критерий (формула 23).

Пример 6

Одно из транспортных предприятий должно определить уровень своих провозных возможностей так, чтобы удовлетворить спрос клиентов на транспортные услуги на планируемый период. Для каждого уровня спроса существует наилучший уровень провозных возможностей транспортного предприятия. В таблице 42 приведены возможные прогнозируемые затраты на развитие провозных возможностей. Необходимо выбрать оптимальную стратегию.

Таблица 42 – Затраты на провозные возможности предприятия

Варианты провозных возможностей транспортного предприятия	Варианты спроса на транспортные услуги			
	1	2	3	4
1	6	12	20	24
2	9	7	9	28
3	23	18	15	19
4	27	24	21	15

Решение: Согласно условию задачи, имеются четыре варианта спроса на транспортные услуги, что равнозначно наличию четырех состояний «природы»: S_1, S_2, S_3, S_4. Известны также четыре стратегии развития провозных возможностей транспортного предприятия: R_1, R_2, R_3, R_4.

1) Используя критерий Вальда, найдем оптимальный вариант провозных возможностей. Необходимые результаты приведены в таблице 43.

Таблица 43 – Применение критерия Вальда

S_i / R_j	Затраты, д.е.				$\max\{V_{ji}\}$	W=min $\max\{V_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	6	12	20	24	24	-
R_2	12	7	9	28	28	-
R_3	23	18	15	23	23	23
R_4	27	24	21	27	27	-

Таким образом, наилучшей стратегией развития провозных возможностей в соответствии с минимаксным критерием «лучшим из худших» будет третья, т.е. R_3.

3) Вычислим элементы матрицы рисков по формуле (21) (рисунок 8):

$\|r_{ji}\|=$

	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	0	5	11	9
R_2	3	0	0	13
R_3	17	11	6	4
R_4	21	17	12	0

Рисунок 8 – Матрица рисков

Полученные результаты вычислений с использованием критерия минимального риска Сэвиджа оформим в таблице 44.

Таблица 44 – Применение критерия Сэвиджа

R_j \ S_i	Величина риска, д.е.				$\max\{r_{ji}\}$	W=min $\max\{r_{ji}\}$
	S_1	S_2	S_3	S_4		
R_1	0	5	11	9	11	11
R_2	3	0	0	13	13	-
R_3	17	11	6	4	17	-
R_4	21	17	12	0	21	-

Введение величины риска привело к выбору первой стратегии R_1, обеспечивающей наименьшие потери в самой неблагоприятной ситуации.

Применение критерия Сэвиджа позволяет любыми путями избежать большого риска при выборе стратегии, а значит, избежать большого проигрыша.

6.4 Задания для лабораторной работы 6

Вариант № 1

При выборе стратегии R_j (j=1,3) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,4) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,4; i=1,3). Элементы V_{ji} являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в таблице 45:

Таблица 45 – Меры потерь при принятии решения

Стратегии	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	2	6	5	8
R_2	3	9	1	4
R_3	5	1	6	2

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

Вариант № 2

Фирма рассматривает вопрос о строительстве станции технического обслуживания (СТО) автомобилей. Составлена смета расходов на строительство станции с различным количеством обслуживаемых автомобилей, а также рассчитан ожидаемый доход в зависимости от удовлетворения прогнозируемого спроса на предлагаемые услуги СТО (прогнозируемое количество обслуженных автомобилей в действительности). В зависимости от принятого решения – проектного количества обслуживаемых автомобилей в сутки (проект СТО) Rj и величины прогнозируемого спроса на услуги СТО – построена таблица 46 ежегодных финансовых результатов (доход, д.е.).

Таблица 46 – Прогнозируемые величины удовлетворяемого спроса

Проекты СТО	Прогнозируемая величина спроса					
	0	10	20	30	40	50
20	-120	60	240	250	250	250
30	-160	15	190	380	390	390
40	-210	-30	150	330	500	500

Определить наилучший проект СТО с использованием критериев Вальда и Сэвиджа.

Вариант № 3

Дана платежная матрица (матрица доходов) (рисунок 9).

	S1	S2	S3	S4	S5	S6
R1	15	12	1	-3	18	20
R2	2	15	9	7	1	3
R3	0	6	15	21	-2	5
R4	8	20	12	3	0	4

Рисунок 9 – Матрица доходов

Определите оптимальную стратегию R_i, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните полученные решения.

Вариант № 4

Один из пяти станков должен быть выбран для изготовления партии изделий, размер которой Q может принимать три значения: 150; 200; 350. Производственные затраты C_i, для i станка задаются формулой (26):

$$C_i=P_i+c_i\cdot Q, \tag{26}$$

где данные P_i и c_i приведены в таблице 47.

Таблица 47 – Данные P_i и c_i

Показатели	Модель станка				
	1	2	3	4	5
P_i	30	80	50	160	100
c_i	14	6	10	5	4

Решите задачу, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Полученные решения сравните.

Вариант № 5

Намечается крупномасштабное производство легковых автомобилей. Имеются четыре варианта проекта автомобиля Rj(j=1,4). Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_i(i=1,3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 48 (д. е.).

Таблица 48 - Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	20	25	15
R_2	25	24	10
R_3	15	28	12
R_4	9	30	20

Требуется выбрать лучший проект легкового автомобиля для производства, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 6

Определите тип электростанции, которую необходимо построить для удовлетворения энергетических потребностей комплекса крупных промышленных предприятий. Множество возможных стратегий в задаче включает следующие параметры:

R1 – сооружается гидростанция;

R2 – сооружается теплостанция;

R3 – сооружается атомная станция.

Экономическая эффективность сооружения электростанции зависит от влияния случайных факторов, образующих множество состояний природы

$S_i(i = 1,5)$. Результаты расчета экономической эффективности приведены в таблице 49:

Таблица 49 - Значения экономической эффективности

Тип станции	Состояние природы				
	S1	S2	S3	S4	S5
R1	40	70	30	25	45
R2	60	50	45	20	30
R3	50	30	40	35	60

Решите задачу, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните решения и сделайте вывод.

Вариант №7

Дана платежная матрица (матрица расходов) (рисунок 10):

	S1	S2	S3	S4	S5
R1	1	2	11	-3	18
R2	26	-5	19	-7	16
R3	10	16	25	28	-2
R4	18	27	12	3	20
R5	5	6	8	9	3

Рисунок 10 – Матрица расходов

Определите оптимальную стратегию R_i, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните полученные решения.

Вариант № 8

Намечается строительство торгового комплекса. Имеются пять проектов строительства $Rj(j=1,5)$. Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков $S_i(i=1,4)$ рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 50 (д. е.).

Таблица 50 - Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	41	2	34	25
R_2	32	2	28	16
R_3	23	5	30	17
R_4	15	4	44	20
R_5	34	2	24	19

Требуется выбрать лучший проект строительства, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 9

При выборе стратегии R_j (j=1,4) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,4) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,4; i=1,4). Элементы V_{ji} являющиеся мерой прибыли при принятии решения, приведены в таблице 51.

Таблица 51 – Меры прибыли при принятии решения

Стратегии	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	6	1	7	4
R_2	7	9	1	5
R_3	8	2	6	2
R_4	9	5	2	3

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

Вариант № 10

При выборе стратегии R_j (j=1,3) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,5) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,5; i=1,3). Элементы V_{ji} являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в таблице 52.

Таблица 52 – Меры потерь при принятии решения

Стратегии	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	6	5	4	8	7
R_2	4	8	9	2	1
R_3	5	3	1	6	2

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

Вариант № 11

Дана платежная матрица (матрица доходов) (рисунок 11):

	S1	S2	S3	S4
R1	25	22	11	-1
R2	2	16	19	7
R3	10	-6	15	23
R4	8	25	14	3
R5	13	5	34	2
R6	-2	4	8	10

Рисунок 11 – Матрица доходов

Определите оптимальную стратегию R_i, используя критерии Вальда и Сэвиджа. Сравните полученные решения.

Вариант № 12

Рассматривается крупномасштабное производство автомобилей. Имеются три варианта проекта автомобиля Rj(j=1,3). Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i(i=1,4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 53 (д. е.).

Таблица 53 – Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	30	21	45	25
R_2	45	24	24	14
R_3	53	35	38	15

Требуется выбрать лучший проект автомобиля для производства, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 13

Имеются пять вариантов проекта технических систем Rj(j=1,5). Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении четырех сроков S_i(i=1,4) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 54 (д. е.).

Таблица 54 – Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы			
	S_1	S_2	S_3	S_4
R_1	20	26	47	35
R_2	55	23	34	43
R_3	33	35	43	32
R_4	40	24	24	14
R_5	34	36	38	15

Требуется выбрать лучший проект технической системы, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 14

Имеются пять проектов строительства Rj(j=1,5) детского сада. Определена экономическая эффективность V_{ji}, каждого проекта в зависимости от рентабельности производства. По истечении трех сроков S_i(i=1,3) рассматриваются как некоторые состояния среды (природы). Значения экономической эффективности для различных проектов и состояний природы приведены в таблице 55 (д. е.).

Таблица 55 – Значения экономической эффективности

Проекты	Состояние природы		
	S_1	S_2	S_3
R_1	35	23	24
R_2	23	24	34
R_3	45	25	25
R_4	26	41	27
R_5	23	32	28

Требуется выбрать лучший проект строительства детского сада, используя критерии Вальда, Сэвиджа. Сравните решения и сделайте выводы.

Вариант № 15

При выборе стратегии R_j (j=1,3) каждому возможному состоянию природы S_i (i=1,5) соответствует один результат (исход) V_{ji} (j=1,5; i=1,3). Элементы V_{ji} являющиеся мерой потерь при принятии решения, приведены в таблице 56.

Таблица 56 – Меры потерь при принятии решения

Стратегии	Состояние природы				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
R_1	7	4	9	8	3
R_2	8	6	9	5	1
R_3	9	3	8	6	2

Выберите оптимальное решение в соответствии с критериями Вальда, Сэвиджа.

6.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 6

1) Что понимается под понятием неопределенность?
2) Математическая модель задач принятия решений в условиях неопределенности?
3) Что понимается под понятием риск?
4) Как определяется матрица рисков?
5) Раскройте суть критерия Вальда?
6) Каковы преимущества и недостатки критерия Сэвиджа?

7 Лабораторная работа 7. Построение игровых моделей

Цель работы: Приобретение навыков построения игровых моделей и составление программы решения задач.

7.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;
3) по заданной платежной матрице найти верхнюю и нижнюю границы, наличие седловой точки матричной игры и стратегии игроков.
4) построить модель индивидуальной задачи. Провести эксперименты ситуаций.
5) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;
6) распечатать текст и результаты программы в отчет;
7) оформить отчет по лабораторной работе;
8) защитить лабораторную работу.

7.2 Содержание отчета

1) тема работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировка задания;
5) аналитическое решение задачи своего варианта;
6) распечатка текста программы решения задачи;
7) распечатка результатов решения задачи.

7.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 6

7.3.1 Основные понятия теории игр

Теория, занимающаяся принятием решения в условиях конфликтных ситуаций, называется **теорией игр**. Математическая модель конфликтной ситуации представляет собой игру.

Игра – это совокупность правил, описывающих сущность конфликтной ситуации. Эти правила устанавливают:

- выбор образа действия игроков на каждом этапе игры;

- информацию, которой обладает каждый игрок при осуществлении таких выборов;

- плату для каждого игрока после завершения любого этапа игры.

В зависимости от числа конфликтующих сторон игры делятся на парные и множественные.

Стратегией игры называется совокупность правил, определяющих поведение игрока от начала игры до ее завершения. Стратегии каждого игрока определяют результаты или платежи в игре. Игра называется **игрой с нулевой суммой**, если проигрыш одного игрока равен выигрышу другого, в противном случае она называется **игрой с ненулевой суммой**.

Игра называется **конечной**, если у каждого игрока имеется конечное число стратегий.

Результаты конечной парной игры с нулевой суммой можно задавать матрицей, строки и столбцы которой соответствуют различным стратегиям, а ее элементы - выигрышам одной стороны (равные проигрышам другой). Эта матрица называется **платежной матрицей** или **матрицей игры**.

7.3.2 Парная игра с нулевой суммой в чистых стратегиях

Пусть заданы множество стратегий: для первого игрока $\{A_i\}$, для второго игрока $\{B_j\}$, платежная матрица $A_{mxn}=||a_{ij}||$, где a_{ij} – выигрыш первого игрока или проигрыш второго игрока при выборе ими стратегий A_i и B_j соответственно. Каждый из игроков выбирает однозначно с вероятностью 1 некоторую стратегию, т.е. пользуется при выборе решения **чистой стратегией**. Поскольку интересы игроков противоположны, то первый игрок стремиться максимизировать свой выигрыш, а второй игрок , наоборот, минимизировать свой проигрыш.

Решение игры состоит в определении наилучшей стратегии каждым игроком. Решение игры двух лиц с нулевой суммой использует критерий **минимакса-максимина**.

Если первый игрок применяет стратегию A_i, то второй будет стремиться к тому, чтобы выбором соответствующей стратегии B_j свести выигрыш первого игрока к минимуму, что равнозначно сведению своего проигрыша к минимуму. Величина этого минимума находиться по формуле (27).

$$\alpha_i = \min_j a_{ij}, \mathrm{i} = \overline{1;\mathrm{m}}, \qquad (27)$$

Первый игрок (при любых ответах противника) будет стремиться наитии такую стратегию, при которой α_i обращается в максимум:

$$\alpha = \max_i \alpha_i = \max_i \min_j a_{ij}, \mathrm{i} = \overline{1; \mathrm{m}}, \mathrm{j} = \overline{1, \mathrm{n}}, \qquad (28)$$

Величина α называется **нижней ценой игры**. Придерживаясь ее, первый игрок при любых стратегиях противника обеспечит себе выигрыш, не меньший α. Другими словами, нижняя цена игры является гарантированным выигрышем первого игрока при любых стратегиях второго игрока.

Аналогично определим по каждому столбцу матрицы:

$$\beta_j = \max_i a_{ij}, \mathrm{j} = \overline{1; \mathrm{n}}, \qquad (29)$$

Найдем минимальное значение β_j:

$$\beta = \min_j \beta_j = \min_j \max_i a_{ij}, \mathrm{i} = \overline{1; \mathrm{m}}, \mathrm{j} = \overline{1; \mathrm{n}}, \qquad (30)$$

Величина β называется **верхней ценой игры**, которая представляет собой гарантированный проигрыш второго игрока при любой стратегии первого игрока.

Замечание: Для любой матрицы $A=||a_{ij}||$ выполняется неравенство $\beta \geq \alpha$

Если $\beta = \alpha$, то соответствующие чистые стратегии называются оптимальными, а про игру говорят, что она имеет седловую точку. Эта точка есть точка равновесия игры, определяющая однозначно оптимальные стратегии. Оптимальность здесь означает, что ни один игрок не стремиться изменить свою стратегию, т.к. его противник может на это ответить другой стратегией, дающей худший для первого игрока результат.

Величина $C = \beta = \alpha$ называется **ценой игры**. Она определяет средний выигрыш игрока А и средний проигрыш В при использовании ими оптимальных стратегий.

Пример 7

Дана платежная матрица, которая определяет выигрыши игрока А. Вычислить нижнюю и верхнюю цены заданной игры.

$$\begin{bmatrix} 10 & 4 & 11 & 7 \\ 7 & 6 & 8 & 20 \\ 6 & 2 & 1 & 11 \end{bmatrix}$$

Решение: Представим нашу игру в виде таблицы 57.

Таблица 57 – Решение матричной игры примера 7

Стратегии 1-го игрока	Стратегии 2-го игрока				α_i	α
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	10	4	11	7	4	-
A_2	7	6	8	20	6	6
A_3	6	2	1	11	1	-
β_j	10	6	11	20		
β	-	6	-	-		

Игрок А выбирает стратегию A_2, которая является его гарантированным выигрышем при любых стратегиях игрока В. α =6 д.е. – нижняя цена игры.

Игрок В выбирает стратегию B_2, которая минимизирует его максимальные проигрыши. Величина β = 6 д.е – верхняя цена игры, которая является гарантированным проигрышем игрока В при любых стратегиях игрока А. Так как $\beta = \alpha$, то седловая точка с = 6 д.е.

Пример 8

Каждый из игроков А и В записывает одно из чисел 1,4,6 или 9, затем они одновременно показывают написанное. Если оба числа оказались одинаковой четности, то игрок А выигрывает столько очков, какова сумма этих чисел, если разной четности – выигрывает игрок В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю цены игры, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Решение: Чистыми стратегиями игрока А будут: A_1 – записать число 1, A_2 – записать число 4, A_3 – записать число 6, A_4 – записать число 9. У игрока В чистыми будут аналогичные стратегии (таблица 58).

Таблица 58 – Платежная матрица примера 8

Стратегии 1-го игрока	Стратегии 2-го игрока				α_i	α
	$B_1(1)$	$B_2(4)$	$B_3(6)$	$B_4(9)$		
$A_1(1)$	2	-5	-7	10	-7	-7
$A_2(4)$	-5	8	10	-13	-13	-
$A_3(6)$	-7	10	12	-15	-15	-
$A_4(9)$	10	-13	-15	18	-15	-
β_j	10	10	12	18		
β	10	10	-	-		

Элемент a_{11}=2, т.к. в ситуации (A_1,B_1) оба игрока записывают нечетное число 1 и выигрыш игрока А равен 1+1=2. Элемент a_{12}=-5, т.к. в ситуации (A_1,B_2) игрок А записывает число 1, а игрок В – число 4, т.е. числа разной четности, поэтому выигрыш игрока В равен 5, тогда как выигрыш игрока А составит -5. Аналогичным образом вычисляются остальные элементы платежной матрицы. После определения α_i и β_j замечаем, что нижняя цена игры $\alpha = \max_i \alpha_i = -7$ не равна верхней цене игры $\beta = \min_j \beta_j = 10$, поэтому данная игра не имеет седловую точку. Максиминной для игрока А будет чистая стратегия A_1. Пользуясь ей, игрок А выигрывает не менее -7 очков (проигрывает не более 7). Минимаксными для игрока В будут чистые стратегии B_1 и B_2, при которых он проигрывает не более 10 очков.

7.4 Задания для лабораторной работы 7

Задание 1

Даны платежные матрицы. Определить цены игры, наличие седловой точки и стратегии игроков, согласно своего варианта.

1)
$$\begin{matrix} 8 & 9 & 8 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 7 & 9 \end{matrix}$$

2)
$$\begin{matrix} 1 & 7 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{matrix}$$

3)
$$\begin{matrix} 4 & 1 & 2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 & 2 \\ 8 & 6 & 2 & 8 \\ 8 & 9 & 4 & 5 \\ 7 & 5 & 3 & 5 \end{matrix}$$

4)
$$\begin{matrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 1 & -2 & 7 & 3 \\ 5 & 4 & 3 & 0 \end{matrix}$$

5)
$$\begin{matrix} -5 & 0 & 4 & 2 \\ 7 & 5 & 4 & 9 \\ 6 & 8 & -1 & 0 \end{matrix}$$

6)
$$\begin{matrix} 3 & 3 & 5 & 8 & 10 \\ 4 & 5 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 5 & 7 & 3 \end{matrix}$$

7)
$$\begin{matrix} 2 & 1 & 2 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{matrix}$$

8)
$$\begin{matrix} 1 & 3 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & 8 & 1 \\ 6 & -1 & 2 & 10 \end{matrix}$$

9)
$$\begin{matrix} 5 & 2 & 1 & 3 \\ 6 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & -3 \end{matrix}$$

10)
$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & 3 \end{matrix}$$

11) 7 9 7 5 6 12
9 10 6 5 8 9
8 -5 2 3 1 4

12) 2 4 1 5
1 -1 3 2
5 2 -4 0
2 5 5 4

13) -3 2 3
6 -5 2
3 0 5
2 -1 4

14) 3 4 2 1
5 2 0 3
7 4 3 5
-2 -3 5 2
0 3 1 4

15) 9 9 2 1
0 3 5 4
4 5 7 8
5 1 3 9

Задание 2. Построить модель индивидуальной задачи. Провести эксперименты ситуаций.

Составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;

Вариант № 1

Игроки А и В записывают цифры 1 и 2. Игра состоит в том, что кроме цифры 1 или 2 каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один, то он получает столько очков, какова сумма записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 2

Игрок А может записать одну из цифр: 2, 4 либо 7; игрок В может записать 1, 3, 4 либо 8. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок А получает столько очков, какова сумма записанных цифр; если разной четности – то очки достаются игроку В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 3

Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 3, 5 или 8. Если разность между цифрами, записанными игроками А и В, окажется положительной, то игрок А выигрывает столько очков, какова получившаяся разность; если разность будет отрицательной, то соответствующее количество очков выигрывает игрок В; если же разность окажется равной нулю, то и выигрыш игроков будет равен нулю.

Составить платежную матрицу, найти максимин и минимакс.

Вариант № 4

Каждый из игроков А и В может показать один или два пальца. Если число одновременно показанных пальцев у обоих игроков одинаково, то игрок А получает одно очко; если же число пальцев разное, то очко получает игрок В. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.

Вариант № 5

Два игрока бросают по две игровые кости. Сумма очков, выпавших на двух игровых костях, накапливается. Игра прекращается, когда один из игроков достигает суммы 101. Игра повторяется до трех побед. На игровой кости 6 граней с количеством точек от 1 до 6. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.

Вариант № 6

Игроки А и В записывают цифры 2 и 4. Игра состоит в том, что кроме цифры 2 или 4 каждый игрок записывает еще и ту цифру, которую, по его мнению, записал партнер. Если оба игрока угадали или оба ошиблись, то партия заканчивается вничью; если же угадал только один, то он получает столько очков, каково произведение записанных им цифр. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 7

Игрок А может записать одну из цифр: 1, 2 либо 3; игрок В может записать 4, 5, 6 либо 7. Если обе цифры окажутся одинаковой четности, то игрок А получает столько очков, какова сумма записанных цифр; если разной четности — то очки достаются игроку В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 8

Игрок А может записать одну из цифр: 2, 4 либо 6; игрок В может записать 1, 3 либо 5. Если обе цифры окажутся разной четности, то игрок А получает столько очков, каково произведение записанных цифр; если одной четности – то очки достаются игроку В. Составить платежную матрицу, найти нижнюю и верхнюю чистые цены, максиминную и минимаксную стратегии игроков.

Вариант № 9

Участники парной игры независимо друг от друга могут записать одну из цифр: 9, 5 или 3. Если разность между цифрами, записанными игроками А и В, окажется отрицательной, то игрок А проигрывает столько очков, какова получившаяся разность; если разность будет положительной, то соответствующее количество очков проигрывает игрок В; если же разность окажется равной нулю, то и выигрыш игроков будет равен нулю. Составить платежную матрицу, найти максимин и минимакс.

Вариант № 10

Игра «Камень, ножницы, бумага». Два игрока показывают одновременно одно из трех предметов: камень, ножницы или бумагу. Камень побеждает ножницы, ножницы побеждают бумагу, бумага побеждает камень. В соответствии с победой игроку присуждается очко. Составить модель игровой ситуации и провести эксперимент.

7.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 7

1) Что называется теорией игр?
2) Что понимается под стратегией игры?
3) Какие игры называются играми с нулевой суммой; с ненулевой суммой?
4) Раскройте понятие конечной и бесконечной игры?
5) Что такое платежная матрица?
6) Раскройте понятие седловой точки.
7) Что называется нижней ценой игры, верхней ценой игры? Как они определяются?
8) Укажите суть игры со смешанными стратегиями?

8 Лабораторная работа 8. Нахождение характеристик простейших систем массового обслуживания (СМО)

Цель работы: Приобретение навыков нахождения характеристик СМО и составление программы решения задач.

8.1 Ход работы

1) изучить теоретический материал по теме лабораторной работы (лекции, учебники);
2) согласно номеру своего варианта выбрать условие задачи;
3) определить вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы данной задачи;
4) составить программу решения задачи в среде программирования Delphi;
5) распечатать текст и результаты программы в отчет;
6) оформить отчет по лабораторной работе;
7) защитить лабораторную работу.

8.2 Содержание отчета

1) тема работы;
2) цель работы;
3) ход работы;
4) формулировка задания;
5) аналитическое решение задачи своего варианта;
6) распечатка текста программы решения задачи;
7) распечатка результатов решения задачи.

8.3 Теоретическая справка к лабораторной работе 6

8.3.1 Одноканальные модели систем массового обслуживания

Системы массового обслуживания (СМО) – это такие системы, в которые в случайные моменты времени поступают заявки на обслуживание, при этом поступившие заявки обслуживаются с помощью имеющихся в распоряжении системы каналов обслуживания.

1) Одноканальная СМО с отказами

Представим данную систему массового обслуживания в виде графа (рисунок 12), у которого имеются два состояния:

S_0 – канал свободен (ожидание);

S_1 – канал занят (идет обслуживание заявки).

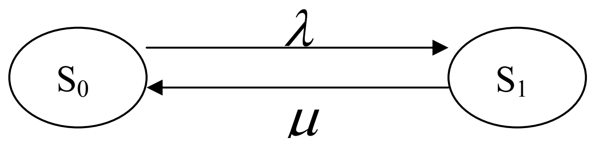

Рисунок 12 – Граф состояний одноканальной СМО с отказами

Обозначим вероятности состояний:

$P_0(t)$ – вероятность состояния «канал свободен»;

$P_1(t)$ – вероятность состояния «канал занят».

По размеченному графу состояний (рисунок 8) составим систему дифференциальных уравнений Колмогорова для вероятностей состояний:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0(t)}{dt} = -\lambda \cdot P_0(t) + \mu \cdot P_1(t) \\ \dfrac{dP_1(t)}{dt} = -\mu \cdot P_1(t) + \lambda \cdot P_0(t) \end{cases}, \quad (31)$$

где λ - интенсивность поступления заявок в систему;

μ - интенсивность обслуживания.

Решением данной системы называется неустановившимся, поскольку оно непосредственно зависит от t и выглядит следующим образом:

$$\begin{array}{l} P_0(t) = \dfrac{\lambda}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t} + \dfrac{\mu}{\lambda+\mu}; \\ P_1(t) = 1 - P_0(t) \end{array}, \quad (32)$$

Характеристики одноканальной СМО с отказами

1) Относительная пропускная способность:

$$q = P_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad (33)$$

2) Абсолютная пропускная способность:

$$A = \lambda \cdot q, \quad (34)$$

3) Вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_1 = 1 - P_0 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu} \quad (35)$$

Величина $P_{отк}$ может быть интерпретирована как средняя доля необслуженных заявок среди поданных.

Пример 9

Пусть одноканальное СМО с отказами представляет собой один пост ежедневного обслуживания для мойки автомобилей. Заявка – автомобиль, прибывший в момент, когда пост занят, - получает отказ в обслуживании. Интенсивность потока автомобилей λ=1 (автомобиль в час). Средняя продолжительность обслуживания – 1,8 часа. Найти основные характеристики системы.

Решение:

1) Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{1,8} = 0,555.$$

2) Вычислим относительную пропускную способность, используя формулу (33):

$$q = \frac{0,555}{1 + 0,555} = 0,356.$$

Величина q означает, что в установившемся режиме система будет обслуживать примерно 36% прибывших на пост автомобилей.

3) Абсолютную пропускную способность определим по формуле (34):

$$A = 1 \cdot 0,356 = 0,356$$

Это означает, что система способна осуществить в среднем 0,356 обслуживания автомобилей в час.

4) Вероятность отказа (формула 35):

$$P_{отк} = 1 - q = 1 - 0,356 = 0,644$$

Это означает, что около 64% прибывших автомобилей на пост получат отказ в обслуживании.

2) Одноканальное СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди

Граф состояний СМО в этом случае имеет вид, показанный на рисунке 13.

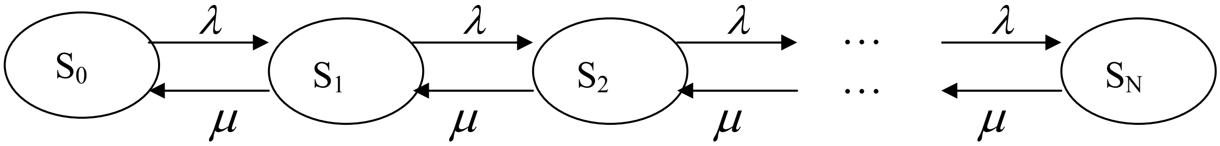

Рисунок 13 – Граф состояний одноканальной СМО с ожиданием

Состояния СМО имеют следующую интерпретацию:

S_0 – «канал свободен»;

S_1 – «канал занят» (очереди нет);

S_2 – «канал занят» (одна заявка стоит в очереди);

……………………

S_N – «канал занят» (N-1 заявок стоит в очереди).

Стационарный процесс в данной системе будет описываться следующей системой алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} -\rho \cdot P_0 + P_1 = 0, \quad \mathrm{n} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ -(1-\rho) \cdot P_n + P_{n+1} + \rho \cdot P_{n-1} = 0, \quad 0 < \mathrm{n} < \mathrm{N} \\ \dots\dots\dots\dots \\ -\mathrm{P_N} + \rho \cdot P_{N-1} = 0, \quad \mathrm{n} = \mathrm{N}, \end{cases} \tag{36}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Решение системы уравнений (37) имеет вид:

$$P_n = \begin{cases} \left(\dfrac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}\right) \cdot \rho^n, \ \rho \neq 1, \ \mathrm{n} = \overline{1;\mathrm{N}} \\ \dfrac{1}{\mathrm{N}+1}, \ \rho = 1; \end{cases}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}}. \tag{37}$$

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием и ограниченной длиной очереди, равной (N-1):

1) Вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{отк} = \begin{cases} P_0 \cdot \rho^N, \ \rho \neq 1, \\ \dfrac{1}{\mathrm{N}+1}, \ \rho = 1; \end{cases} \quad , \tag{38}$$

2) Относительная пропускная способность системы:

$$q = 1 - P_{отк}, \tag{39}$$

3) Абсолютная пропускная способность (формула 34)
4) Среднее число находящихся в системе заявок:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \begin{cases} \dfrac{\rho \cdot (1-(N+1)\cdot \rho^N + N \cdot \rho^{N+1})}{(1-\rho)\cdot(1-\rho^{N+1})}, & \rho \neq 1 \\ \dfrac{\mathrm{N}}{2}, & \rho = 1 \end{cases}, \tag{40}$$

5) Среднее время пребывания заявки в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda(1-P_N)}, \tag{41}$$

6) Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди:

$$W_q = W_s - \frac{1}{\mu}, \tag{42}$$

7) Среднее число заявок в очереди (длина очереди):

$$L_q = \lambda(1-P_N)W_q, \tag{43}$$

Пример 10

Специализированный пост диагностики представляет собой одноканальную СМО. Число стоянок для автомобилей, ожидающих проведение диагностики, ограничено и равно 3 (N-1=3). Если все стоянки заняты, т.е. в очереди уже находится три автомобиля, то очередной автомобиль, прибывший на стоянку, в очередь на обслуживание не становится. Поток автомобилей, прибывший на диагностику, имеет интенсивность λ=0,85 (автомобиля в час). Время диагностики автомобиля в среднем равно 1,05 часа.

Требуется определить вероятностные характеристики поста диагностики, работающего в стационарном режиме.

Решение:

1) Параметр потока обслуживаний автомобилей:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{1{,}05} = 0{,}952.$$

2) Приведенная интенсивность потока автомобилей определяется как отношение интенсивности λ и μ, т.е.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,85}{0,952} = 0,893.$$

3) Вычислим финальные вероятности системы:

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-0,893}{1-0,893^5} \approx 0,248$$

$$P_1 = \rho \cdot P_0 = 0,893 \cdot 0,248 \approx 0,221$$

$$P_2 = \rho^2 \cdot P_0 = 0,893^2 \cdot 0,248 \approx 0,198$$

$$P_3 = \rho^3 \cdot P_0 = 0,893^3 \cdot 0,248 \approx 0,177$$

$$P_4 = \rho^4 \cdot P_0 = 0,893^4 \cdot 0,248 \approx 0,158$$

4) Вероятность отказа в обслуживании автомобиля:

$$P_{отк} = P_4 \approx 0,158$$

5) Относительная пропускная способность поста диагностики:

$$q = 1 - P_{отк} = 1 - 0,158 = 0,842$$

6) Абсолютная пропускная способность поста диагностики:

$A = \lambda \cdot q = 0,85 \cdot 0,842 = 0,716$ (автомобиля в час)

7) Среднее число автомобилей, находящихся на обслуживании и в очереди (формула 40):

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = 0 \cdot P_0 + 1 \cdot P_1 + 2 \cdot P_2 + 3 \cdot P_3 + 4 \cdot P_4 = 1 \cdot 0,221 + 2 \cdot 0,198 + 3 \cdot 0,177 + 4 \cdot 0,158 = 1,77$$

8) Среднее время пребывания автомобиля в системе (по формуле 41):

$W_s = \frac{1,77}{0,85 \cdot 0,842} \approx 2,473$ часа

9) Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди на обслуживание (по формуле 42):

$W_q = 2,473 - 1,05 = 1,423$ часа

10) Среднее число автомобилей в очереди:

$L_q = 0,85 \cdot 0,842 \cdot 1,423 = 1,02$

Работу рассмотренного поста диагностики можно считать удовлетворительной, т.к. пост диагностики не обслуживает автомобили в среднем в 16% случаев ($P_{отк} = 0,158$).

3) Одноканальное СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди

Система алгебраических уравнений, описывающих работу СМО при t→∞ для любого n=0, 1, 2, …, имеет вид:

$$\begin{cases} -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1 = 0, n = 0 \\ \lambda \cdot P_{n-1} + \mu \cdot P_{n+1} - (\lambda + \mu) \cdot P_n = 0, n > 0. \end{cases} \quad (44)$$

Решением данной системы уравнений имеет вид:

$$P_n = (1 - \rho)\rho^n, n = 0,1,2,...., \quad (45)$$

где $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$

Характеристики одноканальной СМО с ожиданием, без ограничения на длину очереди:

1) Среднее число находящихся в системе заявок на обслуживание:

$$L_s = \sum_{n=0}^{N} n \cdot P_n = \frac{\rho}{1 - \rho}, \quad (46)$$

2) Средняя продолжительность пребывания заявки в системе:

$$W_s = \frac{L_s}{\lambda}, \quad (47)$$

3) Среднее число заявок в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_s - \rho = \frac{\rho^2}{1-\rho}, \qquad (48)$$

4) Средняя продолжительность пребывания заявки в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \qquad (49)$$

Пример 11

Рассмотрим пример 10, где речь шла о функционировании поста диагностики. Пусть рассматриваемый пост диагностики располагает неограниченным количеством площадок для стоянки прибывших на обслуживание автомобилей, т.е. длина очереди не ограничена.

Требуется определить значения вероятностных характеристик.

Решение:

1) Параметр потока обслуживания μ и приведенная интенсивность потока автомобилей ρ определены в примере 10:

$\mu = 0{,}952$; $\rho = 0{,}893$.

2) Вычислим предельные вероятности системы по формуле (45):

$P_0 = 1 - 0{,}893 = 0{,}107$

$P_1 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893 = 0{,}096$

$P_2 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^2 = 0{,}085$

$P_3 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^3 = 0{,}076$

$P_4 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^4 = 0{,}068$

$P_5 = (1 - 0{,}893) \cdot 0{,}893^5 = 0{,}061$ и тт.д

Следует отметить, что P_0 определяет долю времени, в течение которого пост диагностики вынужденно бездействует (простаивает). В нашем примере она составляет 10,7% т.к. P_0=0,107.

3) Среднее число автомобилей, находящихся в системе:

$$L_s = \frac{0{,}893}{1 - 0{,}893} = 8{,}346 \text{ ед;}$$

4) Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_s = \frac{8{,}346}{0{,}85} = 9{,}817 \text{ час.}$$

5) Среднее число автомобилей в очереди на обслуживании:

$$L_q = L_s - \rho = 8{,}346 - 0{,}893 = 7{,}453.$$

6) Средняя продолжительность пребывания автомобиля в очереди:

$$W_q = \frac{7{,}453}{0{,}85} = 8{,}766 \text{ час.}$$

8.3.2 Многоканальные модели систем массового обслуживания

1) Многоканальная СМО с отказами

Граф состояний многоканальной СМО с отказами имеет вид, показанный на рисунке 14.

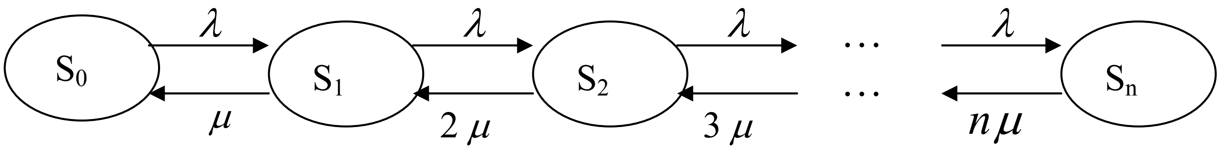

Рисунок 14 – Граф состояний многоканальной СМО с отказами

Состояния данной СМО имеет следующую интерпретацию:

S_0 – все каналы свободны;

S_1 – один канал занят, остальные свободны;

S_2 – два канала заняты, остальные свободны;

……………………

S_N – заняты все n каналов, заявка получает отказ в обслуживании.

Уравнения Колмогорова для вероятностей состояний системы будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dP_0}{dt} = -\lambda \cdot P_0 + \mu \cdot P_1; \\ \text{.......................................} \\ \dfrac{dP_k}{dt} = \lambda \cdot P_{k-1} - (\lambda + \kappa \cdot \mu) P_k + \mu \cdot (\kappa + 1) \cdot P_{k+1}, \quad 1 \le \mathrm{k} \le \mathrm{n-1} \\ \text{.......................................} \\ \dfrac{dP_n}{dt} = \lambda \cdot P_{n-1} - \mu \cdot n \cdot P_n. \end{cases}, \qquad (50)$$

Стационарное решение системы (50) имеет вид:

$$\begin{cases} P_k = \dfrac{\dfrac{\rho^k}{k!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}} = \dfrac{\rho^k}{k!} \cdot P_0, \quad \mathrm{k} = \overline{0;\mathrm{n}} \\ \mathrm{P}_0 = \dfrac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}, \quad \mathrm{k} = \overline{0;\mathrm{n}} \end{cases}, \tag{51}$$

где $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$.

Формула для вычисления вероятностей P_k называются **формулами Эрланга**.

Вероятностные характеристики функционирования многоканальной СМО с отказами в стационарном режиме

1) Вероятность отказа:

$$P_{отк} = P_n = \frac{\rho^n}{n!} \cdot P_0, \tag{52}$$

2) Относительная пропускная способность системы (формула 34);
3) Абсолютная пропускная способность (формула 29);
4) Среднее число каналов, занятых обслуживанием:

$$\overline{k} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot P_k = \rho \cdot (1 - P_{отк}), \tag{53}$$

Величина $\overline{k}$ характеризует степень загрузки СМО.

Пример 12

Пусть n –канальная СМО представляет собой вычислительный центр (ВЦ) с тремя (n=3) взаимозаменяемыми ПЭВМ для решения поступающих задач. Поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ =1 задаче в час. Средняя продолжительность обслуживания 1,8 час.

Требуется вычислить вероятностные характеристики системы. Определите, сколько дополнительно надо приобрести ПЭВМ, чтобы увеличить пропускную способность ВЦ в 2 раза.

Решение:

1) Определим интенсивность потока обслуживания:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{1,8} = 0,555.$$

2) Приведенная интенсивность потока заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{1}{0,555} = 1,8$$

3) Предельные вероятности состояний найдем по формулам Эрланга (51):

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{3} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{1 + 1,8 + 1,62 + 0,97} \approx 0,186$$

$$P_1 = 1,8 \cdot 0,186 \approx 0,334$$

$$P_2 = 1,62 \cdot 0,186 \approx 0,301$$

$$P_3 = 0,97 \cdot 0,186 \approx 0,180$$

4) Вероятность отказа в обслуживании заявки:

$$P_{отк} = P_3 = 0,18$$

5) Относительная пропускная способность ВЦ

$$q = 1 - 0,18 = 0,82$$

6) Абсолютная пропускная способность ВЦ

$$A = 1 \cdot 0,82 = 0,82$$

7) Среднее число занятых каналов – ПЭВМ

$$\overline{k} = 1,8 \cdot 0,82 = 1,476$$

Таким образом, при установившемся режиме работы СМО в среднем будет занято 1б5 компьютера из трех – остальные полтора будут простаивать. Работу рассмотренного ВЦ вряд ли можно считать удовлетворительной, т.к. центр не обслуживает заявки в среднем в 18% случаев (P_3=0,18). Очевидно, что пропускную способность ВЦ приданных λ и μ можно увеличить только за счет увеличения числа ПЭВМ.

Определим, сколько нужно использовать ПЭВМ, чтобы сократить число необслуженных заявок, поступающих на ВЦ, в 10 раз, т.е. чтобы вероятность отказа в решении задач не превосходила 0,018.

Для этого используем формулу (52).

Составим таблицу 59.

Таблица 59 – Предельные вероятности состояний

n	1	2	3	4	5	6
P_0	0,357	0,226	0,186	0,172	0,167	0,166
$P_{отк}$	0,643	0,367	0,18	0,075	0,026	0,0078

Анализируя данные таблицы, следует отметить, что расширение числа каналов ВЦ при данных значениях λ и μ до 6 единиц ПЭВМ позволит обеспечить удовлетворение заявок на решение задач на 99,22%, т.к. при n=6 вероятность отказа в обслуживании составляет 0,0078.

2) Многоканальные СМО с ожиданием

Пусть система имеет С каналов обслуживания.

В установившемся режиме функционирование многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью может быть описано с помощью системы алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + n \cdot \mu) \cdot P_n + (n+1)\mu \cdot P_{n+1} = 0, \quad 1 \le \mathrm{n} < \mathrm{C}; \\ \lambda \cdot P_{n-1} - (\lambda + C \cdot \mu) \cdot P_n + C \cdot \mu \cdot P_{n+1} = 0, \quad \mathrm{n} \ge \mathrm{C}; \end{cases} , \qquad (54)$$

Решение системы (54) имеет вид:

$$\begin{cases} P_n = \dfrac{\rho^n}{n!} \cdot P_0, \qquad 0 \le \mathrm{n} < \mathrm{C} \\ \mathrm{P_n} = \dfrac{\rho^n}{C!C^{n-c}} \cdot P_0, \qquad \mathrm{n} \ge \mathrm{C} \end{cases} , \qquad (55)$$

где

$$P_0 = \left\{ \sum_{n=0}^{C-1} \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^C}{C!(1-\dfrac{\rho}{C})} \right\}^{-1} , \qquad (56)$$

Решение будет действительным, если выполняется следующее условие: $\frac{\lambda}{\mu \cdot C} < 1$.

Вероятностные характеристики функционирования в стационарном режиме многоканальной СМО с ожиданием и неограниченной очередью:

1) Вероятность того, что в системе находиться n клиентов на обслуживании, определяется по формулам (55), (56).

2) Среднее число клиентов в очереди на обслуживание:

$$L_q = \left(\frac{C \cdot \rho}{(C-\rho)^2} \right) \cdot P_C \ , \tag{57}$$

3) Среднее число находящихся в системе клиентов:

$$L_s = L_q + \rho \ , \tag{58}$$

4) Средняя продолжительность пребывания клиента в очереди:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}, \tag{59}$$

5) Средняя продолжительность пребывания клиента в системе:

$$W_s = W_q + \frac{1}{\mu}, \tag{60}$$

Пример 13

Механическая мастерская завода с тремя постами выполняет ремонт малой механизации. Поток неисправных механизмов, прибывших в мастерскую, имеет интенсивность λ=2,5 механизма в сутки, среднее время ремонта одного механизма равно 0,5 суток. Предположим, что другой мастерской на заводе нет, и, значит, очередь механизмов перед мастерской может расти практически неограниченно.

Требуется определить значения вероятностных характеристик системы.

Решение:

1) Определим параметр потока обслуживаний:

$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{0.5} = 2$

2) Приведенная интенсивность потока заявок:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2{,}5}{2} = 1{,}25,$$

при этом $\frac{\lambda}{\mu \cdot C} = \frac{2{,}5}{2 \cdot 3} = 0{,}41 < 1$, то очередь не растет безгранично и в системе наступает предельный стационарный режим работы.

3) Вычислим вероятности состояний системы, используя формулы (55), (56).

$$P_0 = \frac{1}{1 + \frac{\rho^1}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \frac{\rho^3}{3!(1 - \frac{\rho}{3})}} = \frac{1}{1 + 1{,}25 + \frac{1{,}25^2}{2} + \frac{1{,}25^3}{6 \cdot \left(1 - \frac{1{,}25}{3}\right)}} = 0{,}279;$$

$$P_1 = \frac{\rho}{1!} \cdot P_0 = 1{,}25 \cdot 0{,}279 = 0{,}349;$$

$$P_2 = \frac{\rho^2}{2!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^2}{2!} \cdot 0{,}279 = 0{,}218;$$

$$P_3 = \frac{\rho^3}{3!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^3}{3!} \cdot 0{,}279 = 0{,}091;$$

$$P_4 = \frac{\rho^4}{4!} \cdot P_0 = \frac{1{,}25^4}{4!} \cdot 0{,}279 = 0{,}028.$$

4) Вероятность отсутствия очереди у мастерской

$$P_{от.о} = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = 0{,}279 + 0{,}349 + 0{,}218 + 0{,}091 = 0{,}937$$

5) Среднее число заявок в очереди на обслуживание вычисляется по формуле (57).

$$L_q = \left(\frac{3 \cdot 1{,}25}{(3 - 1{,}25)^2}\right) \cdot 0{,}091 \approx 0{,}111$$

6) Среднее число находящихся в системе заявок (формула 58):

$$L_s = 0{,}111 + 1{,}25 = 1{,}361$$

7) Средняя продолжительность пребывания механизма в очереди на обслуживании (по формуле 59).

$$W_q = \frac{0{,}111}{2{,}5} = 0{,}044 \text{ суток}$$

8) Средняя продолжительность пребывания механизма в мастерской вычисляется по формуле (60).

$$W_s = 0{,}044 + \frac{1}{2} \approx 0{,}544 \text{ суток.}$$

8.4 Задания для лабораторной работы 8

Вариант № 1

Одноканальная СМО с отказами представляет собой одну телефонную линию. Заявка (вызов), пришедшая в момент, когда линия занята, получает отказ. Все потоки событий простейшие. Интенсивность потока λ = 0,95 вызова в минуту. Средняя продолжительность разговора t = 1 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Вариант № 2

В одноканальную СМО с отказами поступает простейший поток заявок с интенсивностью λ = 0,5 заявки в минуту. Время обслуживания заявки имеет показательное распределение с t = 1,5 мин. Определите вероятностные характеристики СМО в установившемся режиме работы.

Вариант № 3

В вычислительном центре работает 5 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток задач, поступающих на ВЦ, имеет интенсивность λ = 10 задач в час. Среднее время решения задачи равно 12 мин. Заявка получает отказ, если все ПК заняты. Найдите вероятностные характеристики системы обслуживания (ВЦ).

Вариант № 4

В аудиторскую фирму поступает простейший поток заявок на обслуживание с интенсивностью λ = 1,5 заявки в день. Время обслуживания распределено по показательному закону и равно в среднем трем дням. Аудиторская фирма располагает пятью независимыми бухгалтерами, выполняющими аудиторские проверки (обслуживание заявок). Очередь заявок не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Определите вероятностные характеристики аудиторской фирмы как системы массового обслуживания, работающей в стационарном режиме.

Вариант № 5

На пункт техосмотра поступает простейший поток заявок (автомобилей) интенсивности $\lambda = 4$ машины в час. Время осмотра распределено по показательному закону и равно в среднем 17 мин., в очереди может находиться не более 5 автомобилей. Определите вероятностные характеристики пункта техосмотра в установившемся режиме.

Вариант № 6

На промышленном предприятии решается вопрос о том, сколько потребуется механиков для работы в ремонтном цехе. Пусть предприятие имеет 10 машин, требующих ремонта с учетом числа ремонтирующихся. Отказы машин происходят с частотой $\lambda = 10$ отк/час. Для устранения неисправности механику требуется в среднем t = 3 мин. Возможно, организовать 4 или 6 рабочих мест в цехе для механиков предприятия. Необходимо выбрать наиболее эффективный вариант обеспечения ремонтного цеха рабочими местами для механиков.

Вариант № 7

В бухгалтерии предприятия имеются два кассира, каждый из которых может обслужить в среднем 30 сотрудников в час. Поток сотрудников, получающих заработную плату, — простейший, с интенсивностью, равной 40 сотрудников в час. Очередь в кассе не ограничена. Дисциплина очереди не регламентирована. Время обслуживания подчинено экспоненциальному закону распределения. Вычислите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме и определите целесообразность приема третьего кассира на предприятие, работающего с такой же производительностью, как и первые два.

Вариант № 8

Билетная касса работает без перерыва. Билеты продает один кассир. Среднее время обслуживания — 2 мин. на каждого человека. Среднее число пассажиров, желающих приобрести билеты в кассе в течение одного часа, равно $\lambda = 20$ пасс/час. Все потоки в системе простейшие. Определите среднюю длину очереди, вероятность простоя кассира, среднее время нахождения пассажира в билетной кассе (в очереди и на обслуживании), среднее время ожидания в очереди в условиях стационарного режима работы кассы.

Вариант № 9

Пост диагностики автомобилей представляет собой одноканальную СМО с отказами. Заявка на диагностику, поступившая в момент, когда пост занят, получает отказ. Интенсивность потока заявок на диагностику λ=0,5 автомобиля в час. Средняя продолжительность диагностики t =1,2 часа. Все потоки событий в системе простейшие. Определите в установившемся режиме вероятностные характеристики системы.

Вариант № 10

Автозаправочная станция представляет собой СМО с одним каналом обслуживания и одной колонкой. Площадка при АЗС допускает пребывание в очереди на заправку не более трех автомобилей одновременно. Если в очереди уже находится три автомобиля, очередной автомобиль, прибывший к станции, в очередь не становится, а проезжает мимо. Поток автомобилей, прибывающих для заправки, имеет интенсивность λ= 0,7 автомобиля в минуту. Процесс заправки продолжается в среднем 1,25 мин. Все потоки простейшие. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Вариант № 11

На железнодорожную сортировочную горку прибывают составы с интенсивностью λ = 2 состава в час. Среднее время, в течение которого горка обслуживает состав, равно 0,4 час. Составы, прибывающие в момент, когда горка занята, становятся в очередь и ожидают в парке прибытия, где имеется три запасных пути, на каждом из которых может ожидать один состав. Состав, прибывший в момент, когда все три запасных пути в парке прибытия заняты, становится в очередь на внешний путь. Все потоки событий простейшие.

При установившемся режиме найдите:

- среднее число составов, ожидающих в очереди (как в парке прибытия, так и вне его);
- среднее время ожидания в парке прибытия и на внешних путях;
- среднее время ожидания состава в системе обслуживания;
- вероятность того, что прибывший состав займет место на внешних путях.

Вариант № 12

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется три заправочные колонки. Заправка одной машины длится в среднем 3 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь на заправку, дожидаются своей очереди. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики работы АЗС в стационарном режиме.

Вариант № 13

На станцию технического обслуживания (СТО) автомобилей каждые два часа подъезжает в среднем одна машина. Станция имеет 6 постов обслуживания. Очередь автомобилей, ожидающих обслуживания, не ограниченна. Среднее время обслуживания од ной машины - 2 часа. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики станции технического обслуживания автомобилей.

Вариант № 14

В вычислительном центре работает 9 персональных компьютеров (ПК). Простейший поток неисправностей имеет интенсивность 0,3 отказа в день. Среднее время устранения одной неисправности одним инженером равно 1,5 час. Компьютеры обслуживают три инженера с одинаковой производительностью. Все потоки событий простейшие. Возможны следующие варианты организации обслуживания ПК:

три инженера обслуживают все 9 компьютеров, так, что при отказе ПК его обслуживает один из свободных инженеров, в этом случае R = 3; N = 9;

каждый из трех инженеров обслуживает по три закрепленных за ним ПК. В этом случае R = 1; N = 3.Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания ПК.

Вариант № 15

Малое транспортное предприятие эксплуатирует десять моделей автомобилей одной марки. Простейший поток отказов автомобилей имеет интенсивность λ=0,25 отказа в день. Среднее время устранения одного отказа автомобиля одним механиком равно 2 час. Все потоки событий простейшие. Возможны два варианта обслуживания:

- все автомобили обслуживают два механика с одинаковой производительностью;

- все автомобили предприятия обслуживают три механика с одинаковой производительностью.

Необходимо выбрать наилучший вариант организации обслуживания автомобилей.

Вариант № 16

На вход телефонной станции, имеющей 9 каналов обслуживания, поступает в среднем 120 заявок в час. Заявка получает отказ, если все каналы заняты. Среднее время обслуживания в одном канале равно 4 мин. Все потоки в системе простейшие. Определите вероятностные характеристики телефонной станции, выступающей в качестве СМО.

Вариант № 17

В магазине работает один продавец, который может обслужить в среднем 30 покупателей в час. Поток покупателей простейший с интенсивностью, равной 60 покупателей в час. Все покупатели «нетерпеливые» и уходят, если в очереди стоит 5 человек (помимо обслуживаемых). Все потоки событий простейшие. Определите следующие вероятностные характеристики магазина для стационарного режима работы:

- вероятность обслуживания покупателя;
- абсолютную пропускную способность магазина;
- среднюю длину очереди;
- среднее время ожидания в очереди;
- среднее время всего обслуживания;
- вероятность простоя продавца.

Вариант № 18

Рассматривается работа АЗС, на которой имеется пять заправочных колонок. Заправка одной машины длится в среднем 4 мин. В среднем на АЗС каждую минуту прибывает машина, нуждающаяся в заправке бензином. Число мест в очереди не ограничено. Все машины, вставшие в очередь, дожидаются своей очереди. Все потоки событий простейшие. Определите вероятностные характеристики АЗС для стационарного режима.

Вариант № 19

Имеется двухканальная простейшая СМО с отказами. На ее вход поступает поток заявок с интенсивностью $\lambda = 3$ заявки в час. Среднее время обслуживания одной заявки $t = 0,5$ час. Каждая обслуженная заявка приносит доход 5 д. е. Содержание канала обходится 3 д. е./час. Решите, выгодно ли в экономическом отношении увеличить число каналов СМО до трех.

Вариант № 20

Система массового обслуживания — билетная касса с тремя окошками (с тремя кассирами) и неограниченной очередью. Пассажиров, желающих купить билет, приходит в среднем 5 человек за 20 мин. Поток пассажиров можно считать простейшим. Кассир в среднем обслуживает трех пассажиров за 10 мин. Время обслуживания подчинено показательному закону распределения. Определите вероятностные характеристики СМО в стационарном режиме.

Вариант №21

Технические устройства (ТУ) могут время от времени выходить из строя (отказывать). Поток отказов ТУ простейший с интенсивностью λ=1,6 отказа в сутки. Время восстановления ТУ имеет экспоненциальное распределение. Математическое ожидание времени обслуживания t=0,5 суток. Количество каналов, выполняющих обслуживание ТУ, равно 5 ед. Количество заявок в очереди не ограничено. Определите вероятностные характеристики СМО, выполняющие обслуживание ТУ в установившемся режиме.

8.5 Контрольные вопросы к защите лабораторной работы 8

1) Что понимается под системой массового обслуживания? Приведите примеры СМО.

2) Что является основными компонентами СМО?

3) Что является предметом теории массового обслуживания?

4) Какие виды СМО вы знаете?

5) Перечислите основные функциональные характеристики одноканальной СМО с отказами?

6) Перечислите основные функциональные характеристики одноканальной СМО с ожиданием?

7) Перечислите основные функциональные характеристики многоканальной СМО с отказами?

8) Перечислите основные функциональные характеристики многоканальной СМО с ожиданием?

Список использованных источников

1 **Бережная, Е.В.** Математические методы моделирования экономических систем [Текст] / Е.В Бережная, В.И. Бережной. –М.: Финансы и статистика, 2002. –368 с.

2 **Агальцов, В.П.** Математические методы в программировании [Текст] /В.П. Агальцов., И.В. Волдайская. –М.: Форум - Инфра-М, 2006. -224 с.

3 **Кузнецов, А.В.** Сборник задач и упражнений по высшей математике: Математическое программирование [Текст] /А.В. Кузнецов, Р.А. Рутковский – Мн.: Вышэйшая школа, 2002. -447 с.

4 **Москинова, Г.И.** Дискретная математика .Математика для менеджеров в примерах и упражнениях [Текст] /Г.И.Москинова. –М.: Логос, 2002.-240 с.

5 **Партыка, Т.Л.** Математические методы [Текст] /Т.Л. Партыка, И.И. Попов. –М.: Форум - Инфра-М, 2005. -464 с.

6 **Струченков, В.И.** Методы оптимизациии [Текст] /В.И.Струченков. – М.: Экзамен, 2005. – 256 с.

7 **Черноруцкий, И.Г.** Методы оптимизации в теории упралениии [Текст] /Черноруцкий И.Г. –СПб: Питер, 2004. –256с.

8 **Рыжиков, Ю.И.** Имитационное моделирование. Теория и технология [Текст] /Ю.И. Рыжиков –СПб.: Корона принт, 2004. –384 с.

9 **Акулич, И.Л.** Математическое программирование в примерах и задачах [Текст] /И.Л. Акулич. –М.: Высшая школа, 1993. –336 с.

10. **Пинегина, М.В.** Математические методы и модели в экономике [Текст] /Пинегина М.В. –М.: Экзамен, 2004. –212 с.