Министерство образования и науки
Российской Федерации

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

А. Н. Павленко

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (ГИПЕРБОЛИЧЕСКИЙ ТИП)

Методические указания к выполнению
расчетно-графического задания

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 517.95(07)
ББК 22.311я7
П 12

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук, С. А. Герасименко

Павленко, А. Н.
П 12 Уравнения математической физики (гиперболический тип): методические указания к выполнению расчетно-графического задания / А. Н. Павленко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 23 с.

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графического задания по дисциплине «Методы математической физики» для студентов заочного отделения специальности 210106 - «Промышленная электроника».

УДК 517.95(07)
ББК 22.311я7

Содержание

Введение

Методические указания предназначены студентам заочной формы обучения (специальность: 210106 – «Промышленная электроника») для выполнения расчетно-графического задания (РГЗ) по дисциплине «Методы математической физики» (раздел: гиперболические уравнения) в 5 семестре. Предполагается, что будут использованы сборники задач [1-2].

Целесообразность написания данных методических указаний обусловлена тем, что предмет «Методы математической физики» относится к дисциплинам, вызывающим у студентов наибольшие трудности, а небольшое число аудиторных занятий, предусмотренных учебным планом заочного обучения, не позволяет подробно рассмотреть все типы задач, предлагаемых в РГЗ.

В настоящей работе приводятся подробные решения задач типового варианта РГЗ, состоящего из заданий:

1) раздел «Уравнения математической физики» [1, с. 210-234], задания: № 10-13 (смешанные задачи для однородного волнового уравнения на отрезке и однородных граничных условий), № 14 (смешанная задача для однородного волнового уравнения на отрезке и неоднородных граничных условий), №15 (смешанная задача для неоднородного волнового уравнения на отрезке и однородных граничных условий);

2) раздел «Уравнения математической физики» [2, с. 69-98], задания: №9 (смешанная задача для однородного волнового уравнения на отрезке), №10 (смешанная задача для однородного волнового уравнения в прямоугольнике), № 11 (смешанная задача для однородного волнового уравнения в круге), № 14 (задача Коши для волнового уравнения на плоскости), № 15 (задача Коши для волнового уравнения в пространстве).

Следует отметить, что данные методические указания могут быть использованы студентами и других инженерных специальностей всех форм обучения.

1 Решение типового варианта расчетно-графического задания

Задача 1. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_{tt}=0,81\,u_{xx}$ ($t>0$, $0<x<6$);

НУ: $u(x,0)=2\sin 3\pi x$ ($0\le x\le 6$);

$u_t(x,0)=4\pi\sin 5\pi x$ ($0\le x\le 6$)

ГУ: $u(0,t)=u(6,t)=0$ ($t\ge 0$).

Решение.

1. Используем, что решение смешанной задачи

УЧП: $u_{tt}=a^2 u_{xx}$ ($t>0$, $0<x<L$);

НУ: $u(x,0)=u_0(x)$ ($0\le x\le L$);

$u_t(x,0)=u_1(x)$ ($0\le x\le L$);

ГУ: $u(0,t)=u(L,t)=0$ ($t\ge 0$).

следует искать в виде [2, с. 74-75]

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi na}{L}+B_n\sin\frac{\pi na}{L}\right)\sin\frac{\pi n}{L}x.$$

Найдем коэффициенты A_n и B_n.

1. $u(x,0)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{L}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{\pi n}{6}x=u_0(x)=2\sin 3\pi x=2\sin\frac{\pi\cdot 18}{6}x$.

Отсюда $A_{18}=2$, а все остальные коэффициенты A_n равны 0.

2. Найдем $u_t(x,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{\pi na}{L}\sin\frac{\pi na}{L}+B_n\frac{\pi na}{L}\cos\frac{\pi na}{L}\right)\sin\frac{\pi n}{L}x$ и тогда

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{\pi na}{L}\sin\frac{\pi n}{L}x=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{0,9\pi n}{6}\sin\frac{\pi n}{6}x=u_1(x)=4\pi\sin 5\pi x=$$

$$=\frac{8}{9}\cdot\frac{0,9\pi\cdot 30}{6}\sin\frac{\pi\cdot 30}{6}x.$$

Отсюда $B_{30}=\frac{8}{9}$, а все остальные коэффициенты B_n равны 0.

Тогда решением данной задачи является функция

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi na}{L}+B_n\sin\frac{\pi na}{L}\right)\sin\frac{\pi n}{L}x=2\cos\frac{\pi\cdot 18\cdot 0{,}9}{6}t\sin\frac{\pi\cdot 18}{6}x+$$

$$+\frac{8}{9}\sin\frac{\pi\cdot 30\cdot 0{,}9}{6}t\sin\frac{\pi\cdot 30}{6}x=2\cos 2{,}7\pi t\sin 3\pi x+\frac{8}{9}\sin 4{,}5\pi t\sin 5\pi x.$$

Задача 2. Решить смешанную задачу для волнового уравнения на отрезке:

УЧП: $u_{tt}=0{,}81u_{xx}$ $(0<x<4,\ t>0)$;

НУ: $u(x,0)=x(x-4)$, $u_t(x,0)=0$ $(0\le x\le 4)$;

ГУ: $u(0,t)=u(4,t)=0$ $(t\ge 0)$.

Решение.

Используем, что решение задачи для волнового уравнения на отрезке:

УЧП: $u_{tt}=a^2u_{xx}$ $(0<x<L,\ t>0)$;

НУ: $u(x,0)=u_0(x)$, $u_t(x,0)=u_1(x)$ $(0\le x\le L)$;

ГУ: $u(0,t)=u(L,t)=0$ $(t\ge 0)$

следует искать в виде [2, с. 74-75]

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{\pi na}{L}t+B_n\sin\frac{\pi na}{L}t\right)\sin\frac{\pi n}{L}x,$$

где $A_n=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{\pi n}{L}xdx$, $B_n=\frac{2}{\pi na}\int_0^L u_1(x)\sin\frac{\pi n}{L}xdx$, $(n=1,\ 2,\ 3,\ \dots)$

Найдем:

$$A_n=\frac{2}{L}\int_0^L u_0(x)\sin\frac{\pi n}{L}xdx=\frac{2}{4}\int_0^4 x(x-4)\sin\frac{\pi n}{4}xdx=$$

►Полученный определенный интеграл удобнее найти в любом компьютерном математическом пакете:

$$\frac{1}{2}\int_0^4 x(x-4)\sin\frac{\pi n}{4}xdx=\frac{64\cos\pi n}{\pi^3n^3}+\frac{32\sin\pi n}{\pi^2n^2}-\frac{64}{\pi^3n^3}.$$

Так как n - натуральное число, то $\cos\pi n=(-1)^n$, $\sin\pi n=0$.

$$\frac{1}{2}\int_0^4 x(x-4)\sin\frac{\pi n}{4}xdx=\frac{64}{\pi^3n^3}\left[(-1)^n-1\right]=\begin{cases}0, & n-\textit{четное число},\\ -\dfrac{128}{\pi^3n^3}, & n-\textit{нечетное число}.\end{cases}$$

$$A_{2m-1}=-\frac{128}{\pi^3(2m-1)^3}.◄$$

$B_n = \dfrac{2}{\pi n a}\int\limits_0^L u_1(x)\sin\dfrac{\pi n}{L}x dx = 0$, так как $u_1(x) = 0$ на всем отрезке интегрирования.

Таким образом, решение данной задачи имеет вид:

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\left(-\frac{128}{\pi^3(2m-1)^3}\cos\frac{\pi(2m-1)\cdot 0{,}9}{4}t + 0\cdot\sin\frac{\pi n a}{L}t\right)\sin\frac{\pi(2m-1)}{4}x =$$

$$= -\frac{128}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3}\cos\frac{9\pi(2m-1)}{40}t\cdot\sin\frac{\pi(2m-1)}{4}x.$$

Задача 3. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_{tt} = 0{,}81u_{xx}$ $(t > 0,\ 0 < x < 6)$;

НУ: $u(x,0) = 2\cos 3\pi x$ $(0 \le x \le 6)$;

$u_t(x,0) = 4\pi\cos 5\pi x$ $(0 \le x \le 6)$

ГУ: $u_x(0,t) = u_x(6,t) = 0$ $(t \ge 0)$.

Решение.

1. Рассмотрим смешанную задачу

УЧП: $u_t = a^2 u_{xx}$ $(t > 0,\ 0 < x < L)$;

НУ: $u(x,0) = \varphi(x)$ $(0 \le x \le L)$;

ГУ: $a_1 u(0,t) + b_1 u_x(0,t) = 0$ $(t \ge 0)$;

$a_2 u(L,t) + b_2 u_x(L,t) = 0$ $(t \ge 0)$,

где $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \ne 0$, $|a_i| + |b_i| > 0$ $(i = 1,\ 2)$.

При ее решении методом Фурье будет получена задача Штурма-Лиувилля [3, с. 24-28]

ОДУ: $X'' + \lambda^2 X = 0$ $(\lambda \ge 0)$;

ГУ: $a_1 X(0) + b_1 X'(0) = 0$,

$a_2 X(L) + b_2 X'(L) = 0$.

2. В данном случае получим задачу

ОДУ: $X'' + \lambda^2 X = 0$ $(\lambda \ge 0)$;

ГУ: $X'(0) = X'(6) = 0$.

Пусть $\lambda = 0$, тогда ОДУ примет вид $X'' = 0$, и $X(x) = C_1 x + C_2$ - его общее решение.

Используем ГУ. Так как $X'(x) = C_1$ и $X'(0) = X'(6) = 0$, то тогда $C_1 = 0$ и $X(x) = C_2$. Получили, что собственному значению $\lambda_0 = 0$ отвечает собственная функция $X_0(x) = 1$.

Пусть теперь $\lambda > 0$. В этом случае характеристическое уравнение данного ОДУ $k^2 + \lambda^2 = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\lambda \cdot i$. Отсюда общим решением ОДУ $X'' + \lambda^2 X = 0$ будет являться $X(x) = C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x$.

Найдем C_1, C_2 и λ, используя ГУ.

Так как $X'(0) = 0$, то получим:

$X'(x) = -C_1\lambda \sin\lambda x + C_2\lambda \cos\lambda x$, $X'(0) = C_2\lambda = 0$.

Из того, что $\lambda > 0$ следует $C_2 = 0$ и $X(x) = C_1 \cos\lambda x$.

Так как $X'(6) = 0$, то получим:

$X'(x) = -C_1\lambda \sin\lambda x$, $X'(6) = -C_1\lambda \sin 6\lambda = 0$.

Из того, что $\lambda > 0$ следует $C_1 = 0$ или $\sin 6\lambda = 0$.

Очевидно, что равенство $C_1 = 0$ не возможно, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$.

Таким образом, верно равенство $\sin 6\lambda = 0$. Отсюда $6\lambda = \pi n$ ($n = 1,2,3,\ldots$). Тогда $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{6}$ ($n = 1,2,3,\ldots$) - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля, а $X_n(x) = \cos\dfrac{\pi n}{6}x$ - ее собственные функции.

С учетом случая $\lambda = 0$, получим:

1) $\lambda_n = \dfrac{\pi n}{6}$ ($n = 0,1,2,\ldots$) - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля;

2) $X_n(x) = \cos\dfrac{\pi n}{6}x$ ($n = 0,1,2,\ldots$) - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля.

3. Решение исходной задачи будем искать в виде [1, с. 232]

$u(x,t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$, где $T_n(t) = A_n \cos a\lambda_n t + B_n \sin a\lambda_n t$.

В данном случае будем иметь

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos 0{,}9\frac{\pi n}{6}t+B_n\sin 0{,}9\frac{\pi n}{6}t\right)\cos\frac{\pi n}{6}x=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{3\pi n}{20}t+B_n\sin\frac{3\pi n}{20}t\right)\cos\frac{\pi n}{6}x.$$

4. Используем НУ.

4.1. $u(x,0)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}A_n\cos\frac{\pi n}{6}x=u_0(x)=2\cos 3\pi x=2\cos\frac{\pi\cdot 18}{6}x.$

Отсюда $A_{18}=2$, а все остальные коэффициенты равны A_n.

4.2. Найдем $u_t(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(-A_n\frac{3\pi n}{20}\sin\frac{3\pi n}{20}t+B_n\frac{3\pi n}{20}\cos\frac{3\pi n}{20}t\right)\cos\frac{\pi n}{6}x.$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\frac{3\pi n}{20}\cos\frac{\pi n}{6}x=u_1(x)=4\pi\cos 5\pi x=\frac{8}{9}\cdot\frac{3\pi\cdot 30}{20}\cos\frac{\pi\cdot 30}{6}x.$$

Отсюда $B_{30}=\frac{8}{9}$, а все остальные коэффициенты равны B_n.

5. Решением данной задачи является функция

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{3\pi n}{20}t+B_n\sin\frac{3\pi n}{20}t\right)\cos\frac{\pi n}{6}x=2\cos\frac{3\pi\cdot 18}{20}t\cos\frac{\pi\cdot 18}{6}x+$$

$$+\frac{8}{9}\sin\frac{3\pi\cdot 30}{20}t\cos\frac{\pi\cdot 30}{6}x=2\cos 2{,}7\pi t\cos 3\pi x+\frac{8}{9}\sin 4{,}5\pi t\cos 5\pi x.$$

Задача 4. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_{tt}=0{,}81u_{xx}$ $(t>0,\ 0<x<6)$;

НУ: $u(x,0)=2\sin 3\pi x-2$ $(0\le x\le 6)$;

$u_t(x,0)=4\pi\sin 5\pi x+3x$ $(0\le x\le 6)$

ГУ: $u(0,t)=-2$, $u(6,t)=18t-2$ $(t\ge 0)$.

Решение.

Используем, что если задача имеет неоднородные ГУ

$$u(0,t)=\varphi_1(t),\ u(L,t)=\varphi_2(t)\ (t\ge 0),$$

то ее можно свести к задаче с однородными ГУ с помощью замены

$$v(x,t)=u(x,t)-\varphi_1(t)+[\varphi_1(t)-\varphi_2(t)]\cdot\frac{x}{L}.$$

В данном случае будем иметь

$$v = u - (-2) + [-2 - (18t - 2)] \cdot \frac{x}{6} = u + 2 - 3xt.$$

После замены получим задачу

УЧП: $v_{tt} = 0{,}81 v_{xx}$ $(t > 0,\ 0 < x < 6)$;

НУ: $v(x,0) = 2\sin 3\pi x$ $(0 \le x \le 6)$;

$v_t(x,0) = 4\pi \sin 5\pi x$ $(0 \le x \le 6)$

ГУ: $v(0,t) = v(6,t) = 0$ $(t \ge 0)$.

Данная задача имеет (см. решение задачи №1) решение

$$v = 2\cos 2{,}7\pi t \sin 3\pi x + \frac{8}{9}\sin 4{,}5\pi t \sin 5\pi x \cdot$$

Тогда решением исходной задачи будет являться функция

$$u = v - 2 + 3xt = 2\cos 2{,}7\pi t \sin 3\pi x + \frac{8}{9}\sin 4{,}5\pi t \sin 5\pi x - 2 + 3xt \cdot$$

Задача 5. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_{tt} = 9u_{xx} + e^{-3t}\sin 5x$ $(t > 0,\ 0 < x < \pi)$;

НУ: $u(x,0) = u_t(x,0) = 0$ $(0 \le x \le \pi)$

ГУ: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ $(t \ge 0)$.

Решение.

1. Используем, что решение задачи для неоднородного УЧП

УЧП: $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ $(t > 0,\ 0 < x < L)$;

НУ: $u(x,0) = \varphi(x)$ $(0 \le x \le L)$;

$u_t(x,0) = \psi(x)$ $(0 \le x \le L)$;

ГУ: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ $(t \ge 0)$

следует искать в виде $u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x)$ [2, с. 231-232].

Здесь:

1) $X_n(t)$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

ОДУ: $X'' + \lambda X = 0$ $(\lambda > 0)$,

ГУ: $X(0) = X(L) = 0$;

2) $u_n(t)$ - решения задачи Коши

ОДУ: $u_n'' + a^2\lambda_n^2 u_n = f_n(t)$,

НУ: $u_n(0) = \varphi_n$,

$u_n'(0) = \psi_n$;

3) $f_n(t)$ - коэффициенты разложения функции $f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$;

4) φ_n - коэффициенты разложения функции $\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$;

5) ψ_n - коэффициенты разложения функции $\psi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n X_n(x)$.

2. В данном случае будем иметь задачу Штурма-Лиувилля

ОДУ: $X'' + \lambda X = 0$ ($\lambda > 0$),

ГУ: $X(0) = X(\pi) = 0$.

Характеристическое уравнение данного ОДУ $k^2 + \lambda = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}\cdot i$. Отсюда общим решением ОДУ $X'' + \lambda X = 0$ будет являться $X(x) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\cdot x + C_2\sin\sqrt{\lambda}\cdot x$.

Найдем C_1, C_2 и λ, используя ГУ.

Так как $X(0) = 0$, то получим:

$X(0) = C_1\cos\sqrt{\lambda}\cdot 0 + C_2\sin\sqrt{\lambda}\cdot 0 = C_1 = 0$, $X(x) = C_2\sin\sqrt{\lambda}\cdot x$.

Так как $X(\pi) = 0$, то получим:

$X(3) = C_2\sin\pi\sqrt{\lambda}$.

Отсюда следует, что $C_2 = 0$ или $\sin\pi\sqrt{\lambda} = 0$.

Очевидно, что равенство $C_2 = 0$ не возможно, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$.

Таким образом, верно равенство $\sin\pi\sqrt{\lambda} = 0$. Отсюда $\pi\sqrt{\lambda} = \pi n$ ($n = 1,2,\ldots$), $\sqrt{\lambda} = n$. Тогда $\lambda_n = n^2$ ($n = 1,2,\ldots$) - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля, а $X_n(x) = \sin nx$ - ее собственные функции.

3. Найдем для функции $f(x,t) = e^{-3t}\sin 5x$ ее коэффициенты разложения $f_n(t)$ в рад по собственным функциям $X_n(x) = \sin nx$:

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)X_n(x).$$

Получим: $e^{-3t}\sin 5x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin nx$.

Отсюда следует, что $f_5(t)=e^{-3t}$, а при $n\neq 5$ выполняется $f_n(t)\equiv 0$.

4. Так как для данной задачи $\varphi(x)\equiv 0$ и $\psi(x)\equiv 0$, то тогда все коэффициенты разложений функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ в ряды по собственным функциям $X_n(x)=\sin nx$ равны нулю: $\varphi_n=0$, $\psi_n=0$.

5. Из пунктов 3 и 4 следует, что задача Коши

ОДУ: $u_n''+a^2\lambda_n^2 u_n = f_n(t)$,

НУ: $u_n(0)=\varphi_n$,

$u_n'(0)=\psi_n$

при $n=5$ примет вид

ОДУ: $u_5''+9\cdot 5^2 u_5=e^{-3t}$,

НУ: $u_5(0)=0,$

$u_5'(0)=0$.

При $n\neq 5$ имеем $u_n(t)\equiv 0$.

С помощью операционного исчисления [4, с. 578-598] решим полученную задачу Коши

ОДУ: $u_5''+225u_5=e^{-3t}$,

НУ: $u_5(0)=0,$

$u_5'(0)=0$.

Используем свойства преобразования Лапласа:

1) $L[f''(x)]=p^2F(p)-p\cdot f(0)-f'(0)$;

2) $L\left[e^{at}\right]=\dfrac{1}{p-a}$.

Получим изображение данной задачи Коши:

$$p^2U_5(p)-pu(0)-u'(0)+225U_5(p)=\frac{1}{p+3},$$

$$p^2U_5(p)+225U_5(p)=\frac{1}{p+3}.$$

Отсюда: $U_5(p)\left(p^2+225\right)=\dfrac{1}{p+3}$, $U_5(p)=\dfrac{1}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}$.

Представим полученное выражение в виде сумме простых дробей.

$$U_5(p)=\frac{1}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}=\frac{A}{p+3}+\frac{Bp+C}{p^2+15^2}=$$

$$=\frac{A\left(p^2+15^2\right)+(Bp+C)(p+3)}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}=\frac{Ap^2+15^2A+Bp^2+3Bp+Cp+3C}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}=$$

$$=\frac{(A+B)p^2+(3B+C)p+15^2A+3C}{(p+3)\left(p^2+15^2\right)}.$$

Таким образом, получили тождество

$$1=(A+B)p^2+(3B+C)p+15^2A+3C.$$

Приравняв коэффициенты при одинаковых степенях, получим систему уравнений

$$\begin{cases} A+B=0, \\ 3B+C=0, \\ 15^2A+3C=1. \end{cases}$$

Решив ее, получим: $A=\dfrac{1}{234}$, $B=-\dfrac{1}{234}$, $C=\dfrac{1}{78}$.

Тогда $U_5(p)=\dfrac{1}{234}\cdot\dfrac{1}{p+3}+\dfrac{-\frac{1}{234}p+\frac{1}{78}C}{p^2+15^2}=\dfrac{1}{234}\cdot\dfrac{1}{p+3}-\dfrac{1}{234}\cdot\dfrac{p}{p^2+15^2}+$

$+\dfrac{1}{1170}\cdot\dfrac{15}{p^2+15^2}$.

Используем свойства преобразования Лапласа:

1) $L\left[e^{at}\right]=\dfrac{1}{p-a}$;

2) $L[\cos at]=\dfrac{p}{p^2+a^2}$,

3) $L[\sin at]=\dfrac{a}{p^2+a^2}$.

Тогда получим

$$u_5(t)=\frac{1}{234}e^{-3t}-\frac{1}{234}\cos 15t+\frac{1}{1170}\sin 15t=\frac{1}{1170}\left(5e^{-3t}-5\cos 15t+\sin 15t\right).$$

6. Решением исходной задачи является функция

$$u(x,t)=u_5(t)X_5(x)=\frac{1}{1170}\left(5e^{-3t}-5\cos 15t+\sin 15t\right)\sin 5x\cdot$$

Задача 6. Решить смешанную задачу для волнового уравнения в прямоугольнике:

УЧП: $u_{tt} = 0{,}81\Delta u$ $(0 < x < 5,\ 0 < y < 8,\ t > 0)$;

НУ: $u|_{t=0} = xy(5-x)(8-y)$, $u_t|_{t=0} = 0$ $(0 \le x \le 5,\ 0 \le y \le 8)$;

ГУ: $u|_{x=0} = u|_{x=5} = u|_{y=0} = u|_{y=8} = 0\,(t \ge 0)$.

Решение.

Используем, что решение задачи для волнового уравнения в прямоугольнике:

УЧП: $u_{tt} = a^2\Delta u$ $(0 < x < L,\ 0 < y < M,\ t > 0)$;

НУ: $u|_{t=0} = u_0(x,y)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x,y)$ $(0 \le x \le L,\ 0 \le y \le M)$;

ГУ: $u|_{x=0} = u|_{x=L} = u|_{y=0} = u|_{y=M} = 0\,(t \ge 0)$.

следует искать в виде [2, с. 75]

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(A_{nk}\cos \pi a\sqrt{\frac{n^2}{L^2}+\frac{k^2}{M^2}}\,t + B_{nk}\sin \pi a\sqrt{\frac{n^2}{L^2}+\frac{k^2}{M^2}}\,t \right)\times$$

$$\times \sin\frac{\pi n}{L}x \sin\frac{\pi k}{M}y,$$ где:

$$A_{nk} = \frac{2}{L}\cdot\frac{2}{M}\int_0^L\int_0^M u_0(x,y)\sin\frac{\pi n}{L}x\sin\frac{\pi k}{M}y\,dxdy,\ (n,k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

$$B_{nk} = \frac{4}{\pi a\sqrt{n^2M^2 + k^2L^2}}\int_0^L\int_0^M u_1(x,y)\sin\frac{\pi n}{L}x\sin\frac{\pi k}{M}y\,dxdy,\ (n,k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

В данном случае будем иметь:

$$A_{nk} = \frac{2}{5}\cdot\frac{2}{8}\int_0^5\int_0^8 xy(5-x)(8-y)\sin\frac{\pi n}{L}x\sin\frac{\pi k}{M}y\,dxdy =$$

$$= \frac{1}{10}\int_0^5 x(5-x)\sin\frac{\pi n}{5}x\,dx\cdot\int_0^8 y(8-y)\sin\frac{\pi k}{M}y\,dy.$$

►Полученные определенные интегралы найдем в любом компьютерном математическом пакете.

1. $\int_0^5 x(5-x)\sin\frac{\pi n}{5}x\,dx = -\frac{250\cos\pi n}{\pi^3 n^3} - \frac{125\sin\pi n}{\pi^2 n^2} + \frac{250}{\pi^3 n^3}$

Так как n - натуральное число, то $\cos\pi n = (-1)^n$, $\sin\pi n = 0$.

$$\int_0^5 x(5-x)\sin\frac{\pi n}{5}x\,dx = \frac{250}{\pi^3 n^3}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} 0, & n - \textit{четное число}, \\ \dfrac{500}{\pi^3 n^3}, & n - \textit{нечетное число}. \end{cases}$$

2. $\displaystyle\int_0^8 y(8-y)\sin\frac{\pi k}{8}y\,dy = -\frac{1024\cos\pi k}{\pi^3 k^3} - \frac{512\sin\pi k}{\pi^2 k^2} + \frac{1024}{\pi^3 k^3}$

Так как k - натуральное число, то $\cos\pi k = (-1)^k$, $\sin\pi k = 0$.

$$\int_0^8 y(8-y)\sin\frac{\pi k}{8}y\,dy = -\frac{1024(-1)^k}{\pi^3 k^3} + \frac{1024}{\pi^3 k^3} =$$

$$= \frac{1024}{\pi^3 k^3}\left[1-(-1)^k\right] = \begin{cases} 0, & k - \textit{четное число}, \\ \dfrac{2048}{\pi^3 k^3}, & k - \textit{нечетное число}. \end{cases} \blacktriangleleft$$

Окончательно получаем, что

$A_{nk} = \dfrac{1}{10}\cdot\dfrac{500}{\pi^3 n^3}\cdot\dfrac{2048}{\pi^3 k^3} = \dfrac{102400}{\pi^6 n^3 k^3}$, ($n, k$ – *нечетные числа*), а все остальные A_{nk} равны 0.

Можно записать:

$$A_{2m-1,\ 2p-1} = \frac{102400}{\pi^6 (2m-1)^3 (2p-1)^3},\ (m, p = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Так как $u_1(x, y) = 0$ на всем прямоугольнике интегрирования, то тогда все $B_{nk} = 0$.

Таким образом, решением данной задачи является функция

$$u(x,y,t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{102400}{\pi^6 (2m-1)^3 (2p-1)^3}\cos\pi\, 0{,}9\sqrt{\frac{(2m-1)^2}{5^2}+\frac{(2p-1)^2}{8^2}}\,t\,\times$$

$$\times\sin\frac{\pi(2m-1)}{5}x\cdot\sin\frac{\pi(2p-1)}{8}y = \frac{102400}{\pi^6}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^3(2p-1)^3}\times$$

$$\times\cos 0{,}9\pi\sqrt{\left(\frac{2m-1}{5}\right)^2+\left(\frac{2p-1}{8}\right)^2}\,t\cdot\sin\frac{\pi(2m-1)}{5}x\cdot\sin\frac{\pi(2p-1)}{8}y.$$

Задача 7. Найти решение смешанной задачи для волнового уравнения в круге

УЧП: $u_{tt} = \dfrac{1}{2}\Delta u$ ($t > 0$, $0 \le r < 30$);

НУ: $u(r,0)=\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{30}\right)^2\right]$, $u_t(r,0)=0$ $(0\le r\le 30)$;

ГУ: $u(30;t)=0$ $(t\ge 0)$.

Решение.

Пусть дана задача для волнового уравнения в круге для случая осевой симметрии:

УЧП: $u_{tt}=a^2\Delta u$ $(t>0,\ 0\le r<R)$;

НУ: $u(r,0)=u_0(r)$, $u_t(r,0)=u_1(r)$ $(0\le r\le R)$ (**Замечание:** НУ не зависят от φ .);

ГУ: $u(R;t)=0$ $(t\ge 0)$.

Ее решение будем искать в виде [2, с. 75]

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{a\mu_n}{R}t+B_n\sin\frac{a\mu_n}{R}t\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right),$$

где коэффициенты A_n, B_n вычисляются по формулам:

$$A_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^R ru_0(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots);$$

$$B_n=\frac{2}{Ra\mu_nJ_1^2(\mu_n)}\int_0^R ru_1(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr,\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \ldots).$$

Здесь:

1) $J_0(x)$, $J_1(x)$ - функции Бесселя [5, с. 451];

2) μ_n - нули функции Бесселя $J_0(x)$.

В данном случае будем иметь:

$$A_n=\frac{2}{30^2J_1^2(\mu_n)}\int_0^{30} r\frac{1}{8}\left[1-\left(\frac{r}{30}\right)^2\right]J_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right)dr=$$

$$=\frac{2}{30^2\cdot 8\cdot J_1^2(\mu_n)}\int_0^{30}\left(r-\frac{r^3}{30^2}\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right)dr=$$

$$=\frac{1}{4\cdot 30^2J_1^2(\mu_n)}\left(\int_0^{30} rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right)dr-\frac{1}{30^2}\int_0^{30} r^3J_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right)dr\right).$$

Найдем первый интеграл.

$$\int_0^{30} rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right)dr=$$

►Введем замену $s = \frac{\mu_n}{30} r$. Тогда $r = \frac{30}{\mu_n} s$, $dr = \frac{30}{\mu_n} ds$, новые пределы интегрирования: $s_в = \frac{\mu_n}{30} 30 = \mu_n$ и $s_н = \frac{\mu_n}{30} 0 = 0$.◄

$$= \int_0^{\mu_m} \frac{30s}{\mu_n} J_0(s) \frac{30}{\mu_n} ds = \frac{30^2}{\mu_n^2} \int_0^{\mu_m} s J_0(s) ds =$$

►Используем, что $\int_0^x s J_0(s) ds = x J_1(x)$ [6, с. 83].◄

$$= \frac{30^2}{\mu_n^2} \mu_n J_1(\mu_n) = \frac{30^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n}.$$

Найдем второй интеграл.

$$\int_0^{30} r^3 J_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right) dr =$$

►Введем замену $s = \frac{\mu_n}{30} r$. Тогда $r = \frac{30}{\mu_n} s$, $dr = \frac{30}{\mu_n} ds$, новые пределы интегрирования: $s_в = \frac{\mu_n}{30} 30 = \mu_n$ и $s_н = \frac{\mu_n}{30} 0 = 0$.◄

$$= \int_0^{\mu_m} \left(\frac{30}{\mu_n}\right)^3 s^3 J_0(s) \frac{30}{\mu_n} ds = \frac{30^4}{\mu_n^4} \int_0^{\mu_m} s^3 J_0(s) ds =$$

►Используем, что $\int_0^x s^3 J_0(s) ds = 2x^2 J_0(x) + \left(x^3 - 4x\right) J_1(x)$ [6, с. 83].◄

$$= \frac{30^4}{\mu_n^4} \left[2\mu_n^2 J_0(\mu_n) + \left(\mu_n^3 - 4\mu_n\right) J_1(\mu_n)\right] = \frac{30^4}{\mu_n^4} \left(\mu_n^3 - 4\mu_n\right) J_1(\mu_n) =$$

$$= \frac{30^4}{\mu_n^3} \left(\mu_n^2 - 4\right) J_1(\mu_n).$$

Тогда получим:

$$A_n = \frac{1}{4 \cdot 30^2 J_1^2(\mu_n)} \left(\frac{30^2 J_1(\mu_n)}{\mu_n} - \frac{1}{30^2} \cdot \frac{30^4}{\mu_n^3} \left(\mu_n^2 - 4\right) J_1(\mu_n) \right) =$$

$$= \frac{1}{4 J_1^2(\mu_n)} \left(\frac{J_1(\mu_n)}{\mu_n} - \frac{1}{\mu_n^3} \left(\mu_n^2 - 4\right) J_1(\mu_n) \right) = \frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}.$$

Так как $u_1(r) \equiv 0$, то все $B_n = 0$.

Решением данной задачи является функция

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\cdot\cos\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\mu_n}{30}tJ_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{30}\right)}{\mu_n^3 J_1(\mu_n)}\cdot\cos\frac{\sqrt{2}\mu_n}{60}t.$$

Задача 8. Используя формулу Пуассона, найти решение задачи Коши для волнового уравнения на плоскости

УЧП: $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$ $(t>0,\ -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty)$;

НУ: $u|_{t=0}=7x^2-8y^2$, $u_t|_{t=0}=0$ $(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty)$.

Решение.

Используем, что решение задачи Коши

УЧП: $u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy})$ $(t>0,\ -\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty)$;

НУ: $u|_{t=0}=u_0(x,y)$, $u_t|_{t=0}=u_1(x,y)$ $(-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty)$

можно найти по формуле Пуассона [2, с. 76]

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\iint_K\frac{u_1(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta+$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_K\frac{u_0(\xi,\eta)}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta$$, где K - круг с центром в точке $M(x,y)$ и радиусом at.

В данном случае будем иметь

$$u(x,y,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_K\frac{7\xi^2-8\eta^2}{\sqrt{a^2t^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}d\xi d\eta=$$

►Перейдем в полярную систему координат

$\xi=x+\rho\cos\varphi$, $\eta=y+\rho\sin\varphi$, $d\xi d\eta=\rho d\rho d\varphi$.◄

$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{at}\frac{7(x+\rho\cos\varphi)^2-8(y+\rho\sin\varphi)^2}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho d\rho=$$

►Полученный повторный интеграл найдем в любом компьютерном математическом пакете.◄

$$=7x^2-8y^2-a^2t^2.$$

Задача 9. Используя формулу Кирхгофа, найти решение задачи Коши для волнового уравнения в пространстве

УЧП: $u_{tt} = 9(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ $(t > 0, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$;

НУ: $u|_{t=0} = 9x^2 + 8y^2 + 7z^2$, $u_t|_{t=0} = 0$ $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$.

Решение.

Используем, что решение задачи Коши

УЧП: $u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz})$ $(t > 0, -\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$;

НУ: $u|_{t=0} = u_0(x,y,z)$, $u_t|_{t=0} = u_1(x,y,z)$ $(-\infty < x < \infty, -\infty < y < \infty, -\infty < z < \infty)$.

можно найти по формуле Кирхгофа [2, с. 76]:

$u(x,y,z,t) = \frac{1}{2\pi a^2 t} \iint\limits_{\Omega} u_1(\xi,\mu,\kappa)\,dS + \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \iint\limits_{\Omega} u_0(\xi,\eta,\kappa)\,dS\right]$, где Ω - сфера с центром в точке $M(x,y,z)$ и радиусом at.

В данном случае будем иметь

$u(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi \cdot 9} \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t} \iint\limits_{\Omega} (9\xi + \eta^2 + \kappa^2)\,dS\right]$, где Ω - сфера с центром в точке $M(x,y,z)$ и радиусом $3t$.

►Перейдем в сферическую систему координат

$\xi = x + 3t\sin\theta\cos\square$, $\eta = y + 3t\sin\theta\sin\square$, $\kappa = z + 3t\cos\theta$;

$dS = 9t^2 \sin\theta d\square d\theta$.◄

$$u(x,y,z,t) = \frac{1}{36\pi}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{t}\int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2\pi} [\,9(x + 3t\sin\theta\cos\square)^2 + 8(y + 3t\sin\theta\sin\square)^2 + \right.$$

$$\left. + 7(z + 3t\cos\theta)^2]\,9t^2\sin\theta d\square\right\} =$$

►Полученный повторный интеграл найдем в любом компьютерном математическом пакете.◄

$= 9x^2 + 216t^2 + 8y^2 + 7z^2$.

Список использованных источников

1 Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 240 с.

2 Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / В. Ф. Чудесенко. – М.: Высш. школа, 1983. – 112 с.

3 Боголюбов, А. Н. Задачи по математической физике: учеб. пособие / А. Н. Боголюбов. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.

4 Гусак, А. А. Справочник по высшей математике / А. А. Гусак, Г. М. Гусак, Е. А. Бричикова. – 7-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2006. – 640 с.

5 Универсальный справочник: высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов / А. Д. Полянин [и др.] – М.: АСТ: Астрель: Профиздат, 2005. – 480 с.: ил.

6 Смирнов, М. М. Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 128 с.: ил.

Обозначения и сокращения

1. ГУ – граничное условие;
2. НУ – начальное условие;
3. ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение;
4. РГЗ – расчетно-графическое задание;
5. УЧП – уравнения с частными производными;