**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ**

**Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Оренбургский государственный университет»**

И. Г. РУЦКОВА

ПОСОБИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

ДЛЯ ПОСТУПАЮЩИХ В ВУЗЫ

Рекомендовано Ученым советом государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для абитуриентов и слушателей курсов по подготовке в вуз

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 51 (07)
ББК 22.1я 7
Р 91

Рецензент - доктор технических наук, профессор И. П. Болодурина

Руцкова, И.Г.
Р 91 Пособие по математике для поступающих в вузы: учебное пособие / И. Г. Руцкова - Оренбург: РИК ГОУ ОГУ, 2010. - 300 с.
ISBN

Данное учебное пособие предназначено для абитуриентов, поступающих в высшие учебные заведения.

Оно включает в себя:

- рекомендации по организации процесса изучения (повторения) школьного курса математики при подготовке к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вузы, с указанием рекомендуемой для подготовки литературы;
- примеры решений наиболее типичных заданий, предлагавшихся на ЕГЭ и вступительных экзаменах (по темам, в порядке возрастания степени их сложности);
- задания для самостоятельного решения (с ответами);
- варианты заданий, которые предлагались на ЕГЭ (2005 – 2007) и вступительных экзаменах в ОГУ (тестирование);
- демонстрационный и тренировочные варианты для подготовки к ЕГЭ 2007-2009 годов;
- демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2010 года.

УДК 51 (07)
ББК 22.1 я (07)

ISBN

Содержание

Введение

Данное учебное пособие предназначено как для абитуриентов поступающих в высшие учебные заведения, которым предстоит сдавать экзамен по математике в форме ЕГЭ или в любой другой форме (письменный экзамен или тестирование), так и для преподавателей общеобразовательных школ, лицеев и гимназий, готовящих своих учащихся к ЕГЭ.

Следует отметить, что оно не заменяет и не дублирует существующие учебники и учебные пособия по математике, пособия для поступающих в вузы и подготовке к ЕГЭ (смотрите список использованных источников в конце данного пособия), а служит дополнением к ним.

При подготовке пособия нами учитывались:

- существующие программы по математике для общеобразовательных школ, лицеев и гимназий;
- программа вступительных экзаменов по математике для поступающих в высшие учебные заведения России;
- варианты заданий, предлагавшихся на ЕГЭ и вступительных экзаменах по математике в вузы России;
- кодификаторы требований и элементов содержания по математике для составления КИМ ЕГЭ 2009 и 2010 годов;
- демонстрационный и тренировочные варианты ЕГЭ 2009 года;
- демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2010 года;
- уровень знаний по математике, необходимый для усвоения вузовского курса математики.

Цель данного пособия:

1) *помочь* абитуриентам и их преподавателям рационально *организовать* работу по повторению и приведению в систему, закреплению и углублению теоретических и практических знаний, умений и навыков, необходимых при решении задач по математике на ЕГЭ и вступительных экзаменах;

2) предоставить возможность *проверить* себя при решении заданий ЕГЭ по математике и вступительных экзаменов в вузы.

Это позволит абитуриентам оценить свой уровень подготовленности по математике, правильно сориентироваться в выборе будущей специальности и подготовиться к последующему обучению в вузе (математика является одним из основных предметов на младших курсах практически всех специальностей технического, экономического и естественнонаучного профилей).

Для достижения этой цели школьный курс математики (согласно программе вступительных экзаменов и кодификатору) был условно разбит на *12 частей.*

1 Множества и функции.
2 Степень числа. Тождественные преобразования алгебраических выражений.
3 Теория многочленов. Рациональные уравнения и неравенства.
4 Текстовые задания (проценты, задачи на составление уравнений, арифметическая и геометрическая прогрессии).
5 Уравнения и неравенства, содержащие знак абсолютной величины.
6 Иррациональные уравнения и неравенства.
7 Тригонометрия.
8 Логарифм числа. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.
9 Производная, первообразная, определенный интеграл.
10 Планиметрия.
11 Стереометрия.
12 Векторная алгебра.

В соответствии с этим учебное пособие имеет следующую структуру. Основной материал разбит *12 глав,* каждая из которых содержит:

- методические рекомендации по организации повторения тем (ключевые понятия, теоремы, формулы) и необходимые ссылки на учебную литературу;
- примеры решений наиболее типичных заданий, предлагавшихся на ЕГЭ и вступительных экзаменах в вузы (в порядке возрастания степени их сложности);
- задания для самостоятельной работы.

Подобная группировка материала обусловлена тем, чтобы при подготовке к вступительным экзаменам и ЕГЭ соблюдались *непрерывность* и *логическая последовательность* изучения (повторения) самой математики и *были отражены все основные типы заданий, предлагаемых на вступительных экзаменах* в вузы и ЕГЭ.

Кроме того, были бы учтены и те темы школьного курса, которые не всегда, может быть, проверяются на ЕГЭ и вступительных экзаменах, но навыки и умения, по которым необходимы для последующего изучения курса математики в университете.

Методы решения систем уравнений и неравенств отдельно не выделяются, так как рассматриваются при решении тех заданий из 4 - 11 глав, которые сводятся к решению соответствующих систем.

В конце пособия имеется список литературы, рекомендуемой для подготовки к вступительным экзаменам по математике. Он содержит: школьные учебники и учебные пособия, пособия и справочники для поступающих в вузы, пособия для подготовки к ЕГЭ и др. Следует отметить, что данный список не претендует на полноту, и Вы можете использовать любые другие, аналогичные по содержанию, пособия и учебники. С кодификатором можно ознакомиться на сайтах www.ege.edu.ru и www.fipi.ru.

В приложении приводятся примеры вариантов, предлагавшихся на ЕГЭ и вступительных экзаменах в ОГУ (тестирование) в предыдущие годы, демонстрационные и тренировочные варианты для подготовки к ЕГЭ в 2007 – 2009 годах и демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2010 года.

Абитуриентам, поступающим в высшие учебные заведения, *рекомендуется:* работать с пособием, соблюдая предложенную автором последовательность изучения (повторения) материала; самостоятельно повторять теорию, используя указанную литературу; решать задания, предлагаемые для самостоятельной работы; проверять свои силы, решая варианты вступительных экзаменов и варианты ЕГЭ предыдущих лет.

Отметим, что приступать к решениям заданий ЕГЭ и вступительных экзаменов по математике в вузы, следует после полного повторения всего школьного курса математики, так как данные задания, как правило, являются комплексными и служат проверкой усвоения школьного курса сразу по нескольким разделам.

Методика подготовки к вступительным экзаменам и ЕГЭ по математике по системе, предлагаемой автором пособия, проверена на практике при работе со слушателя подготовительных курсов по математике в Центре довузовской подготовки «Абитуриент» Оренбургского государственного университета и с учащимися Государственного учреждения общеобразовательной школы-интерната «Губернаторский многопрофильный лицей-интернат для одаренных детей Оренбуржья».

Данное учебное пособие будет полезно молодым, начинающим преподавателям математики, впервые приступающим к подготовке своих учеников к ЕГЭ, так как содержит обзор основных типов заданий, предлагавшихся на экзамене в предыдущие годы, и методические указания по работе с литературой, указанной в конце пособия.

1 Множества и функции

Тему *" Множества"* лучше всего повторить, используя пособия, отмеченные в списке использованных источников под номерами [30], [31], [116], [152], обратив особое внимание на следующие моменты: обозначения, принятые в теории множеств, способы задания множеств, особенно числовых. Уяснить, что $N = \{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$ - множество натуральных чисел, $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...\}$ - множество целых чисел, $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| \ m \in Z,\ n \in N \right\}$ - множество рациональных чисел; R - множество действительных чисел. Необходимо научиться выполнять операции над множествами, т.е. находить объединение, пересечение и разность множеств, а также умело использовать диаграммы Эйлера - Венна и геометрическое изображение подмножеств действительных чисел с помощью точек числовой оси. Следует помнить, что $N \subset Z \subset Q \subset R$.

По теме *"Функции"* необходимо в первую очередь повторить (смотрите, например, [5], [88], [117]): основные понятия (определение функции, область задания (область определения), множество значений), вид графиков основных элементарных функций и принятые обозначения, построение графиков функций методом сдвига и деформации. Кроме того, нужно знать свойства четных, нечетных и периодических функций, уметь определять промежутки возрастания и убывания функций, находить точки локального экстремума, наибольшие и наименьшие значения функций.

В данной главе, мы приводим примеры только тех заданий, для решения которых не обязательно применение производных, примеры заданий, при решении которых целесообразно применение производных, рассматриваются в *главе 9.*

Пример 1.1 Найдите наименьшее целое число, принадлежащее объединению области значения и области определения функции $y = 2arccos\, x$.

Решение.

$D(arccos\, x) = [\text{-}1;1]$; $E(arccos\, x) = [0; \pi]$.

Следовательно, $D(2arccos\, x) = [\text{-}1;1]$; $E(2arccos\, x) = [0; 2\pi]$.

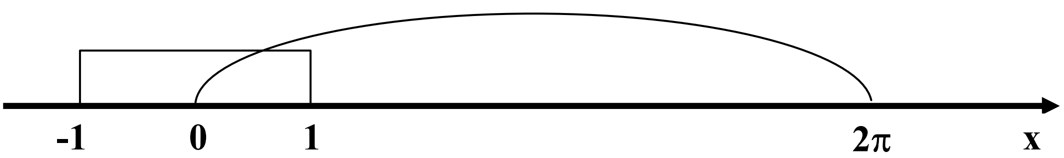


Рисунок 1

Объединение этих множеств (см. рисунок 1): [-1; 1] ∪ [0; 2π] = [-1; 2π].

Следовательно, наименьшее целое число: -1.

Ответ: -1.

Пример 1.2 Найдите пересечение областей определения функций

$$f(x)=\sqrt{9-x^2} \text{ и } g(x)=lg^{-1}x.$$

Решение.

$D(f)=\{x\,|\,9-x^2\ge 0\}=[-3;3]$; $\quad D(g)=\{x\,|\,x>0 \text{ и } x\ne 1\}=(0;1)\cup(1;+\infty)$.

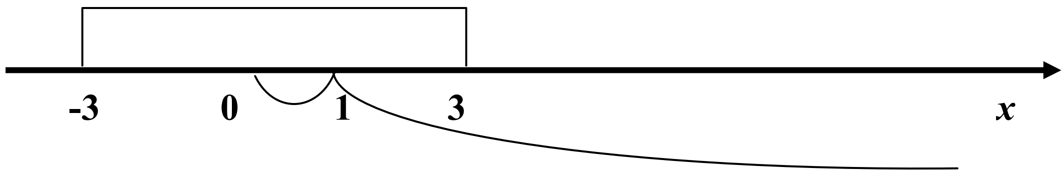


Рисунок 2

Пересечение данных множеств (см. рисунок 2):

$[-3;3]\cap((0;1)\cup(1;+\infty))=(0;1)\cup(1;3]$.

Ответ: $(0;1)\cup(1;3]$.

Пример 1.3 Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{\sqrt{100-x}}{\sqrt[4]{x}-2}$.

Решение.

Область определения данной функции - множество значений x, удовлетворяющих условиям: $\begin{cases} x\le 100, \\ x\ge 0, \\ x\ne 16. \end{cases}$ Т.е. $D(f)=[0;16)\cup(16;100]$.

Ответ: $[0;16)\cup(16;100]$.

Пример 1.4 Найдите число точек разрыва функции $y=\left(\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\right)^{-1}$, принадлежащих отрезку $[0;2\pi]$.

Решение.

Область определения данной функции – множество значений x, удовлетворяющих условиям: $\begin{cases} \sin x-\cos x\ne 0, \\ \sin x+\cos x\ne 0. \end{cases}$ Следовательно, $\sin x\ne\pm\cos x$ и точки разрыва функции находятся среди точек: $x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{2}n, n\in Z$. Указанному отрезку принадлежат 4 точки данного множества: $\dfrac{\pi}{4};\dfrac{3\pi}{4};\dfrac{5\pi}{4};\dfrac{7\pi}{4}$.

Ответ: 4.

Пример 1.5 Найдите наибольшее целое значение функции

$$y=25\cdot 3^{\cos 4x\cdot\cos 3x+\sin 4x\cdot\sin 3x-2}.$$

Решение.

$D(y) = R$. Заметим, что $\cos 4x \cdot \cos 3x + \sin 4x \cdot \sin 3x = \cos(4x - 3x) = \cos x$.
Следовательно, $y = 25 \cdot 3^{\cos 4x \cdot \cos 3x + \sin 4x \cdot \sin 3x - 2} = 25 \cdot 3^{\cos x - 2}$.
$-1 \le \cos x \le 1,\ \forall\, x \in R$. Следовательно, $-3 \le \cos\, x - 2 \le -1,\ \forall\, x \in R$.
Так как функция $y = 3^x$ является строго возрастающей на R, то

$3^{-3} \le 3^{\cos\, x - 2} \le 3^{-1}, \forall\, x \in R$ и $\dfrac{25}{27} \le 25 \cdot 3^{\cos x - 2} \le \dfrac{25}{3} = 8\dfrac{1}{3},\ \forall\, x \in R$.

Таким образом, наибольшее целое значение функции равно 8.
Ответ: 8.

Пример 1.6 Укажите количество промежутков возрастания функции

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x},$$ заданной на отрезке [-π; π].

Решение.

Нетрудно заметить, что $f(x) = \dfrac{\sqrt{1 - \cos^2 x}}{\cos x} = \dfrac{\sqrt{\sin^2 x}}{\cos x} = \dfrac{|\sin x|}{\cos x}$.

Следовательно, $f(x) = \begin{cases} tgx, & \sin x \ge 0, \\ -tgx, & \sin x < 0. \end{cases}$ Таким образом, на указанном промежутке график функции имеет вид (см. рисунок 3):

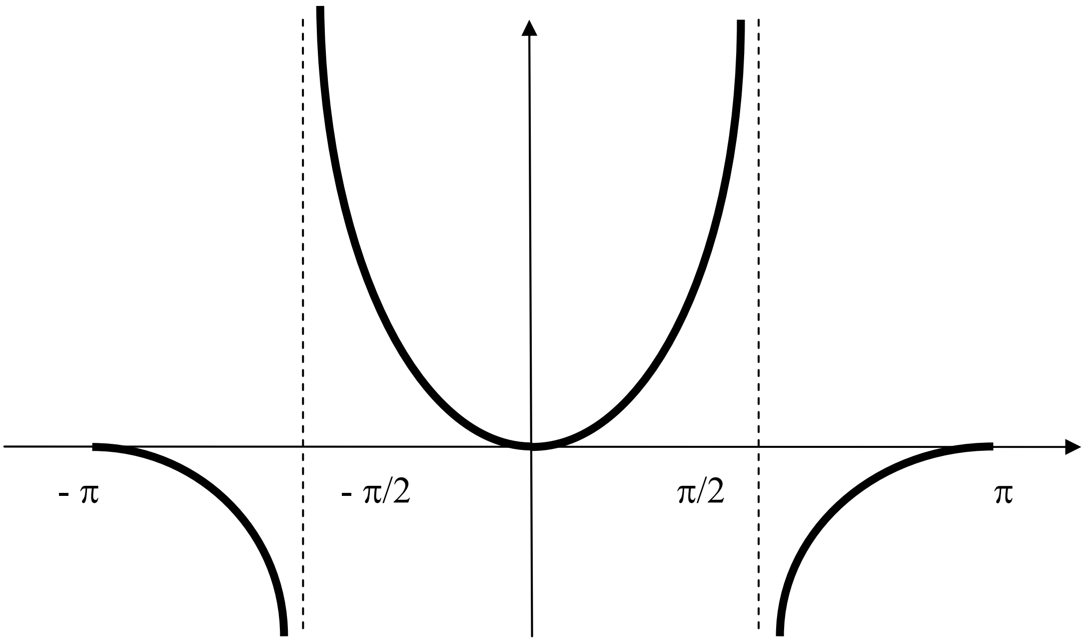


Рисунок 3

Следовательно, функция возрастает на промежутках [0, π/2) и (π/2, π].
Ответ: 2.

Пример 1.7 Найдите множество значений функции $y=\dfrac{3x}{|x|}+2^{|x|}$, если $x \geq -2$.

Решение.

$$D(y):\ x \neq 0. \qquad y=\frac{3x}{|x|}+2^{|x|}=\begin{cases}3+2^{x}, & x>0;\\ -3+2^{-x}, & x<0\end{cases}=\begin{cases}3+2^{x}, & x>0;\\ -3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}, & x<0.\end{cases}$$

Функция $y=3+2^{x}$ является строго возрастающей на R, поэтому $4<3+2^{x}<+\infty,\ x\in(0;+\infty)$ (см. рисунок 4). Функция $y=-3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$ является строго убывающей на R, поэтому $-2<-3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}\leq 1, x\in[-2,0)$ (см. рисунок 5).

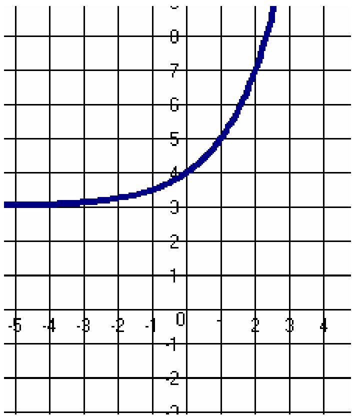


Рисунок 4 - График функции $y=3+2^{x}$.

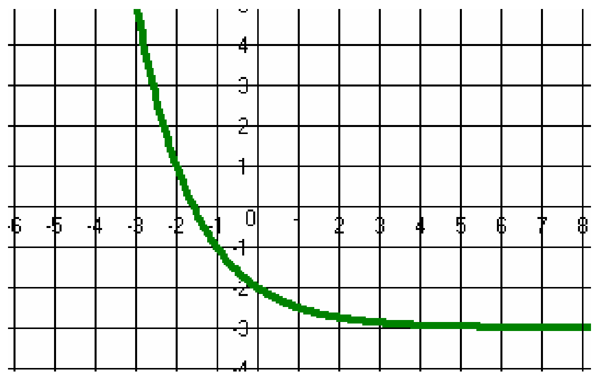


Рисунок 5 - График функции $y=-3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{x}$.

Следовательно, область значений функции на множестве $x\geq -2$ равна (-2; 1]$\cup$(4; + ∞).

Ответ: (-2;1] $\cup$ (4; + ∞).

Пример 1.8 При каком наименьшем положительном значении a функция $y=cos\left(24x+\dfrac{a\pi}{25}\right)$ имеет максимум в точке $x_0=\pi$?

Решение.

Так как $-1\leq cos\,(kx+b)\leq 1,\ \ \forall\, x\in R,\ \forall\, b,\, k\in R$, то в точке максимума значение функции равно 1.

$$y(p)=1 \Leftrightarrow cos\left(24p+\frac{ap}{25}\right)=1 \Leftrightarrow cos\left(\frac{ap}{25}\right)=1 \Leftrightarrow \frac{ap}{25}=2pn,\ n\in Z \Leftrightarrow a=50n,\ n\in Z.$$

Следовательно, наименьшее положительное значение a равно 50.

Ответ: 50.

Пример 1.9 Найдите сумму натуральных значений функции $y = log_3\left(72 + 6 \cdot 2^{|x|} - 4^{|x|}\right)$.

Решение.

$$72 + 6 \cdot 2^{|x|} - 4^{|x|} = -\left(4^{|x|} - 6 \cdot 2^{|x|} - 72\right) = -\left(4^{|x|} - 6 \cdot 2^{|x|} + 9 - 81\right) = -\left(2^{|x|} - 3\right)^2 + 81$$

Следовательно, $log_3\left(72 + 6 \cdot 2^{|x|} - 4^{|x|}\right) = log_3\left(81 - \left(2^{|x|} - 3\right)^2\right)$.

$D(y)$: $81 - \left(2^{|x|} - 3\right)^2 > 0 \Leftrightarrow \left(2^{|x|} - 3\right)^2 < 81 \Leftrightarrow -9 < 2^{|x|} - 3 < 9 \Leftrightarrow -6 < 2^{|x|} < 12$.

Так как $2^{|x|} \geq 1,\ \forall x \in R$, то на ОДЗ $1 \leq 2^{|x|} < 12 \Rightarrow -2 \leq 2^{|x|} - 3 < 9 \Rightarrow$ $0 \leq \left(2^{|x|} - 3\right)^2 < 81 \Rightarrow -81 < -\left(2^{|x|} - 3\right)^2 \leq 0 \Rightarrow 0 < 81 - \left(2^{|x|} - 3\right)^2 \leq 81 \Rightarrow$

$-\infty < log_3\left(81 - \left(2^{|x|} - 3\right)^2\right) \leq log_3 81 = 4$, то есть $E(y) = (-\infty; 4]$. Таким образом, сумма натуральных значений функции будет равна: $1 + 2 + 3 + 4 = 10$.

Ответ: 10.

Пример 1.10 Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 11 и $f(7) = 5$. Найдите значение выражения $5 - 2f(-15) + 9f(51)$.

Решение.

Так функция $y = f(x)$ - периодическая, с периодом $T = 11$, то

$f(-15) = f(-4) = f(7)$; $f(51) = f(40) = f(29) = f(18) = f(7)$ и, следовательно, $5 - 2f(-15) + 9f(51) = 5 - 2f(7) + 9f(7) = 5 + 7f(7) = 5 + 7 \cdot 5 = 40$.

Ответ: 40.

Пример 1.11 Найдите значение функции $y = \dfrac{f(x)}{g(-x)} - \dfrac{3g(x)}{f(-x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y = f(x)$ - четная функция, функция $y = g(x)$ - нечетная, $f(x_0) = 3,\ g(x_0) = -1$.

Решение.

Функция $y = f(x)$ - четная функция, поэтому для всех x из области определения функции, выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$, функция $y = g(x)$ - нечетная функция, поэтому для всех x из области определения функции выполняется равенство: $g(-x) = -g(x)$. Следовательно,

$$y(x_0) = \frac{f(x_0)}{g(-x_0)} - \frac{3g(x_0)}{f(-x_0)} = \frac{f(x_0)}{-g(x_0)} - \frac{3g(x_0)}{f(x_0)} = \frac{3}{1} - \frac{3 \cdot (-1)}{3} = 3 + 1 = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 1.12 Нечетная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = x(2x+1)(x-2)(x-3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

Решение.

Функция $y = g(x)$ обращается в нуль при неотрицательных значениях x только в точках: $x = 0;$ $x = 2;$ $x = 3$.

Следовательно, $f(0) = 0;$ $f(2) = 0;$ $f(3) = 0$. Так как для нечетной функции $y = f(x)$ на всей области определения справедливо равенство: $f(-x) = -f(x)$, то $f(-2) = -f(2) = 0;$ $f(-3) = -f(3) = 0$.

Таким образом, уравнение $f(x) = 0$ имеет 5 корней.

Ответ: 5.

Пример 1.13 Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической с периодом, равным 6. На отрезке [0; 3] функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 4x + 1$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке [-3; 5].

Решение.

$x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{3}, \\ x = 2 + \sqrt{3}. \end{array}\right.$ $2 + \sqrt{3} \notin$ [0; 3]. Следовательно, на отрезке [0; 3] функция $y = h(x)$ имеет один нуль: $x = 2 - \sqrt{3}$. Так как функция $y = h(x)$ - четная, то на отрезке [-3; 0] у неё будет тоже только один нуль: $x = -2 + \sqrt{3}$. Период функции $y = h(x)$ равен 6, следовательно, нули функции: $x = 2 - \sqrt{3} + 6 \cdot k,\ k \in Z$ и $x = -2 + \sqrt{3} + 6 \cdot k,\ k \in Z$. (Полученным выше значениям соответствует $k = 0$).

Так как $2 - \sqrt{3} + 6 > 6,$ $2 - \sqrt{3} - 6 < -5,$ $-2 + \sqrt{3} + 6 > 5,$ $-2 + \sqrt{3} - 6 < -6$, то на отрезке [-3; 5] функция $y = h(x)$ имеет только 2 нуля.

Данную задачу можно решить и графически (см. [55], стр. 108 – 109).

Ответ: 2.

Пример 1.14 Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых наименьший положительный период функции $y = sin((5a - 13)x)$ равен $\dfrac{\pi}{2}$.

Решение.

Наименьший положительный период функции $y = sin\, x$ равен 2π, наименьший положительный период функции $y = sin\, kx,\ k \neq 0$ равен $\dfrac{2\pi}{|k|}$.

$\dfrac{2\pi}{|k|} = \dfrac{\pi}{2} \Leftrightarrow |k| = 4$. Следовательно, наименьший положительный период функции $y = sin((5a-13)x)$ равен $\dfrac{\pi}{2}$, если $\left[\begin{array}{l} 5a-13=4, \\ 5a-13=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=\dfrac{17}{5}, \\ a=\dfrac{9}{5}. \end{array}\right.$

Произведение этих чисел равно $\dfrac{153}{25} = 6{,}12.$

Ответ: 6,12.

Пример 1.15 На одном из рисунков 1) - 4) (см. рисунок 6) изображен график функции, являющей возрастающей на промежутке [-2; 2]. Укажите этот рисунок.

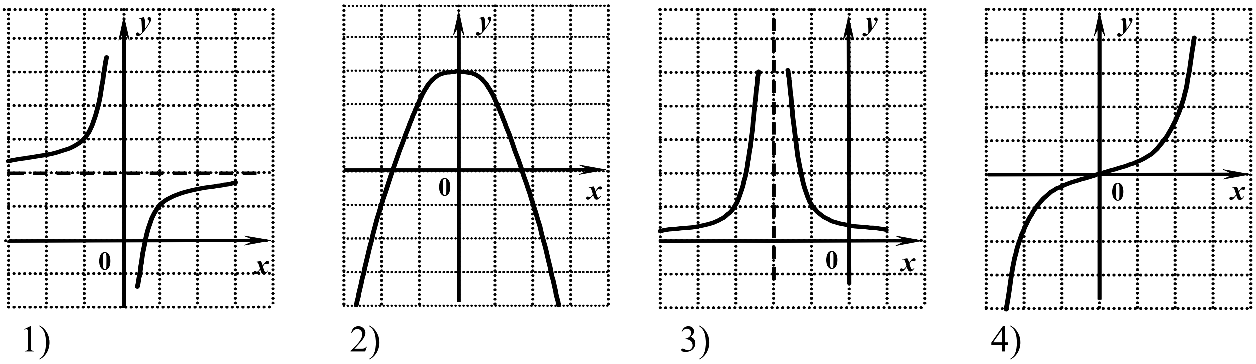


Рисунок 6

Ответ: 4.

Пример 1.16 На рисунке 7 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке [- 3; 6]. Укажите множество всех значений x, для которых выполняются условия: $f(x) < 0$ и $f(x) < g(x)$.

1) [-3; -2) ∪ (5; 6]; 2) [-2; 4];

3) (-3; -2) ∪ (4; 6); 4) (-2; 4).

Ответ: 1.

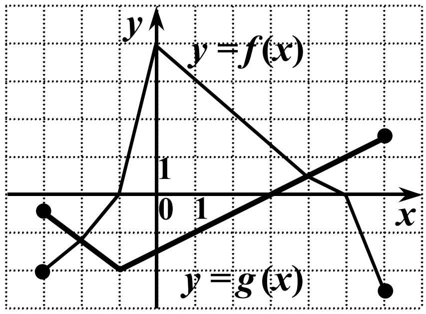


Рисунок 7

Для отработки навыков решения заданий ЕГЭ уровня А1- А10, В1-В8 по теме «Функции и их свойства» рекомендуются тесты, предлагаемые в [140], [141].

Особое внимание следует уделить изучению свойств множеств *N, Z, Q* и *R* (смотрите, например, [5], [50], [64], [85], [88], [138], [152]): необходимо иметь представление о простых и составных числах, уметь представлять числа в каноническом виде, знать признаки делимости, уметь находить наименьшее общее кратное и наибольший общий делитель. Знать правила перевода правильной рациональной дроби в бесконечную периодическую дробь и все правила перевода бесконечной периодической десятичной дроби в обыкновенную. Не забудьте повторить понятие абсолютной величины действительного числа и её свойства.

Пример 1.17 Какому наименьшему множеству принадлежит частное от деления наименьшего общего кратного чисел 84 и 210 на их наибольший общий делитель? А) Q; В) N; С) Z; Д) $\varnothing$; Е) ответ не указан.

Решение.

Представим каждое из чисел в канонической форме: $84=2^2\cdot 3\cdot 7$, $210=2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Следовательно,

$$НОК(84;210)=2^2\cdot 3\cdot 5\cdot 7=420;\quad НОД(84;210)=2\cdot 3\cdot 7=42.$$

Таким образом, $\dfrac{НОК(84;210)}{НОД(84;210)}=10$. Так как $N\subset Z\subset Q\subset R$, то наименьшее множество, которому принадлежит данное число, это множество N.

Ответ: В.

Пример 1.18 Сумма двух чисел равна 91, их наименьшее общее кратное равно 130, а наибольший общий делитель равен 13. Найдите отношение меньшего из них к большему.

Решение.

Обозначим данные числа: x и y. Так как $НОД\,(x;y)\cdot НОК\,(x;y)=x\cdot y$, получаем систему: $\begin{cases} x+y=91, \\ x\cdot y=130\cdot 13. \end{cases}$ Из которой следует: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=26, \\ y=65, \end{cases} \\ \begin{cases} y=26, \\ x=65. \end{cases} \end{array}\right.$ Отношение меньшего к большему (в каждом из получившихся случаев) будет равно: $\dfrac{26}{65}=\dfrac{2}{5}=0{,}4$.

Ответ: 0,4.

Наибольшую трудность для абитуриентов представляют задания на делимость, особенно с остатком. Методы решения таких задач достаточно подробно изложены в [34], [50], [64].

Пример 1.19 Известно, что натуральное число a при делении на 5 дает остаток 2, а при делении на 3 остаток равен 1. Найдите остаток от деления числа a на 15.

Решение.

Из условия следует, что $\begin{cases} a=5m+2,\ m\in N; \\ a=3n+1,\ n\in N. \end{cases}$ Для того чтобы найти остаток от деления числа a на 15, его нужно представить в виде: $a=15k+r$.

Числа m, если их анализировать относительно делимости на 3, могут быть представлены одним из следующих способов:

$m = 3p,\ \ m = 3p + 1,\ \ m = 3p + 2;\quad p \in N$.

Рассмотрим каждый из этих случаев.

1) $m = 3p$, тогда $a = 5 \cdot 3p + 2 = 15p + 2 = 3 \cdot 5p + 2$. Этот случай нам не подходит, так как остаток при делении на 3 равен 2.

2) $m = 3p + 1$, тогда $a = 5 \cdot (3p + 1) + 2 = 15p + 7 = 3 \cdot (5p + 2) + 1$. Данный случай подходит, остаток при делении на 15 равен 7.

3) $m = 3p + 2$, тогда $a = 5 \cdot (3p + 2) + 2 = 15p + 12 = 3 \cdot (5p + 4)$. В этой ситуации число делится на 3 без остатка.

Ответ: 7.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите пересечение областей определения функций $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ и $g(x) = arcsin\dfrac{1}{x}$.

2. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 13 \cdot 2^{sin\,x \cdot sin\,2x + cos\,x \cdot cos\,2x - 3}$.

3. Найдите множество значений функции $y = log_{\frac{1}{7}}\left(\dfrac{10 + log_7(7 + |x|)}{77}\right)$.

4. При каком наименьшем положительном значении a функция $y = sin\left(25x + \dfrac{a\pi}{100}\right)$ имеет минимум в точке $x_0 = \pi$?

5. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 9 и $f(-3) = 4$. Найдите значение выражения $12 + 8f(15) - 5f(-39)$.

6. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом, равным 10. Известно, что $f(1) = 1,\ f(5) = 3$ и на отрезке $[1; 5]$ функция является линейной. Найдите значение функции $f(24)$.

7. Найдите значение функции $y = \dfrac{g(x) + f(-x) + 2g(-x)}{5f(x)}$ в точке x_0, если известно, что функция $y = f(x)$- четная функция, функция $y = g(x)$ - нечетная, $f(x_0) = 3,\quad g(x_0) = -1$.

8. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для всякого неотрицательного значения переменной x значение этой функции совпадает со значением функции $g(x) = (5x + 1)(4x + 3)(x - 3)$. Сколько корней имеет уравнение $f(x) = 0$?

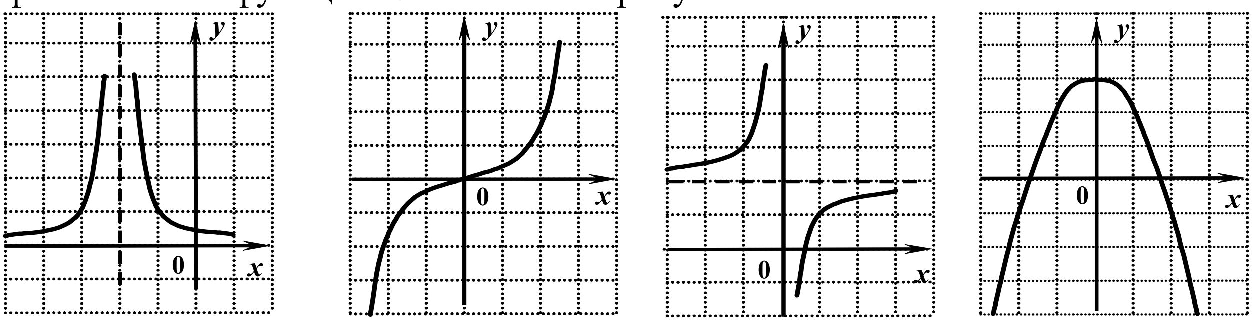
9. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической с периодом, равным 6. На отрезке [0; 3] функция $y = f(x)$ задана равенством $f(x) = x^2 - 2x - 1$. Определите количество нулей функции $y = f(x)$ на отрезке [-3; 5].

10. Найдите значение параметра a (или произведение таких значений, если их несколько), при которых наименьший положительный период функции $y = sin((a^2 + 6a - 17)x)$ равен $\frac{\pi}{4}$.

11. Найдите число точек разрыва функции $y = tg\left(\frac{2\pi}{1 + x^2}\right)$.

12. Найдите сумму всех целых чисел, входящих в область определения функции $y = lg\left(\frac{4}{|x-5|} - 1\right)$.

13. На одном из следующих рисунков 1) - 4) (см. рисунок 8) изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.



а. 1) 2) 3) 4)

Рисунок 8

14. На рисунке 9 изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке [-3; 6]. Укажите множество всех значений x, для которых выполняется неравенство $f(x) > g(x)$.

1) [-3; -2] ∪ [4; 6]; 2) [-2; 4];

3) (-3; -2) ∪ (4; 6); 4) (-2; 4).

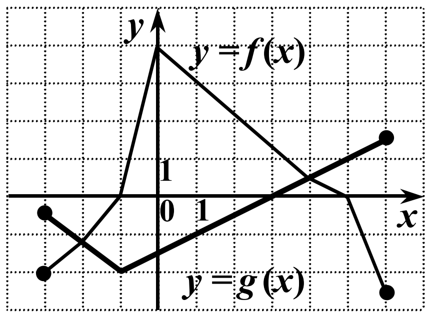


Рисунок 9

15. Частное от деления двух натуральных чисел равно 11/6 , а произведение их наибольшего делителя на их наименьшее общее кратное равно 1056. Найдите эти числа.

16. Найдите последнюю цифру числа 3^{1993}.

17. Известно, что число a при делении на 5 дает остаток 1, а при делении на 3 остаток равен 2. Найдите остаток от деления числа a на 15.

Ответы: **1)** {-1;1}; **2)** 3; **3)** (- ∞; 1]; **4)** 50; **5)** 24; **6)** 2,5; **7)** 4; **8)** 2; **9)** 2; **10)** 225; **11)** 4; **12)** 4**; 13)** 2; **14)** 4; **15)** 44 и 24; **16)** 3; **17)** 11.

2 Степень числа. Тождественные преобразования алгебраических выражений

Тему *"Степень числа. Тождественные преобразования алгебраических выражений"* можно повторять по любым школьным учебникам или по [5], [64], [85], [88], [138], [152]. Нужно хорошо усвоить понятие степени числа с натуральным, целым и рациональным показателями, иметь представление о степени с действительным показателем. Требуется знать свойства степени и формулы сокращенного умножения, уметь применять их при проведении тождественных преобразований. Необходимо научиться следить за областью допустимых значений при проведении тождественных преобразований.

Пример 2.1 Найдите значение выражения $\sqrt[3]{81}-\sqrt{49}\cdot\sqrt[3]{24}$.

Решение.

$\sqrt[3]{81}-\sqrt{49}\cdot\sqrt[3]{24}=\sqrt[3]{3\cdot 3^3}-\sqrt{7^2}\cdot\sqrt[3]{3\cdot 2^3}=3\sqrt[3]{3}-7\cdot 2\sqrt[3]{3}=-11\sqrt[3]{3}$.

Ответ: $-11\sqrt[3]{3}$.

Пример 2.2 Вычислите: $25^{-1\frac{1}{2}}+(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{2}}\cdot 625\cdot 125^{-\frac{5}{2}}-(2^0)^5\cdot 3$.

Решение.

$$25^{-1\frac{1}{2}}+(0{,}001)^{-\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{2}}\cdot 625\cdot 125^{-\frac{5}{2}}-(2^0)^5\cdot 3=$$

$$=(5^2)^{-\frac{3}{2}}+(10^{-3})^{-\frac{1}{3}}-5^{\frac{1}{2}}\cdot 5^4\cdot(5^3)^{-\frac{5}{2}}-1^5\cdot 3=5^{-3}+10-5^{-3}-3=7.$$

Ответ: 7.

Пример 2.3 Вычислите: $\sqrt{\left(15\frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}$.

Решение.

$$\sqrt{\left(15\frac{5}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{\left(\frac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}-\left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{2}-\frac{3}{2}\right)\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\right)}=2$$

Ответ: 2.

Пример 2.4 Упростите выражение: $\dfrac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-2/9}}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[6]{a^5\cdot\sqrt[3]{a^{-1}}}}{a^{-2/9}}=\frac{a^{\frac{5}{6}}\cdot a^{-\frac{1}{18}}}{a^{-\frac{2}{9}}}=\frac{a^{\frac{14}{18}}}{a^{-\frac{2}{9}}}=a^{\frac{18}{18}}=a.$$

Ответ: a.

Пример 2.5 Вычислите: $\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}$.

Решение.

$\sqrt[3]{7+\sqrt{22}}\cdot\sqrt[3]{7-\sqrt{22}}=\sqrt[3]{(7+\sqrt{22})\cdot(7-\sqrt{22})}=\sqrt[3]{49-22}=\sqrt[3]{27}=3$.

Ответ: 3.

Пример 2.6 Вычислите: $\sqrt[3]{6\sqrt{7}-12}\cdot\sqrt[3]{6+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{32}$.

Решение.

$\sqrt[3]{6\sqrt{7}-12}\cdot\sqrt[3]{6+3\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{6\left(\sqrt{7}-2\right)}\cdot\sqrt[3]{3\left(2+\sqrt{7}\right)}\cdot\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{18\cdot 32\cdot\left(7-4\right)}=$

$=\sqrt[3]{27\cdot 64}=3\cdot 4=12.$

Ответ: 12.

Пример 2.7 Упростите: $\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{11+4\sqrt{7}}$.

Решение.

$\sqrt{11-4\sqrt{7}}-\sqrt{11+4\sqrt{7}}=\sqrt{4-2\cdot 2\cdot\sqrt{7}+7}-\sqrt{4+2\cdot 2\cdot\sqrt{7}+7}=$

$=\sqrt{(2-\sqrt{7})^2}-\sqrt{(2+\sqrt{7})^2}=|2-\sqrt{7}|-|2+\sqrt{7}|=(\sqrt{7}-2)-(2+\sqrt{7})=-4$

Ответ: - 4.

Пример 2.8 Вычислите: $\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}$.

Решение.

$\sqrt{4+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[4]{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{2(2+\sqrt{2})}\cdot\sqrt[4]{(2-\sqrt{2})^2}=$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{(2+\sqrt{2})^2}\cdot\sqrt[4]{(2-\sqrt{2})^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{(4-2)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2.$

Ответ: 2.

Пример 2.9 Найдите значение выражения $a+b$, если $\sqrt{34-24\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}$.

Решение.

$\sqrt{34-24\sqrt{2}}=a+b\sqrt{2}\;\Leftrightarrow\;\sqrt{16-2\cdot 4\cdot 3\sqrt{2}+18}=a+b\sqrt{2}\;\Leftrightarrow$

$\sqrt{\left(4-3\sqrt{2}\right)^2}=a+b\sqrt{2}\;\Leftrightarrow\;\left|4-3\sqrt{2}\right|=a+b\sqrt{2}\;\Leftrightarrow\;3\sqrt{2}-4=a+b\sqrt{2}\;\Leftrightarrow$

$\begin{cases}a=-4,\\ b=3.\end{cases}$ Следовательно, $a+b=-1$.

Ответ: - 1.

Пример 2.10 Упростите:

$$\left(\frac{a^2+ab}{a^3+a^2b+ab^2+b^3}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{a^3-a^2b+ab^2-b^3}\right).$$

Решение.

Заметим, что

$a^3+a^2b+ab^2+b^3=a^2\cdot(a+b)+b^2\cdot(a+b)=(a+b)(a^2+b^2)$,

$a^3-a^2b+ab^2-b^3=a^2\cdot(a-b)+b^2\cdot(a-b)=(a-b)(a^2+b^2)$.

Следовательно, исходное выражение может быть представлено в виде:

$$\left(\frac{a(a+b)}{(a+b)\cdot(a^2+b^2)}+\frac{b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{1}{a-b}-\frac{2ab}{(a-b)\cdot(a^2+b^2)}\right)=$$

$$=\left(\frac{a+b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{a^2+b^2-2ab}{(a^2+b^2)\cdot(a-b)}\right)=\left(\frac{a+b}{a^2+b^2}\right):\left(\frac{(a-b)^2}{(a-b)\cdot(a^2+b^2)}\right)=$$

$$=\frac{(a+b)}{(a^2+b^2)}\cdot\frac{(a^2+b^2)}{(a-b)}=\frac{a+b}{a-b}.$$

Данные тождественные преобразования справедливы на множестве $M=\{(a,b)\,|\,a\neq\pm b\}$.

Ответ: $\dfrac{a+в}{a-в}$.

Пример 2.11 Упростите: $\dfrac{(\sqrt{m}-1)\cdot(1+\sqrt{m})}{\sqrt{(m-1)\cdot\sqrt[3]{m-1}}}$.

Решение.

$$\frac{(\sqrt{m}-1)\cdot(1+\sqrt{m})}{\sqrt{(m-1)\cdot\sqrt[3]{m-1}}}=\frac{m-1}{\sqrt{(m-1)^{1+\frac{1}{3}}}}=\frac{m-1}{\sqrt{(m-1)^{4/3}}}=\frac{m-1}{(m-1)^{2/3}}=(m-1)^{1/3}.$$

Данные тождественные преобразования справедливы на множестве $M=(1;+\infty)$.

Ответ: $\sqrt[3]{m-1}$.

Пример 2.12 Упростите выражение $\dfrac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2+2\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}}$.

Решение.

$$\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)^2+2\sqrt[3]{xy}}{\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}}=\frac{(\sqrt[3]{x})^2-2\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}+(\sqrt[3]{y})^2+2\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}}{(\sqrt[3]{x})^4-(\sqrt[3]{y})^4}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{y})^2}{((\sqrt[3]{x})^2+(\sqrt[3]{y})^2)\cdot((\sqrt[3]{x})^2-(\sqrt[3]{y})^2)}=\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}.$$

Данные тождественные преобразования справедливы на множестве $M=\{(x,y)\,|\,x\neq\pm y\}$.

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}}$.

Пример 2.13 Упростите: $\left(\dfrac{1}{\sqrt[6]{a}+1}-\dfrac{\sqrt[6]{a}-1}{\sqrt[3]{a}}\right):\dfrac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[3]{a}+2\sqrt[6]{a}+1}$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{\sqrt[6]{a}+1}-\frac{\sqrt[6]{a}-1}{\sqrt[3]{a}}\right):\frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[3]{a}+2\sqrt[6]{a}+1}=\frac{\sqrt[3]{a}-(\sqrt[6]{a}-1)(\sqrt[6]{a}+1)}{(\sqrt[6]{a}+1)\cdot\sqrt[3]{a}}\cdot\frac{(\sqrt[6]{a}+1)^2}{\sqrt[3]{a^2}}=$$

$$=\frac{(\sqrt[3]{a}-(\sqrt[3]{a}-1))\cdot(\sqrt[6]{a}+1)}{a}=\frac{\sqrt[6]{a}+1}{a}.$$

Данные тождественные преобразования справедливы при $a>0$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt[6]{a}+1}{a}$.

Пример 2.14 Упростите: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\dfrac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}$.

Решение.

Очевидно, что приведенные ниже тождественные преобразования будут справедливы на множестве $M=\{a\,|\,a>0 \text{ и } a\neq 1\}$.

$$\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}-1}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{\sqrt[4]{a^3}+1}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}=$$

$$=\left(\frac{(\sqrt[4]{a}-1)\cdot\left(\sqrt[4]{a^2}+\sqrt[4]{a}+1\right)}{\sqrt[4]{a}-1}+\sqrt[4]{a}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{(\sqrt[4]{a}+1)\cdot\left(\sqrt[4]{a^2}-\sqrt[4]{a}+1\right)}{\sqrt[4]{a}+1}-\sqrt{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}=$$

$$=\sqrt{\sqrt[4]{a^2}+2\sqrt[4]{a}+1}\cdot\left(1-\sqrt[4]{a}\right)\cdot\left(a-\sqrt{a^3}\right)^{-1}=\frac{\sqrt{\left(1+\sqrt[4]{a}\right)^2}\cdot\left(1-\sqrt[4]{a}\right)}{a-\sqrt{a^3}}=\frac{|1+\sqrt[4]{a}|\left(1-\sqrt[4]{a}\right)}{a\left(1-\sqrt{a}\right)}=$$

$$=\frac{\left(1+\sqrt[4]{a}\right)\left(1-\sqrt[4]{a}\right)}{a(1-\sqrt{a})}=\frac{1-\sqrt{a}}{a(1-\sqrt{a})}=\frac{1}{a}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{a}$.

Пример 2.15 Найдите значение выражения

$$\sqrt[6]{(x^2-4x+4)^3}+|x+2{,}5|, \quad \text{если} \quad -1{,}3\le x\le 1{,}7 .$$

Решение.

$$\sqrt[6]{(x^2-4x+4)^3}+|x+2{,}5|=\sqrt[6]{((x-2)^2)^3}+|x+2{,}5|=\sqrt[6]{(x-2)^6}+|x+2{,}5|=$$
$$=|x-2|+|x+2{,}5|.$$

Так как $-1{,}3\le x\le 1{,}7$, то $x-2<0,\ x+2{,}5>0$. Следовательно,
$|x-2|+|x+2{,}5|=2-x+x+2{,}5=4{,}5$.

Ответ: 4,5.

Пример 2.16 Найдите значение выражения

$$\sqrt{x+4-2\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+12-6\sqrt{x+3}} \qquad \text{при } x=4{,}536.$$

Решение.

$$\sqrt{x+4-2\sqrt{x+3}}+\sqrt{x+12-6\sqrt{x+3}}=\sqrt{(\sqrt{x+3}-1)^2}+\sqrt{(\sqrt{x+3}-3)^2}=$$
$$=|\sqrt{x+3}-1|+|\sqrt{x+3}-3|$$

Заметим, что при $x=4{,}536$, $\quad 1<\sqrt{x+3}<3$, следовательно,
$|\sqrt{x+3}-1|+|\sqrt{x+3}-3|=\sqrt{x+3}-1+3-\sqrt{x+3}=2$.

Ответ: 2.

Пример 2.17 Найдите значение выражения

$$\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\frac{\sqrt{12x-4x^2-8}}{\sqrt{3x-2-x^2}}.$$

Решение.

Нетрудно заметить, что данное выражение имеет смысл при выполнении следующих условий: $\begin{cases}12x-4x^2-8\ge 0,\\ 3x-2-x^2>0.\end{cases}$

$$\begin{cases}12x-4x^2-8\ge 0,\\ 3x-2-x^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-3x+2\le 0,\\ x^2-3x+2<0.\end{cases} \quad \text{Следовательно, } x\in(1;2).$$

На данном множестве $\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{x^2-2x+1}+\dfrac{\sqrt{12x-4x^2-8}}{\sqrt{3x-2-x^2}}=$

$$=\sqrt{(x-2)^2}+\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{\frac{4(3x-x^2-2)}{(3x-2-x^2)}}=|x-2|+|x-1|+2=$$

$$=2-x+x-1+2=3.$$

Ответ: 3.

Пример 2.18 Найдите целое положительное значение x, при котором значение выражения $\sqrt{\dfrac{x-2}{x+7}} \cdot \dfrac{x^2+(7-x)\sqrt{x^2+5x-14}-49}{x^2-(x+2)\sqrt{x^2+5x-14}-4}$ ближе всего к - 0,3.

Решение.

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \cdot \frac{x^2+(7-x)\sqrt{x^2+5x-14}-49}{x^2-(x+2)\sqrt{x^2+5x-14}-4} = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \cdot \frac{(x^2-49)+(7-x)\sqrt{x^2+5x-14}}{(x^2-4)-(x+2)\sqrt{x^2+5x-14}} =$$

$$= \sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \cdot \frac{(x-7)\cdot(x+7-\sqrt{x^2+5x-14})}{(x+2)\cdot(x-2-\sqrt{x^2+5x-14})} = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \cdot \frac{(x-7)(x+7-\sqrt{(x+7)(x-2)})}{(x+2)(x-2-\sqrt{(x+7)(x-2)})}$$

Следовательно, область определения данного выражения определяется условиями: $\begin{cases} \dfrac{x-2}{x+7} \ge 0, \\ (x+7)(x-2) \ge 0, \\ x \ne -7, \\ x \ne -2, \\ x-2-\sqrt{(x+7)(x-2)} \ne 0. \end{cases}$ Откуда следует, что $\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x \ge 2, \\ x < -7, \end{array}\right. \\ x \ne 2. \end{cases}$

Таким образом, $x \in (-\infty; -7) \cup (2; +\infty)$.

Согласно условию задания, нас интересуют только целые положительные значения x, поэтому далее рассматриваем только $x \in (2; +\infty)$.

На этом множестве

$$\sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \cdot \frac{(x-7)(x+7-\sqrt{(x+7)(x-2)})}{(x+2)(x-2-\sqrt{(x+7)(x-2)})} = \sqrt{\frac{x-2}{x+7}} \cdot \frac{(x-7)\cdot\sqrt{x+7}\cdot(\sqrt{x+7}-\sqrt{x-2})}{(x+2)\cdot\sqrt{x-2}\cdot(\sqrt{x-2}-\sqrt{x+7})} =$$

$$= -\frac{x-7}{x+2} = -\frac{x+2-9}{x+2} = -1 + \frac{9}{x+2}.$$

Следовательно, задача сводится к исследованию функции $y = -1 + \dfrac{9}{x+2}$. На множестве $x \in (2; +\infty)$ функция является убывающей (см. рисунок 10).

Этот результат легко подтвердить и аналитически, если найти производную данной функции: $y' = -\dfrac{9}{(x+2)^2}$.

$$-1 + \frac{9}{x+2} = -0{,}3 \iff \frac{9}{x+2} = 0{,}7 \iff \frac{90}{7} = x+2 \iff x = \frac{76}{7} = 10\frac{6}{7}.$$

Следовательно, ближайшие целые положительные x: $x = 10$ и $x = 11$.

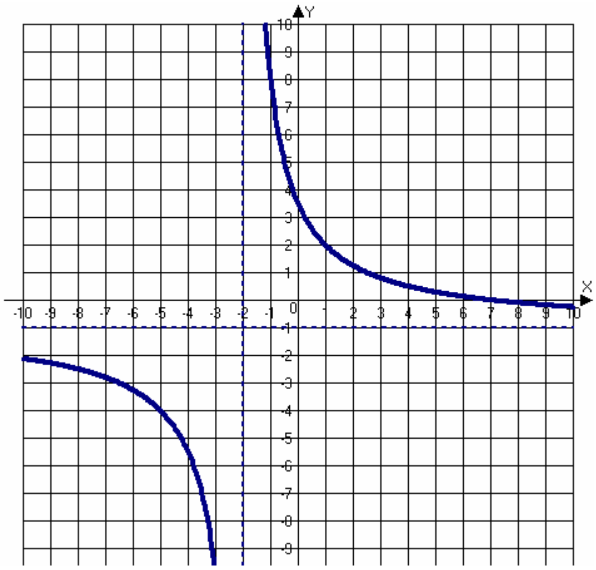


Рисунок 10 – График функции $y=-1+\dfrac{9}{x+2}$.

Для того, чтобы определить, какое из значений функции $y(10)$ или $y(11)$ ближе к - 0,3, оценим $|\,y(10)-(-0{,}3)\,|$ и $|\,y(11)-(-0{,}3)\,|$.

$$|\,y(10)-(-0{,}3)\,|=\left|\frac{9}{12}-1+\frac{3}{10}\right|=\frac{1}{20};\quad |\,y(11)\text{ - }(\text{-}0{,}3)\,|=\left|\frac{9}{13}-1+\frac{3}{10}\right|=\frac{1}{130}.$$

Так как $\dfrac{1}{130}<\dfrac{1}{20}$, то значение функции в точке 11 ближе к числу - 0,3, чем значение функции в точке 10.

Ответ: 11.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $\sqrt{125}\cdot\sqrt[5]{32}-\sqrt{5}$.

2. Найдите значение выражения $\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{5}+10+\sqrt{10}\right)\cdot\left(2\sqrt{2}+5\sqrt{5}-10-\sqrt{10}\right)$.

3. Вычислите: $\left(\dfrac{66}{\sqrt{3}+5}+\dfrac{6}{\sqrt{3}-1}-\dfrac{61}{8-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(2-\sqrt{3}\right)-\dfrac{156}{\sqrt{3}-4}$.

4. Вычислите: $3^{-4}\cdot 27^{-\frac{2}{3}}\cdot 9-27^{-1\frac{1}{3}}+(8^{0})^{3}\cdot 2+(0{,}125)^{-\frac{2}{3}}$.

5. Вычислите: $\left(\left(7\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}-\left(2\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{-3}$.

6. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[5]{a^3\cdot\sqrt[4]{a^{-3}}}}{a^{-3/4}}$.

7. Вычислите: $\sqrt[4]{\sqrt{23}-\sqrt{7}}\cdot\sqrt[4]{\sqrt{23}+\sqrt{7}}+\sqrt[6]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[6]{5\sqrt{2}-7}$.

8. Вычислите: $\sqrt[4]{0{,}5\sqrt{10}-1}\cdot\sqrt[4]{16+8\sqrt{10}}\cdot\sqrt[4]{54}$.

9. Вычислите: $\sqrt{10-4\sqrt{6}}+\sqrt{15-6\sqrt{6}}$.

10. Вычислите: $\sqrt[6]{4-2\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{1+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{4}$.

11. Упростите: $\dfrac{\sqrt[3]{5}b^{2/3}-4}{\sqrt[6]{5}b^{1/3}+2}-\sqrt[6]{5}b^{1/3}$.

12. Упростите**:** $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a}-1}+\dfrac{1}{\sqrt[3]{a}+1}+\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}}-\dfrac{\sqrt[3]{a^2}}{1+\sqrt[3]{a}}$.

13. Упростите: $\left(\dfrac{\sqrt[3]{mn^2}+\sqrt[3]{m^2n}}{\sqrt[3]{m^2}+2\sqrt[3]{mn}+\sqrt[3]{n^2}}-2\sqrt[3]{n}+\dfrac{m-n}{\sqrt[3]{m^2}-\sqrt[3]{n^2}}\right):\left(\sqrt[6]{m}+\sqrt[6]{n}\right)$.

14. Упростите: $\dfrac{x-1}{x+x^{1/2}+1}:\dfrac{x^{0,5}+1}{x^{3/2}-1}+\dfrac{2}{x^{-0,5}}$.

15. Упростите: $\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}-y}{\sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}}-3\sqrt[12]{x^3y^4}\right)^{-1/2}\bullet\left(\dfrac{\sqrt[4]{x^3}+y}{\sqrt[4]{x}+\sqrt[3]{y}}-\sqrt[3]{y^2}\right)$.

16. Найдите значение выражения $|x-3{,}5|+\sqrt[4]{(9+6x+x^2)^2}$, если $-2{,}8<x<3{,}2$.

17. Найдите значение выражения
$\sqrt{x+5-2\sqrt{x+4}}+\sqrt{x+20-8\sqrt{x+4}}$ при $x=6{,}859$.

18. Найдите значение выражения
$\dfrac{4\cdot\sqrt{4x^2-12x+9}}{3-2x}+\dfrac{9\cdot\sqrt{x^2-10x+25}}{5-x}-\dfrac{\sqrt{45x-9x^2-54}}{\sqrt{5x-6-x^2}}$.

19. Найдите целое положительное значение x, при котором значение выражения $\sqrt{\dfrac{x-7}{x+3}}\cdot\dfrac{9-(x-3)\cdot\sqrt{x^2-4x-21}-x^2}{x^2-(x+7)\cdot\sqrt{x^2-4x-21}-49}$ ближе всего к 0,7.

***Ответы**:* **1)** $9\sqrt{5}$; **2)** 23; **3)** 71; **4)** 6; **5)** 1; **6)** $\sqrt[5]{a^6}$; **7)** 1; **8)** 6; **9)** 1; **10)** 2; **11)** -2; **12)** $2+\sqrt[3]{a^2}$; **13)** $\sqrt[6]{m}-\sqrt[6]{n}$; **14)** $x+1$; **15)** $\begin{cases}\sqrt[4]{x}, & \sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}>0;\\ -\sqrt[4]{x}, & \sqrt[4]{x}-\sqrt[3]{y}<0;\end{cases}$ **16)** 6,5; **17)** 3; **18)** 2; **19)** 26.

3 Теория многочленов. Рациональные уравнения, неравенства и системы

При повторении темы *"Рациональные уравнения и системы"* следует обратить особое внимание на следующие моменты: исследование уравнений и систем с параметрами (число корней, расположение корней); теорема Виета; методы решения уравнений степени $n \geq 3$ (группировка слагаемых, замена переменной, теория многочленов (методика определения корней уравнений с целыми коэффициентами)); методы решения дробно-рациональных уравнений; методы решения систем (подстановки, исключения неизвестных, деления, замены переменной и других) (смотрите, например, [3], [5], [30], [35], [64], [66], [72], [85], [88], [118], [152], [153]). Ознакомиться с методами решений заданий с параметрами можно по пособиям [15], [38], [54], [62] – [67], [69], [71], [76], [77], [84], [86], [87], [96], [106], [118], [130], [133], [136], [146], [151].

Пример 3.1 Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение $(a+1)x^2+2(a+1)x+a-2=0$ имеет два равных корня.

Решение.

Исследуя данное уравнение, необходимо рассмотреть два случая.

1) $a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$. В этом случае уравнение имеет вид: - 3 = 2, и, следовательно, решений не имеет.

2) $a+1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$. В данном случае уравнение является квадратным, и для определения числа действительных корней уравнения достаточно исследовать дискриминант.

$D = 4(a+1)^2 - 4(a+1)(a-2) = 4(a+1)(a+1-(a-2)) = 12(a+1)$.

Нетрудно заметить, что при $a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$:

$D \neq 0, \ \forall \quad a \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$;

$D > 0 \ \Leftrightarrow \ 12(a+1) > 0 \ \Leftrightarrow \ a > -1 \ \Leftrightarrow \ a \in (-1; +\infty)$;

$D < 0 \ \Leftrightarrow \ 12(a+1) < 0 \ \Leftrightarrow \ a < -1 \ \Leftrightarrow \ a \in (-\infty; -1)$.

Следовательно, ни при одном значении параметра *a* уравнение не имеет двух равных корней.

***Ответ*:** $a \in \varnothing$.

Пример 3.2 При каких значениях параметра *a* уравнение $\dfrac{x^2-ax+1}{x+3}=0$ имеет единственное решение?

Решение.

Данное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} x^2-ax+1=0, \\ x+3 \neq 0. \end{cases}$

Поэтому задачу можно сформулировать иначе, а именно: при каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 - ax + 1 = 0, \\ x + 3 \neq 0 \end{cases}$ имеет единственное решение? Ясно, что это возможно в одном из следующих двух случаев.

Случай 1. Уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ имеет единственное решение, отличное от числа - 3. Согласно теории, квадратное уравнение имеет один действительный корень (кратности 2) тогда и только тогда, когда дискриминант уравнения равен нулю. $D = a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 2, \\ a = -2. \end{array}\right.$

Подставляя найденные значения параметра a в уравнение, получаем, что при $a = 2$: $x = 1$, при $a = -2$: $x = -1$. Т.е. оба корня не равны - 3.

Случай 2. Уравнение $x^2 - ax + 1 = 0$ имеет два различных решения, и при этом одно из них равно числу - 3. Так как $x = -3$ является корнем уравнения $x^2 - ax + 1 = 0$, то, при подстановке в уравнение, оно обращает его в верное равенство. Следовательно, $3a + 10 = 0$ и $a = -\frac{10}{3}$. Уравнение в этом случае имеет вид: $x^2 + \frac{10}{3}x + 1 = 0$, и его корни: $\left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = -\frac{1}{3}. \end{array}\right.$ Т.е. второй корень данного уравнения отличен от числа - 3.

Ответ: $\{-\frac{10}{3};\ -2;\ 2\}$.

Пример 3.3 Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(2-x)(x+1) = a$ имеет два различных неотрицательных корня.

Решение.

Воспользуемся графическим способом решения. Для чего построим графики функций, стоящих в левой $\left(y = (2-x)(x+1)\right)$, и правой $(y = a)$ частях уравнения, и проанализируем как возможное количество точек пересечения данных графиков в зависимости от значения параметра a (это дает нам число решений уравнения), так и значения абсцисс координат точек пересечения (это позволит определить, когда решения неотрицательны). Графиком функции $y = (2-x)(x+1)$ является парабола, ветви которой направлены вниз, вершина имеет координату $\left(\frac{1}{2}; \frac{9}{4}\right)$, нули функции: $x_1 = -1, x_2 = 2,$ ось ординат пересекает в точке (0; 2). График функции $y = a$ - горизонтальная прямая.

Возможные ситуации взаимного расположения графиков данных функций, позволяющие получить ответ на поставленный вопрос, представлены на рисунках 11 - 14.

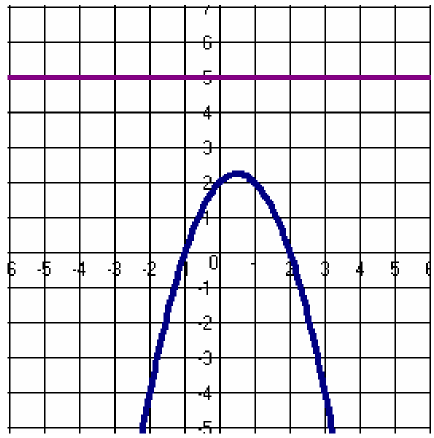


Рисунок 11 - $a > \frac{9}{4}$.

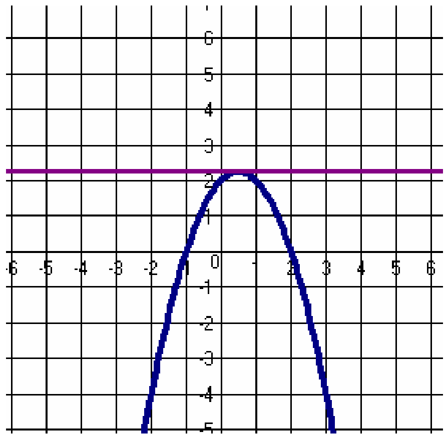


Рисунок 12 - $a = \frac{9}{4}$.

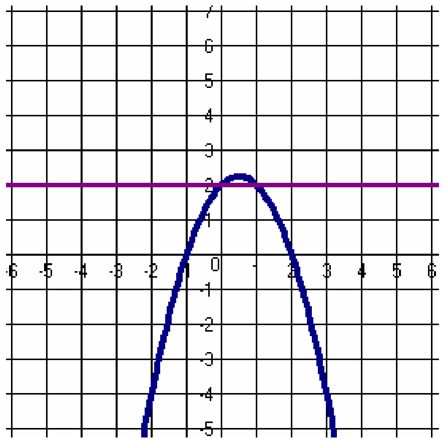


Рисунок 13 - $a = 2$.

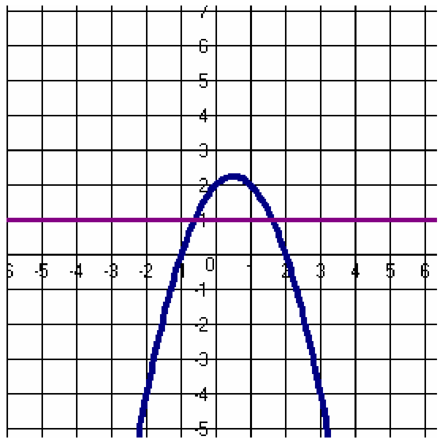


Рисунок 14 - $a < 2$.

Мы видим, что при $a > \frac{9}{4}$ (см. рисунок 11) точек пересечения, а значит, и корней уравнения, нет; при $a = \frac{9}{4}$ (см. рисунок 12) - одна точка пересечения, следовательно, уравнение имеет один корень; при $a < \frac{9}{4}$ (см. рисунок 13 и рисунок 14) - две точки пересечения, следовательно, уравнение имеет два корня. Два различных неотрицательных корня возможны только при $2 \le a < \frac{9}{4}$. Так как парабола пересекает ось OY в точке (0; 2) (см. рисунок 13).

Ответ: $2 \le a < \frac{9}{4}$.

Пример 3.4 Найти сумму квадратов и сумму кубов корней уравнения $2x^2 - 5x + 1 = 0$.

Решение.

Используя теорему Виета, получаем, что если x_1, x_2 - корни данного квадратного уравнения, то $\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{5}{2}, \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

$$x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = \frac{25}{4} - 1 = \frac{21}{4}.$$

$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2) = \frac{5}{2}\left(\frac{21}{4} - \frac{1}{2}\right) = \frac{95}{8}.$$

Ответ: $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{21}{4};\ x_1^3 + x_2^3 = \dfrac{95}{8}.$

Пример 3.5 Решите уравнение $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0$.

Решение.

1 способ (метод группировки слагаемых).

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 4x^2 + 4x + x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x^3 + 4x^2 + 4x) + (x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \cdot (x^2 + 4x + 4) + (x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad x \cdot (x + 2)^2 + (x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)(x \cdot (x + 2)\ + 1)) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x + 2)(x^2 + 2x + 1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x + 2)(x + 1)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = -1. \end{array}\right.$$

2 способ (использование свойств корней уравнения с целыми коэффициентами). В основе второго способа решения лежит следующая теорема.

Теорема 1

Если уравнение $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0,\ a_{n-1}, ..., a_0 \in Z$, имеет рациональные корни, то они являются целыми числами, совпадающими с делителями свободного члена.

В уравнении $x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0,\ a_0 = 2$. Целыми делителями числа 2 являются: 1, -1, 2, -2. Нетрудно заметить, что -1 является корнем данного уравнения: -1 + 4 - 5 + 2 = 0, т.е. 0 = 0 - верное равенство.

Теорема 2

Если α ***- корень*** *многочлена $P_n(x)$, то $P_n(x) = (x - \alpha)Q_{n-1}(x)$.*

Используя теорему 2 и *правило деления многочлена* на многочлен уголком, получаем:

$$
\begin{array}{l}
\underline{\ \ } x^3 + 4x^2 + 5x + 2 \ |\ \underline{x+1 \qquad} \\
\underline{x^3 + x^2} \qquad\qquad x^2 + 3x + 2 \\
\qquad \underline{\ \ } 3x^2 + 5x + 2 \\
\qquad \underline{3x^2 + 3x\ \ } \\
\qquad\qquad \underline{\ \ } 2x + 2 \\
\qquad\qquad \underline{2x + 2} \\
\qquad\qquad\qquad 0
\end{array}
$$

Следовательно,

$$x^3 + 4x^2 + 5x + 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)(x^2 + 3x + 2) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad (x+1)(x+2)(x+1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (x+1)^2(x+2) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \text{-}1, \\ x = \text{-}2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{\text{-}1;\ \text{-}2\}$.

Чаще всего используется другой, более общий результат.

Теорема 3

Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ *(p –целое, q – натуральное) является корнем уравнения* $a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$, a_n, a_{n-1}, ..., $a_0 \in Z$, *то число p является делителем свободного члена, а число q - делителем старшего коэффициента.*

Пример 3.6 Решите уравнение $2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0$.

Решение.

Целыми делителями свободного члена являются -1 и 1. Натуральными делителями старшего коэффициента будут 1 и 2. Следовательно, если данное уравнение имеет рациональные корни, то это одно из чисел: $\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ 1; -1$.

Нетрудно заметить, что число $-\frac{1}{2}$ является корнем данного уравнения:

$$2 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) - 5 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{1}{4} - \frac{5}{4} + \frac{1}{2} + 1 = -\frac{6}{4} + \frac{3}{2} = 0, \quad \text{т.е.} \quad 0 = 0.$$

Опираясь на теорему 2 и используя правило деления многочленов, получаем

$$2x^3 - 5x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{1}{2}\right)\left(2x^2 - 6x + 2\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{1}{2}, \\ x = \frac{3+\sqrt{5}}{2}, \\ x = \frac{3-\sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-\frac{1}{2}; \frac{3+\sqrt{5}}{2}; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Пример 3.7 Найдите наименьшее положительное значение параметра *a***,** при котором уравнение $x^3 + ax^2 - 7x + b = 0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен 5.

Решение.

Учитывая, что $x = 5$ является корнем данного уравнения, получаем:

1) $125 + 25a - 35 + b = 0$, откуда следует, что $b = -90 - 25a$, и уравнение приобретает вид: $x^3 + ax^2 - 7x - 90 - 25a = 0$;

2)

$$\begin{array}{l|l}
\underline{\ } x^3 + ax^2 - 7x - 90 - 25a & \underline{\quad x-5 \quad} \\
\underline{x^3 - 5x^2 \qquad\qquad} & x^2 + (a+5)x + (5a+18) \\
\quad \underline{\ } (a+5)x^2 - 7x - 90 - 25a & \\
\quad \underline{(a+5)x^2 - 5(a+5)x} & \\
\qquad\quad \underline{\ } (5a+18)x - 90 - 25a & \\
\qquad\quad \underline{(5a+18)x - 90 - 25a} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Следовательно, исследуемое уравнение можно представить в виде:

$$(x-5)(x^2 + (a+5)x + (5a+18)) = 0.$$

Данное уравнение будет иметь три различных корня, если квадратное уравнение $x^2 + (a+5)x + (5a+18) = 0$ будет иметь два различных корня, отличных от 5. Это возможно в том случае, когда дискриминант $D > 0$.

$$D = (a+5)^2 - 4(5a+18) = a^2 + 10a + 25 - 20a - 72 = a^2 - 10a - 47.$$

$$D > 0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2 - 10a - 47 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a > 5 + \sqrt{72}, \\ a < 5 - \sqrt{72}. \end{array}\right.$$

По условию a - целое положительное, следовательно, наименьшее целое положительное значение a, при котором $D > 0$, равно 14. Исследуемое квадратное уравнение в этом случае имеет вид: $x^2 + 19x + 88 = 0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} x = -8, \\ x = -11. \end{array}\right.$

Следовательно, наименьшее положительное значение параметра a, при котором исходное уравнение третьей степени с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен 5, равно 14.

Ответ: 14.

Пример 3.8 Решите уравнение $\left(x^2 + x - 2\right) \cdot \left(x^2 + x - 3\right) = 12$.

Решение.

Данное уравнение можно решить, используя метод замены переменной.

Введем $t = x^2 + x - 2$, уравнение примет вид: $t(t-1) = 12$.

$$t(t-1) = 12 \Leftrightarrow t^2 - t - 12 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = -3. \end{array}\right.$$

Учитывая способ введения новой переменной, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} x^2 + x - 2 = 4, \\ x^2 + x - 2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 + x - 6 = 0, \\ x^2 + x + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array}\right.$$

Ответ: {-3; 2}.

Пример 3.9 Решите уравнение $x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0$.

Решение.

Уравнение относится к классу симметричных уравнений 4 степени:

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0, \quad a \neq 0.$$

Нетрудно заметить, что $x = 0$ не является решением данного уравнения. Следовательно, $x^4 + x^3 - 4x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 4 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + \left(x - \frac{1}{x}\right) - 4 = 0.$ Введем новую переменную: $t = x - \frac{1}{x}$, тогда $t^2 = x^2 - 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$. Уравнение примет вид: $\left(t^2 + 2\right) + t - 4 = 0$ или $t^2 + t - 2 = 0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = 1. \end{array}\right.$

Учитывая способ замены переменной, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x - \frac{1}{x} = -2, \\ x - \frac{1}{x} = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = -2x, \\ x^2 - 1 = x \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 = 0, \\ x^2 - x - 1 = 0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2}, \\ x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-1 \pm \sqrt{2}; \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}\right\}$.

Пример 3.10 Решите уравнение $(x+3)^4 + (x+5)^4 = 16$.

Решение.

Уравнение является уравнением вида $(x-a)^4 + (x-b)^4 = \mathrm{A}, \ \mathrm{A} \neq 0$.

Следовательно, можно ввести новую переменную по правилу: $t = \frac{x + 3 + x + 5}{2}$. Откуда следует, что $t = x + 4$, а $x = t - 4$, и исходное уравнение принимает вид: $(t-1)^4 + (t+1)^4 = 16$.

$$(t-1)^4+(t+1)^4=16 \quad \Leftrightarrow \quad (t-1)^2(t-1)^2+(t+1)^2(t+1)^2=16 \quad \Leftrightarrow$$

$$(t^2-2t+1)(t^2-2t+1)+(t^2+2t+1)(t^2+2t+1)=16 \quad \Leftrightarrow$$

$$2t^4+12t^2+2=16 \quad \Leftrightarrow \quad t^4+6t^2-7=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t^2=-7, \\ t^2=1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=-1. \end{array}\right.$$

Учитывая способ введения переменной, получаем ответ: $\left[\begin{array}{l} x=-3, \\ x=-5. \end{array}\right.$

Ответ: {-5; -3}.

Пример 3.11 Решите уравнение $(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)=1680$.

Решение.

Уравнение является уравнением вида: $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\mathrm{A}, \mathrm{A}\neq 0$.

Следовательно, его можно решить, сделав замену переменной по правилу: $t=\dfrac{x-4+x-5+x-6+x-7}{4}$. Т.е. $t=x-\dfrac{11}{2}$, а $x=t+\dfrac{11}{2}$. Уравнение приобретает вид: $\left(t+\dfrac{3}{2}\right)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\dfrac{3}{2}\right)=1680$.

$\left(t+\dfrac{3}{2}\right)\left(t+\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\dfrac{3}{2}\right)=1680 \quad \Leftrightarrow \quad \left(t^2-\dfrac{9}{4}\right)\left(t^2-\dfrac{1}{4}\right)=1680$. Введем еще одну переменную: $z=t^2-\dfrac{1}{4}$, получим уравнение вида: $z(z-2)=1680$.

$$z(z-2)=1680 \Leftrightarrow z^2-2z-1680=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\ \ 42, \\ z=-40. \end{array}\right.$$

Учитывая способ введения переменных, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} t^2-\dfrac{1}{4}=42, \\ t^2-\dfrac{1}{4}=-40 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t^2=42\dfrac{1}{4}=\dfrac{169}{4}, \\ t^2=-39\dfrac{3}{4} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{13}{2}, \\ t=-\dfrac{13}{2} \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=12, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Ответ: {-1; 12}.

Пример 3.12 Решите уравнение $(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2$.

Решение.

Уравнение является уравнением вида: $(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)=\mathrm{A}x^2$, где $ab=cd$ *и* $\mathrm{A}\neq 0$.

Нетрудно заметить, что $x=0$ не является решением данного уравнения.

$$(x+2)(x+3)(x+8)(x+12)=4x^2 \Leftrightarrow (x+2)(x+12)(x+3)(x+8)=4x^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+14x+24\right)\left(x^2+11x+24\right)=4x^2 \Leftrightarrow \frac{x^2+14x+24}{x}\cdot\frac{x^2+11x+24}{x}=4 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \qquad \left(x+14+\dfrac{24}{x}\right)\left(x+11+\dfrac{24}{x}\right)=4$. Вводя новую переменную: $t=x+\dfrac{24}{x}+11$, получаем уравнение: $(t+3)t=4$. Откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=\ \ 1. \end{array}\right.$

Учитывая способ введения новой переменной, имеем:

$$\left[\begin{array}{l} x+\dfrac{24}{x}+11=-4, \\ x+\dfrac{24}{x}+11=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2+15x+24=0, \\ x^2+10x+24=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}, \\ x=-\ 6, \\ x=-\ 4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{-6;\ -4;\ \dfrac{-15\pm\sqrt{129}}{2}\right\}$.

Пример 3.13 Решите уравнение $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{6}{x^2+x-2}$.

Решение.

Определим область допустимых значений (ОДЗ) для данного уравнения.

ОДЗ: $\{x|\ x\neq 1$ и $x\neq -2\}=(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;+\infty)$.

На указанном множестве $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{6}{x^2+x-2} \Leftrightarrow$

$$\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{6}{(x-1)(x+2)} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;+\infty), \\ 2(x+2)+5(x-1)=6 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in(-\infty;-2)\cup(-2;1)\cup(1;+\infty), \\ x=1. \end{array}\right.$$ Следовательно, $x\in\varnothing$.

Ответ: $x\in\varnothing$.

Пример 3.14 Решите уравнение $\dfrac{1}{x^3+2}-\dfrac{1}{x^3+3}=\dfrac{1}{12}$.

Решение.

ОДЗ: $\{x|\ x\neq -\sqrt[3]{2}$ и $x\neq -\sqrt[3]{3}\}=(-\infty;-\sqrt[3]{3})\cup(-\sqrt[3]{3};-\sqrt[3]{2})\cup(-\sqrt[3]{2};+\infty)$.

Введем новую переменную: $t=x^3+2$. Уравнение примет вид: $\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{1}{12}$. ОДЗ: $\{t\mid t\neq 0$ и $t\neq -1\}=(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty)$. Значит,

$$\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t+1}=\dfrac{1}{12} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty), \\ 12(t+1)-12t=t(t+1) \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty), \\ t^2+t-12=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} t\in(-\infty;-1)\cup(-1;0)\cup(0;+\infty), \\ \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3 \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-4, \\ t=3. \end{array}\right.$$

Тогда $\left[\begin{array}{l} x^3+2=-4, \\ x^3+2=3 \end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l} x=-\sqrt[3]{6}, \\ x=1. \end{array}\right.$

Ответ: $\{-\sqrt[3]{6};1\}$.

Пример 3.15 Решите уравнение $x^4-\dfrac{50}{2x^4-7}=14$.

Решение.

ОДЗ: $\{x\,|\,x\neq\pm\sqrt[4]{3,5}\}=(-\infty;-\sqrt[4]{3,5})\cup(-\sqrt[4]{3,5};\sqrt[4]{3,5})\cup(\sqrt[4]{3,5};+\infty)$.

$$x^4-\frac{50}{2x^4-7}=14 \;\Leftrightarrow\; 2x^4-\frac{100}{2x^4-7}=28 \;\Leftrightarrow\; 2x^4-7-\frac{100}{2x^4-7}=21.$$

Введем новую переменную: $t=2x^4-7$. Уравнение примет вид: $t-\dfrac{100}{t}=21$. ОДЗ: $\{t|\ t\neq 0\}=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

$$t-\frac{100}{t}=21 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t\neq 0, \\ t^2-21t-100=0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} t=25, \\ t=-4 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=25, \\ t=-4 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2x^4-7=25, \\ 2x^4-7=-4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^4=16, \\ x^4=\dfrac{3}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2, \\ x=\sqrt[4]{1,5}, \\ x=-\sqrt[4]{1,5}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2;-\sqrt[4]{1,5};\sqrt[4]{1,5};2\}$.

Пример 3.16 Решите уравнение $\dfrac{x^2+x-5}{x}+\dfrac{3x}{x^2+x-5}+4=0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 0, \\ x^2+x-5\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0, \\ x\neq \dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}. \end{cases}$

Введем новую переменную: $t=\dfrac{x^2+x-5}{x}$. Уравнение примет вид: $t+\dfrac{3}{t}+4=0$. ОДЗ: $\{t\,|\,t\neq 0\}=R\setminus\{0\}$.

$$t+\frac{3}{t}+4=0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t\neq 0, \\ t^2+4t+3=0 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} t\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} t=-3, \\ t=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=-3, \\ t=-1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&\frac{x^2+x-5}{x}=-3,\\&\frac{x^2+x-5}{x}=-1\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ \left[\begin{aligned}&x^2+x-5=-3x,\\&x^2+x-5=-x\end{aligned}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ \left[\begin{aligned}&x^2+4x-5=0,\\&x^2+2x-5=0\end{aligned}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ \left[\begin{aligned}&x=-5,\\&x=1,\\&x=-1\pm\sqrt{6}\end{aligned}\right.\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x=-5,\\&x=1,\\&x=-1+\sqrt{6},\\&x=-1-\sqrt{6}.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\{-5;\ 1;\ -1-\sqrt{6};-1+\sqrt{6}\}$.

Пример 3.17 Решите уравнение $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+2x+2}+\dfrac{x^2+2x+2}{x^2+2x+3}=\dfrac{7}{6}$.

Решение.

ОДЗ: $x\in R$, так как $x^2+2x+2\neq 0$ и $x^2+2x+3\neq 0$ ни при каких значениях x (соответствующие квадратные уравнения не имеют корней на множестве действительных чисел). Введем новую переменную: $t=x^2+2x+2$.

Уравнение примет вид: $\dfrac{t-1}{t}+\dfrac{t}{t+1}=\dfrac{7}{6}$. ОДЗ: $\begin{cases}t\neq 0,\\ t\neq -1.\end{cases}$

$$\frac{t-1}{t}+\frac{t}{t+1}=\frac{7}{6} \Leftrightarrow \begin{cases}t\in R\setminus\{-1;0\},\\ 6(t-1)(t+1)+6t^2=7t(t+1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\in R\setminus\{-1;0\},\\ 5t^2-7t-6=0\end{cases} \Rightarrow$$

$$\left[\begin{aligned}&t=2,\\&t=-\frac{3}{5}\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x^2+2x+2=2,\\&x^2+2x+2=-\frac{3}{5}\end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned}&x^2+2x=0,\\&x^2+2x+\frac{13}{5}=0\end{aligned}\right. \Rightarrow \left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=-2.\end{aligned}\right.$$

Ответ: $\{-2;\ 0\}$.

Пример 3.18 Решите уравнение $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1$.

Решение.

ОДЗ**:** $x\in R$. (Почему? Дайте подробное обоснование.)

Нетрудно заметить, что $x=0$ не является решением данного уравнения. Следовательно, $\dfrac{4x}{4x^2-8x+7}+\dfrac{3x}{4x^2-10x+7}=1 \Leftrightarrow \dfrac{4}{4x-8+\frac{7}{x}}+\dfrac{3}{4x-10+\frac{7}{x}}=1$.

Введем новую переменную: $t=4x+\dfrac{7}{x}-8$. Уравнение примет вид: $\dfrac{4}{t}+\dfrac{3}{t-2}=1$.

$$\frac{4}{t}+\frac{3}{t-2}=1 \Leftrightarrow \begin{cases}t\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty),\\ 4(t-2)+3t=t(t-2)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}t\in(-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty),\\ t^2-9t+8=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \in (-\infty;0)\cup(0;2)\cup(2;+\infty), \\ \left[\begin{array}{l} t=8, \\ t=1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=8, \\ t=1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4x+\dfrac{7}{x}-8=8, \\ 4x+\dfrac{7}{x}-8=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 4x^2+7-8x=8x, \\ 4x^2+7-8x=x \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} 4x^2-16x+7=0, \\ 4x^2-9x+7=0 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{7}{2}, \\ x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right\}$.

В данном пособии мы не приводим отдельных примеров, иллюстрирующих методы решения систем, так как достаточно большое количество примеров, которые будут приведены позднее (задачи на составление уравнений, прогрессии и другие), приведут нас к необходимости решения систем уравнений, и все наиболее распространенные методы решений систем нами будут продемонстрированы.

По теме *"Рациональные неравенства"* рекомендуется: повторить общие свойства неравенств ([5], [138]), изучить методы решения неравенств первой и второй степени (методы интервалов и графический), методы решения неравенств степени $n \geq 3$ и дробно-рациональных (метод интервалов, замены переменной). Нужно научиться следить за сохранением равносильности неравенств при проведении тождественных преобразований ([118]). Ознакомиться с методами решений заданий с параметрами можно по пособиям [15], [38], [54], [62]-[67], [69], [71], [76], [77], [84], [86], [87], [96], [106], [118], [130], [133], [136], [146], [151].

Пример 3.19 Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству $\dfrac{x+3}{3}-8>\dfrac{2x-1}{3}+1$.

Решение.

$$\frac{x+3}{3}-8>\frac{2x-1}{3}+1 \Leftrightarrow x+3-24>2x-1+3 \Leftrightarrow -x>23 \Leftrightarrow x<-23.$$

Следовательно, $x \in (-\infty; -23)$. Наибольшим целым в этом случае будет $x = -24$.

Ответ: -24.

Пример 3.20 Решите неравенство $(x+1)(3-x)(x-2)^2>0$.

Решение.

В данном случае проще всего применить метод интервалов, рассмотрев функцию $f(x)=(x+1)(3-x)(x-2)^2$.

$$D(f)=R, \quad f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=3, \\ x=2. \end{array}\right.$$

Анализируя знаки функции на интервалах, получаем (см. рисунок 15):

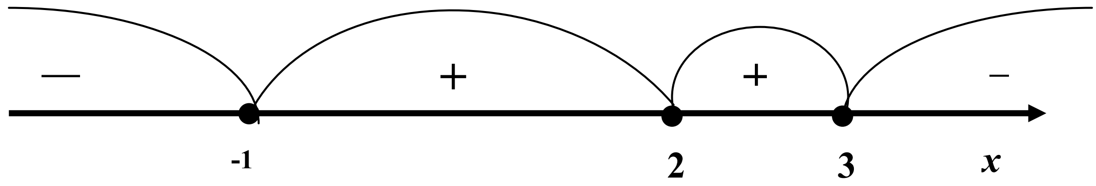


Рисунок 15

Следовательно, $x \in (-1; 2) \cup (2; 3)$.

Ответ: $x \in (-1; 2) \cup (2; 3)$.

Пример 3.21 Решите неравенство $\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-4\right)\left(4+x^2-4x\right) \geq 0$.

Решение.

$\left(x^2-6x+8\right)\left(x^2-4\right)\left(4+x^2-4x\right) \geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-4)(x-2)(x+2)(x-2)^2 \geq 0$ $\Leftrightarrow (x-2)^4(x-4)(x+2) \geq 0$. Рассмотрим функцию $f(x)=(x+2)(x-2)^4(x-4)$.

$D(f)=R; \quad f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=2, \\ x=4. \end{array}\right.$ Анализируя знаки функции на интервалах, получаем (см. рисунок 16):

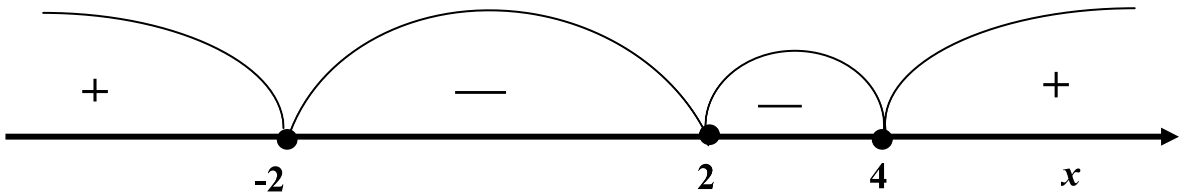


Рисунок 16

Следовательно, $x \in (-\infty; -2] \cup \{2\} \cup [4; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; -2] \cup \{2\} \cup [4; +\infty)$.

Пример 3.22 Найдите все решения неравенства $x^6-9x^3+8>0$.

Решение.

При решении данного неравенства воспользуемся методом замены переменной. Введем $t=x^3$, неравенство примет вид: $t^2-9t+8>0$.

Решим данное неравенство графически, для этого построим эскиз графика функции $f(t)=t^2-9t+8$ (см. рисунок 17).

$D(f) = R,\quad f(t) = 0 \Leftrightarrow t^2 - 9t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = 8. \end{array}\right.$ Ветви параболы направлены вверх, следовательно, $f(t) > 0 \Leftrightarrow t \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t < 1, \\ t > 8. \end{array}\right.$

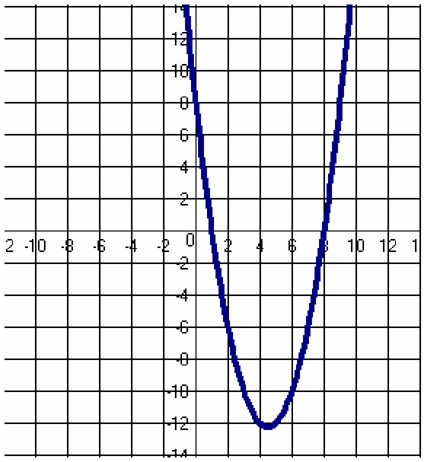


Рисунок 17 - График функции $y = t^2 - 9t + 8$.

Учитывая, что $t = x^3$, получаем: $\left[\begin{array}{l} x^3 < 1, \\ x^3 > 8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1, \\ x > 2. \end{array}\right.$

Ответ: $x \in (-\infty; 1) \cup (2; +\infty)$.

Пример 3.23 Определите середину интервала значений x, удовлетворяющих неравенству $\dfrac{1}{5x-2} < \dfrac{1}{5x+18}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 5x - 2 \neq 0, \\ 5x + 18 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq \dfrac{2}{5}, \\ x \neq -\dfrac{18}{5} \end{cases} \Leftrightarrow x \in R \setminus \left\{-\dfrac{18}{5}; \dfrac{2}{5}\right\}$.

На данном множестве $\dfrac{1}{5x-2} < \dfrac{1}{5x+18} \Leftrightarrow \dfrac{1}{5x-2} - \dfrac{1}{5x+18} < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{(5x+18)-(5x-2)}{(5x-2)\cdot(5x+18)} < 0 \Leftrightarrow \dfrac{20}{(5x-2)\cdot(5x+18)} < 0.$

Неравенство решим методом интервалов, исследуя функцию

$f(x) = \dfrac{20}{(5x-2)\cdot(5x+18)}$. $D(f) = R \setminus \left\{-\dfrac{18}{5}; \dfrac{2}{5}\right\}$. Нулей нет.

Исследуя знаки функции на интервалах, получаем (см. рисунок 18), что

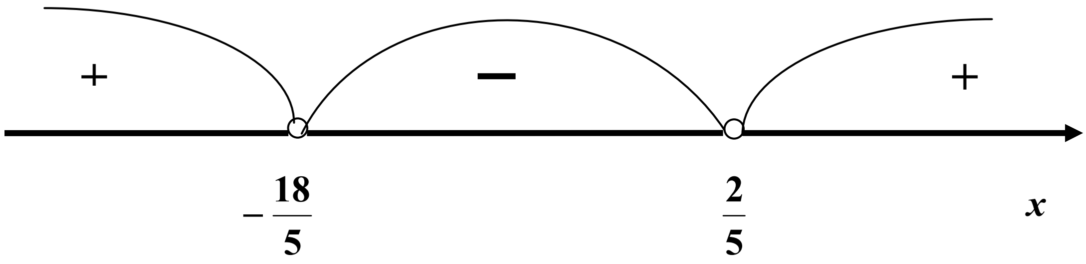


Рисунок 18

Следовательно, $x \in \left(-\frac{18}{5}; \frac{2}{5}\right)$. Середину данного интервала определяем по правилу: $\frac{1}{2}\left(-\frac{18}{5}+\frac{2}{5}\right)=-\frac{16}{10}=-\frac{8}{5}$.

Ответ: $-\frac{8}{5}$.

Пример 3.24 Найдите наибольшее значение x, удовлетворяющее неравенству $x \le 3-\frac{1}{x-1}$.

Решение.

ОДЗ: $x \ne 1$.

$$x \le 3-\frac{1}{x-1} \iff x+\frac{1}{x-1}-3 \le 0 \iff \frac{x^2-x+1-3x+3}{x-1} \le 0 \iff$$

$\iff \frac{x^2-4x+4}{x-1} \le 0 \iff \frac{(x-2)^2}{x-1} \le 0$. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$.

$D(f) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$; $f(x) = 0 \iff x = 2$. Анализируя знаки функции, получаем (см. рисунок 19), что $x \in (-\infty; 1) \cup \{2\}$. Наибольшее значение $x = 2$.

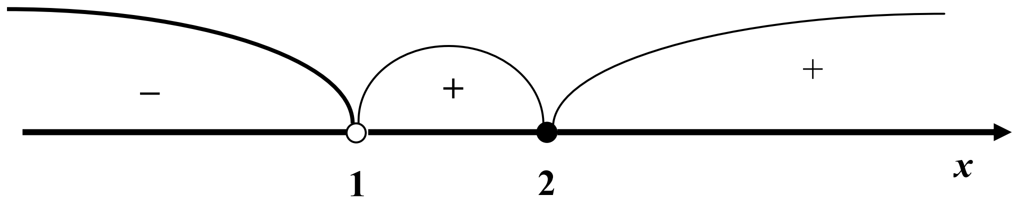


Рисунок 19

Ответ: 2.

Чаще всего к решению дробно-рациональных неравенств нас приводят задачи на расположение корней уравнений относительно заданного числа.

Пример 3.25 Для каких значений параметра a уравнение $(a-2)x^2-2(a+3)x+4a=0$ имеет один корень больше 3, а другой меньше 2?

Решение.

Очевидно, $a \neq 2$, так как если $a = 2$, то данное уравнение имеет только один корень. Из условия задачи следует, что корни данного уравнения должны быть действительными и различными, т. е. $D > 0$.

$$D = 4(a+3)^2 - 16a(a-2) = 4(a^2 + 6a + 9 - 4a^2 + 8a) = 4(-3a^2 + 14a + 9).$$

$$-3a^2 + 14a + 9 > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{7-\sqrt{76}}{3} < a < \frac{7+\sqrt{76}}{3}.$$

Так как $a \neq 2$, то уравнение можно представить в виде:

$x^2 - 2\left(\dfrac{a+3}{a-2}\right)x + \dfrac{4a}{a-2} = 0$ и провести графический анализ исследуемой ситуации, используя график функции $y = f(x)$, где $f(x) = x^2 - 2\left(\dfrac{a+3}{a-2}\right)x + \dfrac{4a}{a-2}$.

Мы должны иметь, $x_1 < 2,\ x_2 > 3,$ т.е. (см. рисунок 20) числа 2 и 3 должны лежать между корнями данного уравнения.

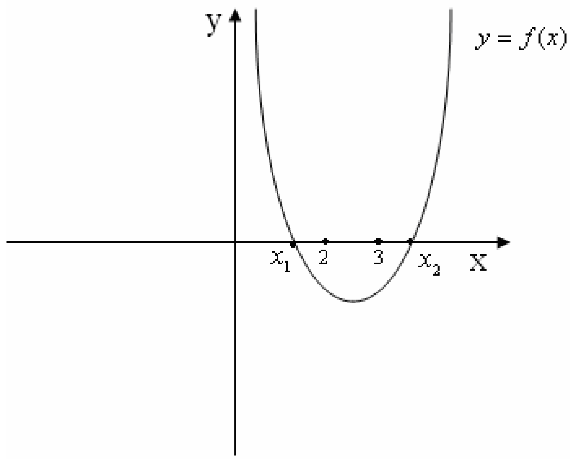


Рисунок 20

Это будет выполняться, если $\begin{cases} f(2) < 0, \\ f(3) < 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} 4 - 4\left(\dfrac{a+3}{a-2}\right) + \dfrac{4a}{a-2} < 0, \\ 9 - 6\left(\dfrac{a+3}{a-2}\right) + \dfrac{4a}{a-2} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{4a-20}{a-2} < 0, \\ \dfrac{7a-36}{a-2} < 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (2;\,5), \\ a \in \left(2;\,\dfrac{36}{7}\right). \end{cases}$$

Следовательно, $a \in (2;5)$. Таким образом, нужные значения параметра a будут удовлетворять

условиям: $\begin{cases} a \neq 2, \\ a \in (2;5), \\ \dfrac{7-\sqrt{76}}{3} < a < \dfrac{7+\sqrt{76}}{3}. \end{cases}$ Откуда следует, что $a \in (2;5)$.

Ответ: $2 < a < 5$.

Пример 3.26 Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка [-3; -1) значение выражения $x^4 - 7x^2 - 3$ не равно значению выражения ax^2.

Решение.

$x^4 - 7x^2 - 3 \neq ax^2 \quad \Leftrightarrow \quad x^4 - (7+a)x^2 - 3 \neq 0, \quad x \in [-3;-1).$

1 способ. Введем новую переменную $t = x^2, \quad x \in [-3;-1) \;\Rightarrow\; t \in (1;9]$.

$x^4 - (7+a)x^2 - 3 \neq 0, \quad x \in [-3;-1) \quad \Leftrightarrow \quad t^2 - (7+a)t - 3 \neq 0, \quad t \in (1;9]$.

Рассмотрим функцию $f(t) = t^2 - (7+a)t - 3, \; D(f) = R$; график функции – парабола, ветви которой направлены вверх.

$D = (7+a)^2 + 12 > 0, \; \forall a \in R$, следовательно, функция имеет две точки пересечения с осью абсцисс: t_1 и t_2, причем $t_1 < 0, \; t_2 > 0$, так как $f(0) = -3 < 0$.

Следовательно, $t^2 - (7+a)t - 3 \neq 0, \quad t \in (1;9] \;\Leftrightarrow\; t_2 \notin (1;9] \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} t_2 > 9, \\ t_2 \leq 1. \end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l} t_2 > 9, \\ t_2 \leq 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} f(9) < 0, \\ f(1) \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 81 - (7+a)\cdot 9 - 3 < 0, \\ 1 - (7+a)\cdot 1 - 3 \geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a > \dfrac{5}{3}, \\ a \leq -9. \end{array}\right.$$

2 способ. Применим метод от противного: выясним, при каких значениях параметра a $\quad x^4 - (7+a)x^2 - 3 = 0, \quad x \in [-3;-1)$.

Рассмотрим функцию $g(x) = x^4 - (7+a)x^2 - 3. \quad D(g) = R$; функция является непрерывной на всей области определения. Известна следующая теорема.

Теорема. *Если функция непрерывна на отрезке и принимает на концах отрезка значения разных знаков, то найдется хотя бы одна точка внутри отрезка, в которой функция обращается в нуль.*

Следовательно,

$$\begin{cases} g(x) = 0, \\ x \in [-3;-1) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(-3) = 0, \\ \begin{cases} g(-3) > 0, \\ g(-1) < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} g(-3) < 0, \\ g(-1) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 81\text{-}(7+a)\cdot 9 - 3 = 0, \\ \begin{cases} 81 - (7+a)\cdot 9 - 3 > 0, \\ 1 - (7+a)\cdot 1 - 3 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 81 - (7+a)\cdot 9 - 3 < 0, \\ 1 - (7+a)\cdot 1 - 3 > 0, \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = \dfrac{5}{3}, \\ \begin{cases} a < \dfrac{5}{3}, \\ a > -9, \end{cases} \\ \begin{cases} a > \dfrac{5}{3}, \\ a < -9. \end{cases} \end{array}\right.$$

Таким образом, $x^4-(7+a)x^2-3=0,\quad x\in[-3;-1)$, если $a\in\left(-9;\frac{5}{3}\right]$. Значит, $x^4-(7+a)x^2-3\neq 0,\quad x\in[-3;-1)$, если $a\in(-\infty;-9]\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-9]\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$.

В главе 9 нами рассмотрен будет еще один способ решения подобных заданий.

Пример 3.27 Найдите все значения параметра $a,$ при которых в множестве решений неравенства $x(x-2a-6)+a^2<\frac{6a^2}{x}-12a$ можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

Решение.

Согласно области допустимых значений, $x\neq 0$. Следовательно, данное неравенство равносильно системе: $\begin{cases} x\neq 0, \\ x^3(x-2a-6)+a^2x^2<6a^2x-12ax^2. \end{cases}$

$$x^3(x-2a-6)+a^2x^2<6a^2x-12ax^2 \Leftrightarrow x^4-2ax^3-6x^3+a^2x^2-6a^2x+12ax^2<0 \Leftrightarrow$$
$$x^2(x^2-2ax+a^2)-6x(x^2-2ax+a^2)<0 \quad \Leftrightarrow (x\text{-}a)^2x(x-6)<0.$$

Дальнейшее исследование проведем методом интервалов, используя функцию $f(x)=(x-a)^2x(x-6)$. $\qquad D(f)=R,\ f(x)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=a, \\ x=0, \\ x=6. \end{array}\right.$

Анализируя знаки функции, в зависимости от возможных расположений числа a относительно точек 0 и 6, получаем следующие результаты.

При $a<0$ (см. рисунок 21) решением неравенства и системы является множество $x\in(0;\,6)$. В нем можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

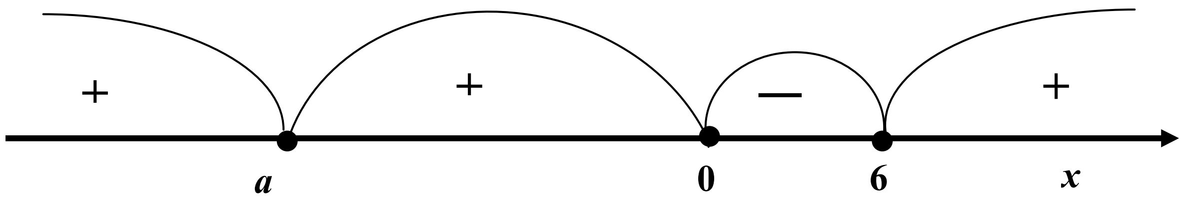


Рисунок 21

При $a=0$ (см. рисунок 22) решением неравенства и системы является множество $x\in(0;\,6)$. В нем можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

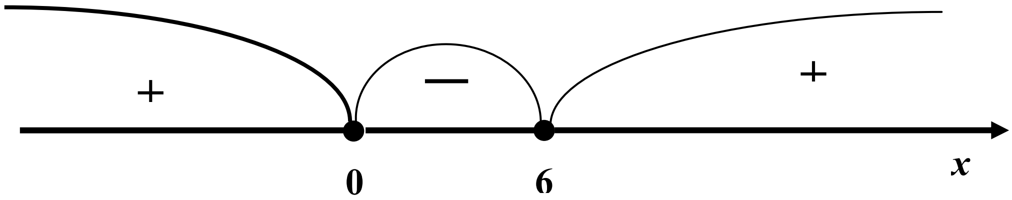


Рисунок 22

При $0 < a < 6$ (см. рисунок 23) решением неравенства и системы является множество $x \in (0; a) \cup (a; 6)$. На данном множестве можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек, только в том случае, когда $a \in (0; 1) \cup (1; 2) \cup (4; 5) \cup (5; 6)$.

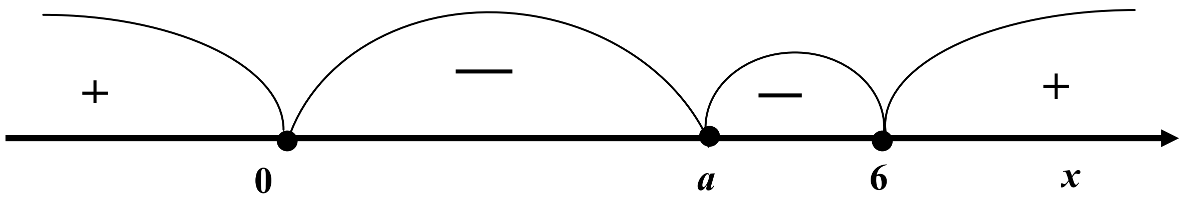


Рисунок 23

При $a = 6$ (см. рисунок 24) решением неравенства и системы является множество $x \in (0; 6)$. В нем можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

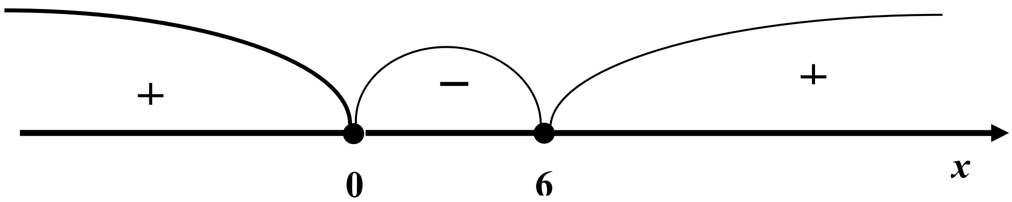


Рисунок 24

При $a > 6$ (см. рисунок 25) решением неравенства и системы является множество $x \in (0; 6)$. В нем можно расположить два отрезка длиной 1 и длиной 4, которые не имеют общих точек.

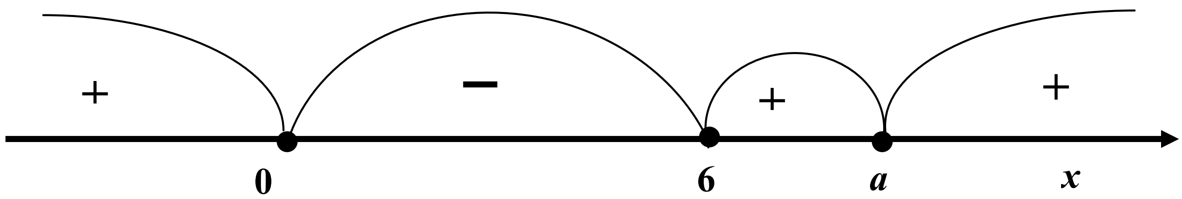


Рисунок 25

Таким образом, $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (4; 5) \cup (5; +\infty)$.

Пример 3.28 Даны два числа: $p = a^3\left(2a - \dfrac{7}{a}\right)$ и $q = a^{-3}\left(3a - \dfrac{5}{a}\right) - 3.$ При каких отрицательных значениях a каждое из них не меньше -5?

Решение.

$$\begin{cases} p \ge -5, \\ q \ge -5, \\ a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ a^3\left(2a - \dfrac{7}{a}\right) \ge -5, \\ a^{-3}\left(3a - \dfrac{5}{a}\right) - 3 \ge -5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 2a^4 - 7a^2 + 5 \ge 0, \\ 3a^{-2} - 5a^{-4} + 2 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a < 0, \\ 2a^4 - 7a^2 + 5 \ge 0, \\ 2a^4 + 3a^2 - 5 \ge 0. \end{cases}$$

Решим каждое неравенство, входящее в систему, отдельно, используя замену переменной: $t = a^2$.

$$2a^4 - 7a^2 + 5 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^2, \\ 2t^2 - 7t + 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^2, \\ \left[\begin{array}{l} t \ge \dfrac{5}{2}, \\ t \le 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 \ge \dfrac{5}{2}, \\ a^2 \le 1 \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$a \in \left(-\infty; -\sqrt{\frac{5}{2}}\right] \cup [-1; 1] \cup \left[\sqrt{\frac{5}{2}}; +\infty\right).$$

$$2a^4 + 3a^2 - 5 \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^2, \\ 2t^2 + 3t - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = a^2, \\ \left[\begin{array}{l} t \ge 1, \\ t \le -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2 \ge 1, \\ a^2 \le -\dfrac{5}{2} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty).$$

Значит, $\begin{cases} a < 0, \\ a \in \left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right] \cup [-1;\ 1] \cup \left[\sqrt{\dfrac{5}{2}}; +\infty\right), \\ a \in (-\infty; -1] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow a \in \left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right] \cup \{-1\}.$

Ответ: $a \in \left(-\infty; -\sqrt{\dfrac{5}{2}}\right] \cup \{-1\}.$

Пример 3.29 При каких значениях параметра a уравнение $x\left(x^{12} - ax^6 + a^4\right) = 0$ имеет ровно пять действительных корней, образующих арифметическую прогрессию?

Решение.

$x\left(x^{12}-ax^6+a^4\right)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x^{12}-ax^6+a^4=0. \end{array}\right.$ Следовательно, исследуемое уравнение может иметь ровно пять действительных корней, если уравнение $x^{12}-ax^6+a^4=0$ будет иметь ровно четыре действительных корня (различных и отличных от нуля). Очевидно, что это автоматически накладывает ограничение на значение параметра a: $a \neq 0$.

Уравнение $x^{12}-ax^6+a^4=0$, заменой переменной $y=x^6$ сводится к исследованию уравнения $y^2-ay+a^4=0$, которое имеет действительные различные корни y_1 и y_2, только в случае, если:

$$a^2-4a^4>0 \iff a^2(1-2a)(1+2a)>0 \iff a\in\left(-\frac{1}{2};0\right)\cup\left(0;\frac{1}{2}\right).$$

Если $y_1>0$ и $y_2>0$, то уравнение $x^{12}-ax^6+a^4=0$ будет иметь четыре действительных различных, отличных от нуля, корня: $\sqrt[6]{y_1}$, $-\sqrt[6]{y_1}$, $\sqrt[6]{y_2}$, $-\sqrt[6]{y_2}$.

Так как по теореме Виета: $\begin{cases} y_1+y_2=a, \\ y_1\cdot y_2=a^4; \end{cases}$ то $a>0$ и, значит, $a\in\left(0;\frac{1}{2}\right)$.

Пусть, для определенности, $y_1<y_2$. Тогда $-\sqrt[6]{y_2}<-\sqrt[6]{y_1}<0<\sqrt[6]{y_1}<\sqrt[6]{y_2}$.

Используя необходимый и достаточный признак арифметической прогрессии: $a_n=\dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}, \forall n$; получаем, что данная последовательность чисел будет являться арифметической прогрессией, тогда и только тогда, когда $2\sqrt[6]{y_1}=\sqrt[6]{y_2}$ или $64y_1=y_2$.

Таким образом, приходим к системе: $\begin{cases} y_1+y_2=a, \\ y_1\cdot y_2=a^4, \\ 64y_1=y_2. \end{cases}$ Решая которую (с учетом указанных выше ограничений на y_1 и y_2), получаем: $y_1=\dfrac{a^2}{8}$, $y_2=8a^2$. И, следовательно, приходим к уравнению $\dfrac{a^2}{8}+8a^2=a$, откуда, следует, что $a=\dfrac{8}{65}$ (значение $a=0$ не удовлетворяет условиям задачи).

Ответ: $\dfrac{8}{65}$.

Пример 3.30 Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $(x-2)^2-(a+2)|x-2|+2a\le 0$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей геометрической прогрессии с первым членом, равным 2,9, и положительным знаменателем.

Решение.

$$(x-2)^2-(a+2)|x-2|+2a\le 0 \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\(x-2)^2-(a+2)(x-2)+2a\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\(x-2)^2+(a+2)(x-2)+2a\le 0\end{cases}\end{array}\right. \iff$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\x^2-(a+6)x+4a+8\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\x^2-(2-a)x\le 0\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\(x-4)(x-(a+2))\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\x(x-(2-a))\le 0.\end{cases}\end{array}\right.$$

Число 2,9 будет являться решением неравенства, если оно будет принадлежать множеству решений первой системы, а это возможно лишь, если $\begin{cases}a+2\le 4,\\a+2\le 2{,}9\end{cases} \Rightarrow a\le 0{,}9.$

Все члены прогрессии будут положительными, если множество решений второй системы не будет содержать отрицательных чисел, а это возможно лишь при $2-a>0$, т.е. при $a<2$. Таким образом, $\begin{cases}a\le 0{,}9;\\a<2\end{cases} \Rightarrow a\le 0{,}9.$

Ответ: $(-\infty;\ 0{,}9]$.

Пример 3.31 Найдите все пары целых чисел, удовлетворяющих системе неравенств $\begin{cases}2x^2+2y^2-12x+20y+65<0,\\4x+2y>3.\end{cases}$

Решение.

$$\begin{cases}2x^2+2y^2-12x+20y+65<0,\\4x+2y>3\end{cases} \iff \begin{cases}2(x-3)^2+2(y+5)^2<3,\\4x+2y>3.\end{cases}$$

Если (x,y)- целочисленное решение системы, то $(x-3)$ и $(y+5)$ - также целые числа. Следовательно, первое неравенство системы имеет в качестве решений пары целых чисел, только в случае когда

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-3)^2=0,\\(y+5)^2=1,\end{cases}\\ \begin{cases}(x-3)^2=1,\\(y+5)^2=0\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3,\\ \left[\begin{array}{l}y=-4,\\y=-6,\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}y=-5,\\ \left[\begin{array}{l}x=4,\\x=2.\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$$

Второму неравенству системы удовлетворяют лишь пары: (3; - 4), (4; - 5).

Ответ: (3; - 4), (4; - 5).

Задания для самостоятельного решения

1. При каком значении параметра a уравнение $ax^2+4x+1=0$ имеет два равных корня?

2. Найдите все значения параметра a**,** при которых уравнение $x^2-3ax+a^2=0$ имеет два корня x_1 и x_2, удовлетворяющие условию $x_1^2+x_2^2=1{,}75$.

3. Решите уравнение $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$.

4. Решите уравнение $2x^4-3x^3-7x^2+6x+8=0$.

5. Найдите наибольшее значение параметра a, при котором уравнение $x^3+5x^2+ax+b=0$ с целыми коэффициентами имеет три различных корня, один из которых равен - 2.

6. Решите уравнение $(x^2+x+1)(x^2+x+2)=12$.

7. Решите уравнение $(x-6)^4+(x-8)^4=16$.

8. Решите уравнение $(x+4)(x+5)(x+7)(x+8)=4$.

9. Найдите целые решения уравнения $(x-3)(x+9)(x^2-4x-12)=300x^2$.

10. Решите уравнение $(x^2-6x-9)^2=x(x^2-4x-9)$.

11. Решите уравнение $\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{5}{x+2}=\dfrac{13}{x^2+x-2}$.

12. Решите уравнение $\dfrac{24}{x^2+2x-8}-\dfrac{15}{x^2+2x-3}=2$.

13. Решите уравнение $\dfrac{21}{x^2-4x+10}-x^2+4x=6$.

14. Решите уравнение $\dfrac{x^2+1}{x}+\dfrac{x}{x^2+1}=2{,}9$.

15. Решите уравнение $\dfrac{2x}{3x^2-x+2}-\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}=1$.

16. Решите уравнение $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{4x}{x^2-12x+15}$.

17. Решите неравенство $\dfrac{x-1}{3}-2(1-4x)>\dfrac{1}{4}x-\dfrac{7-52x}{6}$.

18. Решите неравенство $(x-2)(3+x)(1-x)>0$.

19. Решите неравенство $(x^2-3x+2)(x^3-3x^2)(4-x^2)\le 0$.

20. Решите неравенство $(x^2+3x+1)(x^2+3x-3)\ge 5$.

21. Решите неравенство $\dfrac{1}{2-x}+\dfrac{5}{2+x}<1$.

22. Найдите наименьшее значение x, удовлетворяющее неравенству $x \geq -14 - \dfrac{64}{x-2}$.

23. При каких значениях параметра a уравнение $x^2 + (2a+6)x + 4a + 12 = 0$ имеет два различных действительных корня, каждый их которых, больше чем -1?

24. Найдите все значения параметра a, для которых при каждом x из промежутка [-2; -1) значение выражения $x^4 - 2x^2$ не равно значению выражения $ax^2 + 5$.

25. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $p = a^3\left(3a - \dfrac{8}{a}\right) - 6$ и $q = a^{-3}\left(3a - \dfrac{2}{4}\right) - 4$ меньше, чем - 3.

26. Найдите все значения параметра a, при которых в множестве решений неравенства $\dfrac{8a^2}{x} - x(x - 2a - 8) > 16a + a^2$ нельзя расположить два отрезка длиной 2 и длиной 5, которые не имеют общих точек.

27. При каких значениях параметра a корни уравнения $x^3 + ax^2 + 14x + 8 = 0$ составляют геометрическую прогрессию?

28. Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-6) \geq (a+3)(|x-3| - 3)$ содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 4, и знаменателем $-3 < q < -1$.

29. Найдите все пары чисел, удовлетворяющих системе неравенств
$$\begin{cases} x^2 + y^2 < 16x - 22y - 171, \\ 30x - y^2 > 252 + 14y + x^2. \end{cases}$$

Ответы: **1)** 4; **2)** {-0,5; 0,5); **3)** 1; **4)** $\{-1; 2; \dfrac{1 \pm \sqrt{3}}{4}\}$; **5)** 7; **6)** {-2;1}; **7)** {6;8}; **8)** $\{-6; -6 \pm \sqrt{5}\}$; **9)** {1;18}; **10)** $\{-1; 9; \dfrac{5 \pm \sqrt{61}}{2}\}$; **11)** 2; **12)** $\{0; -2; \dfrac{-2 \pm \sqrt{66}}{2}\}$; **13)** {1; 3}; **14)** {0,5; 2}; **15)** $\dfrac{-11 \pm \sqrt{97}}{6}$; **16)** $\{3; 5; 9 \pm \sqrt{66}\}$; **17)** (-∞; -2); **18)** (-∞; -3) ∪ (1; 2); **19)** [- 2; 1]∪{2}∪ [3; +∞); **20)** (- ∞; - 4] ∪ [- 2; 1] ∪ [1; + ∞); **21)** (- ∞; - 2) ∪ (2; + ∞); **22)** - 6; **23)** $\left(-\dfrac{7}{2}; -3\right]$; **24)** (- ∞; - 6]∪(0,75; + ∞); **25)** $(0;1) \cup (\sqrt{2}; \sqrt{3})$; **26)** [1;2]∪[3;5]∪[6;7]; **27)** 7; **28)** 105; **29)** (11; 9).

4 Текстовые задания (проценты, задачи на составление уравнений, арифметическая и геометрическая прогрессии)

Повторяя тему *"Проценты"* (смотрите [64], [85], [95], [113], [118]), следует обратить внимание на то, что все задачи по данной теме условно можно разбить на три группы: нахождение процентов от заданного числа, восстановление числа по его процентам, процентное отношение двух чисел. Чаще всего проверка усвоения данной темы проводится параллельно с проверкой навыков решения задач с помощью составления уравнений.

"Задачи на составление уравнений", которые предлагаются на экзаменах и ЕГЭ, бывают различных типов: стоимость, работа, сплавы, смеси, движение и другие. Наиболее удачный подбор задач по данной теме, на наш взгляд, имеется в [38], [67], [69], [76], [85], [95], [100], [118], [133], [136], [137], [146].

Пример 4.1 Сумма двух чисел равна 400. Если первое число уменьшить на 20%, а второе на 15%, то сумма уменьшится на 68. Найти эти числа.

Решение.

Пусть x - первое число, y - второе число. Используя условия задачи, получаем систему: $\begin{cases} x+y=400, \\ \dfrac{x\cdot 80}{100}+\dfrac{y\cdot 85}{100}=332. \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=400, \\ \dfrac{x\cdot 80}{100}+\dfrac{y\cdot 85}{100}=332 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=400, \\ 80x+85y=33200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 80x+80y=32000, \\ 80x+85y=33200 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 80x+80y=32000, \\ 5y=1200 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=400, \\ y=240 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=160, \\ y=240. \end{cases}$$

Ответ: 160 и 240.

Пример 4.2 Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11%) реализовать этот план? (ответ округлите до целых).

Решение.

К концу первого года величина вклада будет $\dfrac{7000}{100}\cdot 111=7770$ рублей. Пусть сумма, которую необходимо положить на счет, - x рублей. Тогда к концу второго года на счету будет $\dfrac{(7770+x)\cdot 111}{100}$ рублей.

$$\frac{(7770+x)\cdot 111}{100} \geq 10000 \Leftrightarrow (7770+x)\cdot 111 \geq 1000000 \Leftrightarrow 7770+x \geq \frac{1000000}{111} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x \geq \frac{1000000}{111} - 7770 \approx 1239{,}009.$$

Следовательно, необходимо положить 1240 рублей.

Ответ: 1240.

Пример 4.3 Найдите двузначное число (или сумму таких двузначных чисел, если их несколько), которое при перестановке цифр местами уменьшается на 28,125 процента.

Решение.

Пусть в исходном числе число десятков - x, а число единиц - y. Согласно условию задачи, $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$; $y \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. Тогда, исходное число: $10x + y$, а число, получающее перестановкой цифр: $10y + x$.

Новое число составляет 71,875 % от исходного.

Следовательно, $\frac{(10x+y)}{100} \cdot 71{,}875 = 10y + x$. Решая данное уравнение, получаем: $(10x+y)\cdot\frac{575}{8} = 1000y + 100x \Leftrightarrow (10x+y)\cdot\frac{23}{8} = 40y + 4x \Leftrightarrow$

$$230x + 23y = 320y + 32x \Leftrightarrow 198x = 297y \Leftrightarrow 2x = 3y \Leftrightarrow y = \frac{2x}{3}.$$

Перебирая возможные значения x, убеждаемся, что подходят только следующие варианты: $\begin{cases} x = 3, \\ y = 2; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 6, \\ y = 4; \end{cases}$ $\begin{cases} x = 9, \\ y = 6. \end{cases}$ Таким образом, исходными числами могут быть: 32, 64, 96. Их сумма равна 192.

Ответ: 192.

Пример 4.4 Свежие грибы содержат 90% воды, а сухие 12%. Сколько получится сухих грибов из 22 кг свежих?

Решение.

Из условия задачи следует, что вещество, не являющееся водой и соответственно (по условию задачи) не изменяющееся по массе, составляет 10% или 2,2 кг.

В новом состоянии эти 2,2 кг составляют уже 88%, следовательно, сухих грибов будет: $\frac{2{,}2}{88} \cdot 100 = 2{,}5$ кг.

Ответ: 2,5 кг.

Пример 4.5 Производительность труда возросла сначала (в первом месяце) на 15%; во втором ещё на 10%; затем в третьем еще на 20%. На сколько процентов возросла производительность труда за три месяца?

Решение.

Пусть x - исходная производительность труда, тогда она изменялась следующим образом:

1 месяц - $\frac{x \cdot 115}{100} = 1{,}15 \cdot x$;

2 месяц - $\left(\frac{x \cdot 115}{100}\right) \cdot \frac{110}{100} = \frac{x \cdot 12650}{10000} = \frac{1265x}{1000} = 1{,}265 \cdot x$;

3 месяц - $\left(\frac{1265x}{1000}\right) \cdot \frac{120}{100} = \frac{1518}{1000}x = 1{,}518 \cdot x$.

Чтобы узнать, на сколько процентов возросла производительность труда за три месяца, достаточно определить: сколько процентов от исходной производительности x составляет новая производительность $1{,}518 \cdot x$.

Учитывая, что x - 100%; $1{,}518x$ - y %, получаем пропорцию: $\frac{1{,}518x}{x} = \frac{y}{100}$, из которой следует, что $y = 151{,}8$. Т.е. новая производительность составляет 151,8% от старой, и за три месяца возросла на 51,8 %.

Ответ: на 51,8 %.

Пример 4.6 Сплав состоит из серебра и меди, причем масса серебра составляет $14\frac{2}{7}$ % массы меди. Каково процентное содержание меди в сплаве?

Решение.

Пусть x - масса меди, тогда масса серебра - $\frac{x}{100} \cdot 14\frac{2}{7} = \frac{x}{100} \cdot \frac{100}{7} = \frac{x}{7}$, а масса всего сплава: $x + \frac{x}{7} = \frac{8x}{7}$. Учитывая, что $\frac{8x}{7}$ - 100%, x - y %; получаем пропорцию: $\frac{x}{\frac{8x}{7}} = \frac{y}{100}$, из которой следует, что $y = 87{,}5$; т.е. масса меди составляет 87,5 % от массы всего сплава.

Ответ: 87,5 %.

Пример 4.7 Из двух сплавов с 60 % и 80 % содержанием меди надо изготовить сплав весом 40 кг с 75 % содержанием меди. Сколько кг каждого сплава надо взять для этого?

Решение.

Пусть взяли x кг первого сплава (60 %) и y кг второго сплава (80 %).

Первый слав содержит $\frac{x}{100} \cdot 60$ кг меди, второй - $\frac{y}{100} \cdot 80$ кг меди.

Так как в новом славе должно быть 40 кг, из которых $\frac{40}{100} \cdot 75$ кг меди, получаем систему: $\begin{cases} x + y = 40, \\ 0{,}6x + 0{,}8y = 30. \end{cases}$

$$\begin{cases} x+y=40, \\ 0{,}6x+0{,}8y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+6y=240, \\ 6x+8y=300 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x+6y=240, \\ 2y=60 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=40, \\ y=30 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10, \\ y=30. \end{cases}$$

Ответ: нужно взять 10 кг 60 % сплава и 30 кг 80 % сплава.

Пример 4.8 Во втором круге футбольного чемпионата команда «Зубило» увеличила по сравнению с первым кругом количество забитых голов на 65 %, а команда «Метеор» - на 40 %. В итоге общее число голов, забитых обеими командами, возросло в полтора раза. Сколько процентов от общего числа голов, забитых обеими командами в первом круге, составляли голы, забитые командой «Метеор»?

Решение.

Пусть число голов, забитых командой «Метеор» в первом круге, равно *x*, а число голов, забитых командой «Зубило» в первом круге, – *y*. Тогда во втором круге команда «Метеор» забила $\frac{140x}{100}$ голов, а команда «Зубило» - $\frac{165y}{100}$ голов.

Так как во втором круге общее число голов возросло в полтора раза, приходим к уравнению: $1{,}5\cdot(x+y)=1{,}4\cdot x+1{,}65\cdot y$, откуда следует, что $y=\frac{2x}{3}$.

Следовательно, общее количество голов, забитых командами в первом круге, равно $x+\frac{2x}{3}=\frac{5x}{3}$. Учитывая, что $\frac{5x}{3}-100\,\%,\ x-z\,\%$; получаем пропорцию, позволяющую определить процентное содержание z числа голов, забитых командой «Метеор» в первом круге, к общему числу голов, забитых в первом круге: $\frac{5x}{3\cdot 100}=\frac{x}{z}$, откуда следует, что $z=\frac{300}{5}=60$.

Ответ: 60.

Пример 4.9 Цистерна заполняется керосином за 2 часа с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 1:2:7. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 1 час 12 минут совместной работы первого и третьего насосов?

Решение.

Общая производительность насосов - $\frac{1}{2}$ цистерны в час. Так как 1+2+7=10, то производительность первого насоса - $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{20}$ часть цистерны в час; производительность второго насоса - $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10}=\frac{2}{20}$ части цистерны в час; производительность третьего насоса - $\frac{1}{2}\cdot\frac{7}{10}=\frac{7}{20}$ части цистерны в час.

1 час 12 минут = $1\frac{1}{5}$ часа = $\frac{6}{5}$ часа. За указанное время совместной работы первого и третьего насосов будет заполнена $\left(\frac{1}{20}+\frac{7}{20}\right)\cdot\frac{6}{5}=\frac{8}{20}\cdot\frac{6}{5}=\frac{48}{100}$ часть цистерны, или 48 %.

Ответ: 48 %.

Пример 4.10 Из резервуара идут три трубы. Через первые две трубы содержимое резервуара откачивается за 2 часа 20 минут, через первую и третью за 2 часа 48 минут, а через вторую и третью за 4 часа 40 минут. За какое время содержимое резервуара откачивается всеми трубами одновременно?

Решение.

Пусть x часов - время, необходимое первой трубе, чтобы одной откачать содержимое резервуара; y часов - время, необходимое второй трубе, чтобы одной откачать содержимое резервуара; z часов - время, необходимое третьей трубе, чтобы одной откачать содержимое резервуара. Следовательно, первая труба в течение часа откачивает $\frac{1}{x}$ часть резервуара, вторая - $\frac{1}{y}$ часть, третья - $\frac{1}{z}$ часть. Учитывая, что 2 часа 20 минут $=2\frac{1}{3}$ часа $=\frac{7}{3}$ часа, 2 часа 48 минут = $=2\frac{4}{5}$ часа = $\frac{14}{5}$ часа, 4 часа 40 минут = $4\frac{2}{3}$ часа = $\frac{14}{3}$ часа, получаем систему:

$$\begin{cases}\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{7},\\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{5}{14},\\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{3}{14}.\end{cases}$$

Классическая ошибка абитуриентов, решающих подобные задачи, состоит в том, что они тратят время на отыскание неизвестных x, y, z. В данном случае это не требуется, так как нам нужно найти время, необходимое для того, чтобы три трубы одновременно откачали содержимое резервуара. Следовательно, достаточно найти их общую производительность, т.е. $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$. Это можно сделать, складывая почленно все три уравнения системы: $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{3}{7}+\frac{5}{14}+\frac{3}{14}$. Таким образом, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2}$, т.е. три трубы одновременно за час откачивают $\frac{1}{2}$ часть резервуара, следовательно, при совместной работе им потребуется 2 часа для того, чтобы полностью откачать содержимое резервуара.

Ответ: 2 часа.

Пример 4.11 Расстояние между пристанями А и В по реке равно 36 км. Из А в В отплыл плот, а из В в А, спустя 8 часов, отошла лодка. В пункты назначения они прибыли одновременно. Какова скорость плота, если собственная скорость лодки 12 км в час?

Решение.

Пусть x км/час - скорость плота (т.е. скорость течения реки), $x \neq 0$. Тогда на путь из А в В плот потратил $\frac{36}{x}$ часов. Лодке на путь из В в А потребовалось $\left(\frac{36}{x} - 8\right)$ часов, причем двигалась она со скоростью (12 - x) км/час, т.к. шла против течения. Учитывая, что расстояние от В до А - 36 км, получаем уравнение: $(12 - x) \cdot \left(\frac{36}{x} - 8\right) = 36$.

$$(12 - x) \cdot \left(\frac{36}{x} - 8\right) = 36 \Leftrightarrow (12 - x)(36 - 8x) = 36x \Leftrightarrow x^2 - 21x + 54 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 18. \end{array}\right.$$

По условию задачи нам подходит только $x = 3$, т.к. собственная скорость лодки всего 12 км/час и, следовательно, не может быть меньше скорости течения реки.

Ответ: скорость плота 3 км/час.

Пример 4.12 Расстояние между городами А и В равно 900 км. Два поезда одновременно отправляются, один из А в В, другой из В в А. Они встречаются в пункте С. Первый поезд прибывает в город В через 4 часа после встречи со вторым поездом, а второй прибывает в город А через 16 часов после встречи с первым поездом. Определите расстояние АС.

Решение.

1 способ. Пусть скорость первого поезда - x км/час, скорость второго поезда - y км/час; t - время (в часах), через которое встретились поезда после своего выхода. Для того чтобы найти АС, достаточно определить либо xt, либо $16y$.

Опираясь на условие задачи, получаем систему: $\begin{cases} xt + yt = 900, \\ x(t+4) = 900, \\ y(t+16) = 900. \end{cases}$

Из которой следует, что $\begin{cases} xt + yt = 900, \\ xt + 4x = 900, \\ yt + 16y = 900. \end{cases}$

Складывая второе и третье уравнения данной системы, получаем, что $(xt + yt) + 4x + 16y = 1800$. Так как $xt + yt = 900$, получаем, что $4x + 16y = 900$, т.е. $x + 4y = 225$.

С другой стороны, вычитая из второго и третьего уравнений системы первое, получаем, что $\begin{cases} 4x - yt = 0, \\ 16y - xt = 0. \end{cases}$ Выражая t и сравнивая результаты, приходим к уравнению $\frac{4x}{y} = \frac{16y}{x}$; откуда следует, что $x^2 = 4y^2$. Так скорости поездов - числа положительные, то $x = 2y$. Учитывая ранее полученный результат: $x + 4y = 225$, получаем, что $6y = 225$, $y = 37{,}5$. Следовательно, АС = 600 км.

2 способ. Пусть расстояние АС – x км, тогда СВ – $(900 - x)$ км. Тогда, скорость первого поезда будет равна $\frac{900-x}{4}$ км/час, а скорость второго поезда - $\frac{x}{16}$ км/час. Следовательно, участок АС первый поезд прошел за $\frac{4x}{900-x}$ часа, а второй поезд прошел участок СВ за $\frac{16(900-x)}{x}$ часов. Так как до встречи они были в пути одинаковое время, получаем уравнение: $\frac{4x}{900-x} = \frac{16(900-x)}{x}$.

Из которого следует, что $4x^2 = 16(900-x)^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x = 4(900-x), \\ 2x = -4(900-x) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 600, \\ x = 1800. \end{array}\right.$

Условию задачи соответствует только $x = 600$.

Ответ: 600.

Данный пример показывает: как важно правильно (рационально) сделать выбор переменных, с помощью которых составляются уравнения.

Пример 4.13 Из пунктов А и В навстречу друг другу выехали соответственно грузовой и легковой автомобили. Грузовой автомобиль проходил в час 8% всего пути между пунктами и встретился с легковым автомобилем через 4 часа 10 минут после начала движения. Сколько минут потратил на путь от В до А легковой автомобиль?

Решение.

Пусть расстояние от А до В – x км. Тогда, скорость грузового автомобиля - $\frac{x}{100} \cdot 8 = \frac{2x}{25}$ (км/час), и до встречи он прошел $\frac{2x}{25} \cdot 4\frac{1}{6} = \frac{2x}{25} \cdot \frac{25}{6} = \frac{x}{3}$ (км).

Следовательно, легковой автомобиль прошел за это время $\frac{2x}{3}$ км, его скорость - $\frac{2x}{3} : \frac{25}{6} = \frac{2x}{3} \cdot \frac{6}{25} = \frac{4x}{25}$ (км/час). Таким образом, на путь от В до А легковой автомобиль затратил $x : \frac{4x}{25} = \frac{25}{4} = 6\frac{1}{4}$ часа, или 375 минут.

Ответ: 375 минут.

Задачи по теме *"Арифметическая и геометрическая прогрессия"* обычно решаются теми же методами, что и задачи на составление уравнений. Необходимо только учитывать особые свойства членов данных прогрессий и знать наиболее употребляемые формулы (смотрите, например, [5], [34], [38], [65], [69], [76], [85], [88], [118], [133], [136], [137], [138], [146], [152], [153]).

Пример 4.14 Дана арифметическая прогрессия, у которой пятый член равен 3, а девятый член равен 5. Найдите первый член прогрессии.

Решение.

Используя формулу, для представления общего члена арифметической прогрессии:

$a_n = a_1 + (n-1)d$, где a_1 - первый член прогрессии, а d - разность, получаем систему: $\begin{cases} a_1 + 4d = 3, \\ a_1 + 8d = 5. \end{cases}$ Вычитая из второго уравнения системы первое, умноженное на 2, получаем $-a_1 = -1,$ т. е. $a_1 = 1$.

Ответ: 1.

Пример 4.15 Известно, что в арифметической прогрессии $\{a_n\}$: $\begin{cases} a_3 + a_5 = 5, \\ a_3 \cdot a_5 = 6. \end{cases}$ Найдите сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

Решение.

Так как для арифметической прогрессии справедливы результаты:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{и} \quad a_n = a_m + d(n-m), \; n, m \in N,$$

то исходные данные можно представить в виде: $\begin{cases} a_4 = \dfrac{5}{2}, \\ (a_4 - d)(a_4 + d) = 6. \end{cases}$

$$\begin{cases} a_4 = \dfrac{5}{2}, \\ a_4^2 - d^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = \dfrac{5}{2}, \\ \dfrac{25}{4} - d^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_4 = \dfrac{5}{2}, \\ d^2 = \dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} d = 0{,}5; \\ a_4 = 2{,}5; \end{cases} \\ \begin{cases} d = -0{,}5; \\ a_4 = 2{,}5 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} d = 0{,}5; \\ a_1 = 1; \end{cases} \\ \begin{cases} d = -0{,}5; \\ a_1 = 4. \end{cases} \end{array} \right.$$

Учитывая, что $S_n = \dfrac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$, получаем: $\left[\begin{array}{l} S_{10} = 32{,}5; \\ S_{10} = 17{,}5. \end{array} \right.$

Ответ: $S_{10} = 32{,}5$ или $S_{10} = 17{,}5$.

Пример 4.16 Двадцатый член арифметической прогрессии равен 103, а сумма первых сорока членов равна 4020. Найдите число членов прогрессии, принадлежащих интервалу (-15; 0).

Решение.

$$\begin{cases} a_{20}=103, \\ S_{40}=4020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+19d=103, \\ \dfrac{(2a_1+39d)}{2}\cdot 40=4020 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1+19d=103, \\ 2a_1+39d=201 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 2a_1+38d=206, \\ 2a_1+39d=201 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+38d=206, \\ d=-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1=198, \\ d=-5. \end{cases}$$

Следовательно, $a_n=198-5(n-1)=203-5n$. $a_n \in (-15; 0) \Leftrightarrow$ $-15 < 203 - 5n < 0 \Leftrightarrow -218 < -5n < -203 \Leftrightarrow 40{,}6 < n < 43{,}6$.

Таким образом, в указанный интервал попадают члены арифметической прогрессии с номерами 41, 42 и 43, т.е. всего 3 члена.

Ответ: в указанный интервал попадут три члена арифметической прогрессии.

Пример 4. 17 Найдите сумму всех четных положительных трехзначных чисел, которые при делении на 5 дают в остатке 3.

Решение.

Нетрудно понять, что интересующие нас числа составляют арифметическую прогрессию, в которой $a_1=108, d=10, a_n=998$.

Для решения задачи необходимо определить номер последнего члена.

$$\begin{cases} a_n=998, \\ a_n=a_1+d(n-1). \end{cases}$$

Следовательно, $998 = 108 + 10\,(n - 1)$ и $n = 90$.

Таким образом, сумма всех четных трехзначных чисел, которые при делении на 5 дают остаток 3, будет равна сумме 90 членов данной прогрессии: $S_{90}=\dfrac{a_1+a_{90}}{2}\cdot 90=\dfrac{108+998}{2}\cdot 90=49770$.

Ответ: 49770.

Пример 4.18 Второй член геометрической прогрессии равен 2. Найдите произведение первых трех членов.

Решение.

$b_1\cdot b_2\cdot b_3=b_1\cdot b_3\cdot b_2=b_2^2\cdot b_2=b_2^3=2^3=8$, так как для членов геометрической прогрессии имеет место свойство: $b_n^2=b_{n-1}\cdot b_{n+1}$.

Ответ: 8.

Пример 4.19 Найдите третий член геометрической прогрессии, если её пятый член 48, а восьмой 384.

Решение.

Используя формулу общего члена геометрической прогрессии $b_n=b_1\cdot q^{n-1}, n\in N$; где b_1 - первый член, а q - знаменатель, получаем систему:

$\begin{cases} b_1 \cdot q^4 = 48, \\ b_1 \cdot q^7 = 384. \end{cases}$ Откуда следует, что $q^3 = 8$, $q = 2$. Следовательно, $b_1 = 3$ и $b_3 = b_1 \cdot q^2 = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Ответ: 12.

Пример 4.20 Найдите геометрическую прогрессию, состоящую из 6 членов, зная, что сумма трех первых ее членов равна 168, сумма трех последних 21.

Решение.

По условию: $\begin{cases} b_1 + b_2 + b_3 = 168, \\ b_4 + b_5 + b_6 = 21. \end{cases}$ Так как $b_n = b_1 \cdot q^{n-1},\ n \in N$, то исходные данные можно представить в виде: $\begin{cases} b_1 + b_1 q + b_1 q^2 = 168, \\ b_1 q^3 + b_1 q^4 + b_1 q^5 = 21. \end{cases}$ Вынося общие множители, замечаем, что: $\begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 168, \\ b_1(1+q+q^2)q^3 = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 168, \\ 168q^3 = 21 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q+q^2) = 168, \\ q = \dfrac{1}{2}. \end{cases}$ Следовательно, $q = \dfrac{1}{2}$, $b_1 = 96$ и прогрессия состоит из следующих членов: $\{96; 48; 24; 12; 6; 3\}$.

Ответ: $\{96; 48; 24; 12; 6; 3\}$.

Пример 4.21 В возрастающей геометрической прогрессии сумма первого и последнего членов равна 66, произведение второго и предпоследнего членов равно 128. Сумма всех членов равна 126. Сколько членов в прогрессии?

Решение.

По условию: $\begin{cases} b_1 + b_n = 66, \\ b_2 \cdot b_{n-1} = 128; \end{cases}$ $b_2 \cdot b_{n-1} = b_1 q \cdot b_{n-1} = b_1 \cdot b_{n-1} q = b_1 \cdot b_n$. Следовательно, система имеет вид: $\begin{cases} b_1 + b_n = 66, \\ b_1 \cdot b_n = 128. \end{cases}$ Решая которую, получаем, что $\begin{cases} b_1 = 64, \\ b_n = 2, \end{cases}$ или $\begin{cases} b_1 = 2, \\ b_n = 64. \end{cases}$ По условию, геометрическая прогрессия является возрастающей, поэтому подходит только один случай: $b_1 = 2,\ b_n = 64$.

Используя формулы для нахождения суммы n первых членов геометрической прогрессии: $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \dfrac{b_1 - b_1 q^n}{1-q} = \dfrac{b_1 - q b_1 q^{n-1}}{1-q} = \dfrac{b_1 - q b_n}{1-q}$, получаем уравнение: $\dfrac{2-64q}{1-q} = 126$. Из которого следует, что $q = 2$.

Так как в исследуемой прогрессии $b_1 = 2;\ q = 2;\ b_n = 64$, то для определения номера b_n достаточно решить уравнение: $2 \cdot 2^{n-1} = 64$. Откуда следует, что $n = 6$.

Ответ: $n = 6$.

Пример 4.22 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 12,5; а сумма 1-го и 2-го членов равна 12. Найдите b_1 и q.

Решение.

По условию задачи имеем систему: $\begin{cases} b_1 + b_2 = 12, \\ \dfrac{b_1}{1-q} = 12{,}5. \end{cases}$ Так как $q \neq 1$, то

$$\begin{cases} b_1 + b_1 q = 12, \\ b_1 = 12{,}5 \cdot (1-q), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(1+q) = 12, \\ b_1 = 12{,}5 \cdot (1-q), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12{,}5(1-q)(1+q) = 12, \\ b_1 = 12{,}5 \cdot (1-q), \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12{,}5(1-q^2) = 12, \\ b_1 = 12{,}5(1-q), \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q^2 = \dfrac{1}{25}, \\ b_1 = 12{,}5(1-q), \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} q = 0{,}2; \\ b_1 = 10, \end{cases} \\ \begin{cases} q = -0{,}2; \\ b_1 = 15. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\{(10; 0{,}2);\ (15; -0{,}2)\}$

Пример 4.23 Сумма трех чисел, составляющих арифметическую прогрессию, равна 30. Если из второго члена этой прогрессии вычесть 2, а остальные оставить без изменения, то получится геометрическая прогрессия. Найдите эти числа.

Решение.

Обозначим числа заданной арифметической прогрессии a_1, a_2, a_3. Так как $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 30, \\ a_2 = \dfrac{a_1 + a_3}{2}, \end{cases}$ то $a_2 = 10$.

По условию задачи числа $a_1, a_2 - 2, a_3$ уже составляют геометрическую прогрессию и, следовательно, $(a_2 - 2)^2 = a_1 \cdot a_3$.

Пусть разность арифметической прогрессии d, тогда $a_1 = a_2 - d = 10 - d;\quad a_3 = a_2 + d = 10 + d$ и, полученное уравнение приобретает вид: $8^2 = (10-d)(10+d)$. Откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} d = 4, \\ d = -4. \end{array} \right.$ Следовательно, возможны два случая: $a_1 = 6; a_2 = 10; a_3 = 14$ или $a_1 = 14; a_2 = 10; a_3 = 6$.

Ответ: $\{(6; 10; 14); (14; 10; 6)\}$.

Пример 4.24 Цена костюма снижалась несколько раз на одно и тоже число рублей. После третьего снижения она составила 2460 рублей, а после одиннадцатого снижения - 1980 рублей. После скольких снижений цена костюма составит 50 % от начальной цены?

Решение.

В данном случае можно применить арифметическую прогрессию, если рассматривать первоначальную цену костюма как первый член прогрессии, а величину, на которую проводилось снижение, как d - разность арифметической прогрессии. Тогда, цена после третьего снижения - четвертый член прогрессии, а после одиннадцатого - двенадцатый член прогрессии.

Учитывая условия задачи, получаем, что $a_4 = 2460,\ a_{12} = 1980$.

Используя формулу связи двух произвольных членов арифметической прогрессии: $a_n = a_m + d(n-m)$, $n, m \in N$; получаем, что $a_{12} - a_4 = 8d$, следовательно, $8d$ = - 480 и d = - 60. Т.о. цена снижалась каждый раз на 60 рублей. Начальная цена костюма в таком случае была равна $a_1 = a_4 - 3d = 2460 + 180 =$ $=2640$. Так как 50 % от первоначальной цены - 1320 рублей, то исходная цена должна быть снижена на 1320 рублей, чего можно достичь за 1320 : 60 = 22 понижения.

Ответ: 22.

Пример 4.25 В первую неделю работы очистных сооружений после их реконструкции количество вредных выбросов в реку ежедневно уменьшалось в одно и тоже число раз. Сколько вредных веществ попало в реку за эту неделю, если во второй день в реку попало 128 м^3, а в пятый день - 16 м^3 вредных веществ?

Решение.

Нетрудно заметить, что в данном случае можно применить геометрическую прогрессию, в которой количество выброшенных в первый день веществ - b_1. Согласно условию задачи, $b_2 = 128,\ b_5 = 16$.

Используя формулу связи двух произвольных членов геометрической прогрессии: $b_n = b_m \cdot q^{n-m};\ n, m \in N$; получаем: $b_5 = b_2 \cdot q^3$. Следовательно, $16 = 128 \cdot q^3$ и $q = \frac{1}{2}$. В таком случае, $b_1 = \frac{b_2}{q} = 256$.

Количество веществ, которое попало в реку за неделю, таким образом, будет равно сумме семи первых членов данной прогрессии:

$$S_7 = \frac{b_1(1-q^7)}{1-q} = \frac{256 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^7\right)}{1 - \frac{1}{2}} = 508.$$

Ответ: 508.

Замечание. В некоторых случаях решение задач на экзамене упрощается, если воспользоваться методом математической индукции или биномом Ньютона. С этими методами можно ознакомиться по [30], [64], [108], [153].

С другими примерами заданий, предлагавшихся на ЕГЭ и вступительных экзаменах в ОГУ (в форме тестов), можно ознакомиться, например, по пособиям [12], [17]- [20], [28], [33], [47] , [48], [52], [53], [55] – [61], [73] –[75], [79] – [81], [91], [92], [97] – [105], [122] – [124], [132], [147] – [149], [159], [160].

Задания для самостоятельного решения

1. Цену товара сначала снизили на 20 %, затем новую цену снизили еще на 15% и, наконец, после перерасчета, произвели снижение еще на 10 %. На сколько процентов снизили первоначальную цену?

2. Три литра 30 % раствора спирта смешали с 5 литрами 20 % раствора. Найти процентное содержание спирта в получившемся растворе.

3. Сколько килограммов воды нужно выпарить из 0,5 тонны целлюлозной массы с содержанием воды 85 %, чтобы получить массу, содержащую 75% воды?

4. Объем строительных работ был увеличен на 60 %, производительность труда при этом повысилась на 25 %. На сколько процентов надо увеличить число работающих?

5. Имеются два сплава золота и серебра: в одном количество этих металлов находится в отношении 2:3, в другом – в отношении 3:7. Сколько нужно взять каждого сплава, чтобы получить 8 кг нового сплава, в котором золото и серебро были бы в отношении 5 : 11?

6. Пешеход затратит на половину пути 2 часа 15 минут, а велосипедист может проехать три четверти этого же пути за полтора часа. На сколько процентов скорость велосипедиста выше, чем скорость пешехода?

7. Водитель проехал первые 36 % пути со скоростью, на 20 % меньшей запланированной. Определите количество процентов, на которые он должен увеличить свою фактическую скорость на оставшемся участке пути, чтобы в итоге весь путь был пройден на 5 % быстрее, чем планировалось.

8. Бак заполняют керосином за 2 час 30 минут с помощью трех насосов, работающих вместе. Производительности насосов относятся как 3 : 5 : 8. Сколько процентов объема будет заполнено за 1 час 18 минут совместной работы второго и третьего насосов?

9. Карлсон может съесть 7 банок варенья за 14 минут, а вдвоем с Сиропчиком они съедают 10 банок с вареньем за 12 минут. На сколько процентов скорость съедания варенья у Карлсона выше, чем у Сиропчика?

10. В резервуар проведены три трубы. Через первую и вторую в него наливается жидкость, а через третью выливается. Если в наполненном резервуаре одновременно открыть третью и первую трубы, то вся жидкость выливается за 80 минут, если открыть третью и вторую - за 100 минут, а если только третью – за 48 минут. За сколько минут выльется жидкость из наполненного резервуара, если будут открыты одновременно три трубы?

11. Велосипедист каждую минуту проезжает на 800 м меньше, чем мотоциклист, поэтому на путь в 30 км он затратил времени на 2 часа больше, чем мотоциклист. Сколько километров в час проезжал мотоциклист?

12. Расстояние между городами A и B равно 1800 км. Два поезда одновременно отправляются один из A в B, другой из B в A. Они встречаются в пункте C. Первый поезд прибывает в город B через 6 часов после встречи со вторым поездом, а второй прибывает в город A через 24 часа после встречи с первым поездом. Определите расстояние CB.

13. В арифметической прогрессии второй член равен 7, третий член равен 11. Найдите сумму первых 40 членов данной прогрессии.

14. В арифметической прогрессии $\begin{cases} a_n = 55, \\ a_2 + a_5 = 32{,}5; \\ S_{15} = 412{,}5. \end{cases}$ Найдите $a_1, d, n.$

15. Сумма пятнадцати первых членов арифметической прогрессии равна нулю, а произведение третьего и седьмого членов равно 20. С какого номера все члены данной прогрессии будут больше 15?

16. Найдите сумму всех положительных двузначных чисел, которые делятся на 3.

17. В геометрической прогрессии сумма 1 и 5 членов равна 51, а сумма 2 и 6 членов равна 102. Найдите первый член.

18. Известно, что в геометрической прогрессии $b_3 = 18, S_3 = 26$. Найдите b_1.

19. Найти утроенный куб знаменателя бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в три раза больше суммы трех ее первых членов.

20. Сумма трех чисел, являющихся последовательными членами арифметической прогрессии, равна 21. Если второе число уменьшить на 1, а третье увеличить на 1, то получатся три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти эти числа.

21. Во время распродажи с 21 июня по 1 июля количество проданных сервизов ежедневно увеличивалось на одно и тоже число. При этом с 21 по 24 июня было продано 460 сервизов, а с 23 по 26 июня было продано 700 сервизов. Сколько сервизов было продано за все время распродажи?

22. Число посетителей вновь открывшегося кафе в первые 8 дней работы увеличивалось ежедневно в одно и тоже число раз. Сколько человек посетило кафе в восьмой день, если в третий день было 288 посетителей, а в пятый - 648?

Ответы: **1)** 38,8; **2)** 23,75; **3)** 200; **4)** 28; **5)** 1 кг и 7 кг; **6)** 125; **7)** 60; **8)** 42,25; **9)** 50;**10)** 600**;** **11)** 60; **12)** 600; **13)** 3240; **14)** $a_1 = 10;\ d = 2{,}5;\ n = 19;$ **15)** 16; **16)** 1665; **17)** 3; **18)** 2; 32; **19)** 2; **20)** {12 7; 2}; {3; 7; 11}; **21)** 2050; **22)** 2187.

5 Уравнения и неравенства, содержащие знак абсолютной величины

К повторению темы *"Уравнения и неравенства, содержащие знак абсолютной величины"*, следует приступать, освоив методы решения рациональных уравнений и неравенств и повторив свойства абсолютной величины действительного числа. С методами решения уравнений и неравенств, содержащих знак абсолютной величины, можно ознакомиться по [3], [30], [34], [38], [50], [52], [53], [63], [66], [69], [72], [76], [85], [108], [116], [118], [127], [130], [133], [136], [146], [153].

Предлагаемые ниже примеры условно разбиваются на четыре группы: уравнения и неравенства, при решении которых используется геометрический смысл абсолютной величины (примеры 5.1 - 5.11, 5.20); уравнения и неравенства, при решении которых используется определение абсолютной величины (примеры 5.12 - 5.15, 5.21); уравнения и неравенства, при решении которых используется метод интервалов (примеры 5.16, 5.17, 5.22); графический метод (5.18, 5.19). Так как методы решения рациональных уравнений и неравенств рассмотрены нами в главе 3, то соответствующие промежуточные выкладки опускаются.

Пример 5.1 Решите уравнение $|x - 1| = 3$.
Решение.

$$|x-1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=3, \\ x-1=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-2; 4\}$.

Пример 5.2 Решите уравнение $||x - 1| - 7| =2$.
Решение.

$$||x-1|-7|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1|-7=2, \\ |x-1|-7=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} |x-1|=9, \\ |x-1|=5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=9, \\ x-1=-9, \\ x-1=5, \\ x-1=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=10, \\ x=-8, \\ x=6, \\ x=-4. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{-8; -4; 6; 10\}$.

Пример 5.3 Решите уравнение $\left|x^2-4\right|+\left|x^3+5x^2+7x+2\right|=0$.

Решение.

$$\left|x^2-4\right|+\left|x^3+5x^2+7x+2\right|=0 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|x^2-4\right|=0, \\ \left|x^3+5x^2+7x+2\right|=0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-4=0, \\ x^3+5x^2+7x+2=0. \end{cases} \qquad x^2-4=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=2, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Следовательно, остается только выяснить: являются ли данные числа корнями второго уравнения. Нетрудно заметить, что только $x = -2$ является корнем второго уравнения системы: $-8+20-14+2=0$.

Ответ: - 2.

Пример 5.4 Решите неравенство $|2x-7| \le 5$.

Решение.

$|2x-7| \le 5 \iff -5 \le 2x-7 \le 5 \iff 2 \le 2x \le 12 \iff 1 \le x \le 6$.

Ответ: $x \in [1; 6]$.

Пример 5.5 Решите неравенство $|x^2-4x| < 5$.

Решение.

$$|x^2-4x|<5 \iff \begin{cases} x^2-4x<5, \\ x^2-4x>-5 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-4x-5<0, \\ x^2-4x+5>0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\in(-1;5), \\ x\in R \end{cases} \Rightarrow x\in(-1;5).$$

Ответ: $x \in (-1; 5)$.

Пример 5.6 Решите неравенство $\left|\dfrac{x+4}{x+2}\right| \le 1.$

Решение.

ОДЗ: $x \ne -2$.

$$\left|\frac{x+4}{x+2}\right| \le 1 \iff \begin{cases} \dfrac{x+4}{x+2} \le 1, \\ \dfrac{x+4}{x+2} \ge -1 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{x+4}{x+2}-1 \le 0, \\ \dfrac{x+4}{x+2}+1 \ge 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \dfrac{2}{x+2} \le 0, \\ \dfrac{2x+6}{x+2} \ge 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x\in(-\infty;-2), \\ x\in(-\infty;-3]\cup(-2;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-3].$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3]$.

Пример 5.7 Решите неравенство $|2x+5| \ge 1$.

Решение.

$$|2x+5|\ge 1 \iff \left[\begin{array}{l} 2x+5\ge 1, \\ 2x+5\le -1 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} 2x\ge -4, \\ 2x\le -6 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x\ge -2, \\ x\le -3 \end{array}\right. \Rightarrow x\in(-\infty;-3]\cup[-2;+\infty)$$

Ответ: $x \in (-\infty; -3] \cup [-2; +\infty)$.

Пример 5.8 Решите неравенство $|2x^2-9x+15| \ge 20$.

Решение.

$$\left|2x^2-9x+15\right|\ge 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-9x+15\ge 20,\\ 2x^2-9x+15\le -20\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x^2-9x-5\ge 0,\\ 2x^2-9x+35\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[5;+\infty\right),\\ x\in\varnothing\end{array}\right. \Rightarrow x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[5;+\infty\right).$$

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]\cup\left[5;+\infty\right).$

Пример 5.9 Решите неравенство $\left|\dfrac{x-3}{x-5}\right|\ge 1$.

Решение.

ОДЗ: $x\ne 5$.

$$\left|\frac{x-3}{x-5}\right|\ge 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{x-5}\ge 1,\\ \dfrac{x-3}{x-5}\le -1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{x-3}{x-5}-1\ge 0,\\ \dfrac{x-3}{x-5}+1\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\dfrac{2}{x-5}\ge 0,\\ \dfrac{2x-8}{x-5}\le 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\in(5;+\infty),\\ x\in[4;5)\end{array}\right. \Rightarrow$$

$x\in[4;5)\cup(5;+\infty)$.

Ответ: $x\in[4;5)\cup(5;+\infty)$.

Пример 5.10 Решите неравенство $\left|\left|x-1\right|-5\right|\le 2$.

Решение.

$$\left|\left|x-1\right|-5\right|\le 2 \Leftrightarrow -2\le\left|x-1\right|-5\le 2 \Leftrightarrow 3\le\left|x-1\right|\le 7 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\left|x-1\right|\le 7,\\ \left|x-1\right|\ge 3\end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l}-7\le x-1\le 7,\\ \left[\begin{array}{l}x-1\ge 3,\\ x-1\le -3\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}-6\le x\le 8,\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 4,\\ x\le -2\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l}x\in[-6;\ 8],\\ (-\infty;\ -2]\cup[4;+\infty)\end{array}\right. \Rightarrow x\in[-6;-2]\cup[4;8]\ .$$

Ответ: $x\in[-6;-2]\cup[4;8]$.

Пример 5.11 Решите уравнение $|x|+x^3=0$.

Решение.

$$|x|+x^3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 0,\\ x+x^3=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0,\\ -x+x^3=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 0,\\ x(1+x^2)=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0,\\ x(x^2-1)=0\end{array}\right.\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}x\ge 0,\\ x=0,\end{array}\right.\\ \left\{\begin{array}{l}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=1,\\ x=-1\end{array}\right.\end{array}\right.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=-1.\end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{-1;\ 0\}$.

Пример 5.12 Решите уравнение $x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0$.

Решение.

$$x^2 - 6x + |x-4| + 8 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4, \\ x^2 - 6x + x - 4 + 8 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4, \\ x^2 - 6x - x + 4 + 8 = 8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4, \\ x^2 - 5x + 4 = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4, \\ x^2 - 7x + 12 = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 4, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x < 4, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = 3. \end{array}\right.$$

Ответ: $x \in \{3;\ 4\}$.

Пример 5.13 Решите уравнение $\big|x - |4-x|\big| - 2x = 4$.

Решение.

$$\big|x - |4-x|\big| - 2x = 4 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 4, \\ |x - 4 + x| - 2x = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ |x + 4 - x| - 2x = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 4, \\ |2x - 4| - 2x = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ 4 - 2x = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 4, \\ |2x - 4| - 2x = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 4, \\ x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \begin{cases} x \le 4, \\ |2x-4| - 2x = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \le x \le 4, \\ 2x - 4 - 2x = 4, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ -2x + 4 - 2x = 4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2 \le x \le 4 \\ x \notin \varnothing, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 2, \\ x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow x = 0.$$

Ответ: $x = 0$.

Пример 5.14 Решите неравенство $x^2 - 2|x| < 3$.

Решение.

$$x^2 - 2|x| < 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - 2x - 3 < 0, \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 + 2x - 3 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \ge 0, \\ x \in (-1;\ 3), \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x \in (-3;\ 1) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in [0;\ 3), \\ x \in (-3;\ 0) \end{array}\right. \Rightarrow x \in (-3;\ 3).$$

Ответ: $x \in (-3;\ 3)$.

Пример 5.15 Решите неравенство $x^2-4x-2|x-2|+1\le 0$.
Решение.

$$x^2-4x-2|x-2|+1\le 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x^2-6x+5\le 0,\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ x^2-2x-3\le 0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\ge 2,\\ x\in[1;\ 5],\end{cases}\\ \begin{cases}x<2,\\ x\in[-1;\ 3]\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in[2;\ 5],\\ x\in[-1;\ 2).\end{array}\right.$$

Следовательно, $x\in$ [-1; 5].
Ответ: $x\in$ [-1; 5].

Пример 5.16 Решите уравнение $|x-1|+|x-3|=2$.
Решение.

$|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\ge 1;\\ -(x-1), & x<1.\end{cases}$ $|x-3|=\begin{cases}x-3, & x\ge 3;\\ -(x-3), & x<3.\end{cases}$ Следовательно,

$$|x-1|+|x-3|=2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\ -(x-1)-(x-3)=2,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<3,\\ (x-1)-(x-3)=2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ (x-1)+(x-3)=2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\ x=1,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<3,\\ x\in R,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 3,\\ x=3\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x\in\varnothing,\\ x\in[1;\ 3),\\ x=3.\end{array}\right.$$

Следовательно, $x\in$ [1; 3].
Ответ: $x\in$ [1; 3].

Пример 5.17 Решите неравенство $|x-1|+|x-2|>3+x$.
Решение.

$$|x-1|+|x-2|>3+x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\ -(x-1)-(x-2)>3+x,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\ (x-1)-(x-2)>3+x,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ (x-1)+(x-2)>3+x\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<1,\\ x<0,\end{cases}\\ \begin{cases}1\le x<2,\\ x<-2,\end{cases}\\ \begin{cases}x\ge 2,\\ x>6.\end{cases}\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x<0,\\ x\in\varnothing,\\ x>6.\end{array}\right.$$

Следовательно, $x\in(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$.
Ответ: $x\in(-\infty;\ 0)\cup(6;\ +\infty)$.

Наибольшее затруднение на экзаменах вызывают задачи с параметрами. С методикой решения заданий с параметрами по данным темам можно ознакомиться по пособиям [15], [38], [54], [62] – [67], [69], [71], [76], [77], [84], [86], [87], [96], [106], [118], [130], [133], [136], [146], [151].

Пример 5.18 При каких значениях параметра *а* уравнение $\left|x^2 - 2x - 3\right| = a$ имеет три решения?

Решение.

Уравнения подобного типа проще всего решать графически. Для этого необходимо построить графики функций, стоящих в левой ($y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$) и правой ($y = a$) частях равенства, и определить, анализируя возможные значения параметра ***a***, когда графики функций будут иметь три точки пересечения.

Так как $x^2 - 2x - 3 = (x^2 - 2x + 1) - 4 = (x-1)^2 - 4$, то график функции $y = \left|x^2 - 2x - 3\right|$, т.е. $y = |(x-1)^2 - 4|$ легко построить, используя метод сдвига и деформации. Графиком функции $y = a$ является прямая, параллельная оси OX.

Различные варианты взаимного расположения графиков данных функций представлены на рисунках 26 - 29.

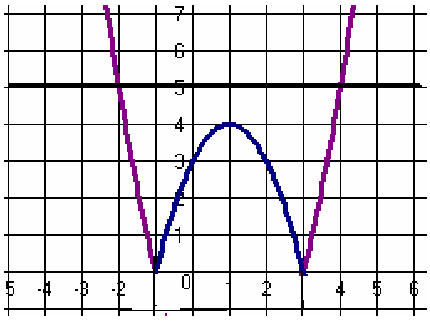


Рисунок 26 - $a > 4$.

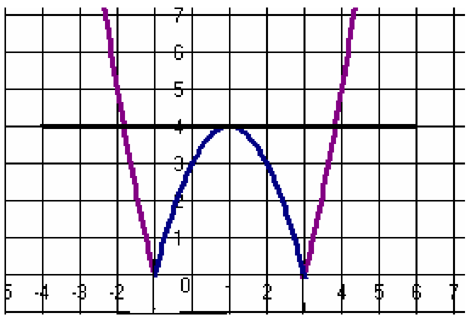


Рисунок 27 - $a = 4$.

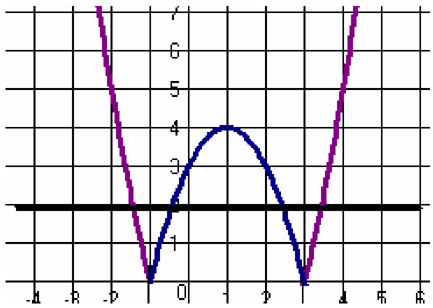


Рисунок 28 - $0 < a < 4$.

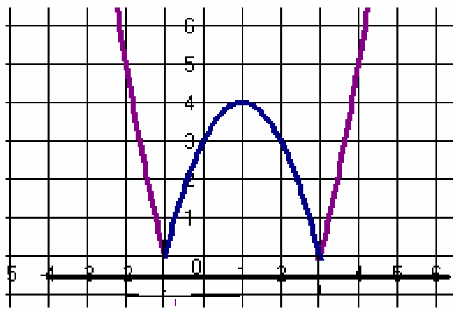


Рисунок 29 - $a < 0$.

Нетрудно заметить, что графики функций пересекаются в трех точках только при $a = 4$.

Ответ: 4.

Пример 5. 19 Найдите все значения параметра *a*, для которых при каждом x из промежутка [-5; -1) значение выражения x^2-3 не равно значению выражения $(a+4)|x|$.

Решение.

$x^2-3\neq|x|(a+4)\ \Leftrightarrow\ x^2-(4+a)|x|-3\neq0,\quad x\in[-5;-1).$

Введем новую переменную $t=|x|,\quad x\in[-5;-1)\ \Rightarrow\ t\in(1;5]$.

$x^2-(4+a)|x|-3\neq0,\quad x\in[-5;-1)\quad\Leftrightarrow\ t^2-(4+a)t-3\neq0,\quad t\in(1;5].$

Рассмотрим функцию $f(t)=t^2-(4+a)t-3,\ \ D(f)=R$; график функции – парабола, ветви которой направлены вверх.

$D=(4+a)^2+12>0,\ \forall a\in R$, следовательно, функция имеет две точки пересечения с осью абсцисс: t_1 и t_2, причем $t_1<0,\ t_2>0$, так как $f(0)=-3<0$.

Следовательно, $t^2-(4+a)t-3\neq0,\quad t\in(1;5]\ \Leftrightarrow\ t_2\notin(1;5]\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}t_2>5,\\ t_2\leq1.\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{l}t_2>5,\\ t_2\leq1\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}f(5)<0,\\ f(1)\geq0\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}25-(4+a)\cdot5-3<0,\\ 1-(4+a)\cdot1-3\geq0\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}a>\dfrac{2}{5},\\ a\leq-6.\end{array}\right.$$

Ответ: $a\in(-\infty;-6]\cup\left(\dfrac{2}{5};+\infty\right)$.

Пример 5.20 При каких значениях параметра a уравнение $|x^2-2ax-1|=1$ имеет три различных действительных корня?

Решение.

$$|x^2-2ax-1|=1\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x^2-2ax-1=1,\\ x^2-2ax-1=-1\end{array}\right.\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}x^2-2ax-2=0,\\ x(x-2a)=0.\end{array}\right.$$

Уравнение $x^2-2ax-2=0$ всегда имеет два действительных различных корня, так как $D=4a^2+8>0,\ \forall\ a\in R$.

Следовательно, исходное уравнение будет иметь 3 различных корня, если второе уравнение $x(x-2a)=0$ будет иметь кратный корень, несовпадающий с корнями первого уравнения.

$x(x-2a)=0\ \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0,\\ x=2a.\end{array}\right.$ Следовательно, $2a=0\ \Leftrightarrow\ a=0$.

При $a=0$ первое уравнение имеет вид: $x^2-2=0$, его корнями являются $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$. Таким образом, уравнение при $a=0$ действительно имеет три различных корня $x=0$, $x=\sqrt{2}$ и $x=-\sqrt{2}$.

Ответ: $a=0$.

Пример 5.21 Для каждого значения параметра a решите уравнение $|x-2a|+|x+2a|=4a$.

Решение.

$|x-2a|+|x+2a|=4a \quad \Leftrightarrow \quad |x - 2a|+|x+2a|=(x+2a)-(x-2a)$.

Так как $|x|=x \ \Leftrightarrow \ x\ge 0,$ $\quad |x|=-x \ \Leftrightarrow \ x\le 0$, то исходное уравнение будет равносильно системе: $\begin{cases} x+2a\ge 0, \\ x-2a\le 0. \end{cases}$ И, следовательно, $\begin{cases} x\ge -2a, \\ x\le 2a. \end{cases}$

При $a < 0$ данная система решений не имеет, при $a = 0$ решением системы является единственное значение $x = 0$, при $a > 0$ решением системы является множество $x\in[-2a; 2a]$.

Ответ: $x\in\varnothing$ при $a < 0$; $x = 0$ при $a = 0$; $x\in[-2a; 2a]$ при $a > 0$.

Пример 5.22 Для каждого значения параметра a решите уравнение $|2x-4|=a|6-2x|+2$.

Решение.

$$|2x-4|=a|6-2x|+2 \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2, \\ -(2x-4)=a(6-2x)+2, \end{cases} \\ \begin{cases} 2\le x\le 3, \\ 2x-4=a(6-2x)+2, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ 2x-4=-a(6-2x)+2 \end{cases} \end{array}\right. \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<2, \\ (a-1)x=3a-1, \end{cases} \\ \begin{cases} 2\le x\le 3, \\ (a+1)x=3a+3, \end{cases} \\ \begin{cases} x>3, \\ (1-a)x=3-3a. \end{cases} \end{array}\right.$$

Исследуем каждую систему, входящую в совокупность, отдельно.

$$\begin{cases} x<2, \\ (a-1)x=3a-1 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} x<2, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1, \\ 0\cdot x=2, \end{cases} \\ \begin{cases} a\ne 1, \\ x=\dfrac{3a-1}{a-1} \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \ \Rightarrow \ \begin{cases} x<2, \\ a\ne 1, \\ x=\dfrac{3a-1}{a-1}. \end{cases}$$

$$\frac{3a-1}{a-1}<2 \ \Leftrightarrow \ \frac{3a-1-2(a-1)}{a-1}<0 \ \Leftrightarrow \ \frac{a+1}{a-1}<0 \ \Leftrightarrow \ a\in(-1; 1).$$

Следовательно, данная система имеет решение $x=\dfrac{3a-1}{a-1}$ при $a\in(-1; 1)$.

$$\begin{cases} 2\le x\le 3, \\ (a+1)x=3a+3 \end{cases} \ \Leftrightarrow \ \begin{cases} 2\le x\le 3, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1, \\ 0\cdot x=0, \end{cases} \\ \begin{cases} a\ne -1, \\ x=3, \end{cases} \end{array}\right. \end{cases} \ \Rightarrow \ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-1, \\ x\in[2; 3], \end{cases} \\ \begin{cases} a\ne -1, \\ x=3. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} x > 3, \\ (1-a)x = 3-3a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ 0 \cdot x = 0, \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1, \\ x = 3 \end{cases} \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 1, \\ x \in (3;\ +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 1, \\ x = 3. \end{cases} \end{array} \right.$$

Таким образом, при $a=-1$ $x\in[2;3]$; при $a=1$ $x\in[3;+\infty)$; при $a\in(-1;1)$ $x\in\left\{3;\dfrac{3a-1}{a-1}\right\}$; при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ $x=3$.

Ответ: при $a=-1$ $x\in[2;3]$; при $a=1$ $x\in[3;+\infty)$;
при $a\in(-1;1)$ $x\in\left\{3;\dfrac{3a-1}{a-1}\right\}$; при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ $x=3$.

С примерами иррациональных, тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений и неравенств, содержащих абсолютную величину действительного числа, Вы сможете ознакомиться в главах 6 - 8.

Задания для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $\left||x-1|+2\right|=1$.

2. Решите уравнение $|x^2-9|+|x^3+6x^2+10x+3|=0$.

3. Решите неравенство $|x^2-x-3|<9$.

4. Решите неравенство $\left|\dfrac{x^2-1}{x+2}\right|<1.$

5. Решите неравенство $|3x-5|\geq 10$.

6. Решите неравенство $|x^2-x-6|>4$.

7. Решите неравенство $\left|\dfrac{2x-1}{x-1}\right|>2.$

8. Решите неравенство $\left|1-\dfrac{|x|}{1+|x|}\right|\geq\dfrac{1}{2}$.

9. Решите уравнение $x^2-5\,|\,x\,|+6=0$.

10. Решите уравнение $\dfrac{1-2x}{3-|\,x-1\,|}=1$.

11. Решите уравнение $\left|x-|15-x|\right|-3x=5$.

12. Решите неравенство $3|x-1|+x^2>7$.

13. Решите неравенство $\left|\dfrac{3|x|+2}{|x|-1}\right|<3$.

14. Решите уравнение $|x-1|+|x-2|+|x-3|=2$.

15. Решите неравенство $|x-2|>2+x-|3-x|$.

16. Найдите сумму целых решений неравенства $|1-5x|-|x-2|\le 3$ на отрезке $[-3;3]$.

17. Укажите, при каких значениях параметра a не имеет решений уравнение $|x-4|=ax-2$.

18. При каких значениях параметра a уравнение $\left|\dfrac{(a-1)x-(2a-1)}{x-1}\right|+\left|x-|1-a|+\dfrac{1}{2}\right|=0$ имеет лишь положительное решение?

19. Найдите все положительные значения параметра a**,** при которых для любых $x\in[-3;3]$ верно неравенство $|2x+a|x|-13|\ge 1$.

20. Найдите все значения параметра $a,$ для которых при каждом x из промежутка [-5; -2) значение выражения $x^2-4|x|-2$ не равно значению выражения $a|x|$.

21. Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $(|x|+|a-11|-4)\cdot(|x|-|a|+15)\ge 0$ содержит все члены некоторой возрастающей арифметической прогрессии с первым членом, равным -1, и разностью, меньше или равной 2.

22. Найдите сумму целых значений параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-6)\ge(a+3)(|x-3|-3)$ содержит все члены некоторой геометрической прогрессии с первым членом, равным 4, и знаменателем $-3<q<-1$.

Ответы: **1)** $\varnothing$; **2)** - 3; **3)** (- 3; 4); **4)** $\left(\dfrac{1-\sqrt{13}}{2};\ \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}\right)$;
5) $\left(-\infty;-\dfrac{5}{3}\right]\cup[5;+\infty)$; **6)** $\left(-\infty;\ \dfrac{1-\sqrt{41}}{2}\right)\cup(-1;2)\cup\left(\dfrac{1+\sqrt{41}}{2};+\infty\right)$;
7) $\left(\dfrac{3}{4};\ 1\right)\cup(1;+\infty)$; **8)** [- 1; 1]; **9)** {-3; -2; 2; 3}; **10)** $-\dfrac{1}{3}$; **11)** 2;
12) $(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$; **13)** $\left(-\dfrac{1}{6};\ \dfrac{1}{6}\right)$; **14)** 2; **15)** $(-\infty;\ 1)\cup(7;\ +\infty)$; **16)** 0;
17) $\left[-1;\ \dfrac{1}{2}\right)$; **18)** $\left\{-1;\ \dfrac{9+\sqrt{41}}{4}\right\}$; **19)** (0; 2]; **20)** $(-\infty;-3]\cup(0{,}6;+\infty)$; **21)** – 55;
22) 105.

6 Иррациональные уравнения и неравенства

К заданиям по теме *"Иррациональные уравнения и неравенства"* можно приступать лишь после того, как Вы научились решать рациональные уравнения и неравенства, уравнения и неравенства, содержащие знак абсолютной величины, усвоили свойства степени и методику проведения тождественных преобразований, научились следить за сохранением равносильности уравнений и неравенств. С методами решения иррациональных уравнений и неравенств можно ознакомиться в [3], [7], [9], [38], [41], [50], [66], [67], [69], [72], [76], [85], [86], [88], [108], [110], [116], [118], [125], [130], [131], [133], [134], [136], [146], [153].

Примеры 6.1 - 6.21 являются иллюстрацией применения четырех наиболее распространенных методов: использование свойств функций $y = x^{\alpha}$, $y = \sqrt[\alpha]{x}$ и $y = |\,x\,|$ (примеры 6.1 - 6.9); метод последовательного возведения в степень (примеры 6.10 - 6.17); метод замены переменной (примеры 6.18 - 6.20), графический метод (пример 6.21). Примеры 6.22 – 6.24 демонстрируют некоторые приемы решения заданий с параметрами. Так как методы решения рациональных уравнений и неравенств рассмотрены нами в главе 3, а методы решения уравнений и неравенств с абсолютной величиной в главе 5, то соответствующие промежуточные выкладки опускаются.

Пример 6.1 Решите уравнение $(x^2 - 1)\sqrt{2x - 1} = 0$.

Решение.

$$(x^2 - 1)\sqrt{2x-1} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0{,}5; \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 1 = 0, \\ \sqrt{2x-1} = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 0{,}5; \\ \left[\begin{array}{l} x = \pm 1, \\ x = 0{,}5 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 0{,}5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\{0{,}5;\ 1\}$.

Пример 6.2 Решите уравнение $\sqrt{x - 10} + \sqrt{8 - x} = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x - 10 \ge 0, \\ 8 - x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 10, \\ x \le 8. \end{cases}$ Следовательно, $x \in \varnothing$.

Так как ОДЗ - пустое множество, то уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 6.3 Решите уравнение $\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x + 2$.

Решение.

$\sqrt{x^2 + 4x + 4} = x + 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2} = x + 2 \Leftrightarrow |x + 2| = x + 2 \Leftrightarrow$ $x + 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge -2$.

Ответ: [- 2; + ∞).

Пример 6.4 Решите уравнение $\sqrt{-x^2+6x-9}=|x^{11}-3x^{10}|$.

Решение.

ОДЗ: $-x^2+6x-9\geq 0 \;\Leftrightarrow\; -(x^2-6x+9)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; -(x-3)^2 \geq 0 \;\Leftrightarrow\; x=3$.

Нетрудно заметить, что, подставляя данное значение в уравнение, мы получаем верное равенство: $\sqrt{0}=|3^{11}-3\cdot 3^{10}| \;\Rightarrow\; 0=0$.

Ответ: 3.

Пример 6.5 Решите неравенство $(x-1)\sqrt{x^2-x-2}\geq 0$.

Решение.

ОДЗ: $x^2-x-2\geq 0 \;\Leftrightarrow\; x\in(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$.

Решим неравенство, применяя метод интервалов и рассматривая функцию $f(x)=(x-1)\sqrt{x^2-x-2}$.

$D(f)=(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$; $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=2. \end{array}\right.$ Точка $x = 1$ не входит в область определения функции. Определяем знаки функции (см. рисунок 30).

Рисунок 30

Таким образом, $x \in \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Ответ: $\{-1\} \cup [2; +\infty)$.

Пример 6.6 Решите неравенство $\dfrac{\sqrt[6]{3x-7}}{2x-25}<\dfrac{38}{25-2x}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[6]{3x-7}}{2x-25}<\frac{38}{25-2x} \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt[6]{3x-7}}{2x-25}-\frac{38}{25-2x}<0 \;\Leftrightarrow\; \frac{\sqrt[6]{3x-7}+38}{2x-25}<0.$$

ОДЗ: $\begin{cases} 3x-7\geq 0, \\ 25-2x\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 3{,}5; \\ x\neq 12{,}5 \end{cases} \Rightarrow\; x\in[3{,}5;12{,}5)\cup(12{,}5;+\infty)$.

На области допустимых значений $\sqrt[6]{3x-7}+38\geq 38>0$, следовательно, решение неравенства сводится к решению системы:

$\begin{cases} x\in[3{,}5;12{,}5)\cup(12{,}5;+\infty), \\ 2x-25<0. \end{cases}$ Откуда следует, что $x\in[3{,}5;12{,}5)$.

Ответ: $[3{,}5;12{,}5)$.

Пример 6.7 Найдите все значения α, для которых число $\dfrac{\sqrt[3]{5\alpha-8}}{|4\alpha-17|-4\alpha+17}$ больше числа $\dfrac{34}{8-5\alpha}$.

Решение.

$$\frac{\sqrt[3]{5\alpha-8}}{|4\alpha-17|-4\alpha+17}>\frac{34}{8-5\alpha} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\sqrt[3]{5\alpha-8}}{|4\alpha-17|-4\alpha+17}-\frac{34}{8-5\alpha}>0.$$

ОДЗ: $\begin{cases}|4\alpha-17|-4\alpha+17\neq 0,\\ 8-5\alpha\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|4\alpha-17|\neq 4\alpha-17,\\ \alpha\neq 1{,}6\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4\alpha-17<0,\\ \alpha\neq 1{,}6\end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases}\alpha<4{,}25;\\ \alpha\neq 1{,}6\end{cases} \Rightarrow \alpha\in(-\infty;1{,}6)\cup(1{,}6;4{,}25).$

Так как на ОДЗ $|4\alpha-17|=-(4\alpha-17)$, то решение неравенства сводится к решению системы:

$$\begin{cases}x\in(-\infty;1{,}6)\cup(1{,}6;4{,}25),\\ \dfrac{\sqrt[3]{5\alpha-8}}{-8\alpha+34}-\dfrac{34}{8-5\alpha}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;1{,}6)\cup(1{,}6;4{,}25),\\ \dfrac{\sqrt[3]{5\alpha-8}\cdot(8-5\alpha)-34\cdot(34-8\alpha)}{(34-8\alpha)\cdot(8-5\alpha)}>0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases}x\in(-\infty;1{,}6)\cup(1{,}6;4{,}25),\\ -\dfrac{\left(\sqrt[3]{5\alpha-8}\right)^4+34\cdot(34-8\alpha)}{(34-8\alpha)\cdot(8-5\alpha)}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;1{,}6)\cup(1{,}6;4{,}25),\\ \dfrac{\left(\sqrt[3]{5\alpha-8}\right)^4+34\cdot(34-8\alpha)}{(34-8\alpha)\cdot(8-5\alpha)}<0.\end{cases}$$

На ОДЗ $34-8\alpha>0$ и $\left(\sqrt[3]{5\alpha-8}\right)^4+34\cdot(8-5\alpha)>0$, следовательно,

$$\begin{cases}x\in(-\infty;1{,}6)\cup(1{,}6;4{,}25),\\ 8-5\alpha<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\in(-\infty;1{,}6)\cup(1{,}6;4{,}25),\\ \alpha>1{,}6\end{cases} \Rightarrow \alpha\in(1{,}6;4{,}25).$$

Ответ: $(1{,}6;4{,}25)$.

Пример 6.8 Решите неравенство $\sqrt{1+4x+4x^2}<\sqrt{6-4\sqrt{2}}+\sqrt{2}$.

Решение.

ОДЗ: $x\in R$.

Учитывая, что $6-4\sqrt{2}=4-2\cdot 2\cdot\sqrt{2}+2=(2-\sqrt{2})^2$, имеем:

$$\sqrt{(1+2x)^2}<\sqrt{(2-\sqrt{2})^2}+\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad |1+2x|<|2-\sqrt{2}|+\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$|1+2x|<2-\sqrt{2}+\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad |1+2x|<2 \quad \Leftrightarrow \quad -2<1+2x<2 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{3}{2}<x<\frac{1}{2}.$$

Ответ: $\left(-\dfrac{3}{2};\dfrac{1}{2}\right)$.

Пример 6.9 Решите неравенство $2\sqrt{(2x-1)^2}+\sqrt{x^3+x^2-4x-4}\le 2-4x$.

Решение.

Нетрудно заметить, что выражение в левой части данного неравенства будет неотрицательным при всех допустимых значениях x, следовательно, если $2-4x<0$, то неравенство решений иметь не может. Поэтому, далее проводим исследование только для случая, когда $2-4x\ge 0$, т.е. $x\le 0{,}5$. Тогда, $\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|=-(2x-1)$, и решение неравенства сводится к системе:

$$\begin{cases} x\le 0{,}5; \\ -2\cdot(2x-1)+\sqrt{x^3+x^2-4x-4}\le 2-4x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0{,}5; \\ \sqrt{x^3+x^2-4x-4}\le 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x\le 0{,}5; \\ x^3+x^2-4x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0{,}5; \\ x^2(x+1)-4(x+1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0{,}5; \\ (x+1)\cdot(x^2-4)=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1, \\ x=-2. \end{array}\right.$$

Ответ: {-2: -1}.

Пример 6. 10 Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $\sqrt{x^2-16}=8-x$.

Решение.

$$\sqrt{x^2-16}=8-x \Leftrightarrow \begin{cases} 8-x\ge 0, \\ x^2-16=(8-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 8, \\ x^2-16=64-16x+x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 8, \\ x=5. \end{cases}$$

Следовательно, $x=5$.

Ответ: 5.

Пример 6.11 Решите уравнение $1+\sqrt{3x^2+22}=2|x|$.

Решение.

ОДЗ: $x\in R$.

Так как $|x|^2=x^2$, то $1+\sqrt{3x^2+22}=2|x| \Leftrightarrow \sqrt{3x^2+22}=2|x|-1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 2|x|-1\ge 0, \\ 3x^2+22=(2|x|-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x|\ge \dfrac{1}{2}, \\ 3x^2+22=4|x|^2-4|x|+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-0{,}5]\cup[0{,}5;+\infty), \\ x^2-4|x|-21=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-0{,}5], \\ x^2+4x-21=0, \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[0{,}5;+\infty), \\ x^2-4x-21=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\in(-\infty;-0{,}5], \\ \left[\begin{array}{l} x=-7, \\ x=3, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x\in[0{,}5;+\infty), \\ \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-3. \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$$

Следовательно, $\left[\begin{array}{l} x=-7, \\ x=7. \end{array}\right.$

Ответ: {-7; 7}.

Пример 6.12 Решите уравнение $12-7x+x^2=6(x-4)\sqrt{x}$.

Решение.

$$12-7x+x^2=6(x-4)\sqrt{x} \quad\Leftrightarrow\quad (x-4)\cdot(x-3)=6(x-4)\sqrt{x} \quad\Leftrightarrow$$

$$(x-4)\cdot\left(x-3-6\sqrt{x}\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=4, \\ x-3=6\sqrt{x} \end{array}\right. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=4, \\ \begin{cases} x\ge 3, \\ (x-3)^2=36x. \end{cases} \end{array}\right.$$

$$(x-3)^2=36x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-6x+9=36x \quad\Leftrightarrow\quad x^2-42x+9=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=21+12\sqrt{3}, \\ x=21-12\sqrt{3}. \end{array}\right.$$

Так как $21-12\sqrt{3}<3$, то $\left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=21+12\sqrt{3}. \end{array}\right.$

Ответ: $\{4;\ 21+12\sqrt{3}\}$.

Пример 6.13 Решите уравнение $\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 3x+1\ge 0, \\ 4x-3\ge 0, \\ 5x+4\ge 0. \end{cases}$ Следовательно, $x\ge\dfrac{3}{4}$.

$$\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3}=\sqrt{5x+4} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{4}, \\ (\sqrt{3x+1}+\sqrt{4x-3})^2=5x+4 \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge\dfrac{3}{4}, \\ 3x+1+2\sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{4x-3}+4x-3=5x+4 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{4}, \\ \sqrt{3x+1}\cdot\sqrt{4x-3}=3-x \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge\dfrac{3}{4}, \\ 3-x\ge 0, \\ (3x+1)\cdot(4x-3)=(3-x)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge\dfrac{3}{4}, \\ x\le 3, \\ 11x^2+x-12=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} \dfrac{3}{4}\le x\le 3, \\ \left[\begin{array}{l} x=-\dfrac{12}{11}, \\ x=1 \end{array}\right. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x=1.$$

Ответ: 1.

Пример 6.14 Решите неравенство $\sqrt{x^2-x-12}<x$.

Решение.

ОДЗ: $x^2-x-12\ge 0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty;-3]\cup[4;+\infty)$.

$$\sqrt{x^2-x-12}<x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-x-12\ge 0, \\ x\ge 0, \\ x^2-x-12<x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-\infty;-3]\cup[4;+\infty), \\ x\ge 0, \\ x>-12. \end{cases}$$

Следовательно, $x \in [4; +\infty)$.

Ответ: $[4; +\infty)$.

Пример 6.15 Решите неравенство $x+2<\sqrt{x+8}$.

Решение.

$$x+2<\sqrt{x+8} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+8\ge 0, \\ x+2<0, \end{cases} \\ \begin{cases} x+8\ge 0, \\ x+2\ge 0, \\ (x+2)^2<x+8 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\ge -8, \\ x<-2, \end{cases} \\ \begin{cases} x\ge -8, \\ x\ge -2, \\ x^2+3x-4<0 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x\in[-8;-2), \\ \begin{cases} x\ge -2, \\ x\in(-4;1) \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x\in[-8;-2), \\ x\in[-2;1) \end{array}\right. \Rightarrow x\in[-8;1).$$

Ответ: $[-8; 1)$.

Пример 6.16 Решите неравенство $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\ge 0, \\ x+3\ge 0. \end{cases}$ Следовательно, $x \in [0; +\infty)$.

$$3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1 \Leftrightarrow 3\sqrt{x}>\sqrt{x+3}+1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;+\infty), \\ 9x>(\sqrt{x+3}+1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in[0;+\infty), \\ 9x>x+3+2\sqrt{x+3}+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;+\infty), \\ 4x-2>\sqrt{x+3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in[0;+\infty), \\ x\ge 0{,}5; \\ (4x-2)^2>x+3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x\ge 0{,}5; \\ 16x^2-17x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0{,}5; \\ x\in\left(-\infty;\frac{1}{16}\right)\cup(1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(1;+\infty).$$

Ответ: $(1; +\infty)$.

Пример 6.17 Решите уравнение $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$.

Решение.

ОДЗ: $x \in R$. Операция возведения в третью степень всегда приводит к равносильному уравнению, следовательно, $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1 \Leftrightarrow$

$$x+8+3\left(\sqrt[3]{8+x}\right)^2\cdot\sqrt[3]{8-x}+3\sqrt[3]{8+x}\cdot\left(\sqrt[3]{8-x}\right)^2+8-x=1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[3]{8+x}\cdot\sqrt[3]{8-x}\cdot\left(\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}\right)=-5.$$

Так как по условию $\sqrt[3]{8+x}+\sqrt[3]{8-x}=1$, получаем, что $\sqrt[3]{8+x}\sqrt[3]{8-x}=-5$. Откуда следует, что $64-x^2=-125$ и, следовательно, $x=\pm3\sqrt{21}$.

Ответ: $\{-3\sqrt{21}; 3\sqrt{21}\}$.

Пример 6.18 Решите уравнение $\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt[5]{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -1 \end{cases} \Rightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

Введем новую переменную: $t=\sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}$. Уравнение примет вид: $t-\dfrac{1}{t}=\dfrac{3}{2}$.

$$t-\frac{1}{t}=\frac{3}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 0, \\ 2t^2-3t-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t\neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$$

Учитывая способ введения переменной, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} \sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}=2, \\ \sqrt[5]{\dfrac{x+1}{x-1}}=-\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{x+1}{x-1}=32, \\ \dfrac{x+1}{x-1}=-\dfrac{1}{32} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x+1=32(x-1), \\ 32(x+1)=-(x-1) \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1, \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{33}{31}, \\ x=-\dfrac{31}{33}. \end{array}\right. \end{cases}$$

Ответ: $\left\{\dfrac{33}{31}; -\dfrac{31}{33}\right\}$.

Пример 6.19 Решите уравнение

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=4-2x.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-1\geq 0, \\ x+3\geq 0, \\ (x-1)(x+3)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ x\geq -3, \\ x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in[1;+\infty)$.

Нетрудно заметить, что с помощью несложных преобразований уравнение на ОДЗ можно привести к более удобному виду:

$$\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=6-(2+2x) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}+2\sqrt{(x-1)(x+3)}=6-((x-1)+(x+3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=6-((x-1)+2\sqrt{(x-1)(x+3)}+(x+3)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x-1}+\sqrt{x+3}=6-(\sqrt{x-1}+\sqrt{x+3})^2.$$

Введем новую переменную: $t = \sqrt{x-1} + \sqrt{x+3}$, $t \ge 0$. Уравнение примет вид: $t = 6 - t^2$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t = -3, \\ t = 2. \end{array}\right.$ Учитывая ограничение $t \ge 0$ и способ введения переменной, приходим к уравнению: $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2$.

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{x+3} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} = 2 - \sqrt{x+3} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ 2 - \sqrt{x+3} \ge 0, \\ x - 1 = (2 - \sqrt{x+3})^2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ \sqrt{x+3} \le 2, \\ \sqrt{x+3} = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ \sqrt{x+3} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x + 3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 1, \\ x = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1.$$

Ответ: 1.

Пример 6.20 Найдите координаты точек пересечения графиков функций

$$y = \sqrt{8x^3 + 7} + \sqrt{x^3 - 7} \text{ и } y = 3\sqrt{x^3}.$$

Решение.

Сначала решим уравнение: $\sqrt{8x^3 + 7} + \sqrt{x^3 - 7} = 3\sqrt{x^3}$.

ОДЗ: $\begin{cases} x^3 \ge 0, \\ x^3 - 7 \ge 0, \\ 8x^3 + 7 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow x \ge \sqrt[3]{7}.$

Введем $t = x^3$, уравнение примет вид: $\sqrt{8t + 7} + \sqrt{t - 7} = 3\sqrt{t}$.

ОДЗ: $\begin{cases} 8t + 7 \ge 0, \\ t - 7 \ge 0, \\ t \ge 0 \end{cases} \Rightarrow t \ge 7.$

$$\sqrt{8t+7} + \sqrt{t-7} = 3\sqrt{t} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 7, \\ 8t + 7 + 2\sqrt{8t+7}\sqrt{t-7} + t - 7 = 9t \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} t \ge 7, \\ \sqrt{8t+7}\sqrt{t-7} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \ge 7, \\ \left[\begin{array}{l} t = 7, \\ t = -\dfrac{7}{8} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow t = 7 \Rightarrow x^3 = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt[3]{7}.$$

Таким образом, графики функций пересекаются в точке с координатами: $\left(\sqrt[3]{7};\ 3\sqrt{7}\right)$.

Ответ: $\left(\sqrt[3]{7};\ 3\sqrt{7}\right)$.

Иногда, целесообразно применить графический метод решения.

Пример 6.21 Пусть (x_0, y_0) - решение системы $\begin{cases} \sqrt{x-3} = y, \\ 2|x-3| - y = 1. \end{cases}$

Найдите произведение $x_0 \cdot y_0$.

Решение.

$$\begin{cases} \sqrt{x-3} = y, \\ 2|x-3| - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \sqrt{x-3}, \\ y = 2|x-3| - 1. \end{cases}$$

Следовательно, достаточно найти координаты точек пересечения графиков функций $y = \sqrt{x-3}$ и $y = 2|x\text{-}3| - 1$.

Построив графики данных функций (см. рисунок 31), убеждаемся, что они пересекаются в точке с координатами (4; 1). Следовательно, $x_0 = 4$; $y_0 = 1$ и $x_0 \cdot y_0 = 4$.

Ответ: 4.

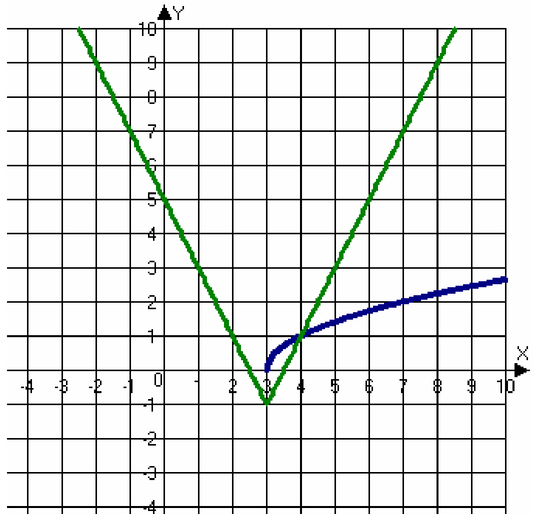


Рисунок 31 - Графики функций $y = \sqrt{x-3}$ и $y = 2|x\text{-}3| - 1$.

Наибольшее затруднение на экзаменах вызывают задачи с параметрами. С методикой решения заданий с параметрами по данным темам можно ознакомиться по пособиям [15], [34], [35], [38], [39], [54], [62], [66], [71], [77], [86], [87], [96], [106], [112], [130], [134], [146].

Пример 6.22 При каких значениях параметра a решение неравенства $(x+a)\sqrt{-x^2 - 2x + 99} \le 0$ содержит не более шести целых чисел?

Решение.

ОДЗ: $-x^2 - 2x + 99 \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + 2x - 99 \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-11; 9]$.

Для решения неравенства применим метод интервалов, рассматривая функцию $f(x) = (x+a)\sqrt{-x^2 - 2x + 99}$. Как установлено выше, $D(f)$ = [-11; 9].

Количество нулей функции и знаки функции будут зависеть от расположения числа - a относительно отрезка [-11; 9].

1) $-a \in (-\infty; -11]$. Функция обращается в нуль в двух точках: x = - 11 и x = 9 (см. рисунок 32 и рисунок 33), отрицательных значений не принимает.

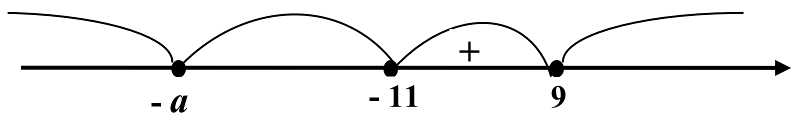


Рисунок 32 - При - a < - 11.

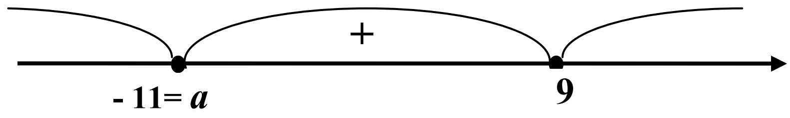


Рисунок 33 - При $-a = -11$.

Решением неравенства в этом случае является множество $\{-11; 9\}$, в котором содержится только два целых числа. Следовательно, эти значения параметра a нам подходят.

2) $-11 < -a < 9$. Функция обращается в нуль в трех точках: $x = -11$, $x = -a$ и $x = 9$ (см. рисунок 34), отрицательные значения принимает на $(-11; -a)$.

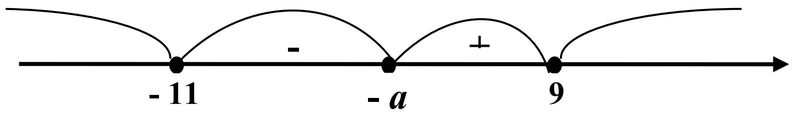


Рисунок 34 - При $-11 < -a < 9$.

Решением неравенства в этом случае является множество $[-11; -a] \cup \{9\}$. Это множество будет содержать не более шести целых значений только в том случае, когда $-a < -6$. Следовательно, нам подходят значения параметра a, удовлетворяющие условию: $-11 < -a < -6$.

3) $-a \in [9;+\infty)$. Функция обращается в нуль в двух точках: $x = -11$ и $x = 9$ (см. рисунок 35 и рисунок 36), отрицательные значения принимает на $(-11; 9)$.

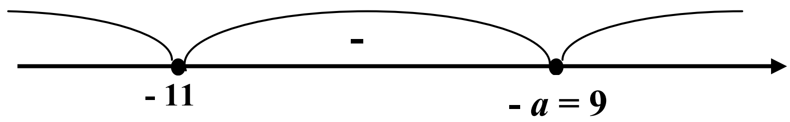


Рисунок 35 – При $-a = 9$.

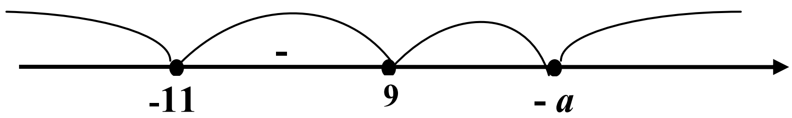


Рисунок 36 – При $-a > 9$.

Решением неравенства является множество: $[-11; 9]$, которое содержит более шести целых значений. Следовательно, данные значения параметра a нам не подходят.

Таким образом, требуемое условие будет выполняться лишь при $-a < -6$, т. е. при $a > 6$.

Ответ: $(6; +\infty)$.

Пример 6.23 Даны два уравнения: $3x + \sqrt{8x^2 - (7p+9)x - (15p+16)} = 0$ и $\sqrt[5]{x^3 + 31(p-3)} = -\dfrac{11}{p} - 2x$. Значения параметра p выбираются так, что $p < 0$ и число различных корней первого уравнения в сумме с числом $p + 1$ равно числу различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра p, выбранного таким образом.

Решение.

$$3x+\sqrt{8x^2-(7p+9)x-(15p+16)}=0 \Leftrightarrow \sqrt{8x^2-(7p+9)x-(15p+16)}=-3x$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ 8x^2-(7p+9)x-(15p+16)=9x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x^2+(7p+9)x+(15p+16)=0. \end{cases}$$

Следовательно, данное уравнение может иметь 2, 1 или 0 различных корней.

$$\sqrt[5]{x^3+31(p-3)}=-\frac{11}{p}-2x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt[5]{x^3+31(p-3)}+\frac{11}{p}+2x=0.$$

Заметим, что функция $f(x)=\sqrt[5]{x^3+31(p-3)}+\dfrac{11}{p}+2x$ (как сумма двух возрастающих функций) является непрерывной и возрастающей, следовательно, каждое значение она принимает только один раз. $E(f)=R$, поэтому, второе уравнение имеет только один корень.

Пусть $к$ - число корней первого уравнения. Тогда, согласно условию, $k+p+1=1$ и $к=-p$. Так как $p<0$, то случай $к=0$ является невозможным и остается рассмотреть две ситуации: $к=1$ и $к=2$, т.е. $p=-1$ и $p=-2$.

Если $p=-1$, то $\begin{cases} x\le 0, \\ x^2+2x+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ x=-1 \end{cases} \Rightarrow x=-1.$

Следовательно, число различных корней первого уравнения $к=1$ и $k+p+1=1-1+1=1$ равно числу различных корней второго уравнения.

При $p=-1$ второе уравнение имеет вид: $\sqrt[5]{x^3-124}=11-2x$. Так как, по ранее доказанному, уравнение имеет один корень, его можно найти подбором (или, после возведения в пятую степень, методом анализа делителей свободного члена). Нетрудно заметить, что $x=5$ - корень уравнения.

Если $p=-2$, то $\begin{cases} x\le 0, \\ x^2-5x-14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le 0, \\ \left[\begin{array}{l} x=7, \\ x=-2 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x=-2.$ Следовательно, число различных корней первого уравнения равно 1, что противоречит предположению: $к=2$.

Таким образом, возможен только один случай: $p=-1$.

Ответ: 5.

Пример 6.24 Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка [1; 9) значение выражения $x-\sqrt{x}-3$ не равно значению выражения $a\sqrt{x}$.

Решение.

$$x-\sqrt{x}-3\neq a\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad x-\sqrt{x}-3-a\sqrt{x}\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad x-(1+a)\sqrt{x}-3\neq 0.$$

Введем $t=\sqrt{x}$. Если $x\in[1;9)$, то $t\in[1;3)$ и задача сводится к выяснению вопроса: при каких значениях a выражение $t^2-(1+a)t-3\neq 0$, если $t\in[1;3)$.

То есть нужно выяснить: при каких значениях a график функции $f(t)=t^2-(1+a)t-3$ не имеет точек пересечения с осью абсцисс на промежутке $[1;3)$. График данной функции – парабола, ветви которой направлены вверх, дискриминант соответствующего квадратного трехчлена $D=(1+a)^2+12>0,\ \forall\ a\in R$, следовательно, график функции пересекает ось абсцисс в двух точках: t_1 и t_2. Так как $f(0)=-3$, то $t_1<0,\ t_2>0$.

Таким образом, нам необходимо выяснить: при каких значениях a $t_2\notin[1;3)$.

$$t_2\notin[1;3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<t_2<1,\\ t_2\geq 3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}f(1)>0,\\ f(3)\leq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}1-(1+a)\cdot 1-3>0,\\ 9-(1+a)\cdot 3-3\leq 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a<-3,\\ a\geq 1.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Решите уравнение $(x^2-4)\sqrt{x+1}=0$.

2. Решите уравнение $\sqrt{(x^2-9x+14)^2}=9x-x^2-14$.

3. Решите уравнение $\sqrt{x^2+2x+1}=|x^2-2x-3|$.

4. Решите неравенство $(x-3)\sqrt{x^2+x-2}\geq 0$.

5. Найдите все значения *x,* для которых точки графика функции $y=\dfrac{\sqrt[4]{13-5x}}{4x-7}$ лежат не ниже соответствующих точек графика функции $y=\dfrac{17}{7-4x}$.

6. Найдите все значения α, для которых число $\dfrac{\sqrt[3]{33-2\alpha}}{|2\alpha-7|+2\alpha-7}$ больше числа $\dfrac{14}{2\alpha-33}$.

7. Решите неравенство $\sqrt{9x^2-6x+1}>\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{3}$.

8. Решите неравенство $\sqrt{(3x-1)^2}+\sqrt{x^3-x^2-9x+9}\leq 1-3x$.

9. Решите неравенство $\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{4-x^2}\leq 7$.

10. Найдите корень (или сумму корней, если их несколько) уравнения $3x+\sqrt{7+x-11x^2}=1$.

11. Укажите промежуток, которому принадлежат корни уравнения $\sqrt{2x^2-14x+21}+4=x$. A) (2; 3); B) (-8: -7); C) (0, 2); D) (3; 9).

12. Решите уравнение $\sqrt{x+5}+\sqrt{2x+8}=7$.

13. Решите уравнение $2+\sqrt{25x|x-1|+4}=5x$.

14. Решите неравенство $\sqrt{x+5}<1-x$.

15. Решите неравенство $x-1<\sqrt{5x+1}$.

16. Решите неравенство $3\sqrt{x}-\sqrt{5x+5}>1$.

17. Решите уравнение $\sqrt[3]{8x+4}-\sqrt[3]{8x-4}=2$.

18. Решите уравнение $x^2-4x=3\sqrt{x^2-4x+20}-10$.

19. Решите уравнение $\sqrt[7]{\frac{5-x}{x+3}}+\sqrt[7]{\frac{x+3}{5-x}}=2.$

20. Решите уравнение $\sqrt{2x+3}+\sqrt{x+1}=3x+2\sqrt{2x^2+5x+3}-16$.

21. Пусть $(x_0; y_0)$- решение системы $\begin{cases} y+\sqrt{25-x^2}=0, \\ y+5=|x-6|. \end{cases}$ Найдите сумму x_0+y_0.

22. При каких значениях параметра a уравнение $(x-3)\sqrt{x-a}=0$ имеет одно решение?

23. При каких значениях параметра a решение неравенства $(a-x)\sqrt{11x-18-x^2}\geq 0$ содержит не более четырех целых чисел?

24. Даны два уравнения: $2x+\sqrt{x^2+3(9p-14)x+6(p-4)}=0$ и $\sqrt[9]{13\sqrt[3]{x}-p^2-26}=\frac{46}{3-p}-3x$. Значения параметра p выбираются так, что $p<3$ и число различных корней первого уравнения равно произведению числа 3 - p и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра p, выбранного таким образом.

25. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка [1;16) значение выражения $\sqrt{x}-\sqrt[4]{x}-3$ не равно значению выражения $a\sqrt[4]{x}$.

Ответы: **1)** {-1; 2}; **2)** [2;7]; **3)** {-1; 2; 4}; **4)** {-2; 1}∪[3;+∞); **5)** (1,75; 2,6]; **6)** (3,5; 16,5); **7)** (-∞;-1/3)∪(1;+∞); **8)** -3; **9)** 2; **10)** -0,4; **11)** D; **12)** 4; **13)** 0,9; **14)** [-5; -1); **15)** [-1/5; 7); **16)** (4; +∞); **17)** {-0,5; 0,5}; **18)** {-1; 5}; **19)** 1; **20)** 3; **21)** 1; **22)** [3; +∞); **23)** (- ∞; 5); **24)** 8; **25)** (- ∞; -3) ∪ [-0,5; +∞).

7 Тригонометрия

Задания по тригонометрии, которые предлагаются на ЕГЭ и вступительных испытаниях в вузы, условно можно разбить на три группы: 1) тождественные преобразования тригонометрических выражений и вычисление значений тригонометрических функций (в том числе, и содержащих обратные тригонометрические функции); 2) тригонометрические уравнения; 3) тригонометрические неравенства.

Тему *"Тождественные преобразования тригонометрических выражений и вычисление значений тригонометрических функций"* можно повторять по любому школьному учебнику, например, [7], [9], [30], [72], [108], [131]. Однако более целесообразно воспользоваться пособиями для поступающих в вузы и справочниками, так как изложение в них более компактное и систематизированное и содержит много иллюстративных примеров. В частности, можно использовать [2], [5], [38], [50], [67], [69], [72], [82], [85], [86], [88], [107], [110], [111], [116] – [118], [130], [133], [136], [138], [146], [152], [153]. Необходимо ***выучить наизусть все формулы***, в противном случае, у Вас возникнут трудности с проведением тождественных преобразований и вычислений значений функций. Особое внимание следует уделить изучению свойств обратных тригонометрических функций: $y = arccos\, x,\ y = arcsin\, x,\ y = arctg\, x,\ y = arcctg\, x$ (см. [7], [118]).

Пример 7.1 Найдите значение выражения $2sin^2\alpha + 6cos^2\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}2$.

Решение.

$$2sin^2\alpha + 6cos^2\alpha = 2sin^2\alpha + 6\left(1 - sin^2\alpha\right) = 6 - 4sin^2\alpha = 6 - 4(-0{,}2)^2 = 5{,}84$$

Ответ: 5,84.

Пример 7.2 Упростите: $\dfrac{sin^2\alpha - 1}{cos^4\alpha} + tg^2\alpha$.

Решение.

Используя формулы $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ и $1 + tg^2\alpha = \dfrac{1}{cos^2\alpha}$, получаем:

$$\frac{sin^2\alpha - 1}{cos^4\alpha} + tg^2\alpha = \frac{-cos^2\alpha}{cos^4\alpha} + tg^2\alpha = -\frac{1}{cos^2\alpha} + tg^2\alpha = -(1 + tg^2\alpha) + tg^2\alpha = -1.$$

Ответ: - 1.

Пример 7.3 Найдите значение выражения $\sqrt{21}cos\alpha$, если $sin\alpha = \sqrt{\dfrac{5}{21}}$, $\dfrac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$.

Решение.

Из основного тригонометрического тождества $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$ следует, что $cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$, так как по условию $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \pi$, то

$$cos\alpha = -\sqrt{1 - sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \left(\sqrt{\frac{5}{21}}\right)^2} = -\sqrt{1 - \frac{5}{21}} = -\sqrt{\frac{16}{21}} = -\frac{4}{\sqrt{21}}.$$

Следовательно, $\sqrt{21}\,cos\alpha = -4$.

Ответ: - 4.

Пример 7.4 Найдите $\frac{sin\alpha + cos\alpha}{sin\alpha - cos\alpha}$, если $tg\alpha = \frac{3}{5}$.

Решение.

$$\frac{sin\alpha + cos\alpha}{sin\alpha - cos\alpha} = \frac{cos\alpha \cdot \left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha} + 1\right)}{cos\alpha \cdot \left(\frac{sin\alpha}{cos\alpha} - 1\right)} = \frac{tg\alpha + 1}{tg\alpha - 1} = \frac{\frac{3}{5} + 1}{\frac{3}{5} - 1} = -4.$$

Ответ: - 4.

Пример 7.5 Найдите $sin^3\alpha - cos^3\alpha$, если $sin\alpha - cos\alpha = 0,8$.

Решение.

$sin^3\alpha - cos^3\alpha = (sin\alpha - cos\alpha)\cdot\left(sin^2\alpha + sin\alpha \cdot cos\alpha + cos^2\alpha\right) =$
$= 0,8 \cdot (1 + sin\alpha \cdot cos\alpha)$.

$sin\alpha - cos\alpha = 0,8 \quad\Rightarrow\quad sin^2\alpha - 2sin\alpha \cdot cos\alpha + cos^2\alpha = 0,64 \quad\Rightarrow$
$1 - 2sin\alpha \cdot cos\alpha = 0,64 \quad\Rightarrow\quad sin\alpha \cdot cos\alpha = 0,18$. Следовательно,

$sin^3\alpha - cos^3\alpha = 0,8 \cdot (1 + 0,18) = 0,944$.

Ответ: 0,944.

Пример 7.6 Упростите: $\sqrt{2}\,sin\,(\alpha - 45^\circ) - sin\alpha + cos\alpha$.

Решение.

Используя формулу $sin(\alpha - \beta) = sin\alpha \cdot cos\beta - cos\alpha \cdot sin\beta$, получаем:

$$\sqrt{2}\,sin(\alpha - 45^\circ) - sin\alpha + cos\beta = \sqrt{2}\left(sin\alpha \cdot cos45^\circ - cos\alpha \cdot sin45^\circ\right) - sin\alpha + cos\beta =$$
$$= \sqrt{2}\left(sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - cos\alpha \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - sin\alpha + cos\beta = sin\alpha - cos\beta - sin\alpha + cos\beta = 0.$$

Ответ: 0.

Пример 7.7 Упростите: $sin5\alpha \cdot cos4\alpha + cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - cos5\alpha \cdot sin4\alpha$.

Решение.

$sin5\alpha \cdot cos4\alpha + cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - cos5\alpha \cdot sin4\alpha = sin5\alpha \cdot cos4\alpha + sin\alpha - cos5\alpha \cdot sin4\alpha =$
$= (sin5\alpha \cdot cos4\alpha - cos5\alpha \cdot sin4\alpha) + sin\alpha = sin(5\alpha - 4\alpha) + sin\alpha = 2sin\alpha$.

Ответ: $2\ sin\ \alpha$.

Пример 7.8 Вычислите:

$$sin810° \cdot cos900° + tg585° \cdot ctg1845° + cos135° \cdot sin405°.$$

Решение.

$sin810° = sin(90° + 2 \cdot 360°) = sin90° = 1;$ $cos900° = cos(180° + 2 \cdot 360°) = cos180° = -1;$
$sin405° = sin(45° + 360°) = sin45° = \frac{1}{\sqrt{2}};$ $tg585° = tg(45° + 3 \cdot 180°) = tg45° = 1$;

$ctg1845° = ctg(45° + 10 \cdot 180°) = ctg45° = 1$. Следовательно,
$sin810° \cdot cos900° + tg585° \cdot ctg1845° + cos135° \cdot sin405° = -1 + 1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}.$

Ответ: - 0,5.

Пример 7.9 Найдите значение выражения $4sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(\pi - \alpha)$**,** если $cos\alpha = -0{,}9$.

Решение.

$4sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(\pi - \alpha) = 4cos\alpha - cos\alpha = 3cos\alpha = 3 \cdot (-0{,}9) = -2{,}7$.

Пример 7.10 Найдите значение выражения $\sqrt{6} \cdot (sin^2 x - cos^2 x)$**,** если $sin2x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$.

Решение.

$\sqrt{6} \cdot (sin^2 x - cos^2 x) = -\sqrt{6} \cdot cos2x$. Т.к. $-\frac{3\pi}{4} < x < -\frac{\pi}{2}$, то $-\frac{3\pi}{2} < 2x < -\pi$, и $cos2x = -\sqrt{1 - sin^2 2x}$, значит, $-\sqrt{6}cos2x = \sqrt{6} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{6} \cdot \sqrt{\frac{2}{3}} = 2$.

Ответ: 2.

Пример 7.11 Упростите: $\left(\frac{1}{sin^2 2\alpha} + \frac{1}{cos^2 2\alpha}\right) \cdot sin^2 4\alpha$.

Решение.

$\left(\frac{1}{sin^2 2\alpha} + \frac{1}{cos^2 2\alpha}\right) \cdot sin^2 4\alpha = \left(\frac{cos^2 2\alpha + sin^2 2\alpha}{sin^2 2\alpha \cdot cos^2 2\alpha}\right) \cdot sin^2 4\alpha = \frac{sin^2 4\alpha}{sin^2 2\alpha \cdot cos^2 2\alpha} =$

$$=\frac{(2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha)^2}{\sin^2 2\alpha\cdot\cos^2 2\alpha}=4.$$

Ответ: 4.

Пример 7.12 Вычислите: $120\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)$.

Решение.

$$120\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\left(\cos^2\frac{\pi}{24}-\sin^2\frac{\pi}{24}\right)=60\cdot 2\sin\frac{\pi}{24}\cdot\cos\frac{\pi}{24}\cdot\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{24}\right)=$$

$$=60\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{24}\right)\cdot\cos\frac{\pi}{12}=30\cdot 2\sin\frac{\pi}{12}\cdot\cos\frac{\pi}{12}=30\cdot\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=30\cdot\sin\frac{\pi}{6}=15.$$

Ответ: 15.

Пример 7.13 Вычислите: $\frac{4\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}$.

Решение.

$$\frac{4\sin 25^\circ\cdot\sin 65^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{2\cdot 2\cdot\sin 25^\circ\cdot\cos 25^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{2\cdot\sin 50^\circ}{\cos 40^\circ}=\frac{2\cdot\cos 40^\circ}{\cos 40^\circ}=2.$$

Ответ: 2.

Пример 7.14 Вычислите значение выражения

$$\log_2\sin\frac{\pi}{8}+\log_2\sin\frac{\pi}{4}+\log_2\sin\frac{3\pi}{8}.$$

Решение.

$$\log_2\sin\frac{\pi}{8}+\log_2\sin\frac{\pi}{4}+\log_2\sin\frac{3\pi}{8}=\log_2\sin\frac{\pi}{8}+\log_2\frac{1}{\sqrt{2}}+\log_2\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{3\pi}{8}\right)=$$

$$=\log_2\sin\frac{\pi}{8}-\frac{1}{2}+\log_2\cos\frac{\pi}{8}=\log_2\left(\sin\frac{\pi}{8}\cdot\cos\frac{\pi}{8}\right)-\frac{1}{2}=\log_2\left(\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}=$$

$$=\log_2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\frac{1}{2}=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}=-2.$$

Ответ: -2.

Пример 7.15 Вычислите: $\frac{\sin^2 27^\circ-\sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ}$.

Решение.

$$\frac{\sin^2 27^\circ-\sin^2 63^\circ}{\sin 18^\circ\cdot\cos 18^\circ}=\frac{\cos^2 63^\circ-\sin^2 63^\circ}{\frac{1}{2}\sin 36^\circ}=\frac{2\cos 126^\circ}{\sin 36^\circ}=\frac{-2\sin 36^\circ}{\sin 36^\circ}=-2.$$

Ответ: - 2.

Пример 7.16 Вычислите: $\dfrac{cos16° \cdot cos36° - sin16° \cdot cos54°}{sin19° \cdot cos19° \cdot sin30°}$.

Решение.

$$\frac{cos16° \cdot cos36° - sin16° \cdot cos54°}{sin19° \cdot cos19° \cdot sin30°} = \frac{cos16° \cdot sin54° - sin16° \cdot cos54°}{\frac{1}{2} \cdot 2sin19° \cdot cos19° \cdot sin30°} =$$

$$= \frac{sin(54° - 16°)}{\frac{1}{2} \cdot sin38° \cdot sin30°} = \frac{2sin38°}{sin38° \cdot \frac{1}{2}} = 4.$$

Ответ: 4.

Пример 7.17 Найдите $ctg2\alpha$, если $sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение.

$ctg2\alpha = \dfrac{cos2\alpha}{sin2\alpha} = \dfrac{cos^2\alpha - sin^2\alpha}{2sin\alpha \cdot cos\alpha}$. Используя основное тригонометрическое тождество: $sin^2\alpha + cos^2\alpha = 1$, получаем, что $cos\alpha = \pm\sqrt{1 - sin^2\alpha}$. Т. к. по условию $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то в данном случае $cos\alpha =$ - $\sqrt{1 - sin^2\alpha} = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} =$ - $\frac{12}{13}$.

Следовательно, $ctg2\alpha = \dfrac{\frac{144}{169} - \frac{25}{169}}{2 \cdot \left(-\frac{12}{13}\right) \cdot \frac{5}{13}} =$ - $\dfrac{119}{120}$.

Ответ: $-\dfrac{119}{120}$.

Пример 7.18 Найдите $cos\,x$, если $cos2x = -\frac{7}{8}$, $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

Решение.

$2cos^2 x = 1 + cos2x$, следовательно, $cos\,x = \pm\sqrt{\dfrac{1 + cos2x}{2}}$**.** Так как $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$, то $cos\,x = -\sqrt{\dfrac{1 - \frac{7}{8}}{2}} = -\sqrt{\dfrac{1}{16}} = -\dfrac{1}{4} = -0{,}25$.

Ответ: - 0, 25.

Пример 7.19 Найдите $tg2\alpha$**,** если $tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$ и $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

Решение.

$tg2\alpha = \dfrac{2tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$. Найдем $tg\alpha$, решив уравнение $tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0$, для чего воспользуемся заменой переменной: $t = tg\alpha$, которая привет нас к уравнению $t^2 + 2t - 3 = 0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t = -3, \\ t = 1. \end{array}\right.$ Так как $-\dfrac{\pi}{2} < \alpha < 0$, то $tg\alpha = -3$ и $tg2\alpha = \dfrac{2\cdot(-3)}{1-(-3)^2} = \dfrac{-6}{-8} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$.

Ответ: 0,75.

Пример 7.20 Вычислите: а) $arcsin\left(sin\dfrac{3}{7}\pi\right)$; б) $arcsin\left(cos\dfrac{\pi}{9}\right)$; в) $arcsin\left(sin\dfrac{6}{5}\pi\right)$.

Решение.

Учитывая, что $arcsin(sin\,x) = x,\ \ x \in \left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, получаем:

$arcsin\left(sin\dfrac{3}{7}\pi\right) = \dfrac{3}{7}\pi$; $arcsin\left(cos\dfrac{\pi}{9}\right) = arcsin\left(sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{9}\right)\right) = arcsin\left(sin\dfrac{7\pi}{18}\right) = \dfrac{7\pi}{18}$;

$arcsin\left(sin\dfrac{6\pi}{5}\right) = arcsin\left(sin\left(\pi + \dfrac{\pi}{5}\right)\right) = arcsin\left(-sin\dfrac{\pi}{5}\right) = arcsin\left(sin\left(-\dfrac{\pi}{5}\right)\right) = -\dfrac{\pi}{5}$.

Ответ: а) $\dfrac{3}{7}\pi$; б) $\dfrac{7\pi}{18}$; в) $-\dfrac{\pi}{5}$.

Пример 7.21 Вычислите: $sin\left(arccos\dfrac{1}{4}\right)$.

Решение.

Опираясь на определение арккосинуса, имеем, что $arccos\dfrac{1}{4} = \alpha,$ где $\alpha \in [0;\pi]$ и $cos\,\alpha = \dfrac{1}{4}$. Так как $cos\ \alpha > 0$, то $\alpha \in \left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, $sin\left(arccos\dfrac{1}{4}\right) = sin\,\alpha = \sqrt{1 - cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{16}} = \sqrt{\dfrac{15}{16}} = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Ответ: $\dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Пример 7.22 Вычислите: $tg\left(arcsin\dfrac{1}{3}\right)$.

Решение.

Опираясь на определение арксинуса, имеем, что $arcsin\frac{1}{3}=\alpha,$ где $\alpha\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $sin\ \alpha=\frac{1}{3}$. Так как $sin\ \alpha>0$, то $\alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно, $tg\left(arcsin\frac{1}{3}\right)=tg\alpha=\frac{sin\alpha}{cos\alpha}=\frac{sin\alpha}{\sqrt{1-sin^2\alpha}}=\frac{\frac{1}{3}}{\sqrt{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{8}}$.

Пример 7.23 Вычислите $sin\left(\frac{1}{2}arctg\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$.

Решение.

$arctg\left(-\frac{3}{4}\right)=\alpha,$ где $\alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $tg\ \alpha=-\frac{3}{4}$; $tg\alpha<0\ \Rightarrow \alpha\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$.

Следовательно, $sin\left(\frac{1}{2}arctg\left(-\frac{3}{4}\right)\right)=sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}$.

$$\frac{1}{cos^2\alpha}=1+tg^2\alpha=1+\frac{9}{16}=\frac{25}{16}\ \Rightarrow\ cos\alpha=\frac{4}{5}\ \Rightarrow\ sin\frac{\alpha}{2}=-\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Ответ: $-\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Пример 7.24 Вычислите $cos\left(0{,}5\,arccos\,0{,}25-2\,arcctg\,2\right)$.

Решение.

$arccos\,0{,}25=\alpha,\ \ \alpha\in[0;\pi],\ \ cos\alpha=0{,}25;\ \ cos\alpha>0\ \Rightarrow\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

$arcctg2=\beta,\ \ \beta\in(0;\pi),\ \ ctg\beta=2;\ \ ctg\beta>0\ \Rightarrow\ \beta\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

Следовательно,

$$cos(0{,}5arccos\,0{,}25-2arcctg2)=cos\left(\frac{\alpha}{2}-2\beta\right)=cos\frac{\alpha}{2}cos2\beta+sin\frac{\alpha}{2}sin2\beta.$$

$$cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1+\frac{1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{5}{8}};\quad sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-cos\alpha}{2}}=\sqrt{\frac{1-\frac{1}{4}}{2}}=\sqrt{\frac{3}{8}}.$$

$$cos2\beta=cos^2\beta-sin^2\beta=\frac{cos^2\beta-sin^2\beta}{cos^2\beta+sin^2\beta}=\frac{sin^2\beta\cdot(ctg^2\beta-1)}{sin^2\beta\cdot(ctg^2\beta+1)}=\frac{4-1}{4+1}=\frac{3}{5}.$$

$$sin2\beta=2sin\beta cos\beta=\frac{2sin\beta\cdot cos\beta}{cos^2\beta+sin^2\beta}=\frac{sin^2\beta\cdot 2ctg\beta}{sin^2\beta\cdot(1+ctg^2\beta)}=\frac{2ctg\beta}{1+ctg^2\beta}=\frac{4}{5}.$$

Таким образом, $cos(0{,}5\,arccos\,0{,}25-2arcctg\,2)=\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{8}}+\frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{8}}.$

Ответ: $\frac{3}{5}\sqrt{\frac{5}{8}}+\frac{4}{5}\sqrt{\frac{3}{8}}.$

Пример 7.25 Найдите множество значений функции

$$y=\frac{4}{\pi}arcsin\left(2^{-0,5}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,2x+sin\,x\cdot cos\,x\right)\right).$$

Решение.

$$\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,2x+sin\,x\cdot cos\,x=\frac{\sqrt{3}}{2}cos\,2x+\frac{1}{2}sin\,2x=sin\frac{\pi}{3}cos\,2x+cos\frac{\pi}{3}sin\,2x=$$
$$=sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right).$$

$$-1\le sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\le 1,\ \forall\ x\ \in\ R;\ \Rightarrow\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\le\frac{1}{\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\le\frac{1}{\sqrt{2}},\forall x\in R.$$

Функция $y = arcsin\,x$ является строго возрастающей на своей области определения, поэтому

$$-\frac{\pi}{4}=arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\le arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\right)\le arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{4},\forall x\in R.$$

Следовательно, $-1\le\frac{4}{\pi}arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}sin\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\right)\le 1,\ \forall x\in R.$

Таким образом, множество значений исследуемой функции - [-1; 1].

Ответ: [-1; 1].

Пример 7.26 Найдите область значений функции $f(x)=arccos\frac{x^2-2}{x^2+4}$.

Решение.

$$\frac{x^2-2}{x^2+4}=\frac{x^2+4-6}{x^2+4}=1-\frac{6}{x^2+4},\ \forall\ x\ \in\ R;\quad x^2+4\ge 4,\ \forall\ x\in R\quad\Rightarrow$$
$$0<\frac{1}{x^2+4}\le\frac{1}{4},\ \forall\ x\in R\ \Rightarrow\ 0>\frac{-6}{x^2+4}\ge-\frac{3}{2},\ \forall\ x\in R\ \Rightarrow\ 1>1-\frac{6}{x^2+4}\ge-\frac{1}{2},\ \forall x\in R.$$

Так как функция $y = arccos\,x$ является строго убывающей на своей области определения, то $0=arccos\ 1<arccos\left(1-\frac{6}{x^2+4}\right)\le arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$

Таким образом, область значений исследуемой функции - $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right].$

Ответ: $\left(0;\frac{2\pi}{3}\right].$

Пример 7.27 При каких значениях x выражение $\frac{15}{cos^4 x}+\frac{128}{4+sin^2 x}-\frac{69+25sin^2 x}{1+cos 2x}-12{,}5cos 2x$ принимает неположительные значения?

Решение.

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in$ Z.

$$\frac{15}{cos^4 x}+\frac{128}{4+sin^2 x}-\frac{69+25sin^2 x}{1+cos 2x}-12{,}5cos 2x=\frac{15}{cos^4 x}+\frac{128}{4+\left(1-cos^2 x\right)}-$$
$$-\frac{69+25(1-cos^2 x)}{2cos^2 x}-12{,}5(2cos^2 x-1)=\frac{15}{cos^4 x}+\frac{128}{5-cos^2 x}-\frac{94-25cos^2 x}{2cos^2 x}-$$
$$-25cos^2 x+12{,}5.$$

Введем $t=cos^2 x$, тогда задача сведется к выяснению вопроса: при каких значениях *t,* где $t \in (0;\ 1]$, функция $\varphi(t)=\frac{15}{t^2}+\frac{128}{5-t}-\frac{94-25t}{2t}-25t+12{,}5$ принимает неположительные значения.

$$\frac{15}{t^2}+\frac{128}{5-t}-\frac{94-25t}{2t}-25t+12{,}5=\frac{50(t^4-6t^3+12t^2-10t+3)}{2t^2(5-t)}=$$
$$=\frac{50(t-1)\cdot(t^3-5t^2+7t-3)}{2t^2(5-t)}=\frac{50(t-1)(t-1)(t^2-4t+3)}{2t^2(5-t)}=\frac{50(t-1)^3(t-3)}{2t^2(5-t)}$$

$D(\varphi)$= (- ∞; 0) ∪ (0; 5) ∪ (5; + ∞); $\varphi(t)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1, \\ t=3. \end{array}\right.$ Исследуя знаки функции (см. рисунок 37), получаем:

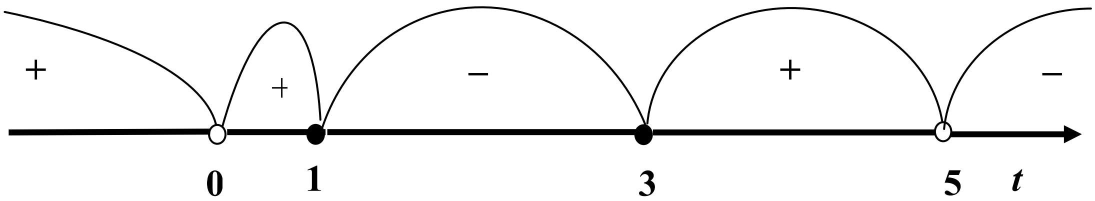


Рисунок 37

Нетрудно заметить, что нужное нам условие выполняется только в одной точке: $t = 1$. $\qquad cos^2 x=1 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} cos\,x=1, \\ cos\,x=\text{-}1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x=pn,\ n\in Z.$

Ответ: $\pi n,\ n\in Z.$

Приступать к повторению темы *"Тригонометрические уравнения"* рекомендуется лишь после того, как Вы усвоили методику проведения тождественных преобразований и изучили свойства обратных тригонометрических функций.

Сначала нужно научиться решать простейшие тригонометрические уравнения: $sin\,x = a,\ cos\,x = a,\ tg\,x = a,\ ctg\,x = a$. Необходимо ***выучить все формулы***, в том числе, для частных случаев. Затем приступить к повторению наиболее распространенных методов, желательно в следующей последовательности: уравнения, сводящиеся к простейшим с помощью тождественных преобразований (в том числе, и метод введения вспомогательного аргумента), метод замены переменной (в том числе, и однородные уравнения), метод разложения. Методика решения тригонометрических уравнений достаточно основательно изложена в [7], [9], [30], [66], [82], [85], [88], [108], [111], [116] – [118], [130], [133], [136], [138], [146], [152], [153].

Пример 7.28 Найдите наибольший отрицательный корень уравнения $cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2}$.

Решение.

$$cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\pi}{3} - 2x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} -2x = 2pn,\ n \in Z, \\ -2x = -\frac{2p}{3} + 2pn, \quad n \in Z \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = -\pi n,\ n \in Z, \\ x = \frac{p}{3} - pn,\ n \in Z. \end{array}\right.$$

Нетрудно заметить, что наибольший отрицательный корень: $x = -\frac{2\pi}{3}$.

Ответ: $-\frac{2\pi}{3}$

Пример 7.29 Решите уравнение $sin\frac{x}{2} \cdot cos\,x + cos\frac{x}{2} \cdot sin\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Решение.

$$sin\frac{x}{2} \cdot cos\,x + cos\frac{x}{2} \cdot sin\,x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad sin\left(\frac{x}{2} + x\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \Leftrightarrow \quad sin\frac{3x}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{3x}{2} = (-1)^n \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \pi n,\ n \in Z \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{(-1)^{n+1}\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ \ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{(-1)^{n+1}\pi}{6} + \frac{2\pi n}{3},\ \ n \in Z$.

Пример 7.30 Найдите заключенный в интервале (90°; 180°) корень уравнения $cos(2x - 30°) + cos(2x + 30°) = sin\,60°$.

Решение.

Так как $cos\,\alpha + cos\,\beta = 2cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cdot cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$, то уравнение равносильно уравнению $2cos\dfrac{2x-30°+2x+30°}{2}\cdot cos\dfrac{2x-30°-2x-30°}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Учитывая, что $2cos\,2x\cdot cos(-30°)=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \quad\Leftrightarrow\quad cos\,2x=\dfrac{1}{2} \quad\Leftrightarrow\quad 2x=\pm60°+360°n,\ n\in Z \quad\Leftrightarrow$ $x = \pm\ 30° + 180°n,\ n \in Z$; получаем, что интервалу (90°; 180°) принадлежит корень: $x = 150°$.

Ответ: 150°.

Пример 7.31 Решите уравнение $sin\ x\cdot cos\ x\cdot cos\ 2x=\dfrac{1}{8}$.

Решение.

$sin\,2x = 2\,sin\,x\cdot cos\,x,$ значит, $sin\,x\cdot cos\,x\cdot cos\,2x=\dfrac{1}{8} \quad\Leftrightarrow$

$$\frac{1}{2}sin\,2x\cdot cos\,2x=\frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{4}sin\,4x=\frac{1}{8} \;\Leftrightarrow\; sin\,4x=\frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; 4x=(-1)^n\frac{p}{6}+pn,\ n\in Z.$$

Ответ: $(-1)^n\dfrac{\pi}{24}+\dfrac{\pi n}{4},\ n\in Z.$

Пример 7.32 Найдите все решения уравнения $2tg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1-tg^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Решение.

ОДЗ: $x+\dfrac{\pi}{4}\neq\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z \quad\Leftrightarrow\quad x\neq\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Заметим, что при $tg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\pm1$ уравнение решений не имеет, следовательно, равносильно уравнению $\dfrac{2tg\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}{1-tg^2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)}=1$ и, значит, $tg2\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$.

$$tg\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=1 \;\Leftrightarrow\; -ctg2x=1 \;\Leftrightarrow\; 2x=\frac{3\pi}{4}+\pi n, n\in Z \;\Leftrightarrow\; x=\frac{3\pi}{8}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{3\pi}{8}+\dfrac{\pi n}{2}, n\in Z$.

Пример 7.33 Решите уравнение $sin\,x - cos\,x = 1$.

Решение.

Уравнение относится к классу уравнений вида: $a\,sin\,x + b\,cos\,x = c.$

Следовательно, его можно решить, используя метод введения вспомогательного аргумента: $sin\,x - cos\,x = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\sqrt{2}}sin\,x - \frac{1}{\sqrt{2}}cos\,x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow$

$$cos\frac{\pi}{4}\cdot sin\,x - sin\frac{\pi}{4}\cdot cos\,x = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow x - \frac{p}{4} = (-1)^n\frac{p}{4} + pn,\ \ n \in Z.$$

Ответ: $\frac{p}{4} + (-1)^n\frac{p}{4} + pn,\ \ n \in Z$.

Пример 7.34 Решите уравнение $2 + cos^2 x = 2sin\,x$.

Решение.

$2 + cos^2 x = 2sin\,x \ \Leftrightarrow\ 2 + \left(1 - sin^2 x\right) = 2sin\,x \ \Leftrightarrow\ sin^2 x + 2sin\,x - 3 = 0.$

Введем новую переменную: $t = sin\ x$, $t \in [-1;\ 1]$; получим уравнение: $t^2 + 2t - 3 = 0$. Откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t = -3, \\ t = 1. \end{array}\right.$ Учитывая ограничение: $t \in [-1;\ 1]$, получаем: $sin\,x = 1$, следовательно, $x = \frac{p}{2} + 2pn,\ \ n \in Z$.

Ответ: $\frac{p}{2} + 2pn,\ \ n \in Z$.

Пример 7.35 Решите уравнение $cos\,2x = 3 + 7cos\,x$.

Решение.

$2cos^2 x = 1 + cos\,2x$, следовательно,

$cos\,2x = 3 + 7cos\,x \ \Leftrightarrow\ 2cos^2 x - 1 = 3 + 7cos\,x \ \Leftrightarrow\ 2cos^2 x - 7cos\,x - 4 = 0.$

Введем $t = cos\ x$, $t \in [-1;\ 1]$; получим уравнение: $2t^2 - 7t - 4 = 0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t = 4, \\ t = -\frac{1}{2}. \end{array}\right.$ Учитывая ограничение на t, получаем: $t = -\frac{1}{2}$.

Следовательно, $cos\,x = -\frac{1}{2}$ и $x = \pm\frac{2p}{3} + 2pn,\ \ n \in Z.$

Ответ: $\pm\frac{2p}{3} + 2pn,\ \ n \in Z.$

Пример 7.36 Решите уравнение $cos\,4x = 6cos^2 x - 5$.

Решение.

$cos\,4x = 6cos^2 x - 5 \quad \Leftrightarrow \quad 2cos^2 2x - 1 = 3\left(1 + cos\,2x\right) - 5 \quad \Leftrightarrow$
$2cos^2 2x - 3cos\,2x + 1 = 0.$

Введем $t = cos\,2x$, $t \in [-1;\ 1]$; получим уравнение $2t^2 - 3t + 1 = 0$, откуда следует, что $t = 1$ или $t = \frac{1}{2}$.

$$\left[\begin{array}{l}\cos 2x=1,\\ \cos 2x=0{,}5\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2x=2\pi k, k\in Z;\\ 2x=\pm\dfrac{\pi}{3}+2\pi n, n\in Z\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi k, k\in Z;\\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\pi k, k\in Z;\ \pm\dfrac{p}{6}+pn,\ n\in\ Z$.

Пример 7.37 Решите уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cdot\cos x$.
Решение.

$\sin^4 x+\cos^4 x=(\sin^4 x+2\sin^2 x\cdot\cos^2 x+\cos^4 x)-2\sin^2 x\cdot\cos^2 x=$

$=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\dfrac{1}{2}(2\sin x\cos x)^2=1-\dfrac{1}{2}\sin^2 2x.$ Следовательно,

$\sin^4 x+\cos^4 x=\sin x\cos x \quad\Leftrightarrow\quad 1\text{-}\dfrac{1}{2}\sin^2 2x=\dfrac{1}{2}\sin 2x.$

Введем $t=\sin 2x$, $t\in[-1;\ 1]$, получим уравнение: $t^2+t-2=0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l}t=-2,\\ t=1.\end{array}\right.$ Учитывая ограничение на t, получаем: $t=1$.

$$\sin 2x=1 \quad\Leftrightarrow\quad 2x=\frac{p}{2}+2pn,\ n\in Z \quad\Leftrightarrow\quad x=\frac{p}{4}+pn,\ n\in Z.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Пример 7.38 Решите уравнение $3\sin x+4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0$.

Решение.

$3\sin x+4\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)=0 \quad\Leftrightarrow\quad 3\sin x+4\cos x=0.$

Заметим, что если $\cos x=0$, то уравнение решений не имеет, т.к. в этом случае: $\sin x=0$. Следовательно, $\cos x\neq 0$ и $3\sin x+4\cos x=0$ $\Leftrightarrow$ $3\dfrac{\sin x}{\cos x}+4=0 \ \Leftrightarrow\ tgx=-\dfrac{4}{3} \ \Leftrightarrow\ x=-\ arctg\ \dfrac{4}{3}+pn,\ n\in Z$.

Ответ: $-\ arctg\ \dfrac{4}{3}+pn,\ n\in Z$.

Пример 7.39 Решите уравнение $\cos^2 x-7\sin^2 x=3\sin 2x$.
Решение.

$\cos^2 x-7\sin^2 x=3\sin 2x \quad\Leftrightarrow\quad \cos^2 x-7\sin^2 x-6\sin x\cos x=0.$

Заметим, что при $\cos x=0$ уравнение не имеет решений, т.к. в этом случае: $\sin x=0$. Следовательно, $\cos x\neq 0$ и $\cos^2 x-7\sin^2 x-6\sin x\cos x=0$

$$\Leftrightarrow \quad 1 - 7\frac{sin^2 x}{cos^2 x} - 6\frac{sin\, x}{cos\, x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 7tg^2 x + 6tgx - 1 = 0.$$

Введем $t = tg\, x$, $t \in R$; получим уравнение: $7t^2 + 6t - 1 = 0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t = -1, \\ t = \frac{1}{7}. \end{array}\right.$ Значит, $\left[\begin{array}{l} tgx = -1, \\ tgx = \frac{1}{7} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{p}{4} + pn, \ n \in Z, \\ x = arctg\frac{1}{7} + pk, \ k \in Z. \end{array}\right.$

Ответ: $-\frac{p}{4} + pn, \ n \in Z; \ arctg\ \frac{1}{7} + pk, \ k \in Z$.

Пример 7.40 Решите уравнение $6\,sin^2 x = 4 + sin\,2x$.

Решение.

$6\,sin^2 x = 4 + sin\,2x \quad \Leftrightarrow \quad 6\,sin^2 x = 4(sin^2 x + cos^2 x) + 2\,sin\,x\,cos\,x \quad \Leftrightarrow$

$2\,sin^2 x - 4\,cos^2 x - 2\,sin\,x\,cos\,x = 0$. Заметим, что при $cos\ x = 0$ уравнение решений не имеет, следовательно, $cos\,x \neq 0$ и

$2\,sin^2 x - 4\,cos^2 x - 2\,sin\,x\,cos\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad tg^2 x - tgx - 2 = 0$.

Введем $t = tg\,x, \ t \in R$; получим уравнение: $t^2 - t - 2 = 0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1. \end{array}\right.$ Таким образом, $\left[\begin{array}{l} tgx = 2, \\ tgx = -1 \end{array}\right.$ и $\left[\begin{array}{l} x = arctg2 + \pi n, n \in Z, \\ x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z. \end{array}\right.$

Ответ: $arctg2 + \pi n, n \in Z; \ -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$.

Пример 7.41 Решите уравнение $tgx - sin\,x = 1 - tgx \cdot sin\,x$.

Решение.

ОДЗ: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, \ n \in Z$.

$tgx - sin\,x - 1 + tgx \cdot sin\,x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (tgx + tgx \cdot sin\,x) - (1 + sin\,x) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad tgx \cdot (1 + sin\,x) - (1 + sin\,x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (1 + sin\,x)(tgx - 1) = 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} sin\,x = -1, \\ tgx = 1 \end{array}\right. \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{l} x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z \end{array}\right. \end{array}\right. \Rightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z.$$

Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n, \ n \in Z$.

Пример 7.42 Решите уравнение $sin\,2x - \sqrt{3}\,cos\,x = 0$.

Решение.

$$\sin 2x-\sqrt{3}\cos x=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cdot\cos x-\sqrt{3}\cos x=0 \Leftrightarrow \left(2\sin x-\sqrt{3}\right)\cdot\cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\sin x-\sqrt{3}=0, \\ \cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \\ \cos x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\left(-1\right)^n\cdot\dfrac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z; \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;\ x=(-1)^n\cdot\dfrac{\pi}{3}+\pi n, n\in Z.$

Пример 7.43 Решите уравнение $\sin 3x+\sin 2x=\sin 5x$.

Решение.

$$\sin 3x+\sin 2x=\sin 5x \quad\Leftrightarrow\quad 2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=\sin 5x \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{x}{2}=2\sin\frac{5x}{2}\cdot\cos\frac{5x}{2} \quad\Leftrightarrow\quad \sin\frac{5x}{2}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}-\cos\frac{5x}{2}\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad -2\sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin(-x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \sin\frac{5x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}\cdot\sin x=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \sin\dfrac{5x}{2}=0, \\ \sin\dfrac{3x}{2}=0, \\ \sin x=0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \dfrac{5x}{2}=pn, n\in Z, \\ \dfrac{3x}{2}=pk, k\in Z, \\ x=pm, m\in Z \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{2pn}{5}, n\in Z, \\ x=\dfrac{2pk}{3}, k\in Z, \\ x=pm,\ m\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{2\pi n}{5}, n\in Z;\ \dfrac{2\pi k}{3}, k\in Z;\ \pi m, m\in Z$.

Пример 7.44 Решите уравнение $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$.

Решение.

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1+\cos 2x}{2}+\frac{1+\cos 4x}{2}+\frac{1+\cos 6x}{2}+$$

$$+\frac{1+\cos 8x}{2}=2 \quad\Leftrightarrow\quad \left(\cos 2x+\cos 8x\right)+\left(\cos 4x+\cos 6x\right)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$2\cos 5x\cdot\cos 3x+2\cos 5x\cdot\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \cos 5x\cdot\ (\cos 3x+\cos x)=0 \quad\Leftrightarrow$$

$$2\cos 5x\cdot\cos 2x\cdot\cos x=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} \cos 5x=0, \\ \cos 2x=0, \\ \cos x=0 \end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi}{10}+\dfrac{\pi n}{5}, n\in Z; \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi m}{2}, m\in Z; \\ x=\dfrac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\frac{\pi}{10}+\frac{\pi n}{5}, n\in Z;\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi m}{2}, m\in Z;\ \frac{\pi}{2}+\pi k, k\in Z$.

Пример 7.45 Решите уравнение $5tgx+cos^2 x+sin 2x=1$.

Решение.

ОДЗ: $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

$$5tgx+cos^2 x+sin 2x=1 \Leftrightarrow 5tgx+cos^2 x+2sin x\cdot cos x=sin^2 x+cos^2 x$$

$$\Leftrightarrow \frac{5sin x}{cos x}+2sin x\cdot cos x-sin^2 x=0 \Leftrightarrow sin x\cdot\left(\frac{5}{cos x}+2cos x-sin x\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} sin x=0, \\ \frac{5}{cos x}+2cos x-sin x=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\neq\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pi k, k\in Z, \\ 5+2cos^2 x-sin x cos x=0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$5+2cos^2 x-sin x\cdot cos x=0 \Leftrightarrow 5(sin^2 x+cos^2 x)+2cos^2 x-sin x\cdot cos x=0 \Leftrightarrow$$

$$5sin^2 x+7cos^2 x-sin x\cdot cos x=0 \Leftrightarrow 5tg^2 x-tgx+7=0.$$

Введем $t=tg\,x,\ t\in R$; получим уравнение: $5t^2-t+7=0$, откуда следует, что $t\in\varnothing$, следовательно, исследуемое уравнение не имеет решений.

Таким образом, решением исходного уравнения является: $x=\pi k,\ k\in Z$.

Ответ: $\pi k,\ k\in Z$.

Пример 7.46 Сколько корней имеет уравнение $(sin\,\pi x+1)log_{0,5}(1-x^2)=0$?

Решение.

$$(sin\,\pi x+1)log_{0,5}(1-x^2)=0 \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 1\text{-}x^2>0, \\ \left[\begin{array}{l} sin px=-1, \\ log_{0,5}(1-x^2)=0 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x\in(-1;\ 1), \\ \left[\begin{array}{l} px=-\frac{p}{2}+2pn, n\in Z, \\ 1-x^2=1 \end{array}\right. \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x\in(-1;\ 1), \\ \left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}+2n, n\in Z, \\ x=0. \end{array}\right. \end{array}\right.$$ Следовательно, $$\left[\begin{array}{l} x=-\frac{1}{2}, \\ x=0. \end{array}\right.$$

Ответ: 2.

Пример 7.47 Сколько корней имеет уравнение $\left(4-\frac{1}{sin^2 x}\right)\sqrt{16-x^2}=0$?

Решение.

$$\left(4-\frac{1}{sin^2 x}\right)\sqrt{16-x^2}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 16\text{-}x^2\ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} 16-x^2=0, \\ \dfrac{1}{sin^2 x}=4 \end{array}\right. \\ x\ne \pi n, n\in Z, \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\in[-4; 4], \\ \left[\begin{array}{l} x^2=16, \\ sin\,x=\pm\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x\ne \pi n,\ n\in Z, \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in[-4; 4]\setminus\{x=\pi n, n\in Z\}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\pm 4, \\ x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\pi k, k\in Z \end{array}\right. \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x\in\left\{-4; 4; -\frac{7\pi}{6}; -\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}; \frac{7\pi}{6}\right\}.$$

Ответ: 8.

Пример 7. 48 Решите уравнение

$$16x^2+24x+12=\left(\sqrt{3}-cos\frac{14\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3}+cos\frac{14\pi x}{3}\right).$$

Решение.

$$16x^2+24x+12=\left(\sqrt{3}-cos\frac{14\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3}+cos\frac{14\pi x}{3}\right) \Leftrightarrow$$

$$16x^2+24x+12=\left(3-cos^2\frac{14\pi x}{3}\right) \quad\Leftrightarrow\quad 16x^2+24x+9=-cos^2\frac{14\pi x}{3} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad (4x+3)^2+cos^2\frac{14px}{3}=0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} (4x+3)^2=0, \\ cos^2\dfrac{14\pi x}{3}=0 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} 4x+3=0, \\ cos\dfrac{14\pi x}{3}=0. \end{cases}$$

$4x+3=0 \;\Leftrightarrow\; x=-\dfrac{3}{4};\quad cos\left(\dfrac{14\pi}{3}\cdot\left(-\dfrac{3}{4}\right)\right)=cos\left(-\dfrac{7\pi}{2}\right)=0$. Следовательно, решением уравнения является $x=-0{,}75$.

Ответ: - 0,75.

Пример 7.49 Решите уравнение $cos^2(x\cdot sin\,x)=1+log_5^2\sqrt{x^2+x+1}$.

Решение.

ОДЗ: $x\in R$.

$0\le cos^2(x\cdot sin\,x)\le 1,\quad \forall\, x\in R;\quad 1+log_5^2\sqrt{x^2+x+1}\ge 1,\ \forall\, x\in R.$

Следовательно, данное уравнение может иметь решение только тогда, когда $log_5^2\sqrt{x^2+x+1}=0 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{x^2+x+1}=1 \;\Leftrightarrow\; x^2+x+1=1 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x=0, \\ x=\text{-}1. \end{array}\right.$

Проверим, являются ли данные значения решениями исходного уравнения:

1) $x = 0$, тогда $cos^2(0 \cdot sin 0) = 1 + log_5^2 \sqrt{0^2 + 0 + 1}$, $1 = 1$ - верное равенство;

2) $x = -1$, тогда $cos^2(-1 \cdot sin(-1)) = 1 + log_5^2 \sqrt{(-1)^2 + (-1) + 1}$, $cos^2(\cdot sin 1) = 1$ - неверное равенство.

Следовательно, подходит только одно значение: $x = 0$.

Ответ: 0.

Пример 7.50 Решите уравнение $cos\, x = x^2 + 1$.

Решение.

Данное уравнение можно решить графически, построив графики функций $y = cos\, x$ и $y = x^2 + 1$ (см. рисунок 38).

Нетрудно заметить, что графики функций пересекаются только в одной точке: (0;1). Следовательно, уравнение имеет только одно решение: $x = 0$.

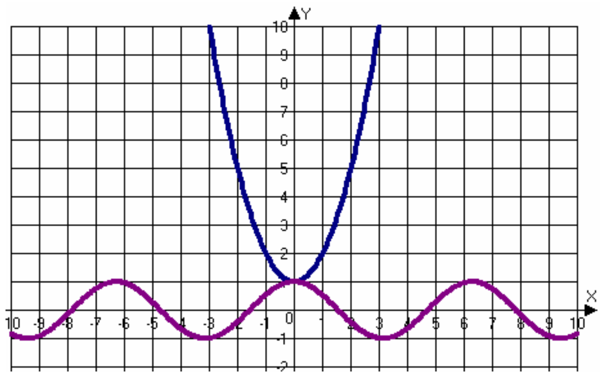


Рисунок 38

Ответ: $x = 0$.

Задания по теме *"Тригонометрические неравенства"* условно можно разбить на три группы: одни решаются графически (с помощью единичной окружности или графика соответствующей функции), другие аналитически или методом интервалов. Следовательно, к повторению этой темы имеет смысл приступать лишь после того, как Вы научились строить графики тригонометрических функций, упрощать тригонометрические выражения и решать рациональные, иррациональные неравенства и неравенства, содержащие знак абсолютной величины. Методика решения тригонометрических неравенств достаточно основательно изложена в [7], [9], [30], [66], [82], [85], [88], [108], [111], [116] –[118], [130], [133], [136], [138], [146], [152], [153].

Пример 7.51 Решите неравенство $2cos^2 x - cos\, x - 1 \geq 0$.

Решение.

Введем $t = cos\, x$, $t \in [-1; 1]$. Неравенство примет вид: $2t^2 - t - 1 \geq 0$.

Следовательно, $t \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty)$. Таким образом,

$$\begin{cases} t \in [-1; 1], \\ t \in \left(-\infty; -\frac{1}{2}\right] \cup [1; +\infty) \end{cases} \Rightarrow t \in \left[-1; -\frac{1}{2}\right] \cup \{1\} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} -1 \leq cos\, x \leq -\frac{1}{2}, \\ cos\, x = 1. \end{array}\right.$$

Используя тригонометрический круг (см. рисунок 39), получаем:

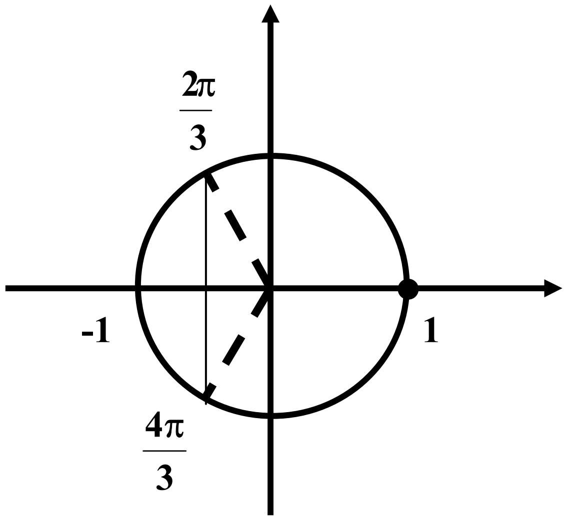


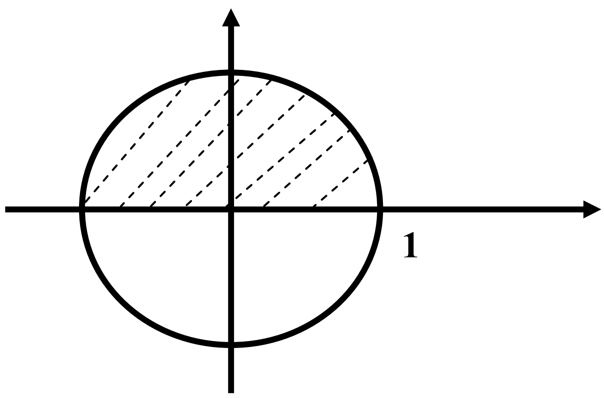
Рисунок 39

$$\left[\begin{array}{l}\frac{2\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{4\pi}{3}+2\pi n, n\in Z,\\ x=2\pi k, k\in Z.\end{array}\right.$$

Ответ: $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\frac{4\pi}{3}+2\pi n\right], n\in Z;\quad 2\pi k, k\in Z$.

Пример 7.52 Решите неравенство $\sin x>\cos x$.

Решение.



$\sin x>\cos x \Leftrightarrow \sin x-\cos x>0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sin x-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos x>0 \Leftrightarrow$

$\cos\frac{\pi}{4}\cdot\sin x-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos x>0 \Leftrightarrow$

$\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)>0$.

Пусть $t=x-\frac{\pi}{4}$, тогда неравенство приобретает вид: $\sin t>0$.

Рисунок 40

Используя тригонометрический круг (см. рисунок 40), получаем:

$0+2pn<t<p+2pn,\ n\in Z \Rightarrow 2pn<x-\frac{p}{4}<p+2pn,\ n\in Z \Rightarrow$

$\frac{\pi}{4}+2\pi n<x<\frac{5\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{4}+2\pi n;\frac{5\pi}{4}+2\pi n\right),\ n\in Z$.

Пример 7.53 Найти область определения функции $y=\sqrt{4arccos\,x-\pi}$.
Решение.
$D(y)=\{x\,|\,4arccos\,x-\pi\geq 0\}$.

$$4arccos\,x-p\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad arccos\;x\geq\frac{p}{4} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\in[-1;\;1], \\ cos(arccos\;x)\leq cos\dfrac{p}{4} \end{cases} \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\in[-1;1], \\ x\leq\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \quad\Rightarrow\quad x\in\left[-1;\;\frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

Ответ: $\left[-1;\;\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right]$.

Пример 7.54 Решите неравенство $\sqrt{2\,sin\,x}<1$.
Решение.

$$\sqrt{2\,sin\,x}<1 \;\Leftrightarrow \begin{cases} sin\,x\geq 0, \\ 2\,sin\,x<1 \end{cases} \;\Leftrightarrow\; 0\leq sin\,x<\frac{1}{2}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0+2\pi n\leq x<\dfrac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z, \\ \dfrac{5\pi}{6}+2\pi n<x\leq\pi+2\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

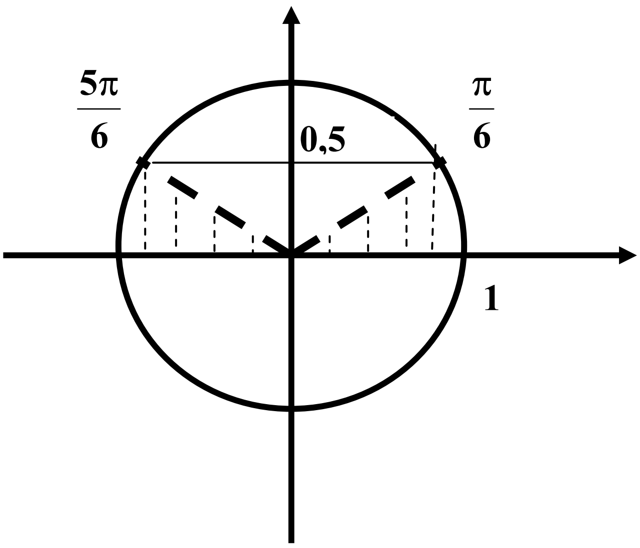


Рисунок 41

Ответ: $\left[2\pi n;\dfrac{\pi}{6}+2\pi n\right)\cup\left(\dfrac{5\pi}{6}+2\pi n;\pi+2\pi n\right], n\;\in \mathrm{Z}$.

Пример 7.55 Решите неравенство $\dfrac{arcsin\,x}{cos\,x}<0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x \in [-1; 1], \\ x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{cases} \Rightarrow x \in [-1; 1].$

Так как $\cos x > 0,\ \forall\, x \in [-1; 1]$, то исследуемое неравенство будет верным в случае, когда $\arcsin x < 0$, т.е. при $x \in [-1; 0)$.

Ответ: [-1; 0).

Пример 7. 56 Решите уравнение $2\cos x + |\cos x| = 2\sin 2x \cdot \sin\dfrac{\pi}{6}$.

Решение.

$$2\cos x + |\cos x| = 2\sin 2x \cdot \sin\frac{\pi}{6} \Leftrightarrow 2\cos x + |\cos x| = 2 \cdot 2\cos x \cdot \sin x \cdot \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \geq 0, \\ 3\cos x = 2\cos x \cdot \sin x, \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \cos x = 2\cos x \cdot \sin x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos x \geq 0, \\ \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \sin x = \dfrac{3}{2}, \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos x = 0, \\ \begin{cases} \cos x < 0, \\ \sin x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z; \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $\dfrac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z;\ \dfrac{5\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z.$

Пример 7.57 Решите уравнение $|\sin x - \cos x| = \cos 2x.$

Решение.

$$|\sin x - \cos x| = \cos 2x \Leftrightarrow \begin{cases} \cos 2x \geq 0, \\ (|\sin x - \cos x|)^2 = \cos^2 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n \leq 2x \leq \dfrac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z; \\ \sin^2 x - 2\sin x \cdot \cos x + \cos^2 x = \cos^2 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ 1 - \sin 2x = 1 - \sin^2 2x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ \sin 2x \cdot (1 - \sin 2x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4} + \pi n \leq x \leq \dfrac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z; \\ \left[\begin{array}{l} \sin 2x = 0, \\ \sin 2x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}+\pi n \le x \le \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z; \\ \left[\begin{array}{l} 2x=\pi n, n\in Z; \\ 2x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n,\ n\in Z \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}+\pi n \le x \le \dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z; \\ \left[\begin{array}{l} x=\dfrac{\pi n}{2},\ n\in Z; \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\pi n, n\in Z; \\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z. \end{array}\right.$$

Ответ: $x=\pi n, n\in Z;\ x=\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$.

Пример 7.58 Сколько целых чисел являются решениями неравенства $\dfrac{8+2x-x^2}{3+ctg^2\dfrac{\pi x}{4}}\ge 0$?

Решение.

ОДЗ: $\left\{x\in R\left|\dfrac{\pi x}{4}\ne \pi n, n\in Z\right.\right\}=\left\{x\in R\,|\,x\ne 4n,\ n\in Z\right\}$.

Так как $3+ctg^2\dfrac{\pi x}{4}>0$ для всех x из области определения, то решение неравенства равносильно решению системы:

$$\begin{cases} x\ne 4n, n\in Z; \\ 8+2x-x^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 4n, n\in Z; \\ x^2-2x-8\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ne 4n, n\in Z; \\ x\in[-2;4] \end{cases} \Rightarrow x\in[-2;0)\cup(0;4).$$

Данное множество содержит 5 целых чисел: -2; -1; 1; 2; 3.

Ответ: 5.

Наибольшее затруднение на экзаменах вызывают задачи с параметрами. С методикой решения заданий с параметрами по данным темам можно ознакомиться по пособиям [15], [39], [54], [64], [66], [82], [86], [87], [96], [106], [112], [118], [130], [136], [151].

В данной главе мы рассмотрим только те задания, где не требуется использование производной.

Пример 7.59 При каких значениях параметра a уравнение $5\sin 3x-6\cos x=a$ имеет решение?

Решение.

$$5\sin 3x-6\cos 3x=a \Leftrightarrow \frac{5}{\sqrt{61}}\sin 3x-\frac{6}{\sqrt{61}}\cos 3x=\frac{a}{\sqrt{61}}.$$

Так как $\left(\dfrac{5}{\sqrt{61}}\right)^2+\left(\dfrac{6}{\sqrt{61}}\right)^2=1$, то найдется φ: $\begin{cases} \cos\varphi=\dfrac{5}{\sqrt{61}}, \\ \sin\varphi=\dfrac{6}{\sqrt{61}}. \end{cases}$

$cos\varphi \cdot sin3x - sin\varphi \cdot cos3x = \dfrac{a}{\sqrt{61}}$ $\Leftrightarrow$ $sin\ (3x - \varphi) = \dfrac{a}{\sqrt{61}}$. Следовательно, исходное уравнение может иметь решение тогда и только тогда, когда $-1 \le \dfrac{a}{\sqrt{61}} \le 1$. Откуда следует, что $a \in [-\sqrt{61}; \sqrt{61}\,]$.

Ответ: $a \in [-\sqrt{61}; \sqrt{61}\,]$.

Пример 7.60 При каких значениях параметра a уравнение $\sqrt{x+3}\,arcsin(x-a) = 0$ имеет два решения?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x+3 \ge 0, \\ -1 \le x-a \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge -3, \\ -1+a \le x \le a+1. \end{cases}$

$$\sqrt{x+3}\,arcsin(x-a) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{ОДЗ}, \\ \left[\begin{array}{l} \sqrt{x+3} = 0, \\ arcsin(x-a) = 0 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \text{ОДЗ}, \\ \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = a. \end{array}\right. \end{cases}$$

Исходное уравнение будет иметь два решения, если:

1) $x = -3 \in$ ОДЗ; 2) $x = a \in$ ОДЗ; 3) $a \ne -3$.

$x = -3 \in$ ОДЗ $\Leftrightarrow \begin{cases} -1+a \le -3, \\ -3 \le a+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \le -2, \\ a \ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-4; -2]$;

$x = a \in$ ОДЗ $\Leftrightarrow a \ge -3$.

Следовательно, уравнение будет иметь два решения в случае, когда $\begin{cases} a \in [-4; -2], \\ a \ge -3, \\ a \ne -3; \end{cases}$ т. е. при $a \in (-3; -2]$.

Ответ: $a \in (-3; -2]$.

Пример 7.61 При каких значениях параметра p выражение $3 + (p\,cos\,x + 5\,sin\,x)\,sin\,x$ будет равно 2 хотя бы при одном значении x?

Решение.

Выражение $3 + (p\,cos\,x + 5\,sin\,x)\,sin\,x$ будет равно 2 хотя бы при одном значении x, тогда и только тогда, когда уравнение $3 + (p\,cos\,x + 5\,sin\,x)\,sin\,x = 2$ будет иметь хотя бы один корень.

$$3 + (p\,cos\,x + 5\,sin\,x)\,sin\,x = 2 \Leftrightarrow p\,cos\,x \cdot sin\,x + 5\,sin^2 x + 1 = 0 \Leftrightarrow$$

$$p\,sin\,x \cdot cos\,x + 5\,sin^2 x + sin^2 x + cos^2 x = 0 \Leftrightarrow 6\,sin^2 x + p\,sin\,x \cdot cos\,x + cos^2 x = 0 .$$

При $cos\,x = 0$ данное уравнение решений не имеет, поэтому $cos\,x \ne 0$ и, разделив на $cos^2 x$, мы имеем уравнение $6tg^2 x + p\,tgx + 1 = 0$. Вводя новую переменную $t = tgx,\ t \in R$; получаем уравнение $6t^2 + pt + 1 = 0$. Оно имеет корни, если его дискриминант $D = p^2 - 24 \ge 0$, то есть, когда $p \in (-\infty; -\sqrt{24}] \cup [\sqrt{24}; +\infty)$.

Ответ: $p \in (-\infty; -\sqrt{24}] \cup [\sqrt{24}; +\infty)$.

Задания для самостоятельного решения

1. Найдите значение выражения $3sin^2\alpha - 7cos^2\alpha$, если $cos\alpha = -0,1$.

2. Упростите: $\dfrac{cos^2\alpha - 1}{sin^4\alpha} + ctg^2\alpha$.

3. Найдите значение выражения $sin^3\beta - cos^3\beta$, если $sin\beta - cos\beta = 0,4$.

4. Найдите значение выражения $\sqrt{19}\,sin\alpha$, если $cos\alpha = -\sqrt{\dfrac{3}{19}}$, $\pi \le \alpha \le \dfrac{3\pi}{2}$.

5. Найдите $cos\alpha$, если $2sin^2\alpha + cos\alpha - 1 = 0$ и $-\dfrac{3\pi}{2} < \alpha < -\pi$.

6. Найдите: $\dfrac{sin\alpha \cdot cos\alpha}{sin^2\alpha - cos^2\alpha}$, если $ctg\alpha = \dfrac{3}{4}$.

7. Упростите: $\sqrt{3}\,cos\alpha - 2cos(\alpha - 30^\circ) + sin\alpha$.

8. Вычислите: $tg18^\circ \cdot tg288^\circ + sin32^\circ \cdot sin148^\circ - sin302^\circ \cdot sin122^\circ$.

9. Найдите: $3ctg60^\circ \cdot (sin310^\circ \cdot cos70^\circ - sin70^\circ \cdot cos310^\circ)$.

10. Найдите значение выражения $5sin(\pi + \alpha) + cos\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$, если $sin\alpha = 0,5$.

11. Найдите значение выражения $21\sqrt{5} \cdot sin\alpha \cdot ctg(\pi - \alpha)$, если $cos\alpha = \dfrac{\sqrt{5}}{6}$.

12. Упростите: $\dfrac{sin2\alpha}{sin\alpha} - sin\left(\dfrac{\pi}{2} + \alpha\right)$.

13. Найдите значение выражения $\sqrt{2,25} \cdot sin2x$, если $sin x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ и $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$.

14. Вычислите значение выражения $log_4 cos\dfrac{\pi}{8} + log_4 cos\dfrac{3\pi}{8}$.

15. Найдите $\sin\alpha$ и $tg\alpha$, если $\cos 2\alpha = -\frac{5}{13}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

16. Найдите $\frac{2\sin 31^\circ \cdot \cos 31^\circ}{\sin 38^\circ \cdot \sin 66^\circ + \cos 38^\circ \cdot \sin 24^\circ}$.

17. Найдите значение выражения $\left(\frac{tg^2 49^\circ - tg^2 11^\circ}{1 - tg^2 49^\circ tg^2 11^\circ} \cdot tg 52^\circ\right)^4$.

18. Вычислите: а) $\arccos\left(\sin\frac{\pi}{5}\right)$; б) $\arccos\left(\cos\frac{10}{3}\pi\right)$;

в) $arcctg\left(ctg\left(-\frac{25\pi}{8}\right)\right)$.

19. Вычислите $\cos\left(\arcsin\frac{1}{3}\right)$.

20. Найдите значение выражения: $6\sqrt{11}\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \arccos\left(-\frac{5}{6}\right)\right)$.

21. Вычислите $\cos\left(\frac{1}{2} arctg\frac{12}{5}\right)$.

22. Вычислите $\sin\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{3\sqrt{7}}{8} + 2 arctg\frac{1}{3}\right)$.

23. Найдите множество значений функции $y = \frac{8}{\pi} arctg\left(0{,}25\left(\sqrt{3}\sin x - \cos x + 2\right)\right)$.

24. При каких значениях x выражение $\frac{4}{\sin^4 x} + \frac{27}{3 + \cos^2 x} - \frac{26 - 8\sin^2 x}{1 - \cos 2x} + 4\cos 2x$ принимает неположительные значения?

25. Укажите наименьший положительный корень уравнения $\sin\left(35^\circ + x\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

26. Решите уравнение $\sin(\pi - x) - \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = \sqrt{3}$.

27. Найдите корень уравнения $ctg 225^\circ + 8\cos x \cdot \sin\frac{x}{2} \cdot \cos\left(180^\circ - \frac{x}{2}\right) = 0$, заключенный в интервале (0°, 30°).

28. Решите уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = \sqrt{3}$.

29. Решите уравнение $\sin 5x - 1 = 2\sin x \cdot \cos 4x$.

30. Решите уравнение $\sin x + \sqrt{3}\cos x = 2$.

31. Решите уравнение $3+5\sin 3x=\cos 6x.$

32. Решите уравнение $\cos 2x+\sin^2 x=\cos x+2.$

33. Решите уравнение $0{,}5\cos 4x=\sin x\cdot\cos x.$

34. Решите уравнение $\cos^4 x+\sin^4 x=\sin 2x-0{,}5.$

35. Решите уравнение $\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)-5\cos x=0.$

36. Решите уравнение $4\sin^2 x-3\sin x\cos x+5\cos^2 x=3.$

37. Решите уравнение $3\sin 2x+8\cos^2 x=7.$

38. Решите уравнение $2\sin x\cdot\cos x=\sin x-\cos x+\dfrac{1}{2}.$

39. Решите уравнение $\sin 2x+\sin 6x=3\cos^2 2x.$

40. Решите уравнение $\sin x+\sin 2x+\sin 3x+\sin 4x=0.$

41. Решите уравнение $\sin^2 x+\sin^2 2x-\sin^2 3x=0.$

42. Решите уравнение $7tgx+\cos^2 x+3\sin 2x=1.$

43. Сколько корней имеет уравнение $(\cos\pi x-1)\log_{0,7}(4-x^2)=0$?

44. Найдите число положительных корней уравнения $\left(tg\dfrac{\pi}{x}\right)\cdot\sqrt{10x^2-x}=0.$

45. Решите уравнение $25x^2-20x+6=\left(\sqrt{2}-\cos\dfrac{5\pi x}{4}\right)\cdot\left(\sqrt{2}+\cos\dfrac{5\pi x}{4}\right).$

46. Решите уравнение $\sqrt{16+(2x-3)^2}=4-\cos^2\dfrac{5\pi x}{3}.$

47. Решите уравнение $3+\log^4_{\frac{1}{2}}(x^2-x+1)=3|\cos((x-1)\cdot\cos 2x)|.$

48. Сколько корней имеет уравнение $\sin(x-1)=(x-1)^2$?

49. Решите неравенство $tg^2x\ge 4.$

50. Решите неравенство $\sqrt{3}\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\le\sqrt{3}.$

51. Решите неравенство $\left(\arccos x-\dfrac{\pi}{6}\right)\left(\arcsin x-\dfrac{\pi}{6}\right)<0.$

52. Наибольшее решение неравенства $\cos x\le\cos 2$ из промежутка $[0;2\pi]$ равно: А) 2; В) 3; С) 2π - 2; Д) π+2; Е) π.

53. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\dfrac{4+3x-x^2}{1+tg^2\dfrac{\pi x}{2}}\ge 0$?

54. Решите уравнение $ctg 2x\cdot\cos x-|\sin x|=-\sin x.$

55. Решите уравнение $\sqrt{(\cos 2x-2)^2}+\sqrt{\sin^2 2x+2\sin 2x+1}=2.$

56. При каких значениях параметра a уравнение $5\cos\left(\frac{x}{4}-\frac{3\pi}{8}\right)+a\sin\left(\frac{3\pi}{8}-\frac{x}{4}\right)=6$ имеет решение?

57. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $\sqrt{x^2-7x+12}+\sin\sqrt[6]{x-3}+1\geq a+\cos\sqrt[4]{4-x}$ имеет единственное решение.

58. При каких значениях m выражение $2-(\cos x-2m\sin x)\cos x$ равно числу - 1 хотя бы при одном значении x?

Ответы: **1)** 2,9; **2)** -1; **3)** 0,568; **4)** - 4; **5)** -0,5; **6)** $\frac{12}{7}$; **7)** 0; **8)** 0; **9)** - 1,5; **10)** -3; **11)** -17,5; **12)** $\cos\alpha$; **13)** -1,2; **14)** – 0,75; **15)** $\sin\alpha=-\frac{3}{\sqrt{13}}$; $tg б=\frac{3}{2}$; **16)** 1; **17)** 9; **18)** а) $\frac{3\pi}{10}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) $\frac{7\pi}{8}$; **19)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$; **20)** - 11; **21)** $\frac{3}{\sqrt{13}}$; **22)** $\frac{4\sqrt{7}+9}{20}$; **23)** [0;2]; **24)** $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$ **25)** 10°; **26)** $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z$; **27)** 15°; **28)** $2\pi n,\ n\in Z;$ **29)** $\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}\pi n, n\in Z$; **30)** $\frac{\pi}{6}+2\pi n, n\in Z$; **31)** $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{18}+\frac{\pi n}{3},\ n\in Z$; **32)** $\pi+2\pi n, n\in Z$; **33)** $-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; $(-1)^n\cdot\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; **34)** $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; **35)** $arctg\ 5+\ \pi n,\ n\in Z;$ **36)** $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$ $arctg 2+pn,\ n\in Z$; **37)** $\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; $arctg(-7)+\pi n, n\in Z;$ **38)** $\pm\frac{p}{3}+2pn,\ n\in Z$; $(-1)^{n+1}\cdot\frac{\pi}{6}+\pi n, n\in Z$; **39)** $\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}, n\in Z$; $\frac{(-1)^n}{2}\arcsin\frac{3}{4}+\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; **40)** $\frac{2\pi n}{5}, n\in Z;$ $\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z;$ $\pi+2pn,\ n\in Z$; **41)** $\frac{\pi n}{2},\ n\in Z$; $\frac{p}{6}+\frac{pn}{3},\ n\in Z$; **42)** $\pi n,\ n\in Z;$ **43)** 3; **44)** 10; **45)** 0,4; **46)** 1,5; **47)** 1; **48)** 2; **49)** $arctg 2+\pi n\leq x<\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z;$ $-\frac{\pi}{2}+\pi n<x\leq -arctg 2+\pi n,\ n\in Z$; **50)** $\frac{5p}{3}+4pn\leq x\leq 5p+4pn,\ n\in Z$; **51)** $\left[-1;\frac{1}{2}\right)\cup\left(\frac{\sqrt{3}}{2};1\right]$; **52)** 2π - 2; **53)** 3; **54)** $\frac{\pi}{4}+2\pi n, n\in Z;$ $\frac{3\pi}{4}+2\pi k,\ k\in Z$; **55)** $\pi k, k\in Z;$ $-\frac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z;$ **56)** $(-\infty;-\sqrt{11}]\cup[\sqrt{11};+\infty)$; **57)** $(1-\cos 1;\sin 1]$; **58)** $(-\infty;-\sqrt{6}]\cup[\sqrt{6};+\infty)$.

8 Логарифм числа. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства

Тему *"Логарифм числа и его свойства"* можно повторять по любому школьному учебнику, например, [7], [9] или [108]. Однако более целесообразно воспользоваться пособиями для поступающих в вузы и справочниками, так как изложение в них более компактное и систематизированное и содержит много иллюстративных примеров. В частности, можно использовать [1], [3], [5], [40], [64], [85], [88], [138], [152], [153]. Необходимо ***выучить наизусть все формулы***, в противном случае, у Вас возникнут трудности с проведением тождественных преобразований и вычислений значений функций.

Пример 8.1 Вычислите $\left(49^{-\frac{1}{2}log_7 2}+5^{\frac{2}{3}log_5 8}\right)\cdot log_2 0,5$.

Решение.

$$\left(49^{-\frac{1}{2}log_7 2}+5^{\frac{2}{3}log_5 8}\right)log_2 0,5=\left((7^2)^{-\frac{1}{2}log_7 2}+5^{\frac{2}{3}log_5 2^3}\right)(-1)=$$

$$=-(7^{-log_7 2}+5^{2\,log_5 2})=-(7^{log_7\frac{1}{2}}+5^{log_5 4})=-\left(\frac{1}{2}+4\right)=-\frac{9}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{9}{2}$.

Пример 8.2 Вычислите: $\dfrac{log_3 12}{log_{36} 3}-\dfrac{log_3 4}{log_{108} 3}$.

Решение.

$$\frac{log_3 12}{log_{36} 3}-\frac{log_3 4}{log_{108} 3}=\frac{log_3 12}{\frac{1}{log_3 36}}-\frac{log_3 4}{\frac{1}{log_3 108}}=log_3 12\cdot log_3 36-log_3 4\cdot log_3 108=$$

$$=(log_3 4+log_3 3)\cdot log_3 36-log_3 4(log_3 36+log_3 3)=$$

$$=(log_3 4+1)log_3 36-log_3 4\cdot(log_3 36+1)=log_3 36-log_3 4=log_3 9=2.$$

Ответ: 2.

Пример 8.3 Найдите значение выражения $7^{log_7 9\cdot log_3 b}$, если $log_{0,5} b=-2$.

Решение.

Прежде всего, отметим, что из условия следует, что $b>0$, и

$$7^{log_7 9\cdot log_3 b}=\left(7^{log_7 9}\right)^{log_3 b}=9^{log_3 b}=\left(3^2\right)^{log_3 b}=3^{2\,log_3 b}=3^{log_3 b^2}=b^2.$$

$log_{0,5} b=-2 \quad\Leftrightarrow\quad b=(0,5)^{-2} \quad\Leftrightarrow\quad b=4$. Следовательно, $7^{log_7 9\cdot log_3 b}$=16.

Ответ: 16.

Пример 8.4 Выразите $log_{24} 6{,}75n^b$ через a и b, если $log_n 2 = a$, $log_n 3 = b.$

Решение.

$$log_{24} 6{,}75n^b = log_{24}\left(\frac{27}{4}\cdot n^b\right) = log_{24}\left(\frac{27}{4}\cdot n^{log_n 3}\right) = log_{24}\left(\frac{27}{4}\cdot 3\right) = log_{24}\frac{81}{4} =$$

$$= \frac{log_n \frac{81}{4}}{log_n 24} = \frac{log_n 81 - log_n 4}{log_n 8 + log_n 3} = \frac{log_n 3^4 - log_n 2^2}{log_n 2^3 + log_n 3} = \frac{4 log_n 3 - 2 log_n 2}{3 log_n 2 + log_n 3} = \frac{4b-2a}{3a+b}.$$

Ответ: $\frac{4b-2a}{3a+b}$.

Пример 8.5 Известно, что $log_{ab^2}\frac{\sqrt[5]{a}}{b} > -1{,}5$. Найдите наименьшее целое значение $log_{ab} a$, большее 2.

Решение.

ОДЗ: $\{(a,b)|\ a \in R_+,\ b \in R_+,\ ab^2 \neq 1,\ ab \neq 1\}$.

Нетрудно заметить, что на данном множестве $log_{ab^2}\frac{\sqrt[5]{a}}{b} = \frac{log_{ab}\left(\frac{\sqrt[5]{a}}{b}\right)}{log_{ab}\left(ab^2\right)} =$

$$= \frac{log_{ab}\left(\frac{\sqrt[5]{a}\cdot a}{ab}\right)}{log_{ab}\left(\frac{a^2b^2}{a}\right)} = \frac{log_{ab}\sqrt[5]{a^6} - log_{ab}(ab)}{log_{ab}(ab)^2 - log_{ab} a} = \frac{\frac{6}{5}log_{ab} a - 1}{2 - log_{ab} a} = \frac{6 log_{ab} a - 5}{5(2 - log_{ab} a)}.$$

Следовательно, $log_{ab^2}\frac{\sqrt[5]{a}}{b} > -1{,}5 \Leftrightarrow \frac{6 log_{ab} a - 5}{5(2 - log_{ab} a)} > -\frac{3}{2}$. Так как нас интересует значение $log_{ab} a$, введем переменную $t = log_{ab} a$. Очевидно, что $log_{ab} a > 2 \Leftrightarrow t > 2;$ $log_{ab^2}\frac{\sqrt[5]{a}}{b} > -1{,}5 \Leftrightarrow \frac{6t-5}{5(2-t)} > -\frac{3}{2}$. Следовательно, нужно найти наименьшее целое, большее 2, решение неравенства $\frac{6t-5}{5(2-t)} > -\frac{3}{2}$.

$$\frac{6t-5}{5(2-t)} > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{6t-5}{5(2-t)} + \frac{3}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{20-3t}{10(2-t)} > 0 \Leftrightarrow \frac{3t-20}{10(t-2)} > 0.$$

$$\begin{cases} t > 2, \\ \frac{3t-20}{10(t-2)} > 0 \end{cases} \Rightarrow \quad 3t\text{-}20 > 0 \quad \Rightarrow \quad t > \frac{20}{3} = 6\frac{2}{3}.$$

Таким образом, наименьшее целое - 7.

Ответ: 7.

Приступать к повторению темы *"Показательные уравнения и неравенства"* целесообразно только после того, как Вы усвоили свойства степени, ознакомились с понятием логарифма числа, приобрели твердые навыки решения рациональных уравнений и неравенств, изучили свойства показательной функции (смотрите, например, [5], [7], [9], [108], [138], [152]). Методика решения показательных уравнений и неравенств достаточно основательно изложена в [66], кроме того, можно дополнительно использовать [3], [7], [9], [30], [38], [40], [69], [72], [85], [86], [88], [110], [117], [118], [130], [131], [136], [146], [153].

Пример 8.6 Найдите наибольшее целое отрицательное решение неравенства $3\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+\frac{x}{2}} < \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение.

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+\frac{x}{2}} < \frac{1}{\sqrt{3}} \iff \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2+\frac{x}{2}-1} < \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \iff x^2+\frac{x}{2}-1 > \frac{1}{2} \iff$$

$$\iff x^2+\frac{x}{2}-\frac{3}{2} > 0 \iff x \in \left(-\infty; -\frac{3}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

Следовательно, наибольшее целое отрицательное решение: - 2.

Ответ: - 2.

Пример 8.7 Решите уравнение $4^{\frac{x-1}{2}} = 8^{x^2-1}$.

Решение.

$$4^{\frac{x-1}{2}} = 8^{x^2-1} \iff 2^{x-1} = 2^{3(x^2-1)} \iff x-1 = 3(x^2-1) \iff 3x^2 - x - 2 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &x = 1, \\ &x = -\frac{2}{3}. \end{aligned}\right.$$

Ответ: $\left\{1; -\frac{2}{3}\right\}$.

Пример 8.8 Решите уравнение $2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0{,}001 \cdot \left(10^{3-x}\right)^2$.

Решение.

$$2^{x^2} \cdot 5^{x^2} = 0{,}001 \cdot \left(10^{3-x}\right)^2 \iff 10^{x^2} = 10^{-3} \cdot 10^{2(3-x)} \iff 10^{x^2} = 10^{3-2x} \iff$$

$$x^2 = 3 - 2x \iff x^2 + 2x - 3 = 0 \iff \left[\begin{aligned} &x = -3, \\ &x = 1. \end{aligned}\right.$$

Ответ: {-3; 1}.

Пример 8.9 Решите уравнение $5^{2x-1} = 7^{3-x}$.

Решение.

$$5^{2x-1}=7^{3-x} \Leftrightarrow \frac{5^{2x}}{5}=\frac{7^3}{7^x} \Leftrightarrow 5^{2x}\cdot 7^x=5\cdot 7^3 \Leftrightarrow 175^x=1715 \Leftrightarrow x=log_{175}1715.$$

Ответ: $log_{175}1715$.

Пример 8.10 Решите неравенство $\frac{1}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 7^{3x+2}\le\frac{25}{7}\cdot 7^{2x}\cdot 5^{3x}$.

Решение.

$$\frac{1}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 7^{3x+2}\le\frac{25}{7}\cdot 7^{2x}\cdot 5^{3x} \Leftrightarrow \frac{7^{3x+2}\cdot 7}{7^{2x}}\le\frac{5^2\cdot 5^{3x}\cdot 5}{5^{2x}} \Leftrightarrow 7^{x+3}\le 5^{x+3} \Leftrightarrow$$

$$\left(\frac{7}{5}\right)^{x+3}\le 1 \Leftrightarrow x+3\le 0 \Leftrightarrow x\le -3.$$

Ответ: (- ∞; - 3].

Пример 8.11 Решите уравнение $10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950$.

Решение.

$$10^x-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950 \Leftrightarrow 10^x-5\cdot 10^{x-2}=950 \Leftrightarrow 10^{x-2}\left(10^2-5\right)=950 \Leftrightarrow$$

$$10^{x-2}\cdot 950=950 \Leftrightarrow 10^{x-2}=1 \Leftrightarrow x-2=0 \Leftrightarrow x=2.$$

Ответ: 2.

Пример 8.12 Решите неравенство $2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2}$.

Решение.

$$2^{x+2}-2^{x+3}-2^{x+4}>5^{x+1}-5^{x+2} \Leftrightarrow 2^{x+2}(1-2-2^2)>5^{x+1}(1-5) \Leftrightarrow$$

$$2^{x+2}\cdot(-5)>5^{x+1}\cdot(-4) \Leftrightarrow 5\cdot 2^{x+2}<4\cdot 5^{x+1} \Leftrightarrow 2^x<5^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{5}\right)^x<1 \Leftrightarrow x>0.$$

Ответ: (0; + ∞).

Пример 8.13 Решите уравнение $\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}=128$.

Решение.

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{3x}-\left(\frac{1}{8}\right)^{x-1}=128 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{6x}-8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=128.$$

Введем новую переменную: $t=\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}$, $t>0$. Получим уравнение: $t^2-8t-128=0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t=16, \\ t=-8. \end{array}\right.$ Так как $t>0$, то получаем, что $t=16$. Следовательно, $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x}=16$, $2^{-3x}=2^4$, $-3x=4$, $x=-\frac{4}{3}$.

Ответ: $-\frac{4}{3}$.

Пример 8.14 Решите неравенство $10^{7x-1}+6\cdot 10^{1-7x}-5\le 0$.
Решение.

$10^{7x-1}+6\cdot 10^{1-7x}-5\le 0 \quad \Leftrightarrow \quad 10^{7x\text{-}1}+\dfrac{6}{10^{7x-1}}-5\le 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; 10^{2(7x-1)}-5\cdot 10^{7x-1}+6\le 0$, так как $10^{7x-1}>0, \; \forall\, x\in R$.

Введем новую переменную: $t=10^{7x-1}$, $t>0$. Получим неравенство: $t^2-5t+6\le 0$, откуда следует, что $t\in[2;\,3]$. Следовательно, $2\le 10^{7x-1}\le 3$.

$2\le 10^{7x-1}\le 3 \quad \Leftrightarrow \quad 20\le 10^{7x}\le 30 \quad \Leftrightarrow \quad lg\,20\le 7x\le lg\,30 \quad \Leftrightarrow$

$\dfrac{1}{7}lg\,20\le x\le \dfrac{1}{7}lg\,30 \quad \Leftrightarrow \quad lg\sqrt[7]{20}\le x\le lg\sqrt[7]{30}$.

Ответ: $[\,lg\sqrt[7]{20}; lg\sqrt[7]{30}]$.

Пример 8.15 Решите уравнение $9^x+6^x=2^{2x+1}$.
Решение.

$9^x+6^x=2^{2x+1} \Leftrightarrow 3^{2x}+3^x\cdot 2^x-2\cdot 2^{2x}=0 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{2}\right)^{2x}+\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}-2=0$.

Введем новую переменную: $t=\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}$, $t>0$; получим уравнение: $t^2+t-2=0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t=-2, \\ t=1. \end{array}\right.$ Так как $t>0$, то $t=1$, $\left(\dfrac{3}{2}\right)^{x}=1$, $x=0$.

Ответ: 0.

Пример 8.16 Решите неравенство $3\cdot 7^{2x}+37\cdot 140^x\le 26\cdot 20^{2x}$.

Решение.

$3\cdot 7^{2x}+37\cdot 140^x\le 26\cdot 20^{2x} \;\Leftrightarrow\; 3\cdot 7^{2x}+37\cdot 20^x\cdot 7^x-26\cdot 20^{2x}\le 0 \;\Leftrightarrow$

$3\cdot\left(\dfrac{7}{20}\right)^{2x}+37\cdot\left(\dfrac{7}{20}\right)^{x}-26\le 0$, т. к. $20^{2x}>0, \; \forall\; x\in R$.

Введем новую переменную: $t=\left(\dfrac{7}{20}\right)^{x}$, $t>0$. Получим неравенство: $3t^2+37t-26\le 0$, откуда следует, что $t\in\left[-13;\dfrac{2}{3}\right]$. Учитывая ограничение на t, имеем: $t\in\left(0;\dfrac{2}{3}\right]$.

Следовательно, $\begin{cases} \left(\dfrac{7}{20}\right)^x > 0, \\ \left(\dfrac{7}{20}\right)^x \le \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in R, \\ x \ge log_{\frac{7}{20}} \dfrac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow x \ge log_{\frac{7}{20}} \dfrac{2}{3}.$

Ответ: $\left[log_{\frac{7}{20}} \dfrac{2}{3}; +\infty\right).$

Пример 8.17 Решите неравенство $\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1$.

Решение.

Нетрудно заметить, что $4x^2 + 2x + 1 > 0, \ \forall \ x \in R.$ Следовательно,

$$\left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > 1 \Leftrightarrow \left(4x^2 + 2x + 1\right)^{x^2 - x} > \left(4x^2 + 2x + 1\right)^0 \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 > 1, \\ x^2 - x > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 4x^2 + 2x + 1 < 1, \\ x^2 - x < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x(2x+1) > 0, \\ x(x-1) > 0, \end{cases} \\ \begin{cases} 2x(2x+1) < 0, \\ x(x-1) < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (0; +\infty), \\ x \in (-\infty; 0) \cup (1; +\infty), \end{cases} \\ \begin{cases} x \in \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right), \\ x \in (0; 1). \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty), \\ x \in \varnothing \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty).$$

Ответ: $x \in \left(-\infty; -\dfrac{1}{2}\right) \cup (1; +\infty)$.

Пример 8.18 Решите уравнение $x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}}$.

Решение.

ОДЗ: $3 - x \ge 0 \Leftrightarrow x \le 3.$

$$x \cdot 3^{x-1} + 3 \cdot 3^{\sqrt{3-x}} = 3^x + x \cdot 3^{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow 3^{x-1}(x-3) - 3^{\sqrt{3-x}}(x-3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$(x-3)\left(3^{x-1} - 3^{\sqrt{3-x}}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3\text{-}x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ 3^{x-1} = 3^{\sqrt{3-x}} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le 3, \\ \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x - 1 = \sqrt{3-x} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ \begin{cases} x \le 3, \\ x \ge 1, \\ (x-1)^2 = 3 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[1;3],\\ x^2-x-2=0\end{cases}\\ x=3\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x\in[1;3],\\ \left[\begin{array}{l}x=2,\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases}\\ x=3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=3,\\ x=2.\end{array}\right.$$

Ответ: $\{2;\,3\}$.

Пример 8.19 Решите уравнение $2\sqrt{\left(4-2^x\right)^2}+\sqrt{4^{2x}-18\cdot 4^x+32}=2^{x+1}-8$

Решение.

$2\sqrt{\left(4-2^x\right)^2}+\sqrt{4^{2x}-18\cdot 4^x+32}=2^{x+1}-8 \quad \Leftrightarrow$

$2\left|4-2^x\right|+\sqrt{4^{2x}-18\cdot 4^x+32}=2^{x+1}-8$. Нетрудно заметить, что данное уравнение не будет иметь решений, когда $2^{x+1}-8<0 \Leftrightarrow 2^x-4<0 \Leftrightarrow x<2.$

Следовательно, дальнейшее исследование уравнения проводим при $x\ge 2.$ Так как на данном множестве $\left|4-2^x\right|=-\left(4-2^x\right)$, то мы приходим к более простому уравнению: $-2\left(4-2^x\right)+\sqrt{4^{2x}-18\cdot 4^x+32}=2^{x+1}-8$. Откуда следует, что $\sqrt{4^{2x}-18\cdot 4^x+32}=0$ и, значит, $4^{2x}-18\cdot 4^x+32=0$.

Данное уравнение легко решить, вводя новую переменную: $t=4^x,\ t>0$. Получим уравнение: $t^2-18t+32=0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l}t=2,\\ t=16\end{array}\right.$ а, значит,

$\left[\begin{array}{l}4^x=2,\\ 4^x=16\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0{,}5;\\ x=2.\end{array}\right.$ Так как $x\ge 2$, то подходит только одно значение: $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 8.20 Решите уравнение

$$\left(\left(e^{2x}-4e^x+11\right)^2-10\left(e^x-4\right)\cdot e^x-94\right)^2=\frac{\left|e^x-2\right|}{e^x-2}-1.$$

Решение.

ОДЗ: $e^x\ne 2$. Нетрудно заметить, что при $e^x<2,\ \left|e^x-2\right|=-\left(e^x-2\right)$ и правая часть исследуемого уравнения становится равной - 2, т.е. отрицательной, поэтому уравнение решений не имеет. Следовательно, все дальнейшие исследования проводим при $e^x-2>0$, т.е. при $x>ln2.$ В этом случае $\left|e^x-2\right|=e^x-2$ и уравнение приводится к виду: $\left(\left(e^{2x}-4e^x+11\right)^2-10\left(e^x-4\right)\cdot e^x-94\right)^2=0$, откуда следует, что $\left(e^{2x}-4e^x+11\right)^2-10\left(e^x-4\right)\cdot e^x-94=0$.

$$\left(e^{2x}-4e^{x}+11\right)^{2}-10\left(e^{x}-4\right)\cdot e^{x}-94=0 \Leftrightarrow \left(e^{2x}-4e^{x}+11\right)^{2}-10\left(e^{2x}-4e^{x}\right)-94=0.$$

Введя новую переменную: $t=e^{2x}-4e^{x}+11$, имеем уравнение $t^{2}-10t+16=0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} e^{2x}-4e^{x}+11=2, \\ e^{2x}-4e^{x}+11=8 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} e^{x}=3, \\ e^{x}=1. \end{array}\right.$ Учитывая ограничение: $e^{x}>2$, получаем, что $e^{x}=3$ и $x=ln3$.

Ответ: $ln3$.

Приступать к повторению темы *"Логарифмические уравнения и неравенства"* целесообразно только после того, как Вы усвоили свойства степени, ознакомились с понятием логарифма числа и его свойствами, приобрели твердые навыки решения рациональных и показательных уравнений и неравенств, изучили свойства логарифмической функции (смотрите, например, [5], [7], [9], [108], [138], [152]). Методика решения логарифмических уравнений и неравенств достаточно основательно изложена в [66], кроме того, можно дополнительно использовать [3], [7], [9], [30], [38], [40], [69], [72], [85], [86], [88], [110], [117], [118], [130], [131], [136], [146], [153].

Пример 8.21 Решите уравнение $lg(4-x)-lg(x-6)=5$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 4-x>0, \\ x-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<4, \\ x>6. \end{cases}$ Следовательно, $x \in \varnothing$.

Так как область допустимых значений - пустое множество, то уравнение решений не имеет.

Ответ: $\varnothing$.

Пример 8.22 Решите неравенство $log_{tg\frac{\pi}{8}}(2x+1) \geq log_{tg\frac{\pi}{8}}(x+1)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x+1>0, \\ x+1>0 \end{cases} \Rightarrow x>-\dfrac{1}{2}.$ Так как $0<tg\dfrac{\pi}{8}<tg\dfrac{\pi}{4}=1$, то

$$log_{tg\frac{\pi}{4}}(2x+1) \geq log_{tg\frac{\pi}{4}}(x+1) \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2}, \\ 2x+1 \leq x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2}, \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \left(-\dfrac{1}{2}; 0\right].$$

Ответ: $\left(-\dfrac{1}{2}; 0\right]$.

Пример 8.23 Решите уравнение $5lg\,x=3lg\dfrac{x}{2}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$5lg\,x = 3lg\frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad lg\ x^5 = lg\left(\frac{x}{2}\right)^3 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^5 = \dfrac{x^3}{8} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ x^3\left(x^2 - \dfrac{1}{8}\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = \pm\dfrac{1}{\sqrt{8}} \end{array}\right. \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{\sqrt{8}}.$$

Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

Пример 8.24 Решите уравнение $2 \cdot 49^{log_7 \sqrt{x}} = 75 - x$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$2 \cdot 49^{log_7 \sqrt{x}} = 75 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 7^{2\,log_7 \sqrt{x}} = 75 - x \quad \Leftrightarrow \quad 2 \cdot 7^{log_7 x} = 75 \text{ - } x \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > 0, \\ 2x = 75 - x \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x > 0, \\ x = 25 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad x = 25.$$

Ответ: 25.

Пример 8.25 Найдите наименьший корень уравнения

$$log_5(x+2)^6 + log_5|x+2| = 21.$$

Решение.

ОДЗ: $x \neq 2$.

$$log_5(x+2)^6 + log_5|x+2| = 21 \quad \Leftrightarrow \quad 6log_5|x+2| + log_5|x+2| = 21 \quad \Leftrightarrow$$

$$7log_5|x+2| = 21 \ \Leftrightarrow \ log_5|x+2| = 3 \ \Leftrightarrow |x+2| = 5^3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x+2 = 125, \\ x+2 = -125 \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 123, \\ x = -127. \end{array}\right.$$

Наименьший корень: - 127.

Ответ: - 127.

Пример 8.26 Решите уравнение $lg(2x-3)^2 - lg(3x-2)^2 = 2$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x \neq \dfrac{3}{2}, \\ x \neq \dfrac{2}{3} \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup \left(\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right) = R \setminus \left\{\frac{2}{3}; \frac{3}{2}\right\}.$$

$$lg(2x-3)^2 - lg(3x-2)^2 = 2 \ \Leftrightarrow \ 2\ lg|2x\text{-}3| \text{ - } 2\ lg|3x\text{-}2| \ = 2 \quad \Leftrightarrow$$

$$lg\left|\frac{2x-3}{3x-2}\right|=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R\setminus\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}, \\ \left|\frac{2x-3}{3x-2}\right|=10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R\setminus\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}, \\ \left[\begin{array}{l} \frac{2x-3}{3x-2}=10, \\ \frac{2x-3}{3x-2}=-10 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R\setminus\left\{\frac{2}{3};\frac{3}{2}\right\}, \\ \left[\begin{array}{l} x=\frac{17}{28}, \\ x=\frac{23}{32} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{17}{28}, \\ x=\frac{23}{32}. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\frac{17}{28};\frac{23}{32}\right\}$.

Пример 8.27 Решите неравенство $log_{0,5}\left(log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0$.

Решение.

$$log_{0,5}\left(log_6\frac{x^2+x}{x+4}\right)<0 \Leftrightarrow \begin{cases} log_6\frac{x^2+x}{x+4}>0, \\ log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1 \end{cases} \Rightarrow log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1 .$$

$$log_6\frac{x^2+x}{x+4}>1 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2+x}{x+4}>0, \\ \frac{x^2+x}{x+4}>6. \end{cases} \text{ Значит, } \frac{x^2+x}{x+4}>6.$$

$$\frac{x^2+x}{x+4}>6 \Leftrightarrow \frac{x^2+x}{x+4}-6>0 \Leftrightarrow \frac{x^2-5x-24}{x+4}>0 \Leftrightarrow \frac{(x+3)(x-8)}{x+4}>0.$$

Применяя метод интервалов для решения данного неравенства, получаем, что $x\in(-4;-3)\cup(8;+\infty)$.

Ответ: $x\in(-4;-3)\cup(8;+\infty)$.

Пример 8.28 Решите уравнение

$$log_7(x-2)-log_7(x+2)=1-log_7(2x-7).$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x-2>0, \\ x+2>0, \\ 2x-7>0 \end{cases} \Rightarrow x>\frac{7}{2}.$

$$log_7(x-2)-log_7(x+2)=1-log_7(2x-7) \Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{7}{2}, \\ log_7\frac{x-2}{x+2}=log_7\frac{7}{2x-7} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{7}{2x-7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{2}, \\ x^2 - 9x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \dfrac{7}{2}, \\ \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 9 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow x = 9.$$

Ответ: 9.

Пример 8.29 Решите неравенство

$$log_3((x+2)(x+4)) + log_{\frac{1}{3}}(x+2) \le \frac{1}{2} log_{\sqrt{3}} 7.$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} (x+2)(x+4) > 0, \\ (x+2) > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2 > 0, \\ x+4 > 0 \end{cases} \Rightarrow x > -2.$

$$log_3((x+2)(x+4)) + log_{\frac{1}{3}}(x+2) \le \frac{1}{2} log_{\sqrt{3}} 7 \Leftrightarrow$$

$$log_3((x+2)(x+4)) - log_3(x+2) \le \frac{1}{2} \cdot 2 log_3 7 \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ log_3(x+4) \le log_3 7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x > -2, \\ x+4 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2, \\ x \le 3 \end{cases} \Rightarrow x \in (-2; 3].$$

Ответ: (- 2; 3].

Пример 8.30 Решите уравнение $\dfrac{log_4 x + 1}{log_4(3x-1)} = 2.$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ 3x - 1 > 0, \\ 3x - 1 \ne 1 \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right).$

$$\frac{log_4 x + 1}{log_4(3x-1)} = 2 \Leftrightarrow \frac{log_4(4x)}{log_4(3x-1)} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne \dfrac{2}{3}, \\ log_4(4x) = 2 log_4(3x-1) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right), \\ log_4(4x) = log_4(3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right), \\ 4x = (3x-1)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right) \cup \left(\dfrac{2}{3}; +\infty\right), \\ 9x^2 - 10x + 1 = 0. \end{cases}$$

$9x^2 - 10x + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{9}. \end{array}\right.$ ОДЗ удовлетворяет только $x = 1$.

Ответ: $x = 1$.

Пример 8.31 Решите уравнение $log_2\left(2^x-7\right)=3-x$.

Решение.

ОДЗ: $2^x-7>0 \;\Leftrightarrow\; x>log_2 7$.

$$log_2\left(2^x-7\right)=3-x \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x>log_2 7, \\ 2^{3-x}=2^x-7. \end{cases}$$

$2^{3-x}=2^x-7 \;\Leftrightarrow\; \dfrac{8}{2^x}=2^x-7 \;\Leftrightarrow\; 2^{2x}-7\cdot 2^x-8=0$. Вводя новую переменную: $t=2^x,\; t>0$, получаем уравнение: $t^2-7t-8=0$, т.е. $\left[\begin{array}{l} t=8, \\ t=-1 \end{array}\right.$. Учитывая ограничение на t, имеем: $t=8$. Таким образом, $2^x=8$, и, следовательно, $x=3$.

Ответ: $x=3$.

Пример 8.32 Решите уравнение $\dfrac{log_2 x-1}{log_2\dfrac{x}{2}}-2\,log_2\sqrt{x}+log_2^2\,x=3$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x>0, \\ x\neq 2 \end{cases} \;\Rightarrow\; x\in(0;2)\cup(2;+\infty)$.

$$\frac{log_2 x-1}{log_2\dfrac{x}{2}}-2log_2\sqrt{x}+log_2^2\,x=3 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{log_2\dfrac{x}{2}}{log_2\dfrac{x}{2}}-log_2 x+log_2^2\,x=3 \quad\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\neq 2, \\ 1-log_2 x+log_2^2\,x=3 \end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases} x\neq 2, \\ log_2^2\,x-log_2 x-2=0. \end{cases}$$

Уравнение $log_2^2\,x-log_2 x-2=0$ можно решить методом замены переменной: введем $t=log_2 x$, получим уравнение: $t^2-t-2=0$. Значит, $\left[\begin{array}{l} t=2, \\ t=-1. \end{array}\right.$

Таким образом, $\left[\begin{array}{l} log_2 x=2, \\ log_2 x=-1 \end{array}\right.$ и, следовательно, $\left[\begin{array}{l} x=4, \\ x=\dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2};\ 4\right\}$.

Пример 8.33 Решите уравнение $lg^2\,x^3-10\,lg\,x+1=0$.

Решение.

ОДЗ: $x>0$.

$$lg^2\,x^3-10lg\,x+1=0 \;\Leftrightarrow\; (lg\ x^3)^2-10lg\,x+1=0 \;\Leftrightarrow\left(3lg\,x\right)^2-10lg\,x+1=0$$

$\Leftrightarrow \quad 9lg^2 x - 10lg\,x + 1 = 0$. Вводя $t = lg\,x$, получаем уравнение: $9t^2 - 10t + 1 = 0$. Таким образом, $\left[\begin{array}{l} t = 1, \\ t = \dfrac{1}{9} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} lg\,x = 1, \\ lg\,x = \dfrac{1}{9} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10, \\ x = \sqrt[9]{10}. \end{array}\right.$

Ответ: $\{10;\ \sqrt[9]{10}\}$.

Пример 8.34 Решите уравнение $4log_4^2(-x) + 2log_4 x^2 + 1 = 0$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} -x > 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \quad x < 0.$

$$4log_4^2(-x) + 2log_4 x^2 + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 4log_4^2(-x) + 4log_4|x| + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$4log_4^2(-x) + 4log_4(-x) + 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; (2log_4(-x) + 1)^2 = 0 \;\Leftrightarrow\; log_4(-x) = -\frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$-x = \frac{1}{2} \;\Leftrightarrow\; x = -\frac{1}{2}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{2}$.

Пример 8.35 Решите неравенство $\dfrac{lg^2 x - 3lg\,x + 3}{lg\,x - 1} \leq 1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq 10. \end{cases}$ Введем $t = lg\,x$, получим неравенство: $\dfrac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} \leq 1$.

$$\frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} \leq 1 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^2 - 3t + 3}{t - 1} - 1 \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{t^2 - 4t + 4}{t - 1} \leq 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{(t - 2)^2}{t - 1} \leq 0.$$

Решая данное неравенство, получаем, что $t \in (-\infty;\ 1) \cup \{2\}$. Значит,

$$\left[\begin{array}{l} lg\,x < 1, \\ lg\,x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x < 10, \\ x = 100 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (0;\ 10) \cup \{100\}.$$

Ответ: $(0;\ 10) \cup \{100\}$.

Пример 8.36 Решите неравенство $\sqrt{log_3 x} - 2log_9\sqrt{\dfrac{x}{3}} > 0{,}5$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ log_3 x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x \geq 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x \geq 1.$

$$\sqrt{log_3 x}-2log_9\sqrt{\frac{x}{3}}>0{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{log_3 x}-\frac{2log_3\sqrt{\frac{x}{3}}}{log_3 9}>0{,}5 \Leftrightarrow \sqrt{log_3 x}-log_3\sqrt{\frac{x}{3}}>0{,}5$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \sqrt{log_3 x}-\frac{1}{2}log_3\frac{x}{3}>0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \sqrt{log_3 x}-0{,}5(log_3 x-log_3 3)>0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x>0, \\ \sqrt{log_3 x}-0{,}5log_3 x+0{,}5>0{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0, \\ \sqrt{log_3 x}-0{,}5log_3 x>0. \end{cases}$$

Вводя новую переменную $t=\sqrt{log_3 x},\ t\geq 0$; решение второго неравенства системы сводим к решению квадратного неравенства: $t-0{,}5t^2>0 \Leftrightarrow t^2-2t<0 \Leftrightarrow t\in(0;2)$, что соответствует ограничениям на возможные значения переменной t ($t\geq 0$). Следовательно, $\begin{cases} x>0, \\ 0<\sqrt{log_3 x}<2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0, \\ x\geq 1, \\ 0<log_3 x<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\geq 1, \\ 1<x<81 \end{cases} \Rightarrow x\in(1;81).$

Ответ: (1; 81).

Пример 8.37 Решите уравнение $log_{\frac{5+x}{3}}3=log_{-\frac{1}{x+1}}3$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} \frac{5+x}{3}>0, \\ \frac{5+x}{3}\neq 1, \\ -\frac{1}{x+1}>0, \\ -\frac{1}{x+1}\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-5, \\ x\neq -2, \\ x<-1, \\ x\neq -2 \end{cases} \Rightarrow x\in(-5;-2)\cup(-2;-1).$

$$log_{\frac{5+x}{3}}3=log_{-\frac{1}{x+1}}3 \Leftrightarrow \frac{1}{log_3\frac{5+x}{3}}=\frac{1}{log_3\left(-\frac{1}{x+1}\right)} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\neq -2, \\ log_3\frac{5+x}{3}=log_3\left(-\frac{1}{x+1}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-5;-2)\cup(-2;-1), \\ \frac{5+x}{3}=-\frac{1}{x+1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-5;-2)\cup(-2;-1), \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-4. \end{array}\right. \end{cases}$$

Следовательно, x = - 4.

Ответ: - 4.

Пример 8.38 Решите уравнение $log_{x-1}(x^2-5x+2{,}25)=2$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x-1>0, \\ x-1\neq 1, \\ x^2-5x+2{,}25>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x\neq 2, \\ x\in\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)\cup\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right) \end{cases} \Rightarrow\ x\in\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right).$$

Опираясь на определение логарифма, получаем:

$$\begin{cases} x\in\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right), \\ (x-1)^2=x^2-5x+2{,}25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left(\dfrac{9}{2};+\infty\right), \\ x=\dfrac{5}{12} \end{cases} \Rightarrow\ x\in\varnothing.$$

Ответ: $\varnothing$.

Пример 8. 39 Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y=log_{3+x}\left(x^2+8x+17\right)$ и $y=1+\dfrac{1}{log_5(3+x)}$.

Решение.

Для того, чтобы найти абсциссы точек пересечения, нужно узнать при каких значениях x ординаты функций будут равны, т.е. решить уравнение:

$$log_{3+x}\left(x^2+8x+17\right)=1+\frac{1}{log_5(3+x)}.$$

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x^2+8x+17>0, \\ 3+x>0, \\ 3+x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in R, \\ x>-3, \\ x\neq -2 \end{cases} \Rightarrow\ x\in(-3;-2)\cup(-2;+\infty).$$

$$log_{3+x}\left(x^2+8x+17\right)=1+\frac{1}{log_5(3+x)} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;-2)\cup(-2;+\infty), \\ log_{3+x}\left(x^2+8x+17\right)=1+log_{3+x}5 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x\in(-3;-2)\cup(-2;+\infty), \\ log_{3+x}\dfrac{x^2+8x+17}{5}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;-2)\cup(-2;+\infty), \\ \dfrac{x^2+8x+17}{5}=3+x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;-2)\cup(-2;+\infty), \\ x^2+3x+2=0. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\in(-3;-2)\cup(-2;+\infty), \\ \left[\begin{array}{l} x=-2, \\ x=-1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow\ x=-1.$$

Ответ: - 1.

Пример 8.40 Решите уравнение $log_5^2 x+log_{5x}\dfrac{5}{x}=1$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} x > 0, \\ x \neq \dfrac{1}{5}. \end{cases}$ $\quad log_5^2 x + log_{5x} \dfrac{5}{x} = 1 \;\Leftrightarrow\; log_5^2 x + \dfrac{log_5 \dfrac{5}{x}}{log_5 (5x)} = 1 \;\Leftrightarrow$

$log_5^2 x + \dfrac{log_5 5 - log_5 x}{log_5 5 + log_5 x} = 1 \;\Leftrightarrow\; log_5^2 x + \dfrac{1 - log_5 x}{1 + log_5 x} = 1$. Введем $t = log_5 x$, получим уравнение: $t^2 + \dfrac{1-t}{1+t} = 1$.

$$t^2 + \frac{1-t}{1+t} = 1 \;\Leftrightarrow \begin{cases} t \neq -1, \\ t^3 + t^2 - 2t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq -1, \\ \left[\begin{array}{l} t = 0, \\ t = -2, \\ t = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} log_5 x = 0, \\ log_5 x = -2, \\ log_5 x = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = \dfrac{1}{25}, \\ x = 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{25}; 1; 2\right\}$.

Пример 8.41 Решите уравнение $x^{log_2 x} = 4x$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$. $\quad x^{log_2 x} = 4x \;\Leftrightarrow\; log_2\left(x^{log_2 x}\right) = log_2 4x \;\Leftrightarrow$

$log_2 x \cdot log_2 x = log_2 4 + log_2 x \;\Leftrightarrow\; log_2^2 x - log_2 x - 2 = 0$. Введем новую переменную: $t = log_2 x$. Получим уравнение: $t^2 - t - 2 = 0$, следовательно, $\left[\begin{array}{l} t = 2, \\ t = -1. \end{array}\right.$

В таком случае, $\left[\begin{array}{l} log_2 x = 2, \\ log_2 x = -1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 4, \\ x = \dfrac{1}{2}. \end{array}\right.$

Ответ: $\left\{\dfrac{1}{2}; 4\right\}$.

Пример 8.42 Решите неравенство $log_{x-2}(2x-3) > log_{x-2}(24-x)$.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases} 2x - 3 > 0, \\ 24 - x > 0, \\ x - 2 > 0, \\ x - 2 \neq 1 \end{cases} \Rightarrow \quad x \in (2;3) \cup (3;24).$

$$log_{x-2}(2x-3) > log_{x-2}(24-x) \;\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (2;3), \\ 2x\text{-}3 < 24\text{-}x, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;24), \\ 2x - 3 > 24 - x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in (2;3), \\ x < 9, \end{cases} \\ \begin{cases} x \in (3;24), \\ x > 9 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} x \in (2;3), \\ x \in (9;24) \end{array}\right. \Leftrightarrow \quad x \in (2;3) \cup (9;24).$$

Ответ: $(2;\ 3) \cup (9;\ 24)$.

Пример 8.43 Решите неравенство $\log_{\frac{2x-1}{2x+5}} \frac{1}{2} > 0$.

Решение.

Нетрудно заметить, сравнивая поведение логарифмической функции в зависимости от величины основания (см. рисунок 42), что

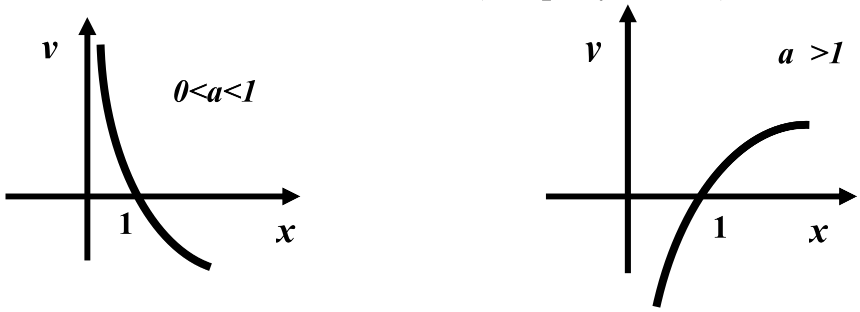


Рисунок 42

$$\log_{\frac{2x-1}{2x+5}} \frac{1}{2} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad 0 < \frac{2x\text{-}1}{2x+5} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right), \\ \frac{2x-1}{2x+5} - 1 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right), \\ \frac{-6}{2x+5} < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; -\frac{5}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right), \\ x \in \left(-\frac{5}{2}; +\infty\right) \end{cases} \Rightarrow x \in \left(\frac{1}{2}; +\infty\right).$$

Ответ: $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Пример 8.44 Решите неравенство $\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right)} \le 1$.

Решение.

ОДЗ: $\quad x^2 - \frac{10}{3}x + 1 > 0 \quad \Leftrightarrow \ x \in \left(-\infty;\ \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty)$.

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\log_{\frac{1}{9}}\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right)} \le 1 \Leftrightarrow \log_{\frac{1}{9}}\left(x^2 - \frac{10}{3}x + 1\right) \ge 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty), \\ x^2 - \frac{10}{3}x + 1 \le 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left(-\infty;\ \dfrac{1}{3}\right) \cup (3; +\infty), \\ x \in \left[0;\ \dfrac{10}{3}\right] \end{cases} \Rightarrow \quad x \in \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(3;\ \dfrac{10}{3}\right].$$

Ответ: $x \in \left[0;\ \dfrac{1}{3}\right) \cup \left(3;\ \dfrac{10}{3}\right].$

Пример 8.45 Решите неравенство $\dfrac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{2} log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4} log_2^2 x}$.

Решение.

ОДЗ: $x > 0$.

$$\frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{2} log_2 x} \geq 2^{\frac{1}{4} log_2^2 x} \Leftrightarrow log_2\left(\frac{1}{4} \cdot x^{\frac{1}{2} log_2 x}\right) \geq log_2\left(2^{\frac{1}{4} log_2^2 x}\right)$$

$$\Leftrightarrow log_2 \frac{1}{4} + log_2\left(x^{\frac{1}{2} log_2 x}\right) \geq \frac{1}{4} log_2^2 x \cdot log_2 2 \Leftrightarrow -2 + \frac{1}{2} log_2 x \cdot log_2 x \geq \frac{1}{4} log_2^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4} log_2^2 x \geq 2 \quad \Leftrightarrow \quad log_2^2 x \geq 8 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} log_2 x \geq \sqrt{8}, \\ log_2 x \leq -\sqrt{8} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ \left[\begin{array}{l} x \geq 2^{\sqrt{8}}, \\ x \leq 2^{-\sqrt{8}} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow$$

$x \in (0; 2^{-\sqrt{8}}] \cup [2^{\sqrt{8}}; +\infty)$.

Ответ: $(0; 2^{-\sqrt{8}}] \cup [2^{\sqrt{8}}; +\infty)$.

Пример 8.46 Решите уравнение $\sqrt{log_x \sqrt{3x}} \cdot log_3 x = -1$.

Решение.

$$\text{ОДЗ: } \begin{cases} x > 0, \\ x \neq 1, \\ log_x \sqrt{3x} \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < x < 1, \\ \sqrt{3x} \leq 1, \end{cases} \\ \begin{cases} x > 1, \\ \sqrt{3x} \geq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right], \\ x \in (1; +\infty) \end{array}\right. \Rightarrow x \in \left(0; \dfrac{1}{3}\right] \cup (1; +\infty).$$

Нетрудно заметить, что если $x > 1$, то уравнение решений не имеет, так как левая часть уравнения в этом случае будет положительной, а правая часть – отрицательной. Следовательно, далее решаем, учитывая, что $0 < x \leq \dfrac{1}{3}$.

В этом случае, $log_3 x = -\sqrt{log_3^2 x}$. Таким образом,

$$\sqrt{log_x \sqrt{3x}} \cdot log_3 x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{log_3 \sqrt{3x}}{log_3 x}} \cdot log_3 x = -1 \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \sqrt{\frac{log_3 \sqrt{3x}}{log_3 x}} \cdot \left(-\sqrt{log_3^2 x}\right) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \sqrt{log_3 \sqrt{3x} \cdot log_3 x} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ log_3 \sqrt{3x} \cdot log_3 x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \frac{1}{2} log_3 (3x) \cdot log_3 x = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ (log_3 3 + log_3 x) \cdot log_3 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ log_3^2 x + log_3 x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} log_3 x = -2, \\ log_3 x = 1 \end{array} \right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x \le \frac{1}{3}, \\ \left[\begin{array}{l} x = \frac{1}{9}, \\ x = 3 \end{array} \right. \end{cases} \Rightarrow \quad x = \frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

Пример 8.47 Найдите произведение всех корней уравнения $\sqrt[3]{10 + 3x - x^2} \cdot lg\left(7 - x - x^2\right) = 0$.

Решение.

$$\sqrt[3]{10 + 3x - x^2} \cdot lg\left(7 - x - x^2\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 7 - x - x^2 > 0, \\ \left[\begin{array}{l} 10 + 3x - x^2 = 0, \\ lg\left(7 - x - x^2\right) = 0 \end{array} \right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 7 < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 - 3x - 10 = 0, \\ 7 - x - x^2 = 1. \end{array} \right. \end{cases}$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 5, \\ x = -2. \end{array} \right. \quad 5^2 + 5 - 7 = 23 > 0, \quad (-2)^2 + (-2) - 7 = -5 < 0.$$

Следовательно, решением уравнения будет только $x = -2$.

$$7 - x - x^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 7 = -1 \Leftrightarrow x^2 + x - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 2. \end{array} \right.$$

Оба эти числа являются решением уравнения, так как $x^2 + x - 7 < 0$.
Таким образом, произведение корней уравнения равно: $2 \cdot (-2) \cdot (-3) = 12$.
Ответ: 12.

Пример 8.48 Решите уравнение $\dfrac{4^{\sqrt{log_4|x|}}}{|x|^{\sqrt{log_{|x|}4}}}+4^{\left(x^2+3x-4\right)\cdot(x+3)}=2$ и укажите его наибольший корень.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}|x|\neq 0,\\ |x|\neq 1,\\ log_4|x|\geq 0,\\ log_{|x|}4\geq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x\neq 0,\\ x\neq \pm 1,\\ |x|\geq 1,\\ |x|>1\end{cases} \Rightarrow |x|>1 \Leftrightarrow x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty).$

На ОДЗ $\dfrac{4^{\sqrt{log_4|x|}}}{|x|^{\sqrt{log_{|x|}4}}}=\dfrac{4^{\sqrt{log_4|x|}}}{|x|^{\sqrt{\frac{1}{log_4|x|}}}}=\dfrac{4^{\sqrt{log_4|x|}}}{|x|^{\frac{1}{\sqrt{log_4|x|}}}}$. Введем новую переменную: $t=\sqrt{log_4|x|}$. Тогда $t^2=log_4|x|$, $|x|=4^{t^2}$ и $\dfrac{4^{\sqrt{log_4|x|}}}{|x|^{\frac{1}{\sqrt{log_4|x|}}}}=\dfrac{4^t}{\left(4^{t^2}\right)^{\frac{1}{t}}}=\dfrac{4^t}{4^t}=1$.

$$1+4^{\left(x^2+3x-4\right)\cdot(x+3)}=2 \Leftrightarrow 4^{\left(x^2+3x-4\right)\cdot(x+3)}=1 \Leftrightarrow \left(x^2+3x-4\right)\cdot(x+3)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=1,\\ x=-3.\end{array}\right.$$

Учитывая ОДЗ, получаем, что $\left[\begin{array}{l}x=-4,\\ x=-3.\end{array}\right.$ Следовательно, x = - 3 - наибольший корень уравнения.

Ответ: - 3.

Пример 8. 49 Решите систему уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{x^2-2y-15}{10x-3y+1}=-8x+2y+23,\\ log_5\left((7x-2y-5)^2-100\right)=log_5\left((3x-y+6)^2-100\right).\end{cases}$$

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}10x-3y+1\neq 0,\\ (7x-2y-5)^2>100,\\ (3x-y+6)^2>100.\end{cases}$

На ОДЗ второе уравнение системы легко сводится к исследованию более простой ситуации:

$$(7x-2y-5)^2-100=(3x-y+6)^2-100 \Leftrightarrow (7x-2y-5)^2-(3x-y+6)^2=0$$

$$\Leftrightarrow (7x-2y-5-3x+y-6)\cdot(7x-2y-5+3x-y+6)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x-y-11=0,\\ 10x-3y+1=0.\end{array}\right.$$

Так как по ОДЗ $10x-3y+1\neq 0$, далее используем, что $4x-y-11=0$, т.е. $y=4x-11$. Подставляя это выражение в первое уравнение системы, получаем: $\dfrac{x^2-2(4x-11)-15}{10x-3(4x-11)+1}=-8x+2(4x-11)+23 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-8x+7}{-2x+34}=1 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x\neq \dfrac{34}{2}, \\ x^2-8x+7=-2x+34 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 17, \\ x^2-6x-27=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 17, \\ \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=-3. \end{array}\right.$$

Таким образом, $\begin{cases} y=4x-11, \\ \left[\begin{array}{l} x=9, \\ x=-3 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=9, \\ y=25, \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3, \\ y=-23. \end{cases} \end{array}\right.$ Нетрудно заметить, что ОДЗ удовлетворяет только пара $x=-3;\ y=-23$.

Ответ: (-3; -23).

Пример 8.50 Найдите значение выражения $\dfrac{9\sqrt{log_3^2 x-6log_3 x+9}}{log_3 x-3}-\dfrac{17\sqrt{log_2^2 x-4log_2 x+4}}{log_2 x-2}+\dfrac{\sqrt{60x-4x^2-224}}{\sqrt{15x-x^2-56}}$.

Решение.

$$\frac{9\sqrt{log_3^2 x-6log_3 x+9}}{log_3 x-3}-\frac{17\sqrt{log_2^2 x-4log_2 x+4}}{log_2 x-2}+\frac{\sqrt{60x-4x^2-224}}{\sqrt{15x-x^2-56}}=$$

$$=\frac{9\sqrt{(log_3 x-3)^2}}{log_3 x-3}-\frac{17\sqrt{(log_2 x-2)^2}}{log_2 x-2}+\frac{\sqrt{4(15x-x^2-56)}}{\sqrt{15x-x^2-56}}=$$

$$=\frac{9|log_3 x-3|}{log_3 x-3}-\frac{17|log_2 x-2|}{log_2 x-2}+\frac{2\cdot\sqrt{(15x-x^2-56)}}{\sqrt{15x-x^2-56}}.$$

ОДЗ: $\begin{cases} log_3 x\neq 3, \\ log_2 x\neq 2, \\ 15x-x^2-56>0, \\ x>0. \end{cases}$ $\quad 15x-x^2-56>0 \Leftrightarrow x^2-15x+56>0 \Leftrightarrow x\in(7;8)$.

$7<x<8 \Rightarrow log_3 x<log_3 8<log_3 9=2<3$ и $2=log_2 4<log_2 7<log_2 x$.

Следовательно, на ОДЗ исследуемое выражение легко упрощается: $\dfrac{-9(log_3 x-3)}{log_3 x-3}-\dfrac{17(log_2 x-2)}{log_2 x-2}+2=-9-17+2=-24$.

Ответ: - 24.

Наибольшее затруднение на экзаменах вызывают задачи с параметрами. С методикой решения заданий с параметрами по данным темам можно ознакомиться по пособиям [15], [38], [39], [50], [54], [66], [77], [87], [96], [106], [112], [118], [130], [136], [146], [151].

В данной главе мы рассмотрим только те задания, где не требуется использование производной.

Пример 8.51 При каких значениях параметра p уравнение $15\cdot 10^x - 20 = p - p\cdot 10^{x+1}$ имеет решение?

Решение.

$15\cdot 10^x - 20 = p - p\cdot 10^{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad (15+10p)10^x = p+20$.

1) $15+10p=0 \quad \Leftrightarrow \quad p=-\frac{3}{2}$. В этом случае уравнение решений не имеет.

2) $15+10p\neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p\neq -\frac{3}{2}$. В этом случае исходное уравнение равносильно уравнению: $10^x=\frac{p+20}{15+10p}$, которое имеет решение только при $\frac{p+20}{15+10p}>0$. Следовательно, исследуемое уравнение имеет решение при $p\in(-\infty;-20)\cup\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Ответ: $(-\infty;-20)\cup\left(-\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Пример 8.52 Из области определения функции $y=log_5\left(a^a - a^{\frac{7x+5}{x+5}}\right)$ взяли все целые положительные числа и перемножили их. Найдите те положительные значения a, при которых такое произведение будет двузначным числом.

Решение.

ОДЗ: $\quad a^a - a^{\frac{7x+5}{x+5}}>0$.

Нетрудно заметить, что при $a=1$ данное неравенство решений не имеет. Следовательно, остается рассмотреть два случая.

1 случай. $a>1$, тогда $a>\frac{7x+5}{x+5}$. $\qquad a>\frac{7x+5}{x+5} \quad \Leftrightarrow \quad a>7-\frac{30}{x+5}$.

Выясним, при каких значениях a произведение всех целых решений неравенства будет двузначным числом. Воспользуемся графическим способом решения, для чего построим график функции $y=7-\frac{30}{x+5}$ (см. рисунок 43).

Нетрудно заметить, что при $a > 1$ произведение всех целых положительных решений неравенства будет двузначным числом (1·2·3·4=24) в случае, когда $f(4) < a \le f(5)$. $f(4) = \dfrac{11}{3}$, $f(5) = 4$. Следовательно, $\dfrac{11}{3} < a \le 4$.

2 *случай.* $0 < a < 1$, тогда $a < 7 - \dfrac{30}{x+5}$.

Нетрудно заметить, что в этом случае имеется бесчисленное множество целых положительных решений неравенства. Т.е. требуемое условие: произведение всех целых положительных решений неравенства - двузначное число, не выполняется.

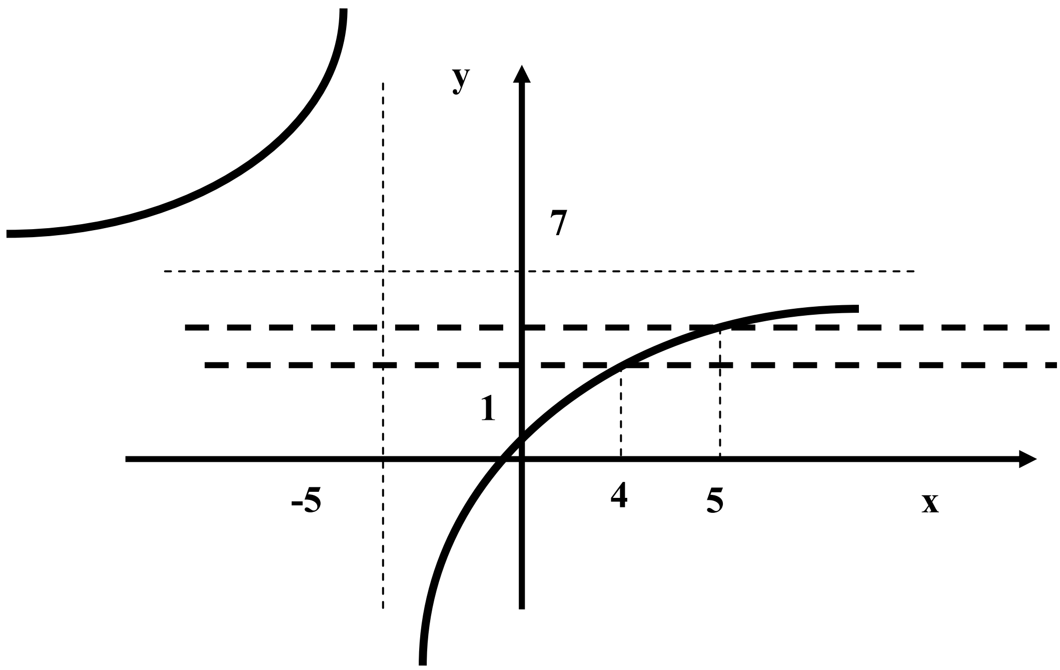


Рисунок 43

Ответ: $a \in \left(\dfrac{11}{3}; 4\right]$.

Пример 8.53 При каких значениях параметра a сумма $log_a\left(\dfrac{3+2x^2}{1+x^2}\right)$ и $log_a\left(\dfrac{5+4x^2}{1+x^2}\right)$ будет больше единицы при всех x?

Решение.

Выделим целые части в выражениях, стоящих под знаком логарифма:

$$\frac{3+2x^2}{1+x^2} = \frac{2(1+x^2)+1}{1+x^2} = 2 + \frac{1}{1+x^2}; \quad \frac{5+4x^2}{1+x^2} = \frac{4(1+x^2)+1}{1+x^2} = 4 + \frac{1}{1+x^2}.$$

Оба логарифмических выражения определены при всех x. Их сумма равна:

$$log_a\left(\left(2+\frac{1}{1+x^2}\right)\left(4+\frac{1}{1+x^2}\right)\right) = log_a\left(t^2+6t+8\right), \text{ где } t = \frac{1}{1+x^2}.$$

Функция $t=\dfrac{1}{1+x^2}$ - четная, убывает, стремясь к нулю, при неограниченном возрастании $|x|$, а ее наибольшее значение равно 1. Значит, $t\in(0;1]$.

1) При $a > 1$ логарифмическая функция с основанием a является возрастающей. Следовательно,

$$log_a\left(t^2+6t+8\right)>1=log_a a \Leftrightarrow t^2+6t+8>a \Leftrightarrow t^2+6t+8-a>0.$$

Парабола $y=t^2+6t+(8-a)$ симметрична относительно прямой $t=-3$, ветви направлены вверх, следовательно, функция $y=t^2+6t+(8-a)$ возрастает на (0; 1]. Значит, для того чтобы функция принимала положительные значения на этом промежутке, нужно, чтобы было неотрицательно значение в левом конце промежутка $t=0$, т.е. $y(0)=0+0+8-a\geq 0$. Следовательно, $a\leq 8$. Таким образом, $a\in(1;8]$.

2) При $0<a<1$ логарифмическая функция с основанием a является убывающей. Следовательно,

$$log_a\left(t^2+6t+8\right)>1=log_a a \Leftrightarrow t^2+6t+8<a \Leftrightarrow t^2+6t+8-a<0.$$

Получаем неравенство $t^2+6t+(8-a)<0$. По доказанному выше, функция возрастает при всех $t\in(0;1]$. Для того чтобы функция принимала отрицательные значения на этом промежутке, нужна ее отрицательность в правом конце $t=1$, т.е. $y(1)=1+6+8-a<0$. Следовательно, $a > 15$, что противоречит условию $0<a<1$.

Ответ: (1; 8].

Пример 8.54 Найдите все значения параметра *a*, при каждом из которых прямая $y = a$ пересекает график функции $f(x)=\dfrac{6ln(3x^2+1)+5}{1-ln(3x^2+1)^2}$ хотя бы в одной точке.

Решение.

Прямая $y = a$ пересечет график функции $f(x)=\dfrac{6ln(3x^2+1)+5}{1-ln(3x^2+1)^2}$ хотя бы в одной точке, тогда и только тогда, когда уравнение $\dfrac{6ln(3x^2+1)+5}{1-ln(3x^2+1)^2}=a$ будет иметь хотя бы одно решение.

Так как $3x^2+1>0,\ \forall x\in R$, то $ln(3x^2+1)^2=2ln(3x^2+1),\ \forall x\in R$.

Значит, $$\frac{6ln(3x^2+1)+5}{1-ln(3x^2+1)^2}=a \ \Leftrightarrow\ \frac{6ln(3x^2+1)+5}{1-2ln(3x^2+1)}=a.$$

Введем, $t=ln(3x^2+1),\ \ t\geq 0$.

$$\frac{6t+5}{1-2t}=a \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0{,}5; \\ 6t+5=a(1-2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0{,}5; \\ t(6+2a)=a-5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t \neq 0{,}5; \\ a \neq -3; \\ t=\dfrac{a-5}{2a+6}. \end{cases}$$

Следовательно, исследуемое уравнение будет иметь решения, если $\frac{a-5}{2(a+3)} \geq 0$ и $\frac{a-5}{2(a+3)} \neq \frac{1}{2}$. Решая данные неравенства, получаем, что $a \in (-\infty; -3) \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -3) \cup [5; +\infty)$.

Пример 8.55 Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b=4^a+2^{3+a}-2$ и $c=2^{3-a}-4^{-a}-8$ не превосходит 7.

Решение.

Очевидно, что наибольшее из этих двух чисел не будет превосходить 7, если каждое из чисел не будет превосходить 7. Следовательно, необходимо решить систему: $\begin{cases} 4^a+2^{3+a}-2 \leq 7, \\ 2^{3-a}-4^{-a}-8 \leq 7. \end{cases}$ Рассмотрим каждое неравенство отдельно.

$4^a+2^{3+a}-2 \leq 7 \Leftrightarrow (2^a)^2+8\cdot 2^a-9 \leq 0$. Введем новую переменную: $t=2^a$, $t>0$. Получим неравенство $t^2+8t-9 \leq 0$, откуда следует, что $t \in [-9; 1]$. Учитывая ограничения на возможные значения переменной t: $t>0$, приходим к неравенству: $0<t \leq 1$. Следовательно, $0<2^a \leq 1$ и $a \in (-\infty; 0]$.

$2^{3-a}-4^{-a}-8 \leq 7 \Leftrightarrow 2^{3-a}-4^{-a}-15 \leq 0 \Leftrightarrow 4^{-a}-8\cdot 2^{-a}+15 \geq 0$. Введем новую переменную: $z=2^{-a}$, $z>0$. Получим неравенство $z^2-8z+15 \geq 0$, откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} z \geq 5, \\ z \leq 3. \end{array}\right.$ Учитывая ограничения на возможные значения переменной z: $z>0$, приходим к совокупности неравенств: $\left[\begin{array}{l} z \geq 5, \\ 0<z \leq 3. \end{array}\right.$ Следовательно, $\left[\begin{array}{l} 2^{-a} \geq 5, \\ 0<2^{-a} \leq 3. \end{array}\right.$ Откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} -a \geq log_2 5, \\ -a \leq log_2 3 \end{array}\right.$ и, значит, $\left[\begin{array}{l} a \leq -log_2 5 = log_2 \frac{1}{5}, \\ a \geq -log_2 3 = log_2 \frac{1}{3}. \end{array}\right.$ Таким образом,

$$\begin{cases} 4^a + 2^{3+a} - 2 \le 7, \\ 2^{3-a} - 4^{-a} - 8 \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a \in (-\infty; 0], \\ \left[\begin{array}{l} a \le log_2 \frac{1}{5}, \\ a \ge log_2 \frac{1}{3} \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \; a \in \left(-\infty;\ log_2 \frac{1}{5}\right] \cup \left[log_2 \frac{1}{3}; 0\right].$$

Ответ: $a \in \left(-\infty;\ log_2 \frac{1}{5}\right] \cup \left[log_2 \frac{1}{3};\ 0\right]$.

Пример 8.56 Найдите все значения параметра α, при каждом из которых оба числа $2cos\,\alpha + 9$ и $2cos\,2\alpha + 4cos\,\alpha + 4$ являются решениями неравенства $\dfrac{2 - log_2 |x-5|}{(49 + 7x - 2x^2)\sqrt{x+1}} \le 0$.

Решение.

$$\frac{2 - log_2 |x-5|}{(49 + 7x - 2x^2)\sqrt{x+1}} \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 - log_2 |x-5|}{(2x+7)(x-7)\sqrt{x+1}} \ge 0.$$

Решим данное неравенство методом интервалов, используя функцию $f(x) = \dfrac{2 - log_2 |x-5|}{(2x+7)(x-7)\sqrt{x+1}}$. $D(f)$: $x \ne 5;\ x \ne 7;\ x \ne$ -3,5; $x >$ -1; следовательно, $D(f)$=(-1; 5) ∪ (5; 7) ∪ (7; + ∞).

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{cases} x \in D(f), \\ log_2 |x-5| = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f), \\ |x\text{-}5| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f), \\ \left[\begin{array}{l} x\text{-}5 = 4, \\ x\text{-}5 = \text{-}4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D(f), \\ \left[\begin{array}{l} x = 9, \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = 9. \end{array}\right.$$

Определяя знаки функции (см. рисунок 44), получаем:

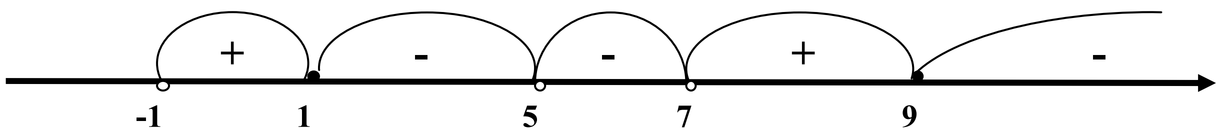


Рисунок 44

Следовательно, $f(x) \ge 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in$ (-1; 1] ∪ (7; 9].

Выясним, при каких значениях параметра α, оба числа $2cos\,\alpha + 9$ и $2cos\,2\alpha + 4cos\,\alpha + 4$ принадлежат данному множеству.

Заметим, что $-1 \le cos\,\alpha \le 1 \Rightarrow -2 \le 2cos\,\alpha \le 2 \Rightarrow 7 \le 2cos\,\alpha + 9 \le 11$. Таким образом, данное число является решением неравенства только в том случае, когда $7 < 2cos\,\alpha + 9 \le 9$.

$$7 < 2cos\,\alpha + 9 \le 9 \quad \Leftrightarrow \quad -2 < 2cos\,\alpha \le 0 \quad \Leftrightarrow \quad -1 < cos\,\alpha \le 0.$$

$$2cos\,2\alpha + 4cos\,\alpha + 4 = 2(2cos^2\alpha - 1) + 4cos\,\alpha + 4 = 4cos^2\alpha + 4cos\,\alpha + 2 =$$
$$= 4cos^2\alpha + 4cos\,\alpha + 1 + 1 = (2cos\,\alpha + 1)^2 + 1.$$ Если $-1 < cos\,\alpha \le 0$, то

$$-2 < 2cos\alpha \le 0,\ \ -1 < 2cos\alpha + 1 \le 1,\ 0 \le (2\cos\alpha + 1)^2 \le 1,\ 1 \le (2\cos\alpha + 1)^2 + 1 \le 2.$$

Следовательно, данное число является решением неравенства только в том случае, когда $(2cos\alpha + 1)^2 + 1 = 1$.

$$(2cos\,б + 1)^2 + 1 = 1 \Leftrightarrow (2cos\,б + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow cos\,б = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow\ б = \pm\frac{2p}{3} + 2pn, n \in Z.$$

Ответ: $\alpha = \pm\dfrac{2\pi}{3} + 2\pi n, n \in Z.$

Пример 8.57 При каких значениях параметра a значение выражения $\left(1-2^x\right)^{log_2\left(1-2^x\right)-2^a}$ больше значения выражения $0{,}5^{3-\sqrt{a}-log_4\left(1+4^x-2^{x+1}\right)}$ при всех допустимых значениях x?

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}1-2^x>0,\\ 1+4^x-2^{x+1}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2^x<1,\\ \left(2^x-1\right)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<0,\\ x\ne 0\end{cases} \Rightarrow x<0.$ На ОДЗ

$$0{,}5^{3-\sqrt{a}-log_4\left(1+4^x-2^{x+1}\right)} = 0{,}5^{3-\sqrt{a}}\cdot 0{,}5^{-log_4\left(1-2^x\right)^2} = 0{,}5^{3-\sqrt{a}}\cdot 2^{log_4\left(1-2^x\right)^2} =$$

$= 0{,}5^{3-\sqrt{a}}\cdot 2^{2\,log_4\left(1-2^x\right)} = 0{,}5^{3-\sqrt{a}}\cdot 4^{log_4\left(1-2^x\right)} = 0{,}5^{3-\sqrt{a}}\cdot\left(1-2^x\right).$ Следовательно,

$$\left(1-2^x\right)^{log_2\left(1-2^x\right)-2^a} > 0{,}5^{3-\sqrt{a}-log_4\left(1+4^x-2^{x+1}\right)},\quad \forall x<0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(1-2^x\right)^{log_2\left(1-2^x\right)-2^a} > 0{,}5^{3-\sqrt{a}}\cdot\left(1-2^x\right),\quad \forall x<0 \quad\Leftrightarrow$$

$$\left(1-2^x\right)^{log_2\left(1-2^x\right)-2^a-1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{3-\sqrt{a}},\ \ \forall x<0.$$

Заметим, что если $x < 0$, то $0 < 2^x < 1,\ \ 0 > -2^x > -1,\ \ 1 > 1-2^x > 0$. Значит, $log_2\left(1-2^x\right) < 0,\ \ log_2\left(1-2^x\right) - 2^a - 1 < -1,\ \ \forall a \in R$ и, следовательно, $\left(1-2^x\right)^{log_2\left(1-2^x\right)-2^a-1} > 1$ для любых a при $x < 0$.

Таким образом, нужное нам условие будет выполняться в том случае, когда $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3-\sqrt{a}} \le 1 \Leftrightarrow 3-\sqrt{a} \ge 0 \Leftrightarrow \sqrt{a} \le 3 \Leftrightarrow \begin{cases}a \ge 0,\\ a \le 9\end{cases} \Leftrightarrow a \in [0;\ 9].$

Ответ: $a \in [0;\ 9].$

Для отработки навыков решения заданий уровня А1 – А10, В1 - В9, С1, С2 ЕГЭ 2000 – 2009 годов рекомендуется поработать с пособиями [140], [143].

Задания для самостоятельного решения

1. Упростите: $36^{log_6 5} + 10^{1-lg\,2} - 3^{log_9 36}$.

2. Вычислите: $\dfrac{1+2log_3 2}{(1+log_3 2)^2}+log_6^2 2$.

3. Найдите значение выражения $\dfrac{log_2 240}{log_{3,75} 2}-\dfrac{log_2 15}{log_{60} 2}+log_2 64$.

4. Найдите значение выражения $9^{log_9 \cdot log_4 a}$, если $log_a 32=5$.

5. Известно, что $log_{bc}\dfrac{\sqrt[3]{b}}{\sqrt{c}}$ лежит между 8 и 13, а $log_{bc} b$ принимает целые значения. Найдите количество всех этих значений.

6. Найдите значение выражения $6log_{e^{-3}}\left(\dfrac{e^4}{ab}\right)$, если $ln\left(a^{\frac{1}{3}}\right)=-8$, $log_{\frac{1}{e}}(b^2)=4$.

7. Найдите сумму целых решений неравенства $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}}\geq\dfrac{5}{2}$.

8. Решите уравнение $\dfrac{(0{,}2)^{x-0{,}5}}{\sqrt{5}}=5\cdot(0{,}04)^{x-1}$.

9. Решите неравенство $2^{x-1}>\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{x}}$.

10. Решите уравнение $3^{2x-1}\cdot 5^{3x+2}=\dfrac{9}{5}\cdot 5^{2x}\cdot 3^{3x}$.

11. Решите неравенство $3^{\sqrt{x}}+3^{\sqrt{x}-1}-3^{\sqrt{x}-2}<11$.

12. Решите уравнение $4^x-3^{x-\frac{1}{2}}=3^{x+\frac{1}{2}}-2^{2x-1}$.

13. Решите уравнение $2^x-3\cdot 2^{0{,}5(x-3)}=26$.

14. Решите неравенство $2^x+2^{|x|}\geq 2\sqrt{2}$.

15. Найдите наибольшее целое x, удовлетворяющее неравенству: $5\cdot 4^{x+2}-\dfrac{80}{4^{x+2}}<0$.

16. Решите уравнение $3\cdot 16^x+37\cdot 36^x=26\cdot 81^x$.

17. Решите уравнение $|\,x\,|^{x^2-2x}=1$.

18. Решите уравнение $x^2\cdot 4^{\sqrt{6-x}}+4^{2+x}=16\cdot 2^{2\sqrt{6-x}}+x^2\cdot 2^{2x}$.

19. Решите уравнение $2\cdot\sqrt{x^2-4x+4}+\sqrt{4^{2x}-66\cdot 4^x+128}=4-2x$.

20. Решите уравнение

$$\left(\left(4^x-6\cdot 2^x+8\right)^2-24\left(2^x-6\right)\cdot 2^x-192\right)^2=\frac{|tgx|}{tgx}-1.$$

21. Решите неравенство $log_{sin\frac{\pi}{3}}(x^2-3x+2)\geq 2$.

22. Решите уравнение $1-lg\,5=\frac{1}{3}\left(lg\frac{1}{2}+lg\,x+\frac{1}{3}lg\,5\right)$.

23. Решите уравнение $5\cdot 8^{log_2\sqrt[3]{x}}=48-x$.

24. Найдите наименьший корень уравнения $log_5(x-2)^{10}+log_5|x-2|=22$.

25. Решите неравенство $log_3\left(log_{\frac{9}{16}}(x^2-4x+3)\right)\leq 0$.

26. Решите уравнение $lg(2x)+lg(x+3)=lg\,2+lg(6x-2)$.

27. Решите неравенство $log_2(x-1)-log_{\frac{1}{2}}(x+2)>log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}+log_2\frac{5}{8}$.

28. Найдите значение выражения $3x+9log_7 y$, если $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases}7^{x-2}+log_7 y=2,\\ log_7(y-2)-log_7\frac{5}{y}=1.\end{cases}$

29. Решите уравнение $\frac{lg\left(\sqrt{x+1}+1\right)}{lg\sqrt[3]{x-40}}=3$.

30. Решите уравнение $log_7\left(6+7^{-x}\right)=1+x$.

31. Решите неравенство $\frac{log_4\frac{x}{256}}{log_4 x-4}-9\,log_4\sqrt[3]{x}+log_4^2 x>5$.

32. Решите уравнение $(lg\,x-5)lg\,x^3+18=0$.

33. Решите уравнение $4lg\sqrt{\frac{1}{x}}=2-5\sqrt{lg\,x}$.

34. Решите неравенство $\frac{log_2 x}{log_2 x-2}<\frac{2}{log_2 x+6}$.

35. Решите неравенство $\sqrt{log_2 x}-log_4\sqrt{2x}>0,5$.

36. Решите уравнение $log_{cos\,x}(2cos\,x-1)=2$.

37. Решите уравнение $0{,}2\,log_x\frac{1}{32}=-0,5$.

38. Найдите абсциссы всех точек пересечения графиков функций $y=log_{2+x}\left(2x^2+14x+19\right)$ $y=1+\frac{1}{log_5(2+x)}$.

39. Решите уравнение $log_5(x+20)\cdot log_x\sqrt{5}=1$.

40. Решите уравнение $x^{log_x(x+3)^2}=16$.

41. Решите неравенство $log_x \dfrac{x+3}{x-1} > 1$.

42. Решите неравенство $log_{\frac{x-1}{x+5}} 0{,}3 > 0$.

43. Решите неравенство $5^{\frac{1}{4}log_5^2 x} \ge 5 \cdot x^{\frac{1}{5}log_5 x}$.

44. Решите уравнение $\sqrt{log_x \sqrt{5x}} \cdot log_5 x = 1$.

45. Сколько корней имеет уравнение $|\log_2 x| = \dfrac{1}{2}x$?

46. Решите уравнение $log_4(1-24x) \cdot log_{1-3x} 2 = 1$.

47. Найдите произведение всех корней уравнения $\sqrt[4]{16-x^2} \cdot lg\left(16-2x-x^2\right) = 0$.

48. Решите уравнение

$$\left(log_3^3\left(x^2-6\right)+2log_3^2\left(x^2-6\right)-3log_3\left(x^2-6\right)\right)^2 = \frac{\left|6+x-x^2\right|}{x^2-x-6}-1.$$

49. Решите систему $\begin{cases} \dfrac{5xy+2x}{y-2} = 5x-4, \\ log_4(5+3x) = 3-0{,}5log_2 \dfrac{16x-x^3-64}{y-7}. \end{cases}$

50. Решите систему уравнений $\begin{cases} 9^{y-x} = 54+3^{1-x+y}, \\ \sqrt{x+y-1}+\sqrt{2y-3x+3} = 3. \end{cases}$

51. При каких значениях a сумма $log_a\left(\dfrac{4+|x|}{1+|x|}\right)$ и $log_a\left(\dfrac{6+|x|}{1+|x|}\right)$ больше единицы при всех допустимых значениях x?

52. Найдите все положительные значения параметра a, при которых в области определения функции $y = \left(a^x - a^{ax+2}\right)^{-0{,}5}$ есть двузначные натуральные числа, но нет ни одного трехзначного натурального числа.

53. Даны два уравнения: $log_2(x\sqrt{3p+10}) = 6(p+1)-10x$ и $x+\dfrac{6}{x} = \dfrac{x(x+5p)+16x+33}{x(p+6)}$. Значение параметра p выбирается так, что $3p+10>0$ и число различных корней первого уравнения равно произведению числа различных корней второго уравнения и числа $0{,}25(p-3)$. Решите первое уравнение при каждом значении параметра *p,* выбранного указанным образом.

54. Найдите все значения параметра *a,* при которых уравнение $4^x - a\cdot 2^{x+1} - 3a^2 + 4a = 0$ имеет единственный корень.

55. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $b = 25^{-a} + 5^{1-a} - 7$ и $c = 5^{1+a} - 25^{a} + 3$ меньше 7.

56. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых оба числа $a \cdot 2^{a-2}$ и $3a \cdot 2^{a} - 4a^{2} \cdot 4^{a-3} - 27$ являются решениями неравенства $log_{x-5,5}\left(log_4 \dfrac{x-13}{x-10}\right) \geq 0$.

57. При каких значениях параметра a значение выражения $(1-|x|)^{log_5(1-|x|)-|a-1|}$ больше значения выражения $0{,}2^{4-a^2-log_{25}\left(1+x^2-2|x|\right)}$ при всех допустимых значениях x?

58. Для каждого значения параметра p решите неравенство: $2log_{2\cos p}(x+2) - log_{2\cos p}(x+4) \leq 0.$

59. Найдите все значения c, при каждом из которых оба числа $4\cos(2c)+11$ и $32\cos^2 c - 8\cos(4c) - 9$ являются решениями неравенства: $log_{\frac{5}{2x-25}}\left(log_{0,5} \dfrac{\sqrt{4x-12}}{16}\right) \geq 0$.

Ответы: **1)** 24; **2)** 1; **3)** **- 2;** **4)** 0,5; **5)** 6; **6)** - 60; **7)** 3; **8)** 3; **9)** (0; + ∞); **10)** -3; **11)** [0; 4); **12)** $\frac{3}{2}$; **13)** 5; **14)** $\left(-\infty;\ log_2(\sqrt{2}-1)\right] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; **15)** -2; **16)** $\frac{1}{2}$; **17)** {-1; 1; 2}; **18)** {- 4; 2; 4}; **19)** 0,5; **20)** 3; **21)** $\left[\frac{1}{2};1\right) \cup \left(2;\frac{5}{2}\right]$; **22)** $\frac{16}{\sqrt[3]{5}}$; **23)** 8; **24)** - 23; **25)** $\left(2-\sqrt{2};\frac{3}{4}\right] \cup \left[\frac{13}{4};2+\sqrt{2}\right)$; **26)** {1; 2}; **27)** (3; + ∞); **28)** 15; **29)** 48; **30)** 0; **31)** $\left(0;\ \frac{1}{4}\right) \cup (25; +\infty)$; **32)** {100; 1000}; **33)** $\left\{10^4; \sqrt[4]{10}\right\}$; **34)** $\left(\frac{1}{64};\ \frac{1}{4}\right) \cup \left(\frac{1}{4};\ 4\right)$; **35)** $\left(2; 2^9\right)$; **36)** $\varnothing$; **37)** 4; **38)** - 1,5; **39)** 5; **40)** $\varnothing$; **41)** (1; 3); **42)** (1; + ∞); **43)** $\left(0; 5^{-\sqrt{20}}\right] \cup \left[5^{\sqrt{20}}; +\infty\right)$; **44)** 5; **45)** 3; **46)** - 2; **47)** - 12; **48)** $\left\{-\sqrt{7}, -3,\ -\sqrt{\frac{163}{27}}\right\}$; **49)** (4; -10); **50)** $\left(3-2\sqrt{3}; 5-2\sqrt{3}\right)$; **51)** $\varnothing$; **52)** $\left(\frac{8}{10};\ \frac{98}{100}\right]$; **53)** 3,2; **54)** $(-\infty; 0) \cup \{1\} \cup \left[\frac{4}{3}; +\infty\right)$; **55)** $(-log_5 2; 0) \cup (log_5 4; +\infty)$; **56)** 3; **57)** (- 2; 2);

58) при $p \in \left(-\frac{\pi}{2}+2\pi n;\ -\frac{\pi}{3}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{2}+2\pi n\right), n \in Z,\ x \in [0; +\infty)$;

при $p \in \left(-\frac{\pi}{3}+2\pi n;\ \frac{\pi}{3}+2\pi n\right),\ n \in Z,\ x \in (-2; 0]$; **59)** $\pm\frac{\pi}{6}+\pi n, n \in Z.$

9 Производная, первообразная, определенный интеграл

Задания по данной теме, предлагающиеся на ЕГЭ и вступительных испытаниях в вузы можно условно разбить на следующие четыре группы.

1. Производная: определение, правила нахождения, геометрический смысл, касательная.
2. Приложение производной к исследованию функций и решению физических задач. Определение наибольших и наименьших значений функций.
3. Первообразная: определение, методы нахождения.
4. Определенный интеграл: вычисление, приложение к решению физических и геометрических задач.

Для более успешного решения заданий по данным темам на вступительных экзаменах и ЕГЭ желательно повторять её по учебникам для школ и классов с углубленным изучением математики или по пособиям для подготовительных отделений вузов, так как в этом случае Вы достигните большего понимания применяемых методов. В частности, можно использовать [8], [9], [30], [31], [65], [88], [109], [117], [152]. Наиболее систематическое изложение всех методов и способов решения заданий по данным темам имеется в [65], можно использовать также [6], [35], [38], [49], [51], [69], [72], [85], [88], [118], [130], [131], [133], [136], [146], [153].

Повторяя тему *"Производная"*, обратите внимание на определение производной, её геометрический смысл, правила нахождения (в том числе, и на правило нахождения производных сложных функций), ***выучите все табличные формулы***.

Пример 9.1 Найдите производную функции $y = \sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{x}$.

Решение.

$$y' = \left(\sqrt{x}\right)' + \left(\sqrt[3]{x}\right)' + \left(\sqrt[4]{x}\right)' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} + \frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \frac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}.$$

$D(y') = (0, +\infty)$.

Ответ: $y' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} + \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} + \dfrac{1}{4\sqrt[4]{x^3}}$.

Пример 9.2 Найдите производную функции $y = 2^x + 3^x + 4^{-x} + 2^x \cdot 3^x$.

Решение.

$$y' = \left(2^x + 3^x + 4^{-x} + 2^x \cdot 3^x\right)' = \left(2^x + 3^x + \left(\frac{1}{4}\right)^x + 6^x\right)' =$$

$$= 2^x \cdot ln 2 + 3^x \cdot ln 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot ln\left(\frac{1}{4}\right) + 6^x ln 6 . \qquad D\,(y') = R.$$

Ответ: $y' = 2^x \cdot ln 2 + 3^x \cdot ln 3 + \left(\frac{1}{4}\right)^x \cdot ln\left(\frac{1}{4}\right) + 6^x ln 6$.

Пример 9.3 Найдите производную функции $y = arcsin\, x - e^x \cdot cos\, x$.

Решение.

$$y' = (arcsin\, x)' - \left(e^x \cdot cos\, x\right)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left((e^x)' \cdot cos\, x + e^x \cdot (cos\, x)'\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(e^x cos\, x + e^x \cdot (-sin\, x)\right) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - e^x cos\, x + e^x sin\, x .$$

$D\,(y') = (-1;\ 1)$.

Ответ: $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - e^x cos\, x + e^x sin\, x$.

Пример 9.4 Найдите производную функции $y = \frac{ln\, x}{1+x^2}$.

Решение.

$$y' = \frac{(ln\, x)' \cdot \left(1+x^2\right) - (1+x^2)' \cdot ln\, x}{(1+x^2)^2} = \frac{\frac{1}{x} \cdot (1+x^2) - 2x \cdot ln\, x}{(1+x^2)^2} =$$

$$= \frac{1 + x^2 - 2x^2 \cdot ln\, x}{x \cdot (1+x^2)^2} . \qquad D\,(y') = (0;\ +\infty).$$

Ответ: $y' = \frac{1 + x^2 - 2x^2 \cdot ln\, x}{x \cdot (1+x^2)^2}$.

Пример 9.5 Найдите производную функции $y = 2^{x^2+x+1}$.

Решение.

$$y' = \left(2^{x^2+x+1}\right)' = 2^{x^2+x+1} \cdot ln 2 \cdot (x^2 + x + 1)' = 2^{x^2+x+1} \cdot ln 2 \cdot (2x+1) .$$

$D\,(y') = R$.

Ответ: $y' = 2^{x^2+x+1} \cdot ln 2 \cdot (2x+1)$.

Пример 9.6 Найдите производную функции $y = tg^2 3x$.

Решение.

$$y' = \left(tg^2 3x\right)' = 2tg3x \cdot (tg3x)' = 2tg3x \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot (3x)' = 2tg3x \cdot \frac{1}{cos^2 3x} \cdot 3 =$$

$$= \frac{6tg3x}{cos^2 3x}. \qquad D(y') = \left\{ x \mid x \neq \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}n, n \in Z \right\}.$$

Ответ: $y' = \dfrac{6tg3x}{cos^2 3x}$.

Пример 9.7 Найдите производную функции $y = sin^2(cos^3 4x)$.

Решение.

$$y' = \left(sin^2(cos^3 4x)\right)' = 2sin(cos^3 4x) \cdot \left(sin(cos^3 4x)\right)' =$$

$$= 2sin(cos^3 4x) \cdot cos(cos^3 4x) \cdot \left(cos^3 4x\right)' == sin(2cos^3 4x) \cdot \left(cos^3 4x\right)' =$$

$$= sin(2cos^3 4x) \cdot 3cos^2 4x \cdot (cos4x)' = 3sin(2cos^3 4x) \cdot cos^2 4x \cdot (-sin4x) \cdot (4x)' =$$

$$= -3sin(2cos^3 4x) \cdot cos^2 4x \cdot sin4x \cdot 4 = -12sin(2cos^3 4x) \cdot cos^2 4x \cdot sin4x.$$

$D(y') = R$.

Ответ: $y' = -12sin(2cos^3 4x) \cdot cos^2 4x \cdot sin4x$.

Приступая к решению задач на *касательную*, не забудьте предварительно повторить способы задания прямых на плоскости (обратив особое внимание на уравнение прямой с угловым коэффициентом и уравнение прямой, проходящей через две точки), признаки взаимного расположения двух прямых на плоскости, правило определения угла между ними. Обратите внимание на правила определения угла между кривыми.

Пример 9.8 Найдите уравнение касательной к графику функции $y = x^3$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0 имеет вид: $y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Так как $D(f) = R$, $f'(x) = 3x^2$, $f'(2) = 12$, $f(2) = 8$, то в данном случае касательная будет задаваться уравнением: $y = 8 + 12(x - 2)$, т.е.

$y = 12x - 16$.

Ответ: $y = 12x - 16$.

Пример 9.9 Найдите сумму координат точки пересечения касательной, проведенной к графику функции $f(x) = 5x^2 - 8x - 1$ в его точке с абсциссой $x_0 = 2$, с осью ординат.

Решение.

$f(2)=3,\quad f'(x)=10x-8,\quad f'(2)=12$. Следовательно, уравнение касательной, проведенной к графику данной функции в точке с абсциссой $x_0=2$, будет иметь вид: $y = 3 + 12\ (x - 2)$ или $y = 12x - 21$. Ось ординат задается уравнением $x = 0$. Значит, касательная пересекает ось ординат в точке (0; -21) и сумма координат этой точки будет равна -21.

Ответ: - 21.

Пример 9.10 Найдите уравнение касательной к графику функции $y=x^2$, проходящей через точку М (1; -1).

Решение.

Нетрудно заметить (см. рисунок 45) , что данная точка не принадлежит графику функции, $D(f)=R$.

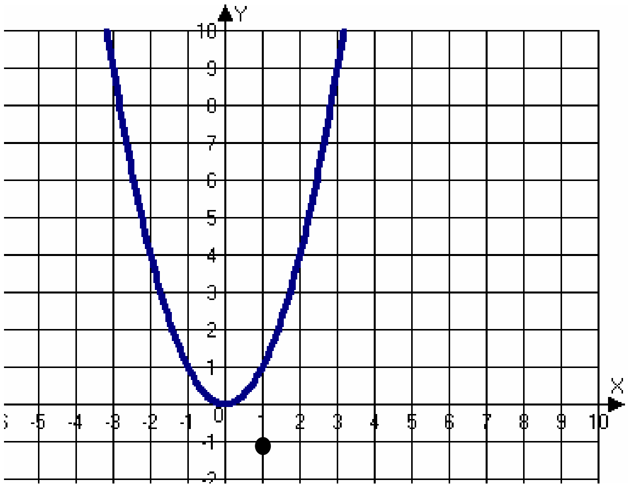


Рисунок 45 - Вид графика функции $y=x^2$.

Сначала определим общий вид касательных для данной функции, проходящих через точку $(x_0; f(x_0))$.

$f'(x)=2x,\qquad f'(x_0)=2x_0,\qquad f(x_0)=x_0^2$.

Следовательно, общий вид всех касательных к графику исходной функции в точке $(x_0; f(x_0))$ имеет вид: $y=x_0^2+2x_0\cdot(x-x_0)$, т.е. $y=2x_0\cdot x-x_0^2$.

Выясним, какие из них проходят через точку М (1; -1).

$$-1=2x_0-x_0^2 \quad\Leftrightarrow\quad x_0^2-2x_0-1=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x_0=1-\sqrt{2}, \\ x_0=1+\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Таким образом, существуют две касательные к графику функции, которые проходят через точку М (1; -1):

$y=2(1-\sqrt{2})x-(1-\sqrt{2})^2$ и $y=2(1+\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})^2$.

Ответ: $y=2(1-\sqrt{2})x-(1-\sqrt{2})^2$; $y=2(1+\sqrt{2})x-(1+\sqrt{2})^2$.

Пример 9.11 Найдите все точки графика функции $y = x^3 - x^2$, в каждой из которых касательная к этому графику образует угол 45° с положительным направлением оси OX.

Решение.

Используя геометрический смысл производной, мы получаем, что тангенс угла наклона касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0; f(x_0))$**,** равен $f'(x_0)$. $tg\,45° = 1$. Следовательно, для решения задачи достаточно выяснить, при каких значениях аргумента $f'(x) = 1$.

$$D(f) = R,\quad f'(x) = 3x^2 - 2x;\quad 3x^2 - 2x = 1 \iff \left[\begin{array}{l} x = 1, \\ x = -\dfrac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Таким образом, найдутся две точки: (1; 0) и $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{27}\right)$, в каждой из которых касательная к графику образует угол 45° с положительным направлением оси OX.

Ответ: (1; 0); $\left(-\frac{1}{3}; -\frac{4}{27}\right)$.

Пример 9.12 Под каким углом график функции $y = x^4 - x^2$ пересекает ось абсцисс в точке $x_0 = 1$?

Решение.

Угол наклона графика функции $y = f(x)$ в точке пересечения с осью OX равен углу, который образует касательная, проведенная к графику этой функции в этой точке, с осью OX (см. рисунок 46). Следовательно, $tg\alpha = f'(1)$.

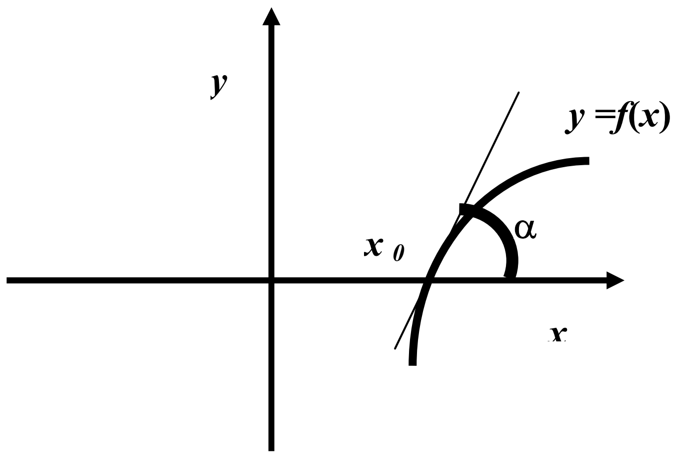


Рисунок 46

$D(f) = R$, $f'(x) = 4x^3 - 2x$, $f'(1) = 2$. Т.е. $tg\alpha = 2$ и $\alpha = arctg\,2$.

Ответ: $arctg\,2$.

Пример 9.13 Найдите угол между графиками функций $f(x)=\frac{1}{x}$ и $g(x)=x$ в точках их пересечения.

Решение.

Угол между кривыми в точке их пересечения равен углу между касательными, проведенными к кривым в точке их пересечения.

Касательные - это прямые, а угол φ $(0\le\varphi\le\frac{\pi}{2})$ между прямыми, заданными уравнениями $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ $(k_1\ne 0,\ k_2\ne 0)$, находится из соотношений: $tg\,\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1\cdot k_2}\right|$, если $k_1\cdot k_2\ne -1$; $\varphi=\frac{\pi}{2}$, если $k_1\cdot k_2=-1$.

$D(f)=R\setminus\{0\},\ D(g)=R.$ Найдем точки пересечения кривых $f(x)=\frac{1}{x}$ и $g(x)=x$. $\frac{1}{x}=x \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0,\\ x^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1\end{array}\right.\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=1,\\ x=-1.\end{array}\right.$ Следовательно, кривые пересекаются в двух точках: A(1; 1) и B (-1; -1).

$f'(x)=-\frac{1}{x^2};\quad g'(x)=1.$

В точке A(1; 1): $k_1=f'(1)=-1,\quad k_2=g'(1)=1$, следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

В точке B(-1; -1): $k_1=f'(-1)=-1,\quad k_2=g'(-1)=1$, следовательно, $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Ответ: $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Пример 9.14 На графике функции $y=1-\sqrt[3]{x}$ найдите точки, касательная в которых параллельна прямой $y+2x-3=0$.

Решение.

$y+2x-3=0 \Leftrightarrow y=-2x+3$. Следовательно, $k_1=-2$.

Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты совпадают: $k_2=k_1$. Таким образом, необходимо найти точки, в которых угловой коэффициент касательных $k_2=-2$, т.е. точки, в которых $f'(x)=-2$.

$D(f)=R,\ f'(x)=-\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}=-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}},\ D(f')=R\setminus\{0\};$

$$-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}=-2 \Leftrightarrow \frac{1}{x^2}=216 \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0,\\ x^2=\frac{1}{216}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ne 0,\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{\sqrt{216}},\\ x=-\frac{1}{\sqrt{216}}.\end{array}\right.\end{cases}$$

Следовательно, на графике функции найдутся две точки $\left(\frac{1}{\sqrt{216}};1-\frac{1}{\sqrt[6]{216}}\right)$ и $\left(-\frac{1}{\sqrt{216}};\ 1+\frac{1}{\sqrt[6]{216}}\right)$, в которых касательная к кривой будет параллельна прямой $y + 2x - 3 = 0$.

Ответ: $\left(\frac{1}{\sqrt{216}};1-\frac{1}{\sqrt[6]{216}}\right)$; $\left(-\frac{1}{\sqrt{216}};\ 1+\frac{1}{\sqrt[6]{216}}\right)$.

Пример 9.15 На графике функции $y=-\sqrt{2x+1}$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$.

Решение.

$y - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow y = 2x - 1$. Следовательно, $k_1 = 2$.

Касательная к кривой будет перпендикулярна данной прямой, если угловой коэффициент касательной $k_2 = -\frac{1}{k_1}$; т. е. $k_2 = -\frac{1}{2}$.

$$D(f)=\left[-\frac{1}{2};+\infty\right);\ f'(x) = -\frac{1}{2}(2x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2=-\frac{1}{\sqrt{2x+1}};\ D(f')=\left(-\frac{1}{2};+\infty\right).$$

$$-\frac{1}{\sqrt{2x+1}}=-\frac{1}{2}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2x+1\neq 0,\\ \sqrt{2x+1}=2\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}2x+1>0,\\ 2x+1=4\end{cases}\ \Leftrightarrow\ \begin{cases}x>-\frac{1}{2},\\ x=\frac{3}{2}.\end{cases}$$

Следовательно, касательная к графику функции $y=-\sqrt{2x+1}$, проведенная в точке $\left(\frac{3}{2};-2\right)$, будет перпендикулярна прямой $y - 2x + 1 = 0$.

Ответ: $\left(\frac{3}{2};-2\right)$.

Пример 9.16 К графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой $x_0 = -2$ проведена касательная. Найдите её угловой коэффициент, если на рисунке 47 изображен график её производной.

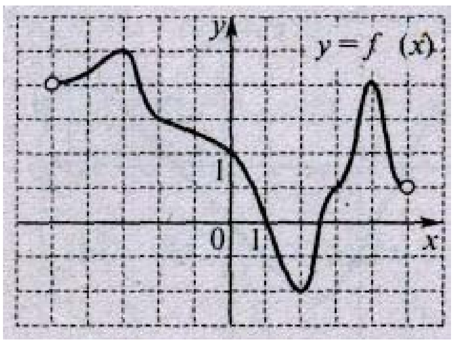


Рисунок 47

Решение.

Угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции в точке с абсциссой $x_0 = -2$, равен значению производной в этой точке. Следовательно, необходимо по графику производной (см. рисунок 47) определить её значение в точке $x_0 = -2$. Нетрудно заметить, что $f'(-2) = 3$.

Ответ: 3.

Пример 9. 17 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (- 4; 5). На рисунке 48 изображен график её производной. Найдите число всех касательных, проведенных к графику функции $y = f(x)$, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс угол 135°.

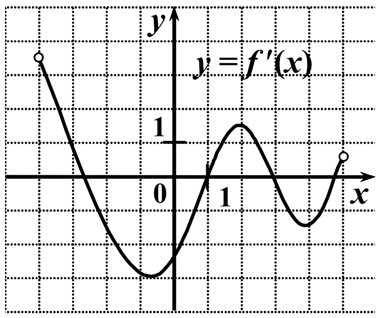


Рисунок 48

Решение.

tg 135°= -1, следовательно, нам необходимо выяснить, сколько раз производная функции, график которой представлен на рисунке 48, принимает значение, равное -1. Нетрудно заметить, что таких точек будет ровно 4.

Ответ: 4.

Пример 9.18 Прямая касается графика функции $y = f(x)$ в точке $A(2;-3)$ и параллельна прямой, проходящей через точки $B(-1;4)$ и $C(4;4)$. Найдите $f'(2)$.

Решение.

Прямая, проходящая через точки B и C, задается уравнением $y = 4$. Следовательно, угловой коэффициент касательной, которая параллельна данной прямой, будет равен 0 и, значит, $f'(2) = 0$.

Ответ: 0.

Пример 9.19 Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке $B(-6;6)$. Найдите $f'(-6)$.

Решение.

Уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку B, имеет вид: $y = -x$. Следовательно, угловой коэффициент касательной равен - 1 и, значит, $f'(-6) = -1$.

Ответ: -1.

Пример 9.20 Прямая, которая касается графика функции $y = f(x)$ в точке А с ординатой 4, проходит через точки $\text{B}(-1;0)$ и $\text{C}(5;6)$. Найдите абсциссу точки А.

Решение.

Сначала определим уравнение прямой, проходящей через точки В и С. Для этой цели воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $(x_1;y_1)$ и $(x_2;y_2)$: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$. $\quad \dfrac{x-(-1)}{5-(-1)}=\dfrac{y-0}{6-0} \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{6}=\dfrac{y}{6}$.

Следовательно, уравнение касательной $y=x+1$. В точке касания $f(x)=4$, значит, $x+1=4$ и $x=3$.

Ответ: 3.

Чаще всего на экзаменах предлагаются задачи, использующие *приложение производной к исследованию функций.* Поэтому необходимо повторить следующие понятия: возрастающая и убывающая функции, наибольшее и наименьшее значение функции на множестве, локальный минимум и локальный максимум. *Выучить все необходимые и достаточные условия существования локальных экстремумов, признаки монотонности функции на интервале, правила нахождения наибольших и наименьших значений функции на отрезке.*

Пример 9.21 Найдите длину промежутка возрастания функции $y=\dfrac{5x}{x^2+1}$.

Решение.

$$D(y)=R, \quad y'=\frac{5(x^2+1)-2x\cdot 5x}{(x^2+1)^2}=\frac{5(1-x^2)}{(x^2+1)^2}, \quad D(y')=R, \quad y'=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

Исследуя производную (см. рисунок 49), получаем, что функция убывает на промежутках (- ∞; -1] и [1; + ∞), возрастает на промежутке [-1; 1]. Длина этого промежутка равна 2.

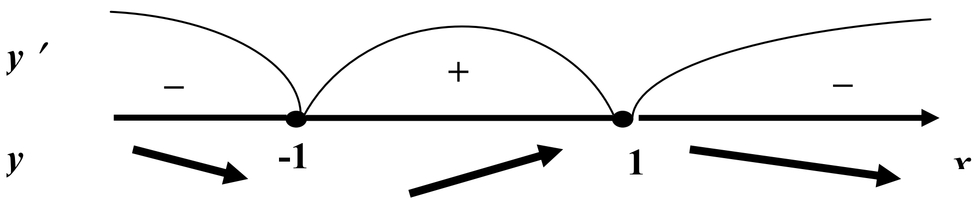


Рисунок 49

Ответ: 2.

Пример 9.22 Найдите максимум функции $y=-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^2}{2}+6x-4\dfrac{1}{2}$.

Решение.

$D(y) = R, \quad y' = -x^2 + x + 6, \quad D(y') = R, \qquad y' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -2. \end{array}\right.$

Исследуя производную (см. рисунок 50), получаем:

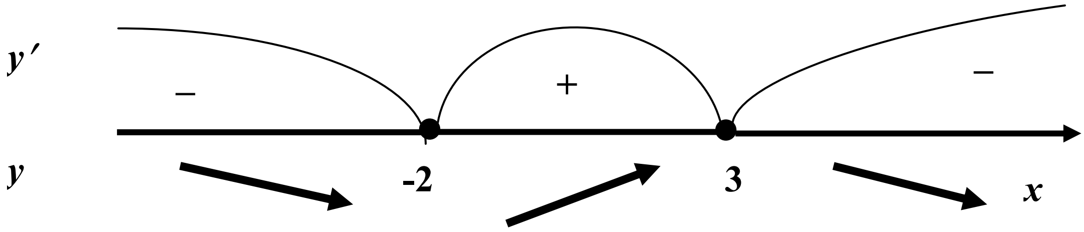


Рисунок 50

Нетрудно заметить, что при $x = 3$ производная обращается в нуль и меняет свой знак при переходе через эту точку с "+" на "-" , т.е. выполняются необходимые и достаточные условия существования точки локального максимума. Следовательно, при $x = 3$ функция имеет локальный максимум, $y(3)=9$.

Ответ: 9.

Пример 9.23 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (- 5; 4). На рисунке 51 изображен график её производной. Укажите точку максимума функции $y = f(x)$ на промежутке (- 5; 4).

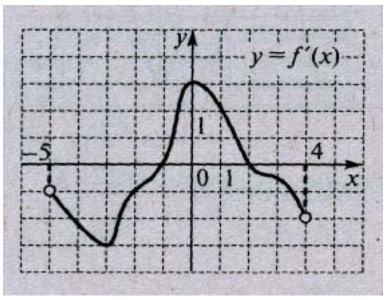


Рисунок 51

Решение.

Анализируя поведение производной (см. рисунок 51), мы видим, что в точке $x = 2$ производная обращается в нуль и меняет свой знак с "+" на "-". Следовательно, данная точка является точкой максимума функции.

Ответ: 2.

Пример 9.24 Найдите точки максимума функции $f(x) = \dfrac{6 - 6\sin^2(\pi x)}{\cos^2(\pi x)} \cdot x^2 + 2x^3 - 15x^4$.

Решение.

$$D(f)=\{x \mid cos(\pi x)\neq 0\}=\left\{x \mid \pi x\neq \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z\right\}=\left\{x \mid x\neq \frac{1}{2}+k,\ k\in Z\right\}.$$

Нетрудно заметить, что на области определения исследуемая функция может быть представлена более простым способом:

$$f(x)=\frac{6\left(1-sin^2(\pi x)\right)}{cos^2(\pi x)}\cdot x^2+2x^3-15x^4,\quad f(x)=\frac{6cos^2(\pi x)}{cos^2(\pi x)}\cdot x^2+2x^3-15x^4.$$

Следовательно, $f(x)=6x^2+2x^3-15x^4,\quad \forall\ x\in R\setminus\left\{x \mid x=\frac{1}{2}+k, k\in Z\right\}$.

$$f\,'(x)=12x+6x^2-60x^3=-6x\left(10x^2-x-2\right)=-60x(x-0{,}5)(x+0{,}4).$$

$-\ 60x(x-0{,}5)(x+0{,}4)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=0,\\ x=0{,}5,\\ x=-0{,}4.\end{array}\right.$ Заметим, что x = 0,5 не принадлежит области определения функции; точек в области определения функции, где производная не существует, тоже нет. Значит, остается только определить: как меняет свой знак производная при переходе через точки x = 0 и x = - 0,4.

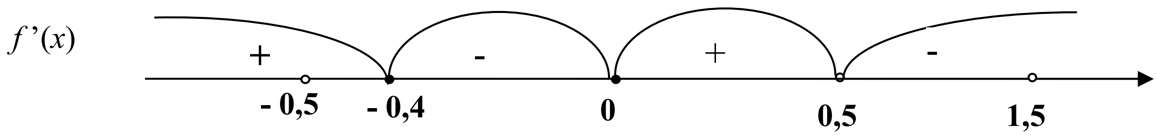


Рисунок 52

Применяя метод интервалов (см. рисунок 52), мы видим, что производная меняет свой знак с «+» на «-» при переходе через точку x = - 0,4. Следовательно, данная точка является точкой максимума функции. Хотя производная меняет свой знак с «+» на «-» и при переходе через точку x = 0,5 данная точка не является точкой максимума функции, так как не входит в область определения функции.

Ответ: - 0,4.

Пример 9.25 Найдите наименьшее значение функции $g(x)=log_{\frac{1}{3}}(9-x^2)$.

Решение.

$D(g)=\{x \mid 9-x^2>0\}=(-3;3)$.

$$g'(x)=\frac{1}{(9-x^2)ln\frac{1}{3}}\cdot(-2x)=\frac{-2x}{(9-x^2)(-ln3)}=\frac{2x}{(9-x^2)ln3}=\frac{2x}{(3-x)(3+x)ln3}.$$

Исследуя производную на области определения функции (см. рисунок 53), получаем, что

$g\,'(x)=0 \Leftrightarrow x=0,\quad g\,'(x)>0$ при $x\in(0;3)$, $g\,'(x)<0$ при $x\in(-3;0)$.

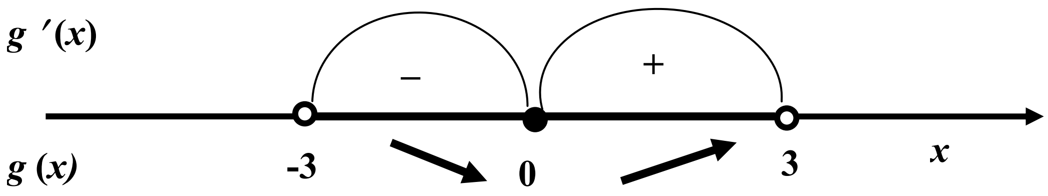


Рисунок 53

Следовательно, функция убывает на (-3; 0] и возрастает на [0; 3). Таким образом, $g(0) \le g(x),\ \forall x \in (\text{-}3;3)$ и $g(0) = \min\limits_{(-3;3)} g(x)$. $g(0) = \log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$.

Ответ: - 2.

Пример 9.26 Найдите значение функции $f(x) = 10^{lg\frac{2x^3-6x}{x+6} - log_{0,1}(x+6)}$ в точке максимума.

Решение.

$$D(f):\ \begin{cases} x+6>0, \\ \dfrac{2x^3-6x}{x+6}>0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>-6, \\ 2x^3-6x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-6, \\ 2x(x^2-3)>0. \end{cases}$$

$$2x(x^2-3)>0 \Leftrightarrow 2x(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})>0 \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{3};0) \cup (\sqrt{3};+\infty).$$

Таким образом, $D(f) = (-\sqrt{3};0) \cup (\sqrt{3};+\infty)$. На области определения функция может быть представлена более простым способом, так как

$$10^{lg\frac{2x^3-6x}{x+6} - log_{0,1}(x+6)} = 10^{lg\frac{2x^3-6x}{x+6} + lg(x+6)} = 10^{lg\frac{(2x^3-6x)(x+6)}{x+6}} = 2x^3-6x.$$

Рассмотрим функцию $g(x) = 2x^3 - 6x$, с которой исследуемая функция совпадает на области определения.

$$D(g) = R,\ g'(x) = 6x^2 - 6 = 6(x^2-1),\ g'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1, \\ x=-1. \end{array}\right.$$

$$g'(x)<0,\ \ x \in (-1;1) \quad \text{и} \quad g'(x)>0,\ \ x \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty).$$

Области определения функции $f(x)$ принадлежит только точка x = - 1. Производная функции $g(x)$, а значит, и функции $f(x)$, при переходе через данную точку меняет свой знак с «+» на «-», следовательно, точка $x = -1$ является точкой максимума функции $f(x)$. $f(-1) = 4$.

Ответ: 4.

Пример 9.27 Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (-7; 5). На рисунке 54 изображен график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наибольшее значение на отрезке [-5; 3].

Решение.

Анализируя поведение производной на [-5; 3] (см. рисунок 54), мы видим, что $f'(2) = 0;\ f'(x) < 0,\ \ \forall x \in [-5;2)$; $f'(x) < 0,\ \ \forall x \in (2;3]$.

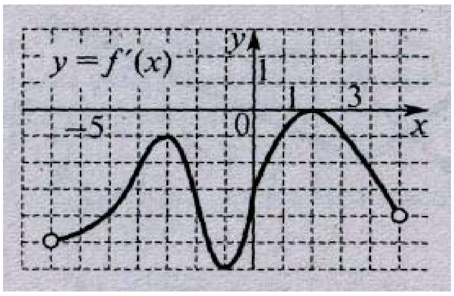


Рисунок 54

Значит, функция является убывающей на [-5; 2] и на [2; 3] , следовательно, она является убывающей на [-5; 3]. Таким образом, наибольшее значение она принимает в точке $x_0 = -5$.

Ответ: - 5.

Пример 9.28 Найдите наименьшее целое значение функции $y = \frac{1}{3}\sqrt{36\,sin^2 x - 12\,sin\,x + 17}$.

Решение.

D (*y*) = *R*. Введем новую переменную: *t = sin x, t* ∈ [-1; 1]. Задача сведется к исследованию функции $f(t) = \frac{1}{3}\sqrt{36t^2 - 12t + 17}$ на наибольшее и наименьшее значение на отрезке [-1; 1]. Используя правило определения наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции на отрезке, получаем:

$$f'(t) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\frac{72t - 12}{\sqrt{36t^2 - 12t + 17}},\ \ D(f') = R,\ \ f'(t) = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{6},\ \frac{1}{6} \in [-1;1].$$

$f\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{4}{3}$; f (-1) = $\frac{\sqrt{65}}{3}$; f (1) = $\frac{\sqrt{41}}{3}$. Сравнивая найденные значения, приходим к выводу: $\min\limits_{[-1;1]} f(x) = \frac{4}{3}$, $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \frac{\sqrt{65}}{3}$. Так как непрерывная на отрезке функция принимает на этом отрезке все значения между своими наибольшим и наименьшим значениями на отрезке, множество значений функции *f*(*t*) на отрезке [-1; 1] есть $\left[\frac{4}{3};\frac{\sqrt{65}}{3}\right]$. Наименьшее целое значение функции в этом случае равно 2.

Ответ: 2.

Пример 9.29 Найдите наименьшее значение функции $f(x) = 0{,}5x + \left(\sqrt{4 - x^2}\right)^2 + x^2 - \frac{x+1}{x+3}$.

Решение.

$D(f)$: $\begin{cases} 4-x^2 \ge 0, \\ x \ne -3 \end{cases} \Rightarrow x \in [-2; 2]$. На области определения функция может быть преобразована к более простому виду: $f(x) = 0{,}5x + 4 - x^2 + x^2 - \dfrac{x+1}{x+3}$, т.е. $f(x) = 0{,}5x + 4 - \dfrac{x+1}{x+3}$, $x \in [-2; 2]$.

$$f'(x) = 0{,}5 - \frac{(x+1)' \cdot (x+3) - (x+3)' \cdot (x+1)}{(x+3)^2} = 0{,}5 - \frac{(x+3)-(x+1)}{(x+3)^2} = 0{,}5 - \frac{2}{(x+3)^2}.$$

На исследуемом промежутке [-2; 2] производная определена.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} - \frac{2}{(x+3)^2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -3, \\ (x+3)^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -3, \\ \left[\begin{array}{l} x+3 = 2, \\ x+3 = -2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ne -3, \\ \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = -5. \end{array}\right. \end{cases}$$

Следовательно, области определения функции принадлежит только точка $x = -1$. $f(-2) = 4$; $f(-1) = 3{,}5$; $f(2) = 4{,}4$. Значит, наименьшее значение функции равно 3,5.

Ответ: 3,5.

Пример 9.30 Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \left|\sqrt{9-x^2} - 5\right| + \sqrt{9-x^2} + x^3 - 6x^2$.

Решение.

$D(f) = \{x \in R \mid 9 - x^2 \ge 0\} = [-3; 3]$.

На области определения $0 \le x^2 \le 9 \Rightarrow 0 \ge -x^2 \ge -9 \Rightarrow 9 \ge 9 - x^2 \ge 0 \Rightarrow$ $0 \le \sqrt{9-x^2} \le 3 \Rightarrow -5 \le \sqrt{9-x^2} - 5 \le -2$ и, значит, функция может быть представлена более простым способом: $f(x) = -\sqrt{9-x^2} + 5 + \sqrt{9-x^2} + x^3 - 6x^2$, следовательно, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$, $x \in [-3; 3]$. Т.е. задача свелась к определению наибольшего значения функции на отрезке.

$$f'(x) = 3x^2 - 12x, \quad 3x^2 - 12x = 0 \Leftrightarrow 3x(x-4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0, \\ x = 4. \end{array}\right.$$

Исследуемому отрезку принадлежит только одна точка: $x = 0$.

$f(0) = 5$; $f(-3) = -27 - 54 + 5 = -76$; $f(3) = 27 - 54 + 5 = -22$. Следовательно, наибольшее значение функции равно 5 и достигается при $x = 0$.

Ответ: 5.

Пример 9.31 Найдите множество значений функции $y = sin 2x$, если $x \in [arctg \frac{1}{3}; arctg 2]$.

Решение.

Так как непрерывная на отрезке функция принимает все промежуточные значения между своими наибольшим и наименьшим значениями на отрезке, то для решения задачи, достаточно найти наибольшее и наименьшее значения данной функции на этом отрезке. $D(y)=R,\ \ y'=cos\,2x\cdot 2,\ D(y')=R.$

$$y'=0 \quad \Leftrightarrow\ 2cos\ 2x=0 \quad \Leftrightarrow \quad 2x=\frac{p}{2}+pn, n\in Z \quad \Leftrightarrow\ x=\frac{p}{4}+\frac{p}{2}n, n\in Z.$$

Так как $arctg\,\frac{1}{3}<arctg\,1=\frac{\pi}{4}<arctg\,2$, то исследуемому промежутку принадлежит только точка $\frac{\pi}{4}=arctg\ 1;\quad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)=sin\frac{\pi}{2}=1$.

Для того, чтобы вычислить значения функции в граничных точках отрезка, преобразуем выражение, задающее функцию, следующим образом:

$$y=sin\,2x=2\,sin\,x\cdot cos\,x=\frac{2\,sin\,x\cdot cos\,x}{sin^2 x+cos^2 x}=\frac{cos^2 x\cdot 2tgx}{cos^2 x(1+tg^2 x)}=\frac{2tgx}{1+tg^2 x}.$$

$$y\left(arctg\frac{1}{3}\right)=\frac{2tg\left(arctg\frac{1}{3}\right)}{1+tg^2\left(arctg\frac{1}{3}\right)}=\frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{9}}=\frac{3}{5};\ \ y(arctg2)=\frac{2tg(arctg2)}{1+tg^2(arctg2)}=\frac{2\cdot 2}{1+4}=\frac{4}{5}.$$

Следовательно, на исследуемом отрезке наименьшее значение функции равно $\frac{3}{5}$, наибольшее значение равно 1. Т. е. область значений $E(y)=\left[\frac{3}{5};1\right]$.

Ответ: $\left[\frac{3}{5};1\right]$.

Пример 9.32 Найдите набольшее значение площади прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и диагональю OP, где O - начало координат, а P - точка на графике функции $y=\frac{5}{x}+64x^8\cdot e^{9-18x}$, $0{,}2\ \le\ x\le\ 2.$

Решение.

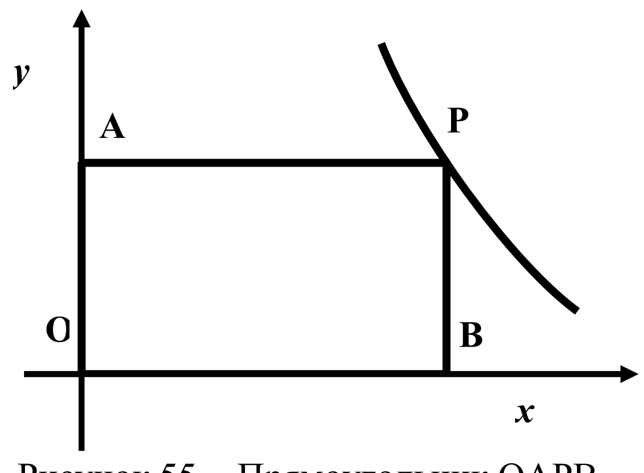


Рисунок 55 - Прямоугольник OAPB.

Пусть OAPB - указанный прямоугольник (см. рисунок 55).

O (0;0), B (x; 0), A (0; y), P ($x; y$), где $y=\dfrac{5}{x}+64x^8\cdot e^{9-18x}$, $x\in$ [0,2; 2].

Тогда $S_{\text{OAPB}}=\text{OB}\cdot\text{OA}=x\cdot\left(\dfrac{5}{x}+64x^8\cdot e^{9-18x}\right)=5+64x^9\cdot e^{9-18x}$.

Таким образом, задача сводится к отысканию наибольшего значения функции $S\,(x)=5+64x^9\cdot e^{9-18x}$ на отрезке $[0{,}2;2]$.

$$S'(x)=64\cdot(9x^8\cdot e^{9-18x}+x^9\cdot e^{9-18x}\cdot(-18))=64\cdot 9\cdot e^{9-18x}\cdot x^8(1-2x).$$

$$D(S'(x))=R,\quad S'(x)=0\quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{aligned}&x=0,\\&x=\frac{1}{2}.\end{aligned}\right.\qquad x=0\ \notin\ [0{,}2;2].$$

Следовательно, достаточно найти значения $S(0{,}2), S(0{,}5), S(2)$, сравнить и выбрать наибольшее из них. Это и будет наибольшее значение площади.

$$S(0{,}2)=5+\frac{64}{5^9}\cdot e^{9-\frac{18}{5}}=5+\frac{64e^{\frac{27}{5}}}{5^8};\qquad S(0{,}5)=5+\frac{64}{2^9}\cdot e^0=5\frac{1}{8};$$

$$S(2)=5+64\cdot 2^9\cdot e^{-27}=5+\frac{2^{15}}{e^{27}}.\qquad S(0{,}5)>S(0{,}2)\ \ и\ \ S(0{,}5)>S(2).$$

Следовательно, наибольшее значение площади равно $5\frac{1}{8}$.

Этот же результат можно было получить более быстрым способом, заметив (см. рисунок 56), что функция S (x) возрастает на промежутке (-∞; 0,5], убывает на промежутке [0,5; + ∞). Следовательно, своего наибольшего значения она достигает при x = 0,5.

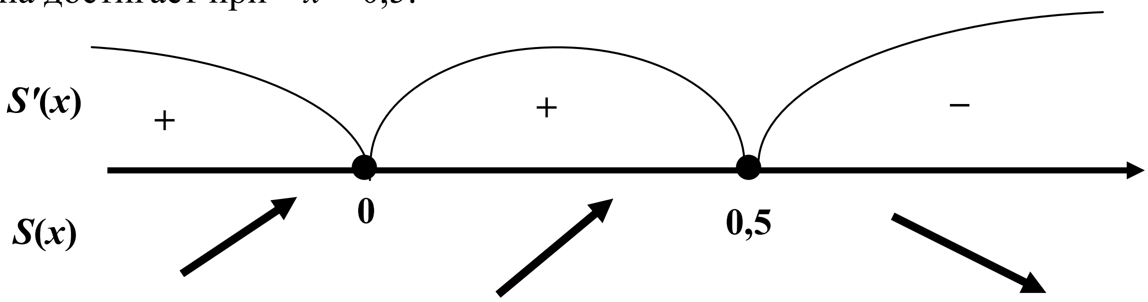


Рисунок 56

Ответ: $5\frac{1}{8}$.

Пример 9.33 Стороны прямоугольника равны 2 и 5. Через каждую точку на его меньшей стороне провели прямую, отсекающую прямоугольный треугольник с периметром 8. Найдите наименьшее значение площади оставшейся части прямоугольника.

Решение.

Пусть АВСД - указанный прямоугольник, АВ =2, АД = 5, АКМ - произвольный треугольник, получающийся указанным в условии задачи способом (см. рисунок 57). Пусть АК = x, $x \in (0;\ 2]$; АМ = y, $y \in (0;\ 5]$. Тогда $\text{KM} = \sqrt{x^2 + y^2}$ и, учитывая, что периметр треугольника равен 8, получаем уравнение: $x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 8$.

$$x + y + \sqrt{x^2 + y^2} = 8 \iff \sqrt{x^2 + y^2} = 8 - (x + y).$$

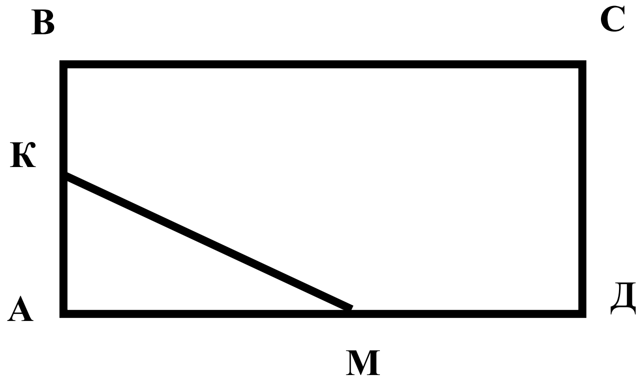


Рисунок 57

Так как $0 < x + y \le 7$, то $1 \le 8 - (x + y) < 8$ и уравнение равносильно уравнению: $x^2 + y^2 = 64 - 16(x + y) + (x + y)^2$.

$$x^2 + y^2 = 64 - 16(x + y) + (x + y)^2 \iff 64 - 16x - 16y + 2xy = 0 \iff 2y(x - 8) = 16x - 64.$$

Так как, по условию задачи, $x \in (0;\ 2]$, то $y = \dfrac{8x - 32}{x - 8}$.

Следовательно, площадь треугольника АКМ равна: $S(x) = \dfrac{1}{2} x \cdot \dfrac{8x - 32}{x - 8}$.

Нетрудно заметить, что площадь оставшейся части будет наименьшей тогда, когда площадь отсекаемой части, т.е. площадь треугольника АКМ, будет наибольшей.

Таким образом, задача сводится к отысканию наибольшего значения функции $S(x) = \dfrac{4x^2 - 16x}{x - 8}$ на $(0;\ 2]$, $D(S) = R \setminus \{8\}$.

$$S'(x) = \frac{(8x - 16) \cdot (x - 8) - 1 \cdot (4x^2 - 16x)}{(x - 8)^2} = \frac{4((2x - 4)(x - 8) - (x^2 - 4x))}{(x - 8)^2} =$$

$$= \frac{4(x^2 - 16x + 32)}{(x - 8)^2}.$$

$$D(S'(x)) = R \setminus \{8\}; \quad S'(x) = 0 \iff x^2 - 16x + 32 = 0 \iff \left[\begin{array}{l} x = 8 + 4\sqrt{2}, \\ x = 8 - 4\sqrt{2}. \end{array}\right.$$

Анализируя знаки производной, делаем вывод о поведении функции (см. рисунок 58).

На исследуемом промежутке $(0;\ 2]$ функция $S(x)$ является возрастающей, следовательно, наибольшее значение она принимает при $x = 2$.

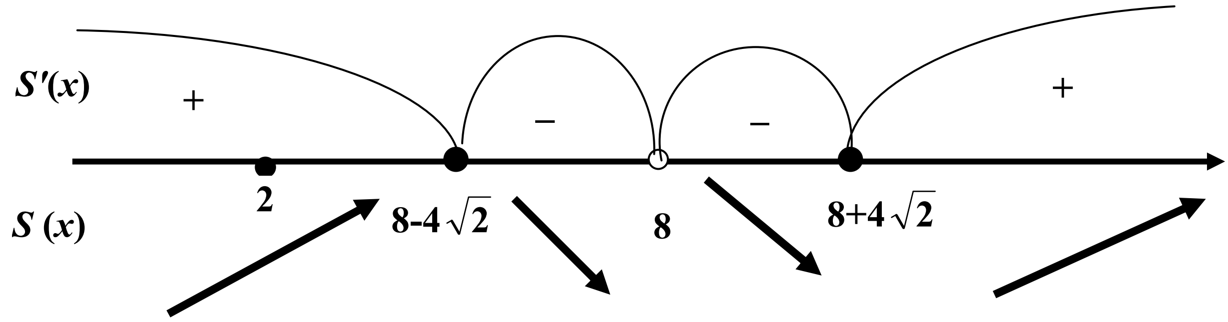


Рисунок 58

Таким образом, наибольшее значение площади отсекаемого прямоугольного треугольника равно: $S(2)=\dfrac{4\cdot 4-16\cdot 2}{2-8}=\dfrac{16}{6}=\dfrac{8}{3}$. Следовательно, наименьшее значение оставшейся площади будет равно: $2\cdot 5-\dfrac{8}{3}=\dfrac{22}{3}$.

Ответ: $\dfrac{22}{3}$.

Пример 9.34 Требуется разметить на земле участок площадью 4000 м^2, который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника ABCDEFGM, изображенного на рисунке 59, где BC = 15 м, DE = 50 м, EF = 30 м и CD $\geq$ 30 м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KG, KA и CD, при которых периметр является наименьшим.

Решение.

Пусть KG= x, KA= y, CD = z (см. рисунок 60). Периметр P данного участка равен периметру прямоугольника AKGM, следовательно, $P = 2(x+y)$.

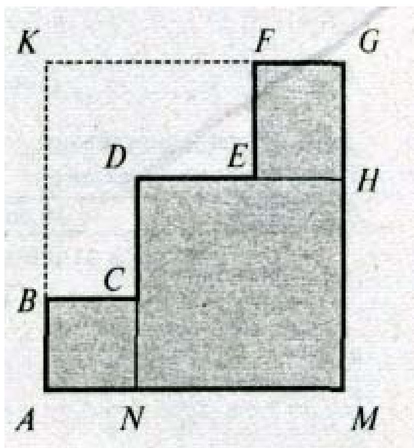


Рисунок 59

Заметим, что площадь S прямоугольника AKGM равна xy и может быть рассмотрена как сумма площадей рассматриваемого участка и двух прямоугольников, следовательно,

$$xy = 4000 + \mathrm{DE} \cdot \mathrm{EF} + \mathrm{BC} \cdot (\mathrm{EF} + \mathrm{DC}) = 4000 + 50 \cdot 30 + 15 \cdot (30 + z) \geq$$
$$\geq 4000 + 1500 + 15 \cdot 60 = 6400.$$

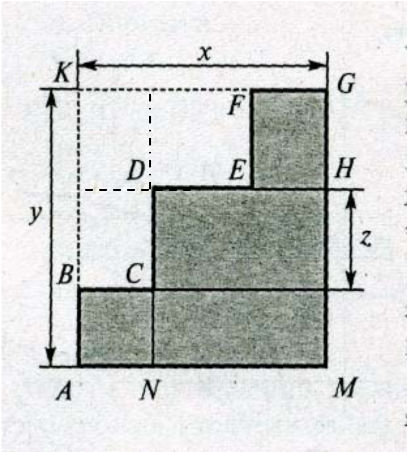


Рисунок 60

Таким образом, $y \geq \dfrac{6400}{x}$ и $P \geq 2\left(x + \dfrac{6400}{x}\right)$.

Рассмотрим функцию $f(x) = 2\left(x + \dfrac{6400}{x}\right)$. По условию задачи, $x > 0$.

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{6400}{x^2}\right) = \frac{2(x^2 - 6400)}{x^2},\ D(f'(x)) = R \setminus \{0\},\ f'(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 80, \\ x = \text{-}80. \end{array}\right.$$

Анализируя поведение производной (см. рисунок 61), мы получаем, что на исследуемом промежутке $(0;\ +\infty)$ функция является убывающей при $x \in (0;80]$ и возрастающей при $x \in [80;+\infty)$.

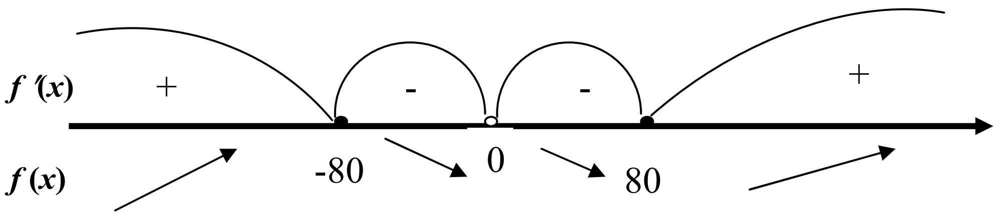


Рисунок 61

Следовательно, она принимает наименьшее значение в точке $x = 80$, которое равно 320. Таким образом, наименьшее возможное значение периметра $P = 320$ и длины KG, KA и CD соответственно равны: KG = 80 м, KA = 80 м, CD = 30 м.

Ответ: 320 м, 80 м, 80 м, 30 м.

К *физическим приложениям производной* можно отнести задачи на нахождение скорости и ускорения. Методика их решения достаточно хорошо изложена в школьных учебниках, например, в [9].

Пример 9.35 При движении тела по прямой расстояние S (в метрах) от начальной точки движения изменяется по закону $S(t)=\dfrac{t^3}{3}-t^2+t-1$ (t -время движения в секундах). Найдите скорость (м/с) тела через 4 секунды после начала движения.

Решение.

Из физического смысла производной следует, что $\upsilon(4)=S'(4)$.

$S'(t)=\dfrac{1}{3}\cdot 3t^2-2t+1=t^2-2t+1$. Следовательно, $S'(4)=4^2-2\cdot 4+1=9$.

Ответ: 9 м/с.

Повторяя тему *"Первообразная",* обратите внимание на определение первообразной, её свойства и правила нахождения, ***выучите все табличные формулы***.

Пример 9.36 Укажите первообразную функции $f(x)=x+sin\,x$:

1) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}+cos\,x$; 2) $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-cos\,x$; 3) $F(x)=x^2+cos\,x$; 4) $F(x)$=2 - $cos\,x$.

Решение.

Любая первообразная $F(x)$ для функции $f(x)=x+sin\,x$ может быть представлена в виде: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-cos\,x+C,\quad C\in R$. Следовательно, из указанных вариантов подходит только один вариант: $F(x)=\dfrac{x^2}{2}-cos\,x$, где $C=0$.

Ответ: 2.

Пример 9.37 Укажите первообразную $F(x)$ функции $f(x)=e^x-x^2$, если $F(0)=2$:

1) $F(x)=e^x-\dfrac{x^3}{3}+1$; 2) $F(x)=e^x-2x+1$;

3) $F(x)=e^x-\dfrac{x^3}{3}+3$; 4) $F(x)=e^x-2x+3$.

Решение.

Множество всех первообразных $F(x)$ для функции $f(x)=e^x-x^2$ задается формулой: $F(x)=e^x-\dfrac{x^3}{3}+C,\; C\in R$.

$F(0)=2 \;\Leftrightarrow\; e^0-0+C=2$. Следовательно, $C=1$ и $F(x)=e^x-\dfrac{x^3}{3}+1$.

Ответ: 1.

Пример 9.38 Найдите все первообразные для функции $f(x)=e^{5-3x}$.

Решение.

Любая первообразная для функции $f(x)=e^{5-3x}$ может быть определена по формуле: $F(x)=-\frac{1}{3}e^{5-3x}+C,\ C\in R$.

Ответ: $F(x)=-\frac{1}{3}e^{5-3x}+C, C\in R$.

Пример 9.39 Найдите все первообразные для функции $f(x)=x(x+1)^9$.

Решение.

$f(x)=x\cdot(x+1)^9=(x+1-1)\cdot(x+1)^9=(x+1)^{10}-(x+1)^9,\ D(f)=R.$

Следовательно, любая первообразная для данной функции может быть определена по формуле: $F(x)=\frac{(x+1)^{11}}{11}-\frac{(x+1)^{10}}{10}+C,\ C\in R$.

Ответ: $F(x)=\frac{(x+1)^{11}}{11}-\frac{(x+1)^{10}}{10}+C,\ C\in R$.

Повторяя тему *"Определенный интеграл"*, обратите внимание на определение определенного интеграла, его геометрический смысл (площадь криволинейной трапеции), правила нахождения, ***выучите все табличные формулы***. Следует также обратить внимание на нахождение объемов тел с помощью определенных интегралов и приложения определенных интегралов к решению физических задач (путь, работа и другие).

Пример 9.40 Найдите $\int\limits_0^{\pi} sin^2\frac{x}{2}dx$.

Решение.

$$\int\limits_0^{\pi} sin^2\frac{x}{2}dx=\int\limits_0^{\pi}\frac{1-cos\,x}{2}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\pi}(1-cos\,x)dx=\frac{1}{2}\left(x-sin\,x\right)\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $\frac{\pi}{2}$.

Пример 9.41 Найдите $\int\limits_0^{9}\frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$.

Решение.

$$\int_0^9 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx = \int_0^9 \frac{(\sqrt{x}+1)\cdot(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}+1}dx = \int_0^9 (\sqrt{x}-1)dx = \left.\left(\frac{2\sqrt{x^3}}{3}-x\right)\right|_0^9 = 18-9=9.$$

Ответ: 9.

Пример 9.42 Найдите $\int_0^2 |1-x|\,dx$.

Решение.

$$\int_0^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 |1-x|\,dx + \int_1^2 |1-x|\,dx = \int_0^1 (1-x)dx + \int_1^2 (x-1)dx =$$

$$= \left.\left(x-\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^1 + \left.\left(\frac{x^2}{2}-x\right)\right|_1^2 = \left(\frac{1}{2}-0\right)+\left(0-\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=1.$$

Ответ: 1.

Пример 9.43 Найдите $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Решение.

Нетрудно заметить, что величина данного интеграла - площадь фигуры, ограниченной линиями: $y=0$, $x = 0$, $x = 1$, $y = \sqrt{1-x^2}$. Линия $y=\sqrt{1-x^2}$ - дуга окружности с центром в точке (0; 0) радиуса 1 (см. рисунок 62).

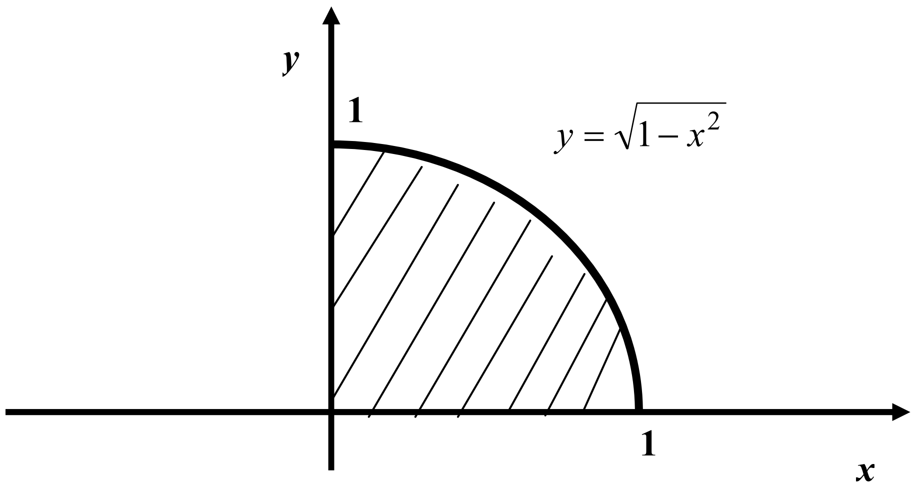


Рисунок 62

Следовательно, $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \frac{1}{4}\pi\cdot 1^2 = \frac{\pi}{4}.$

Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

Пример 9.44 Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями:

$$y = \frac{1}{2}x \text{ и } y = 3\sqrt{x-5}.$$

Решение.

Построим графики указанных функций и найдем их точки пересечения (см. рисунок 63).

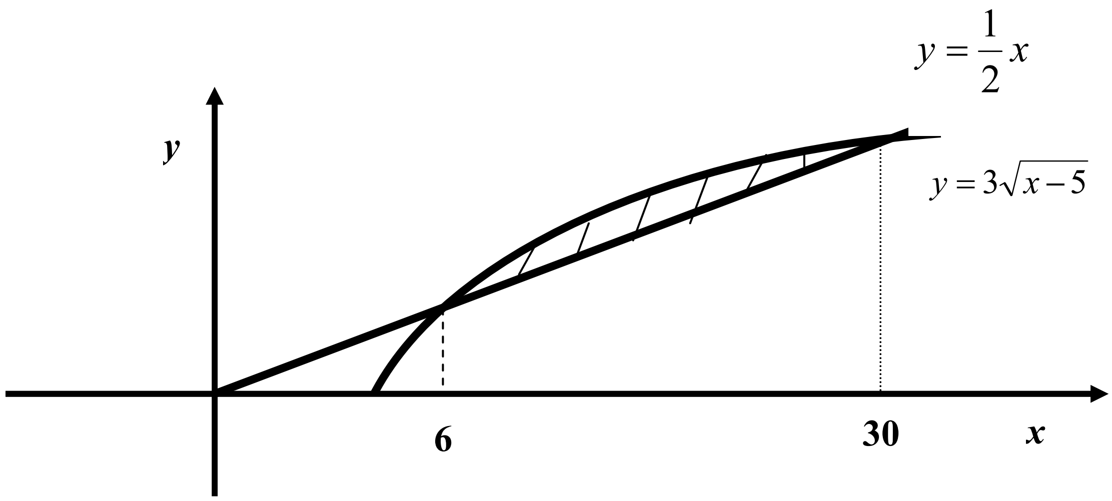


Рисунок 63

$$\frac{1}{2}x = 3\sqrt{x-5} \quad \Leftrightarrow \quad x = 6\sqrt{x\text{-}5} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ x \geq 0, \\ x^2 = 36(x-5) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x \geq 5, \\ \left[\begin{array}{l} x = 6, \\ x = 30. \end{array}\right. \end{cases}$$

Следовательно, графики данных функций пересекаются в точках с координатами $(6;\, 3)$ и $(30;\, 15)$.

$$S = \int_6^{30}\left(3\sqrt{x-5} - \frac{1}{2}x\right)dx = \left(3 \cdot \frac{2\sqrt{(x-5)^3}}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_6^{30} = (250-225)-(2-9) = 32.$$

Ответ: 32.

Наибольшее затруднение на экзаменах вызывают задачи с параметрами. С методикой решения заданий с параметрами по данным темам можно ознакомиться по пособиям [15], [39], [51], [54], [62], [87], [96], [106], [117], [130], [136], [146], [151] .

Пример 9.45 При каком натуральном значении параметра a уравнение $x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0$ имеет ровно два корня?

Решение.

$x^3 + 3x^2 - 9x - a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 + 3x^2 - 9x = a$.

Для определения количества решений уравнения в данном случае проще всего воспользоваться графическим методом. То есть определить: сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^3 + 3x^2 - 9x$ и $y = a$ в зависимости от значений параметра a.

Рассмотрим функцию $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$, $D(f) = R$, $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$, $D(f') = R$, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3, \\ x = 1. \end{array}\right.$ Исследуя производную, получаем (см. рисунок 64):

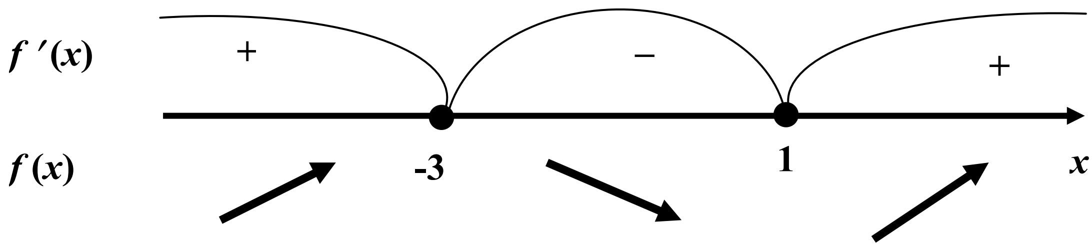


Рисунок 64

Следовательно, функция $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$ возрастает на промежутках (-∞; -3] и [1; +∞), убывает на промежутке [-3; 1]; $x = -3$ - точка строго локального максимума, $x = 1$ - точка строгого локального минимума.

Учитывая, что $f(0) = 0$, $f(1) = -5$, $f(-3) = 27$; строим эскиз графика функции (см. рисунок 65).

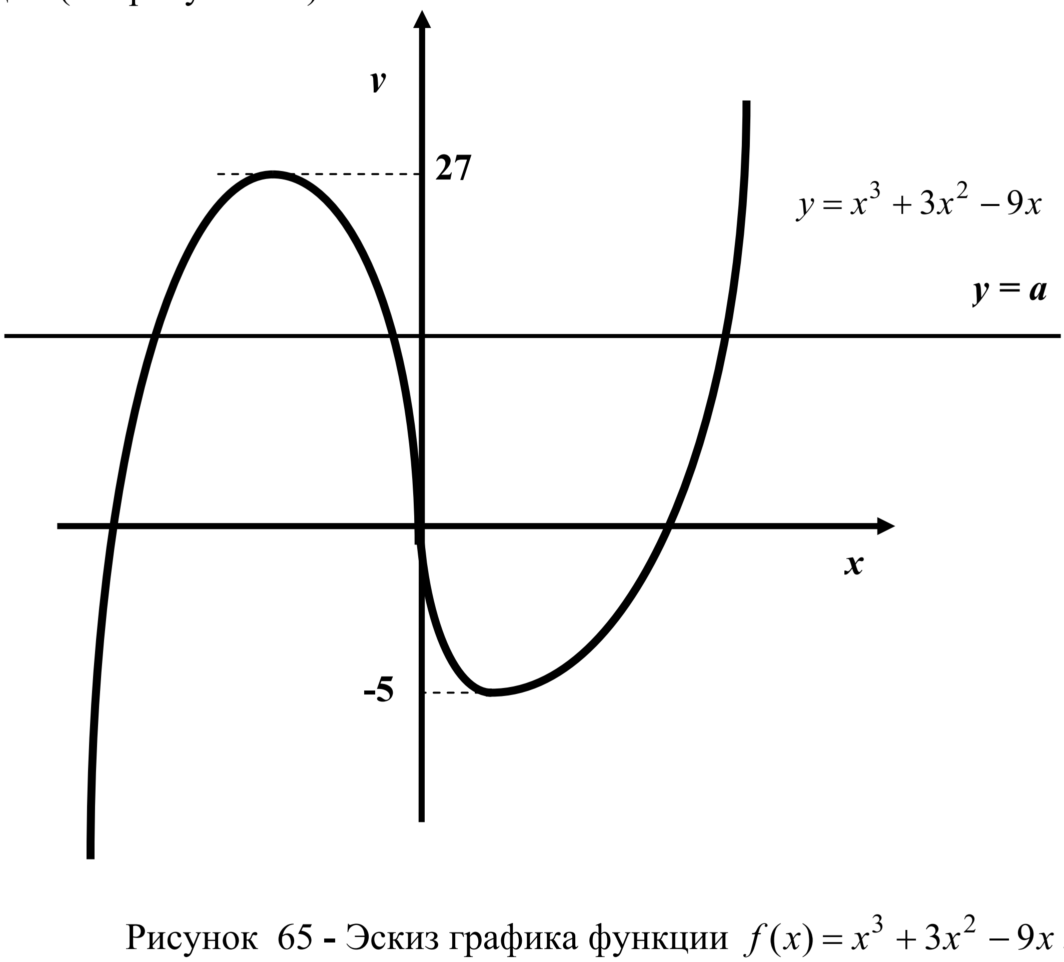


Рисунок 65 - Эскиз графика функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x$.

Нетрудно заметить, что прямая $y = a$ будет иметь с графиком функции две точки пересечения только при $a = -5$ или $a = 27$ (в этом случае уравнение будет иметь два решения). Натуральным числом будет только одно из этих значений: 27.

Ответ: 27.

Пример 9.46 При каком наибольшем значении параметра a функция $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - ax^2 + ax + 7$ возрастает на всей числовой прямой?

Решение.

$D(f) = R,\quad f'(x) = 2x^2 - 2ax + a,\quad D(f') = R.$

$f'(x) \geq 0, \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2 - 2ax + a \geq 0, \forall x \in R \quad \Leftrightarrow \quad D \leq 0.$

$D = 4a^2 - 8a = 4a(a-2).\qquad 4a(a-2) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad a \in [0; 2].$

Таким образом, наибольшее значение параметра a равно 2.

Ответ: 2.

Пример 9.47 При каких a функция $y = ln(8 - x) + ln(x + a)$ имеет максимум в точке с абсциссой, равной -3 ?

Решение.

$$D(f):\ \begin{cases} 8 - x > 0, \\ x + a > 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x < 8, \\ x > -a. \end{cases}$$

Следовательно, $D(f)$ не будет пустой тогда и только тогда, когда $-a < 8$.

$$y' = \frac{1}{8-x}\cdot(-1) + \frac{1}{x+a} = \frac{1}{x-8} + \frac{1}{x+a} = \frac{2x-8+a}{(x-8)(x+a)}\ .$$

В точках локального экстремума производная функции равна 0 или не существует (смотрите необходимые условия существования локального экстремума). Так как точки, в которых производная (как функция) не существует, не входят в область определения исходной функции, то нам остается выяснить: при каких значениях параметра $y'(-3) = 0$.

$$y'(-3) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-14+a}{-11(-3+a)} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} a \neq 3, \\ a = 14. \end{cases}$$ Следовательно, $a = 14$.

Проверим, будет ли в этом случае точка $x = -3$ точкой локального максимума.

При $a = 14$ функция имеет вид: $y = ln(8 - x) + ln(x + 14);\ D(y) = (-14; 8)$.

$$y' = \frac{2x+6}{(x-8)(x+14)}\ ,\quad \text{на } (-14; 8)\quad y' = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = -3.$$

Исследуя производную, получаем (см. рисунок 66), что производная меняет свой знак с "+" на "-" при переходе через точку $x = -3$, следовательно, она действительно является точкой локального максимума.

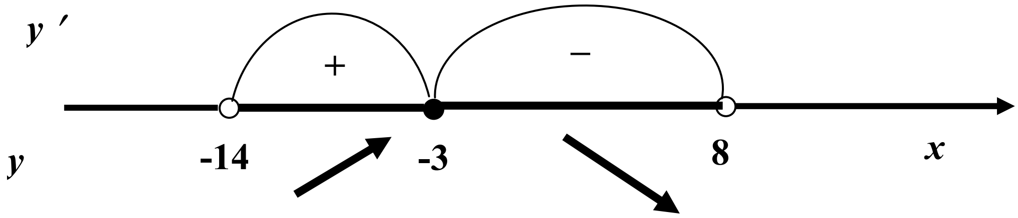


Рисунок 66

Ответ: 14.

Пример 9.48 При каких значениях p уравнение $cos\,2x-\dfrac{2p}{cos\,x}=7$ имеет решение ?

Решение.

ОДЗ: $x \neq \dfrac{p}{2}+pn,\ n \in Z$.

$$cos\,2x-\frac{2p}{cos\,x}=7 \ \Leftrightarrow\ \begin{cases} x \neq \dfrac{\pi}{2}+\pi n, n \in Z, \\ cos\,x \cdot cos\,2x-2p=7\,cos\,x. \end{cases}$$

$$cos\,x \cdot cos\,2x-2p=7\,cos\,x \quad \Leftrightarrow \quad cos\,x \cdot (2cos^2 x-1)-2p=7\,cos\,x \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\ 2cos^3 x-8cos\,x-2p=0 \quad \Leftrightarrow \quad cos^3 x-4cos\,x=p\,.$$

Следовательно, $cos\,2x-\dfrac{2p}{cos\,x}=7 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} cos\,x \neq 0, \\ cos^3 x-4cos\,x=p. \end{cases}$

Введем $t = cos\ x,\ \ t \in$ [-1; 1]. Задача сведется к исследованию вопроса о существовании решений уравнения: $t^3-4t=p,\ t \in [-1;0) \cup (0;1]$.

Рассмотрим функцию $f(t)=t^3-4t$.

$$D(f)=R, \quad f'(t)\ =\ 3t^2-4, \ \ D(f')=R,\ f'(x)=0 \ \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}, \\ t=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{array}\right.$$

Исследуя производную введенной функции (см. рисунок 67), получаем, что функция $f(t)=t^3-4t$ возрастает на $\left(-\infty;-\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right] \cup \left[\dfrac{2}{\sqrt{3}};+\infty\right)$ и убывает на $\left[-\dfrac{2}{\sqrt{3}};\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right]$, точка $t=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ - точка локального максимума, точка $t=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ - точка локального минимума.

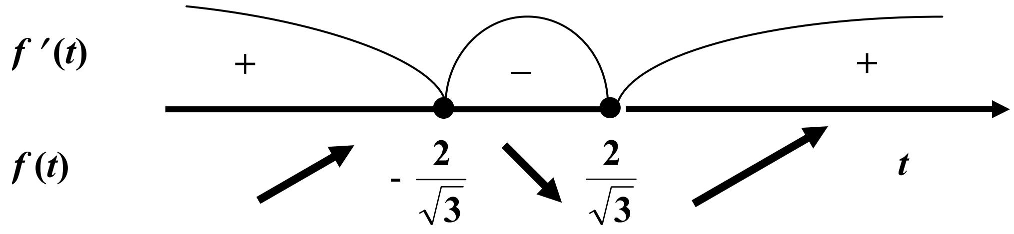


Рисунок 67

Учитывая, что $f(0)=0$, $f\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=-\frac{16}{3\sqrt{3}}$, $f\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)=\frac{16}{3\sqrt{3}}$, $f(-1)=3$, $f(1)=-3$, получаем эскиз графика функции (см. рисунок 68).

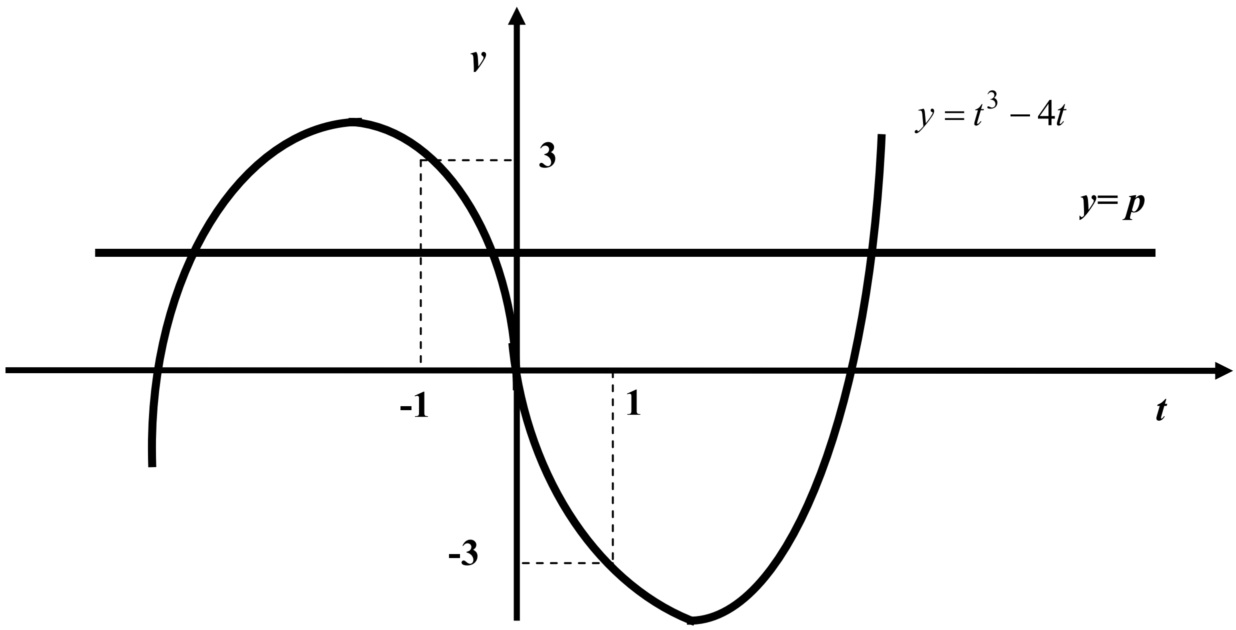


Рисунок 68

Нетрудно заметить, что абсциссы точек пересечения прямой $y=p$ с графиком данной функции попадают на [-1; 0) ∪ (0; 1] только в том случае, когда $p\in[-3;0)\cup(0;3]$.

Ответ: $p\in[-3;0)\cup(0;3]$.

Пример 9.49 Найдите все значения *a****,*** для которых при каждом *x* из промежутка [1; 9) значение выражения $x-\sqrt{x}-3$ не равно значению выражения $a\sqrt{x}$.

Решение.

Ранее (см. глава 6), мы рассмотрели способ решения подобных заданий с помощью исследования квадратного трехчлена. Здесь же мы рассмотрим второй способ решения данной задачи.

На промежутке [1; 9)

$$x-\sqrt{x}-3\neq a\sqrt{x} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x-\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}\neq a \quad \Leftrightarrow \sqrt{x}-1-\frac{3}{\sqrt{x}}\neq a\,.$$

Рассмотрим функцию $f(x)=\sqrt{x}-1-\dfrac{3}{\sqrt{x}}$. $D(f)=(0;+\infty)$,

$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}+\dfrac{3}{2\sqrt{x^3}}$, $D(f')=(0;+\infty)$, $f'(x)>0,\ \forall\, x\in(0;+\infty)$.

Т.е. на всей области определения функция является возрастающей.

Так как $f(1)=-3;\ f(9)=1$, то $-3\le f(x)<1,\ \forall\ x\in[1;9)$. Следовательно, $f(x)\neq a,\ \ x\in[1;9)\ \Leftrightarrow\ a\notin[-3;1)\ \Leftrightarrow\ a\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$.

Ответ: $a\in(-\infty;-3)\cup[1;+\infty)$.

В последнее время на ЕГЭ стали предлагать задачи, в которых производная применяется лишь на одном из этапов решения.

Пример 9.50 Доказать, что система $\begin{cases}9y^3+2(3y+1)^2-y-2=x\left(y^3+2y^2+2y\right),\\ 2log_{0,5}x^x+7log_2\left(0,5x^2\right)+2^{2+log_2(x-7)}+10=0\end{cases}$ имеет ровно 3 различных решения.

Решение.

ОДЗ: $\begin{cases}x>0,\\ x>7,\end{cases}$ следовательно, $x>7$.

На данном множестве второе уравнение системы с помощью несложных преобразований может быть сведено к исследованию более простого уравнения:

$2x\,log_{0,5}x+7log_2 0,5+7log_2 x^2+2^2\cdot 2^{log_2(x-7)}+10=0$,

$2x\,log_{0,5}x-7+14log_2 x+4(x-7)+10=0$,

$2x\,log_{0,5}x-14log_{0,5}x+4(x-7)+3=0$,

$2(x-7)log_{0,5}x+4(x-7)+3=0$,

$(x-7)\cdot\left(2log_{0,5}x+4\right)=-3$, $(x-7)(4-2log_2 x)=-3$,

$4-2log_2 x=\dfrac{-3}{x-7}$.

Рассматривая графики данных функций (см. рисунок 69), мы видим, что при $x>7$ они могут иметь только одну точку пересечения, располагающуюся на интервале (8; 9). Этот факт легко доказать и аналитически, если представить исследуемое уравнение в виде: $4-2log_2 x+\dfrac{3}{x-7}=0$, и рассмотреть функцию

$f(x)=4-2log_2 x+\dfrac{3}{x-7}$.

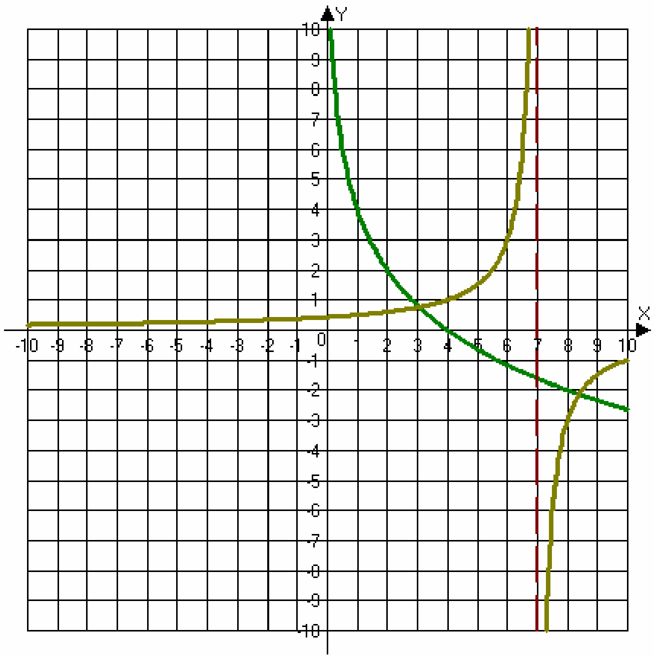


Рисунок 69

На исследуемом промежутке функция $f(x)$ является непрерывной. $f'(x)=\dfrac{-2}{x\ln 2}-\dfrac{3}{(x-7)^2}$; $f'(x)<0,\ \forall x\in(7;+\infty)$. Следовательно, функция является убывающей на данном промежутке. Так как $f(8)=7-2\log_2 8=7-6=1>0$, $f(9)=5{,}5-2\log_2 9<0$, то на интервале (8; 9) найдется только одна точка x_0, в которой функция $f(x)$ обращается в нуль.

Таким образом, остается доказать, что при $x\in(8;9)$ первое уравнение имеет ровно три решения.

$$9y^3+2(3y+1)^2-y-2=x\left(y^3+2y^2+2y\right)\Leftrightarrow$$
$$9y^3+18y^2+12y+2-y-2=x\left(y^3+2y^2+2y\right)\Leftrightarrow$$
$$9y^3+18y^2+11y=x\left(y^3+2y^2+2y\right)\Leftrightarrow$$
$$\left[\begin{array}{l} y=0, \\ 9y^2+18y+11=x\left(y^2+2y+2\right). \end{array}\right.$$
$$9y^2+18y+11=x\left(y^2+2y+2\right)\Leftrightarrow 9\left(y^2+2y+2\right)-7=x\left(y^2+2y+2\right)\Leftrightarrow$$
$$9-\frac{7}{y^2+2y+2}=x;\ \text{т. к.}\ \ y^2+2y+2>0,\forall y\in R.$$

Рассматривая функцию $g(y)=9-\dfrac{7}{y^2+2y+2}$, стоящую в правой части уравнения, мы замечаем, что $D(g)=R$, $g'(y)=\dfrac{7(2y+2)}{\left(y^2+2y+2\right)^2}$, $D(g')=R$, $g'(y)=0\Leftrightarrow y=-1$, $g'(y)<0$ при $y<-1$; $g'(y)>0$ при $y>-1$.

Таким образом, функция $g(y)$ является убывающей на промежутке $(-\infty;-1]$, возрастающей на промежутке $[-1;+\infty)$; в точке $y = -1$ функция достигает своего наименьшего значения: $g(-1) = 2$; более того, прямая $y = -1$ является осью симметрии графика функции (так как $g(y) = 9 - \dfrac{7}{(y+1)^2+1}$), следовательно, каждое свое значение (большее, чем 2), функция принимает ровно 2 раза.

Остается только доказать, что $x_0 \in (8;9)$ входит во множество значений функции $g(y)$. Заметим, что

$$(y+1)^2 \geq 0, \forall y \in R;\ (y+1)^2+1 \geq 1, \forall y \in R;\ 0 < \frac{1}{(y+1)^2+1} \leq 1, \forall y \in R;$$

$0 > \dfrac{-7}{(y+1)^2+1} \geq -7, \forall y \in R$; $9 > 9 - \dfrac{7}{(y+1)^2+1} \geq 2, \forall y \in R$; т.е . $E(g(y))=[2;9)$.

Таким образом, для данного значения x_0, являющегося решением второго уравнения системы, первое уравнение системы будет иметь три решения: $y_1 = 0$, $y_2 < -1$, $y_3 > -1$. Следовательно, система будет иметь ровно три различных решения, что и требовалось доказать.

Пример 9.51 Решите уравнение $f(g(x)) + g(f(x)) = 32$, если известно, что $f(x) = 0{,}5x^2 - 2x + 12$ и $g(x) = \begin{cases} 20, & x \geq 5, \\ 0{,}5 \cdot 2^x + \dfrac{8}{6-x}, & x < 5. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим сначала функцию $f(x)$.

$D(f) = R$, $f'(x) = x - 2$, $f'(x) > 0,\ x > 2$; $f'(x) < 0,\ x < 2$; $f'(x) = 0,\ x = 2$.

Следовательно, функция возрастает на промежутке $[2; +\infty)$, убывает на промежутке $(-\infty; 2]$ и в точке $x = 2$ принимает свое наименьшее значение, т.е. $f(x) \geq f(2) = 10,\ \forall\ x \in R$ и, согласно способу задания функции $g(x)$, $g(f(x)) = 20,\ \forall\ x \in R$. Таким образом,

$$f(g(x)) + g(f(x)) = 32 \quad \Leftrightarrow \quad f(g(x)) + 20 = 32 \quad \Leftrightarrow \quad f(g(x)) = 12 \quad \Leftrightarrow$$

$$0{,}5g^2(x) - 2g(x) + 12 = 12 \quad \Leftrightarrow \quad g^2(x) - 4g(x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} g(x) = 0, \\ g(x) = 4. \end{array}\right.$$

Значит, $x < 5$. Так как на этом промежутке $0{,}5 \cdot 2^x + \dfrac{8}{6-x} > 0$, то остается исследовать уравнение $0{,}5 \cdot 2^x + \dfrac{8}{6-x} = 4$. Это можно сделать двумя способами: графически (как в примере 9.50) и аналитически.

Применим второй способ. Рассмотрим функцию $\varphi(x)=0{,}5\cdot 2^x+\dfrac{8}{6-x}$.

$\varphi'(x)=0{,}5\cdot 2^x\cdot ln2+\dfrac{8}{(6-x)^2}$ и является положительной на рассматриваемом промежутке, следовательно, функция $\varphi(x)$ является возрастающей и каждое свое значение принимает только один раз.

Нетрудно заметить, что $\varphi(2)=4$. Следовательно, $x=2$.

Ответ: 2.

Пример 9.52 Для чисел $a_1, a_2, ..., a_{31}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n),\ \ n=1, 2, ..., 30.$ Найдите a_7-a_4, если $a_{31}=0$, а

$$f(x)=\begin{cases}4^x+3^{-\frac{4}{x+2}}-7, & x\le -4;\\ \dfrac{28}{x+4}-4, & x>-4.\end{cases}$$

Решение.

$$\begin{cases}a_{31}=0,\\ a_{31}=f(a_{30})\end{cases} \Rightarrow \quad f(a_{30})=0. \quad f(x)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}4^x+3^{-\frac{4}{x+2}}-7=0,\\ x\le -4,\end{cases}\\ \begin{cases}\dfrac{28}{x+4}-4=0,\\ x>-4.\end{cases}\end{array}\right.$$

Рассмотрим функцию $\varphi(x)=4^x+3^{-\frac{4}{x+2}}-7,\quad D(\varphi)=R\backslash\{-2\},$

$\varphi'(x)=4^x\cdot ln4+3^{-\frac{4}{x+2}}\cdot ln3\cdot\dfrac{4}{(x+2)^2},\quad D(\varphi')=R\setminus\{-2\},\ \ \varphi'(x)>0,\ \ \forall x\in R\setminus\{-2\},$

следовательно, данная функция является строго возрастающей на всей области определения. На интересующем нас промежутке $(-\infty;-4]$, который целиком входит в область определения, $\varphi(x)$ будет строго возрастающей, причем, $-6=0+1-7<\varphi(x)\le\varphi(-4)=4^{-4}+3^2-7=4^{-4}+2<3,\quad 4^{-4}+2>0.$

Так непрерывная строго возрастающая на промежутке функция принимает на этом промежутке каждое свое значение только один раз, и обращается в нуль на интервале, на концах которого она принимает значения разных знаков, то для доказательства того, что на данном промежутке функция $\varphi(x)$ обращается в нуль, причем только один раз, достаточно подобрать значение $x\le -4,$ где $\varphi(x)<0$.

Заметим, что $\varphi(-6)=4^{-6}+3-7=4^{-6}-4<0$, следовательно, существует, притом единственное значение $x_0\in(-6;-4)$: $\varphi(x_0)=0$.

Таким образом, $3 > f(x) > -6, \ \forall x \in (-\infty; -4]$ и на данном промежутке существует только одна точка $x_0 \in (-6; -4)$: $f(x_0) = 0$.

Рассмотрим функцию $ш(x) = \frac{28}{x+4} - 4, \ D(ш) = R \backslash \{-4\}, \ ш'(x) = -\frac{28}{(x+4)^2}$, $D(\psi') = R \setminus \{-4\}, \ ш'(x) < 0, \ \ \forall x \in R \backslash \{-4\}$, следовательно, функция $\psi(x)$ является убывающей на всей области и определения, в том числе, и на рассматриваемом промежутке $(-4; +\infty)$.

Нетрудно заметить, что $\psi(x) > -4, \quad \forall x \in (-4; +\infty); \quad \psi(x) = 0 \Leftrightarrow$ $\frac{28}{x+4} - 4 = 0 \Leftrightarrow x + 4 = 7 \Leftrightarrow x = 3$.

Таким образом, $f(x) > -4, \ \forall x \in (-4; +\infty)$ и на данном промежутке только $f(3) = 0$.

Следовательно, $f(x) > -6$ на всей области определения и обращается в нуль только в двух точках: x_0, $x_0 \in (-6; -4)$ и 3.

Таким образом, $f(a_{30}) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a_{30} = x_0, \\ x_0 \in (-6; -4), \end{cases} \\ a_{30} = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(a_{29}) = x_0, \\ x_0 \in (-6; -4), \end{cases} \\ f(a_{29}) = 3. \end{array} \right.$

Выше мы доказали, что $f(x) > -6$ на всей области определения, $a_{29} = f(a_{28})$, следовательно, $a_{29} > -6$.

Учитывая способ задания функции, необходимо рассмотреть два случая: а) $a_{29} \in (-6; -4]$ и б) $a_{29} \in (-4; +\infty)$.

Если $a_{29} \in (-6; -4]$, то $f(a_{29}) = \varphi(a_{29}) > \varphi(-6) = 4^{-6} - 4 > -4 > x_0$; если $a_{29} \in (-4; +\infty)$, то $f(a_{29}) = \psi(a_{29}) > -4 > x_0$. Значит, $f(a_{29}) \neq x_0$, $x_0 \in (-6; -4)$, и случай $a_{30} = x_0$ не является возможным.

Таким образом, $a_{30} = 3$ и $f(a_{29}) = 3$. Так как на промежутке $(-\infty; -4]$ $f(x) < 3$, то $a_{29} \in (-4; +\infty)$ и $f(a_{29}) = 3 \Leftrightarrow$ $\frac{28}{a_{29}+4} - 4 = 3 \Leftrightarrow a_{29} + 4 = 4 \Leftrightarrow a_{29} = 0$.

Далее, рассуждая аналогично, получаем, что $a_{28} = 3, \ a_{27} = 0, \dots, a_7 = 0, \ \dots, \ a_4 = 3$.

Следовательно, $a_7 - a_4 = -3$.

Ответ: - 3.

Пример 9.53 Найдите все значения α, при каждом из которых неравенство $\frac{\alpha - \left(5tgx + \sqrt{3}ctgx - 5\right)}{\left(4\sqrt{x(\pi - 4x)} - 5 - \alpha\right)} \leq 0$ не имеет решений.

Решение.

Прежде всего, отметим область допустимых значений неравенства:

$$\begin{cases} x(\pi-4x)\ge 0, \\ 4\cdot\sqrt{x(\pi-4x)}-5-\alpha\ne 0, \\ x\ne \dfrac{\pi}{2}\cdot n,\ n\in Z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\left[0;\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 4\cdot\sqrt{x(\pi-4x)}-5-\alpha\ne 0, \\ x\ne \dfrac{\pi}{2}\cdot n,\ \ n\in Z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right], \\ 4\cdot\sqrt{x(\pi-4x)}-5-\alpha\ne 0. \end{cases}$$

Заметим, что если ввести две вспомогательные функции $\varphi(x)=5tgx+\sqrt{3}ctgx-5$ и $\psi(x)=4\cdot\sqrt{x(\pi-4x)}-5$, то неравенство примет вид: $\dfrac{\alpha-\varphi(x)}{\psi(x)-\alpha}\le 0$ или $\dfrac{\alpha-\varphi(x)}{\alpha-\psi(x)}\ge 0$.

Исследуем функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на их общей области определения, т.е. при $x\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

$$\psi'(x)=4\cdot\frac{1}{2}\cdot(x(\pi-4x))^{-\frac{1}{2}}\cdot(\pi-8x)=\frac{2\cdot(\pi-8x)}{\sqrt{x(\pi-4x)}},\qquad D(\psi')=\left(0;\frac{\pi}{4}\right);$$

$\psi'(x)=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=\dfrac{\pi}{8};\ \ \psi'(x)>0,\ x\in\left(0;\ \dfrac{\pi}{8}\right);\quad \psi'(x)<0,\ \ x\in\left(\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{4}\right)$. Следовательно, функция $\psi(x)$ возрастает на промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{8}\right]$, убывает на промежутке $\left[\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{4}\right]$, в точке $x=\dfrac{\pi}{8}$ функция достигает свое наибольшее значение $\psi\left(\dfrac{\pi}{8}\right)=4\cdot\sqrt{\dfrac{\pi}{8}\left(\pi-4\cdot\dfrac{\pi}{8}\right)}-5=4\cdot\sqrt{\dfrac{\pi^2}{16}}-5=\pi-5$ на промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]$.

Для упрощения процесса исследования функции $\varphi(x)=5tgx+\sqrt{3}ctgx-5$ на промежутке $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right]$, введем новую переменную: $t=tgx$, $t\in(0;1]$; задача сведется к исследованию функции $g(t)=5t+\dfrac{\sqrt{3}}{t}-5$ на промежутке $(0;1]$.

$g'(t)=5-\dfrac{\sqrt{3}}{t^2}=\dfrac{5t^2-\sqrt{3}}{t^2}=\dfrac{5\left(t-\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}\right)\left(t+\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}\right)}{t^2}$, определена на $(0;1]$, обращается в нуль в точке $t=\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}<1$ (точка $t=-\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}$ не принадлежит исследуемому промежутку), $\quad g'(t)<0,\ \ t\in\left(0;\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{5}}\right),\ \ g'(t)>0,\ t\in\left(\sqrt{\dfrac{\sqrt{3}}{5}};1\right]$. Следовательно, функция $g(t)$ убывает на $\left(0;\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{5}}\right]$, возрастает на $\left[\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{5}};1\right]$, в точке $t=\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{5}}$ функция $g(t)$ достигает своё наименьшее значение на $(0;1]$

$$g\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{5}}\right)=5\cdot\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{5}}+\sqrt{3}\cdot\sqrt{\frac{5}{\sqrt{3}}}-5=\sqrt{\frac{25\sqrt{3}}{5}}+\sqrt{\frac{15}{\sqrt{3}}}-5=\sqrt{5\sqrt{3}}+\sqrt{5\sqrt{3}}-5=2\sqrt[4]{75}-5.$$

Это же значение будет наименьшим значением функции $\varphi(x)=5tgx+\sqrt{3}ctgx-5$ на промежутке $\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$ и достигается оно соответственно в точке $x=arctg\left(\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{5}}\right)$.

$2\sqrt[4]{75}-5>\pi-5$, следовательно, $\psi(x)<\varphi(x),\ \forall\ x\in\left(0;\frac{\pi}{4}\right]$.

$$\frac{\alpha-\varphi(x)}{\alpha-\psi(x)}\geq 0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\alpha-\psi(x)>0,\\ \alpha-\varphi(x)\geq 0,\end{cases}\\ \begin{cases}\alpha-\psi(x)<0,\\ \alpha-\varphi(x)\leq 0\end{cases}\end{array}\right. \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\psi(x)<\alpha,\\ \varphi(x)\leq\alpha,\end{cases}\\ \begin{cases}\psi(x)>\alpha,\\ \varphi(x)\geq\alpha.\end{cases}\end{array}\right.$$

Следовательно, данное неравенство не будет иметь решений ни при одном значении *x*, тогда и только тогда, когда $\max\limits_{\left(0;\frac{\pi}{4}\right]}\psi(x)\leq\alpha<\min\limits_{\left(0;\frac{\pi}{4}\right]}\varphi(x)$, т.е. когда $\pi-5\leq\alpha<2\sqrt[4]{75}-5$.

Ответ: $\pi-5\leq\alpha<2\sqrt[4]{75}-5$.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите производные функций:

а) $y=\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}$; б) $y=\frac{(1+2x)^2}{\sqrt{x}}$; в) $y=\frac{1}{x^2}\cdot arccos\,x$; г) $y=x^2\cdot e^{-\frac{1}{x}}$;

д) $y=\left(x+\frac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^3$; е) $y=ln\left(e^x+\sqrt{1+e^{2x}}\right)$; и) $y=ln\left(tg\frac{x}{2}\right)-cos\,x\cdot ln(tgx)$.

2. Найдите уравнение касательной к графику функции $y=x^2+x+1$ в точке с абсциссой $x_0=0$.

3. Найдите сумму координат точки пересечения касательной, проведенной к графику функции $f(x)=x-x^2-9$ в его точке с абсциссой $x_0=-2$, с осью абсцисс.

4. Найдите уравнение касательной к графику функции $y = \frac{1}{x}$, проходящей через точку M (-1; 1).

5. Найдите все точки графика функции $y = \frac{x+2}{x+1}$, в каждой из которых касательная к этому графику образует угол 135 ° с положительным направлением оси OX.

6. Под каким углом график функции $y = tg2x$ пересекает ось абсцисс в точке $x_0 = 0$?

7. Найдите угол между графиками функций $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ и $g(x) = \sqrt{x}$ в точках их пересечения.

8. На графике функции $y = x^3 - 3x^2 + 1$ найдите точку, в которой касательная параллельна прямой $2y - x + 2 = 0$.

9. На графике функции $y = x^2$ найдите точку, касательная в которой перпендикулярна прямой $x + 2y + 1 = 0$.

10. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке A(6; 3). Найдите $f'(6)$.

11. Касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке A(2; -4) параллельна прямой, проходящей через точку B(4; 5) и начало координат. Найдите значение выражения $f(2) + f'(2)$.

12. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (- 6; 7). На рисунке 70 изображен график производной этой функции. К графику функции провели все касательные, параллельные прямой $y = 3 - 2x$ (или совпадающие с ней). Укажите количество точек графика функции, в которых проведены эти касательные.

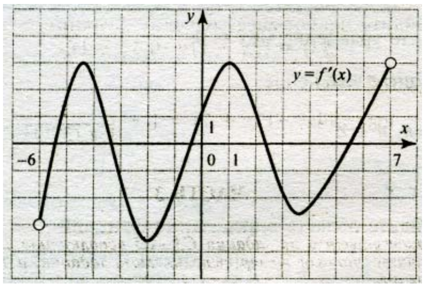


Рисунок 70

13. Прямая, которая касается графика функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой 3, проходит через начало координат и точку A (4; -2). Найдите $f(3)$.

14. Найдите максимум функции $y = -\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 12x - 29\frac{2}{3}$.

15. На рисунке 71 изображен график производной функции $y = f(x)$.

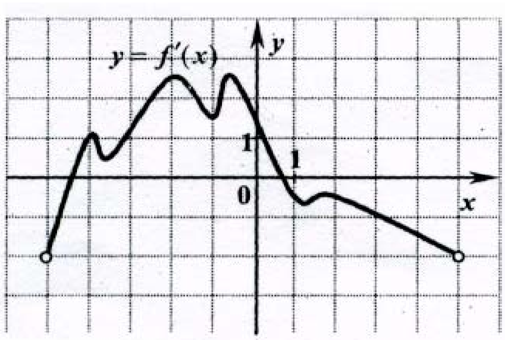


Рисунок 71

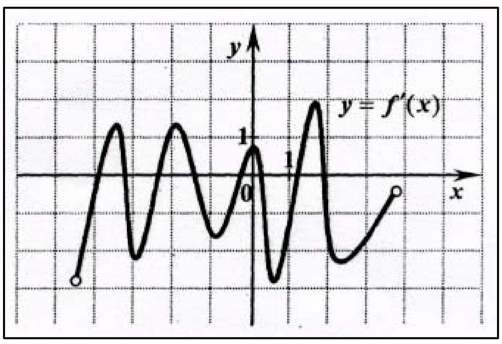


Рисунок 72

Найдите число точек экстремума этой функции.

16. На рисунке 72 изображен график производной функции $y = f(x)$. Найдите число промежутков возрастания этой функции.

17. Укажите количество промежутков убывания функции $f(x) = 2sin^2 x - cos 2x$, заданной на отрезке [0; π].

18. Найдите наименьшее значение функции $g(x) = log_{\frac{1}{3}}(6x - x^2)$.

19. Найдите наибольшее целое значение функции $y = \frac{7}{3}\sqrt{4cos^2 x + 4cos x + 8}$.

20. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \frac{x}{3} - \frac{x+1}{x+4} + x^2 + \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2$.

21. Найдите наименьшее значение функции $f(x) = \left|\sqrt{4 - x^2} - 4\right| + \sqrt{4 - x^2} + 4{,}5x^2 - x^3$.

22. Найдите точки минимума функции $f(x) = 15x^4 - 26x^3 + \frac{12 - 12cos^2(\pi x)}{sin^2(\pi x)} \cdot x^2$.

23. Найдите множество значений функции $y = cos 2x$, заданной на отрезке $[-arctg 3;\ arctg 0{,}5]$.

24. Найдите наибольшее значение периметра прямоугольника со сторонами, параллельными осям координат, и с диагональю OM, где O - начало координат, а M - точка на графике функции $y = 9ln(11 - 2x) + 2x;\ 2{,}2 \le x \le 3{,}3$.

25. В прямоугольном параллелепипеде две грани с общим ребром покрасили в фиолетовый цвет, а остальные грани - в белый. Площадь всех белых граней равна 1080. Белые грани, имеющие по два общих ребра с фиолетовыми гранями, являются квадратами. Найдите наименьшее значение суммы длин всех ребер параллелепипеда, исключая общее ребро фиолетовых граней.

26. Найдите длины сторон прямоугольника наибольшего периметра, вписанного в полуокружность радиуса R так, что одна из его сторон лежит на диаметре окружности.

27. Требуется разметить на земле участок ABCDFGHM площадью 2800 м^2, состоящий из трех прямоугольных частей и имеющий форму, изображенную на рисунке 73, где DC = 20 м, HM= 25 м, AM= 60 м и BC ≥ 30 м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин KL, GL и BC, при которых периметр является наименьшим.

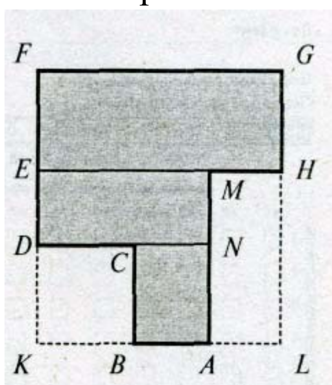


Рисунок 73

28. Тело движется прямолинейно по закону $S(t) = t^4 - t^3 + 2$ (расстояние измеряется в метрах). Вычислите скорость движения в момент времени *t*=2*c.*

29. Укажите первообразную функции $f(x) = 2x + \dfrac{1}{x}$ на промежутке (0; + ∞): 1) $F(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2}$;2) $F(x) = x^2 - sin\,x$;3) $F(x) = x^2 + ln\,x$;4) $F(x) = 2x + ln\,x$.

30. Для функции $f(x) = 2cos\,x$ укажите первообразную *F*(*x*), график которой проходит через точку $M\left(\dfrac{\pi}{2}; 0\right)$:

1) $F(x) = 2sin\,x + 2$; 2) $F(x) = cos\,2x + 1$; 3) $F(x) = sin\,2x$; 4) $F(x) = 2sin\,x - 2$.

31. Найдите все первообразные для функции $f(x) = (4 - 5x)^7$.

32. Найдите все первообразные для функции $f(x) = cos\,5x \cdot cos\,3x$.

33. Найдите: а) $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} cos^2 \dfrac{x}{2} dx$; б) $\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \dfrac{x}{\sqrt{1-x}} dx$; в) $\int\limits_0^3 | 2 - x | dx$; г) $\int\limits_{-1}^2 || x| - 1 | dx$.

34. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями: $y = 3sin\,x, y = sin\,3x$, если $0 \le x \le \pi$.

35. Найдите площадь фигуры, ограниченной: графиком функции $y = 2x^2 - 8x$, касательной к этому графику в точке (2; - 8) и осью ординат.

36. При каком наименьшем целом значении *a* функция $f(x) = e^{2x} \cdot x^2 + ae^{2x} + 3$ возрастает на всей числовой прямой?

37. При каком наименьшем натуральном значении параметра *n* уравнение $\dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^2 - 12x = n$ будет иметь ровно один корень ?

38. При каких значениях *a* функция $y = lg(x + 7) + lg(a - 3x)$ имеет максимум в точке с абсциссой, равной - 2 ?

39. При каком наименьшем положительном значении *a* функция $y = sin\left(25x + \dfrac{a\pi}{100}\right)$ имеет минимум в точке $x_0 = \pi$?

40. При каких значениях *p* уравнение $cos\,2x + \dfrac{p}{sin\,x} = -7$ имеет решение ?

41. Найдите все значения *a,* для которых при каждом *x* из промежутка (2; 4], значение выражения $log_2^2\,x + 3log_2\,x - 7$ не равно значению выражения $a\,log_2\,x$.

42. Докажите, что система уравнений имеет единственное решение:

$$\begin{cases} 16x^3+40x^2+29x+6=0, \\ log_{13+4x}\left(5y+10+\dfrac{3}{x}\right)-7=y(5+12x)+\sqrt{\dfrac{9}{x}-8x(2x+1)+15}\cdot log_7 y \end{cases}$$

43. Решите уравнение $f(g(x))+g(1+f(x))=33$, если известно, что $f(x)=x^2-6x+15$ и $g(x)=\begin{cases} 18, & x\ge 4; \\ 3^x+\dfrac{12}{5-x}, & x<4. \end{cases}$

44. Для чисел $a_1,\ a_2,\ \ldots,a_{40}$ верны равенства $a_{n+1}=f(a_n),\ n=1,2,\ldots,39$. Найдите a_5-a_8, если известно, что $a_{40}=0$, а $f(x)=\begin{cases} 3^x+4^{-\frac{6}{x+4}}-11, & x\le -7; \\ \dfrac{91}{x+7}-7, & x>-7. \end{cases}$

45. Найдите все значения параметра α, при каждом из которых неравенство $\dfrac{\alpha-\left(2\sqrt[5]{x^4}+\sqrt{5}\cdot\sqrt[5]{x^{-4}}-5\right)}{\left(3cos\sqrt{x-1}-4\right)-\alpha}\le 0$ не имеет решений.

Ответы: **1)** а) $-\dfrac{1}{x^2}$; б) $\dfrac{-1+4x+12x^2}{2x\sqrt{x}}$; в) $-\dfrac{2arccos\,x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$; г) $\dfrac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$; д) $3\left(x+\dfrac{1}{x}-2\sqrt{x}\right)^2\cdot\left(1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)$; е) $e^{-\frac{1}{x}}\cdot(2x+1)$; и) $sin\,x\cdot ln(tgx)$; **2)** $y=x+1$; **3)** 1; **4)** $y=\dfrac{2}{1+\sqrt{2}}-\dfrac{x}{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}$; $y=\dfrac{2}{1-\sqrt{2}}-\dfrac{x}{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}$; **5)** (0; 2);(-2;0); **6)** $arctg2$; **7)** $arctg\sqrt{\dfrac{5}{2}(\sqrt{5}+1)}$; **8)** $\left(\dfrac{6+\sqrt{42}}{6};-\dfrac{11\sqrt{42}}{36}-1\right)$; $\left(\dfrac{6-\sqrt{42}}{6};\dfrac{11\sqrt{42}}{36}-1\right)$; **9)** (1; 1); **10)** 0,5; **11)** -5,25; **12)** 5; **13)** -1,5; **14)** 5; **15)** 2; **16)** 4; **17)** 1; **18)** -2; **19)** 9; **20)** $8\dfrac{2}{3}$; **21)** 4; **22)** 0,8; **23)** [-0,8; 1]; **24)** 15+18 ln 6; **25)** 180; **26)** $\dfrac{4R}{\sqrt{5}}$; $\dfrac{R}{\sqrt{5}}$; **27)** 280 м; 70 м; 70 м; 30 м; **28)** 20м/с; **29)** 3; **30)** 4; **31)** $-\dfrac{(4-5x)^8}{40}+C$; **32)** $\dfrac{1}{16}sin8x+\dfrac{1}{4}sin2x+C$; **33)** а) $\dfrac{\pi+2}{4}$; б) $-\dfrac{5\sqrt{2}}{6}+\dfrac{4}{3}$; в) 2,5; г) 1,5; **34)** $5\dfrac{1}{3}$; **35)** $5\dfrac{1}{3}$; **36)** 1; **37)** 35; **38)** 9; **39)** 50; **40)** [-6; 0) $\cup$ (0; 6]; **41)** (- ∞; -3]$\cup$(1,5; +∞); **43)** 1; **44)** 6; **45)** $\alpha\in\left[-1;\ 2\sqrt[4]{20}-5\right)$.

10 Планиметрия

Как показывает опыт, ошибки, допускаемые абитуриентами при решении геометрических заданий на ЕГЭ и вступительных испытаниях в вузы, достаточно типичны и прогнозируемы. Для того, чтобы избежать их, Вам необходимо осуществить полное повторение всего курса геометрии в следующей последовательности: планиметрия, стереометрия, векторная алгебра. Это можно сделать, опираясь либо на школьные учебники, либо используя справочники и пособия по математике ([2], [32], [36], [41], [83], [89], [116], [138]).

Помните, что решение любой геометрической задачи рекомендуется начинать с чертежа и анализа исходных данных. Наиболее рациональным является метод решения геометрической задачи "с конца", когда Вы проверяете, чего Вам не хватает, чтобы найти искомую величину. Не забывайте, что, вводя неизвестные, можно свести решение геометрической задачи к решению алгебраической.

Повторяя *планиметрию,* обратите особое внимание на свойства медиан, биссектрис, высот треугольников (особенно на свойство высоты, опущенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу), соотношения между элементами параллелограмма, свойства касательных и секущих, условия существования вписанных и описанных около многоугольников окружностей, признаки подобия и свойства подобных фигур, свойства правильных n - угольников. Необходимо ***выучить все формулы*** (смотрите, например, [36] или [138]) для определения периметров и площадей плоских фигур и их частей, радиусов вписанных и описанных окружностей. Не забудьте теоремы синусов и косинусов. Наиболее подробное изложение методов решения задач по планиметрии (в том числе, и повышенной степени сложности) имеется в [2], [23], [24], [38], [41], [42], [50], [67] – [69], [85], [86], [88], [114], [119], [120], [130], [133], [146], [150], [156].

Пример 10.1 В равнобедренном треугольнике сумма внутренних углов с одним из внешних составляет $\frac{4}{3}\pi$. Определите углы треугольника.

Решение.

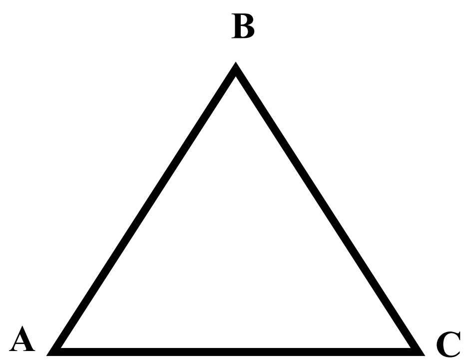


Рисунок 74

Пусть дан треугольник ABC, в котором AB = BC (см. рисунок 74). Так как в треугольнике ABC $\angle A + \angle B + \angle C = \pi$, то величина указанного внешнего угла равна $\frac{\pi}{3}$, и, следовательно, это может быть только внешний угол при вершине B (внешние углы к углам при основании равнобедренного треугольника всегда - тупые). В таком случае $\angle B = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$; $\angle A = \angle C = = \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6}$.

Ответ: $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}$.

Пример 10.2 В прямоугольный треугольник с катетами *a* и *b* вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, BC = *a*, AC = *b*, CLKM - квадрат (см. рисунок 75).

Пусть сторона квадрата - *x*, тогда CL = KL = KM = CM = *x*, BL = *a* - *x*, MA = *b* - *x*.

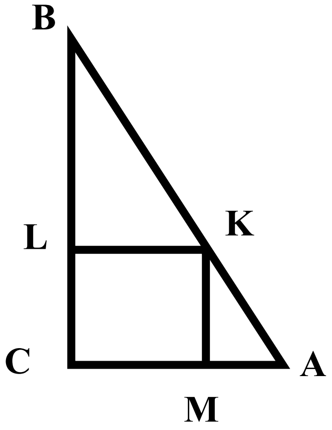


Рисунок 75

Нетрудно заметить, что Δ BLK подобен Δ KMA, следовательно, $\frac{BL}{KM} = \frac{LK}{MA} = \frac{BK}{KA}$. Откуда следует, что $\frac{a-x}{x} = \frac{x}{b-x}$. Решая данное уравнение, получаем, что $x = \frac{ab}{a+b}$ и, соответственно, периметр квадрата равен $\frac{4ab}{a+b}$.

Ответ: $\frac{4ab}{a+b}$.

Пример 10.3 В треугольнике ABC из вершины B проведена медиана ВД, длиной 2. Найдите площадь треугольника ABC, если $\angle$ ВДА = 30 °, AB = 2.

Решение.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\angle BAC.$$

По условию задачи АВ = ВД, следовательно, треугольник АВД - равнобедренный и $\angle$ВАД = $\angle$ВДА = 30°, а $\angle$АВД = 120°.

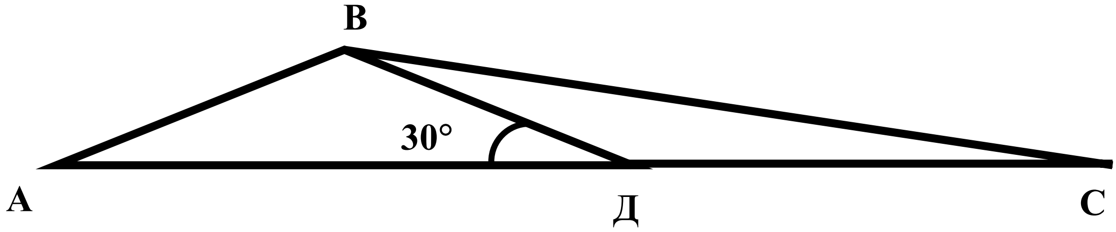


Рисунок 76

$\angle$ВАС = $\angle$ВАД = 30° (см. рисунок 76). ВД - медиана треугольника АВС, значит, АС = 2 АД.

Используя *теорему синусов* для треугольника АВД, получаем: $\frac{АД}{\sin\angle АВД} = \frac{ВД}{\sin\angle ВАД}$, т.е. $\frac{АД}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{2}}$ и, следовательно, АД= $2\sqrt{3}$; АС= $4\sqrt{3}$.

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = 2\sqrt{3}$.

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Пример 10.4 В прямоугольном треугольнике медианы, проведенные к катетам, равны $\sqrt{52}$ и $\sqrt{73}$. Найдите гипотенузу.

Решение.

Пусть в треугольнике АВС $\angle$С = 90°, ВК и АМ - медианы (см. рисунок 77), ВК = $\sqrt{52}$, АМ = $\sqrt{73}$.

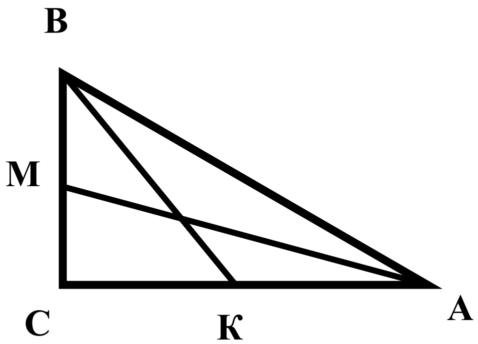


Рисунок 77

Введем обозначения для длин сторон треугольника АВС: АС = b, ВС= a, АС = c. Так как ВК и АМ - медианы, то СК = $\frac{b}{2}$, СМ = $\frac{a}{2}$.

Используя *теорему Пифагора* для прямоугольных треугольников АВС, КВС, АМС, приходим к системе:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ \left(\dfrac{b}{2}\right)^2+a^2=52, \\ b^2+\left(\dfrac{a}{2}\right)^2=73. \end{cases}$$

Складывая второе и третье уравнения данной системы, получаем:

$$\begin{cases} a^2+b^2=c^2, \\ \dfrac{5}{4}\left(a^2+b^2\right)=125. \end{cases}$$ Следовательно, $a^2+b^2=100$ и $c=10$.

Ответ: 10.

Пример 10.5 Основание равнобедренного треугольника равно $4\sqrt{2}$, а медиана боковой стороны 5. Найти длины боковых сторон.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC AB = BC, CM и AK - медианы боковых сторон. Тогда CM = AK = 5, AC = $4\sqrt{2}$ (см. рисунок 78).

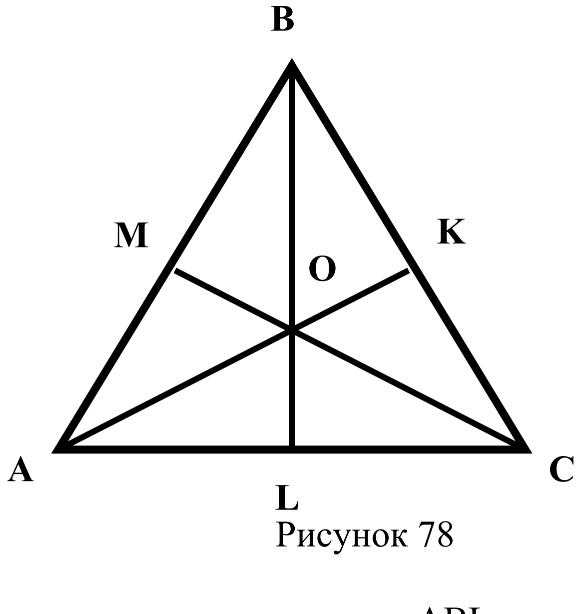


Рисунок 78

Из прямоугольного треугольника ABL, используя теорему Пифагора, получаем, что $AB=\sqrt{AL^2+BL^2}$. Так как *все медианы треугольника пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся в отношении 2: 1, считая от вершин треугольника,* то BL = 3 OL. $AL=\dfrac{1}{2}AC=2\sqrt{2}$.

Следовательно, $AB=\sqrt{8+9\cdot OL^2}$.

Аналогично, учитывая, что AK - медиана, получаем, что $AO=\dfrac{2}{3}AK=\dfrac{10}{3}$.

В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой, следовательно, треугольник AOL - прямоугольный и $OL^2 = AO^2 - AL^2 = \frac{100}{9} - 8 = \frac{28}{9}$. Таким образом, $AB = \sqrt{8 + 9 \cdot \frac{28}{9}} = 6$.

Ответ: 6 .

Пример 10.6 Найдите биссектрисы острых углов прямоугольного треугольника с катетами 18 и 24.

Решение.

Пусть в прямоугольном треугольнике ABC $\angle C = 90°$, BK и AM - биссектрисы, AC = 18, BC = 24 (см. рисунок 79).

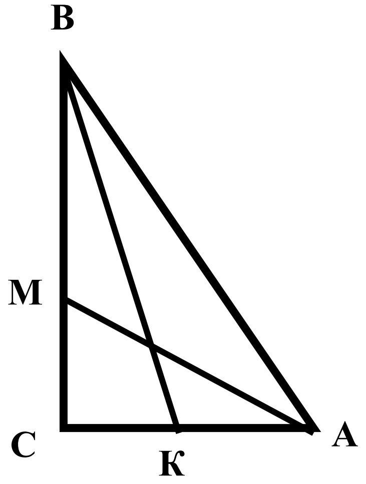


Рисунок 79

Используя теорему Пифагора, получаем:

$AB=\sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{(18)^2 + (24)^2} = \sqrt{3^2 \cdot 6^2 + 4^2 \cdot 6^2} = 6\sqrt{3^2 + 4^2} = 30$.

Так как *биссектриса любого угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные длинам прилежащих сторон,* то

$\frac{CK}{KA} = \frac{BC}{BA}$, т.е. $\frac{CK}{KA} = \frac{24}{30} = \frac{4}{5}$, следовательно, $CK = \frac{4}{9}AC = 8$.

$\frac{CM}{MB} = \frac{AC}{AB}$, т.е. $\frac{CM}{MB} = \frac{18}{30} = \frac{3}{5}$, следовательно, $CM = \frac{3}{8}CB = 9$.

Учитывая, что треугольники AMC и CBK являются прямоугольными, получаем:

$BK = \sqrt{BC^2 + CK^2} = \sqrt{(24)^2 + 8^2} = 8\sqrt{9+1} = 8\sqrt{10}$,

$AM = \sqrt{AC^2 + CM^2} = \sqrt{(18)^2 + 9^2} = 9\sqrt{4+1} = 9\sqrt{5}$.

Ответ: $8\sqrt{10}$, $9\sqrt{5}$.

Пример 10.7 В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12 : 5, боковая сторона равна 60 . Найдите основание треугольника.

Решение.

Пусть в треугольнике АВС АВ = ВС = 60, ВД - высота, О - центр вписанного круга и $\frac{ВО}{ОД} = \frac{12}{5}$ (см. рисунок 80).

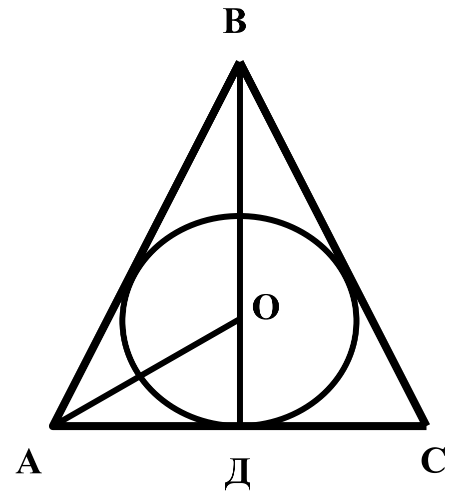


Рисунок 80

Так как *центр вписанного в треугольник круга совпадает с точкой пересечения биссектрис треугольника,* то АО - биссектриса $\angle$А. Следовательно, в треугольнике АВД: $\frac{АВ}{АД} = \frac{12}{5}$. Учитывая, что АВ = 60, получаем: АД = 25.

ВД - высота равнобедренного треугольника, проведенная к основанию, значит, ВД - медиана, т.е. АС = 2 АД = 50.

Ответ: 50.

Пример 10.8 В равнобедренном треугольнике MNR с основанием MR высоты MA и NB пересекаются в точке C, лежащей внутри треугольника MNR. Найдите площадь треугольника MNC, если MN=17, а площадь треугольника MNR равна 68.

Решение.

Известно, что высоты треугольника пересекаются в одной точке**,** следовательно, если мы проведем прямую через точки R и C до пересечения со стороной MN в точке F, то RF – высота (см. рисунок 81).

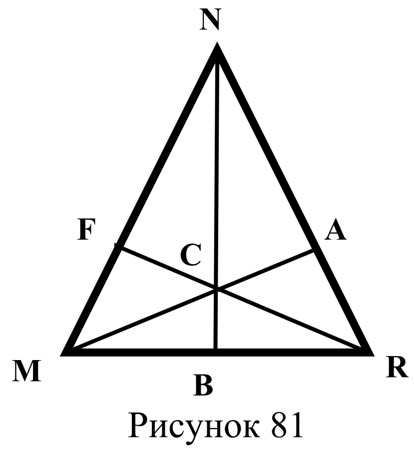


Рисунок 81

$S_{\Delta MNC} = \frac{1}{2} MN \cdot FC$, MN = 17, следовательно, необходимо определить FC.

Треугольник MNR – равнобедренный с основанием MR, следовательно, NR = MN = 17, NB – высота и биссектриса.

$S_{\Delta MNR} = \frac{1}{2} MN \cdot FR = \frac{17}{2} \cdot FR$, т.к. по условию задачи $S_{\Delta MNR} = 68$, получаем уравнение $\frac{17}{2} FR = 68$, из которого следует, что FR = 8.

Треугольник FNR – прямоугольный, с гипотенузой NR, NR = 17, FR = 8, следовательно, $NF = \sqrt{NR^2 - FR^2} = \sqrt{17^2 - 8^2} = \sqrt{(17-8)(17+8)} = 3 \cdot 5 = 15$.

Так как NC – биссектриса в треугольнике FNR, то $\frac{FC}{CR} = \frac{FN}{NR} = \frac{15}{17}$, следовательно, $FC = \frac{15}{32} FR = \frac{15}{32} \cdot 8 = \frac{15}{4}$ и $S_{\Delta MNC} = \frac{17}{2} \cdot \frac{15}{4} = \frac{255}{8} = 31{,}875$.

Ответ: 31, 875.

Пример 10.9 Найти площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если известно, что проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16.

Решение.

Пусть в треугольнике ABC $\angle C = 90°$, СД - высота, опущенная на гипотенузу, АД = 9, ВД = 16 (см. рисунок 82).

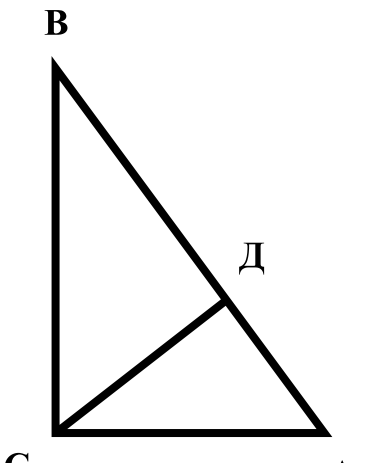


Рисунок 82

Радиус вписанной в треугольник ABC окружности (смотрите *формулы для определения радиуса вписанной окружности:* $r = \frac{2S}{a+b+c}$) можно определить по формуле: $r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{AB + BC + AC}$.

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot СД$, AB = АД + ДВ = 25.

Из *свойств высоты, опущенной из вершины прямого угла прямоугольного треугольника на гипотенузу* ($h^2 = a' \cdot b',\quad a^2 = a' \cdot c,\quad b^2 = b' \cdot c$; где a', b' - проекции катетов a и b на гипотенузу c), следует: $СД^2 = АД \cdot ДВ$, $АС^2 = АД \cdot АВ$, $ВС^2 = ВД \cdot АВ$. Т.е. СД = 12, АС = 15, ВС = 20.

Таким образом, $S_{\Delta ABC} = 150,\ P_{\Delta ABC} = 60,\ r = 5$.

И, следовательно, площадь вписанного круга равна 25 π.

Ответ: 25 π.

Пример 10.10 В прямоугольный треугольник вписана окружность. Точка касания окружности делит один из катетов на отрезки 6 и 10, считая от вершины прямого угла. Найдите площадь треугольника.

Решение.

Пусть в треугольнике АВС $\angle C = 90°$, точки касания вписанной в данный треугольник окружности - К, М и L соответственно, КС = 6, КВ = 10 (см. рисунок 83).

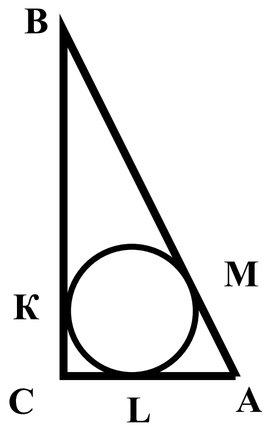


Рисунок 83

Из свойств касательных, проведенных к окружности из одной точки (*отрезки касательных, проведенных к окружности из одной точки, равны*), следует: ВК = ВМ = 10, КС = CL = 6, LA = АМ.

Пусть LA = АМ = x. В этом случае ВС = 16, АВ = (10 + x), АС = (6 + x).

Из теоремы Пифагора следует, что $16^2 + (6 + x)^2 = (10 + x)^2$. Решая данное уравнение, получаем, что $x = 24$. Таким образом, АС = 30, АВ = 34.

Следовательно, $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AC = 240$.

Ответ: 240 .

Пример 6.11 В равнобедренном треугольнике длины боковых сторон равны b, угол при вершине α. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

Решение.

Пусть в треугольнике АВС АВ = ВС = b, $\angle ABC = \alpha$ (см. рисунок 84).

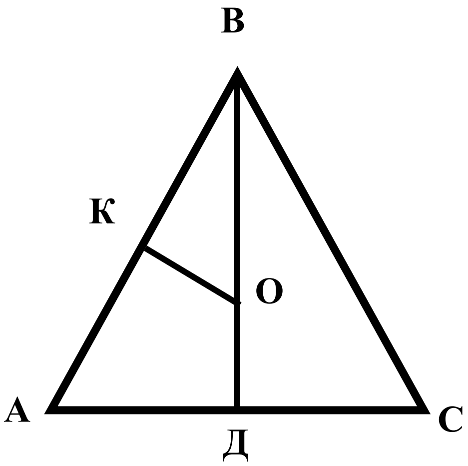


Рисунок 84

Радиус окружности, описанной около треугольника ABC, можно найти несколькими способами.

I способ. Известно (смотрите *теорему синусов*), что

$\dfrac{\text{AB}}{sin\angle\text{BCA}} = \dfrac{\text{BC}}{sin\angle\text{BAC}} = \dfrac{\text{AC}}{sin\angle\text{ABC}}$ =2*R*, где *R* - радиус описанной около треугольника ABC окружности. AB = *b*, $\angle$BCA = $\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}$, следовательно, $R=\dfrac{b}{2sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{2}\right)}=\dfrac{b}{2cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

II способ. *Центр описанной окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника.*

Пусть КО и ВД - соответствующие серединные перпендикуляры (см. рисунок 84). В этом случае, ВО = *R*. Треугольник КВО - прямоугольный, КВ = $\dfrac{b}{2}$, $\angle$КВО = $\dfrac{\alpha}{2}$, ВК = $\text{ВО}\cdot cos\angle\text{КВД}$, следовательно, $\dfrac{b}{2}=R\cdot cos\dfrac{\alpha}{2}$ и $R=\dfrac{b}{2cos\dfrac{\alpha}{2}}$.

III способ. Опираясь на *теорему косинусов,* получаем:

$\text{AC}^2=\text{AB}^2+\text{BC}^2-2\cdot\text{AB}\cdot\text{BC}\cdot cos\angle\text{ABC}=b^2+b^2-2b^2cos\alpha$, откуда следует, что $\text{AC}^2=2b^2(1-cos\alpha)=4b^2sin^2\dfrac{\alpha}{2}$, т.е. $\text{AC}=2b\,sin\dfrac{\alpha}{2}$. Так как $R=\dfrac{\text{AB}\cdot\text{BC}\cdot\text{AC}}{4S_{\Delta\ \text{ABC}}}$ (*смотрите формулы для определения радиуса описанной около треугольника окружности:* $R=\dfrac{abc}{4S}$), $S_{\Delta\,\text{ABC}}=\dfrac{1}{2}AB\cdot BC\cdot sin\alpha=\dfrac{1}{2}b^2\,sin\alpha$, то $R = \dfrac{b \cdot b \cdot 2b\,sin\dfrac{\alpha}{2}}{4 \cdot \dfrac{1}{2} b^2\, sin\alpha} = \dfrac{b\,sin\dfrac{\alpha}{2}}{sin\alpha} = \dfrac{b\,sin\dfrac{\alpha}{2}}{2\,sin\dfrac{\alpha}{2} \cdot cos\dfrac{\alpha}{2}} = \dfrac{b}{2\,cos\dfrac{\alpha}{2}}$. Площадь описанного около данного треугольника круга будет равна $\dfrac{b^2\pi}{4\,cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Ответ: $\dfrac{b^2\pi}{4\,cos^2\dfrac{\alpha}{2}}$.

Пример 10.12 Величина одного из углов параллелограмма равна 60°, а меньшая диагональ $2\sqrt{31}$. Длина перпендикуляра, проведенного из точки пересечения диагоналей к большей стороне, равна $\dfrac{\sqrt{75}}{2}$. Найдите длины сторон и большую диагональ параллелограмма.

Решение.

Пусть в параллелограмме АВСД (см. рисунок 85) $\angle$А = 60°, ОК $\perp$ АД, ВД = $2\sqrt{31}$, ОК = $\dfrac{\sqrt{75}}{2}$. Построим ВМ $\perp$ АД.

Нетрудно заметить, что треугольник ВМД подобен треугольнику ОКД, причем коэффициент подобия равен 2, так как диагонали параллелограмма пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам. В таком случае ВМ = $\sqrt{75}$.

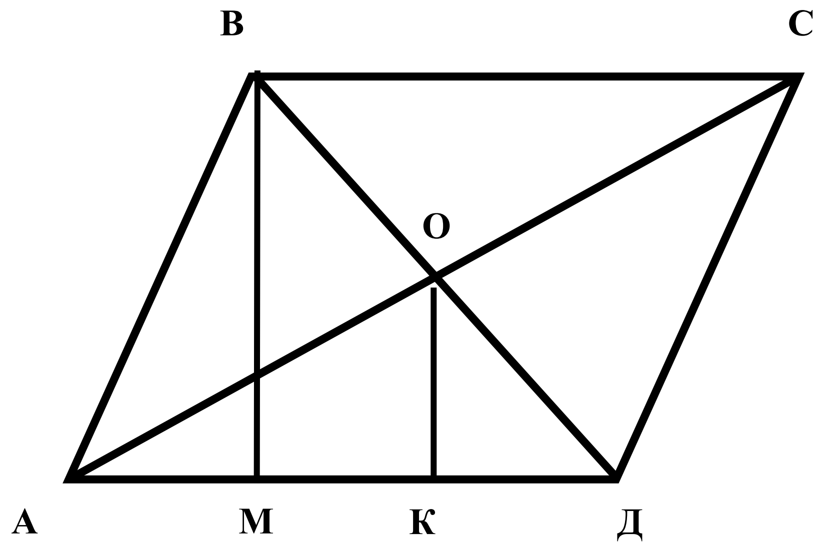


Рисунок 85

Треугольник АВМ - прямоугольный, следовательно,

$$AB = \frac{BM}{sin 60°} = \frac{\sqrt{75}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 10, \text{ AM} = AB \cdot cos 60° = 10 \cdot \frac{1}{2} = 5.$$

Треугольник ВМД - также прямоугольный. Применяя теорему Пифагора, получаем: $МД^2 + ВМ^2 = ВД^2$, откуда следует, что $МД = \sqrt{124 - 75} = 7$ и АД = АМ + МД = 12.

Так как для параллелограмма АВСД справедливо соотношение:

$$2(АВ^2 + АД^2) = АС^2 + ВД^2$$

(смотрите *свойства параллелограмма:* $2(a^2 + b^2) = d_1^2 + d_2^2$), то

$$АС^2 = 2(АВ^2 + АД^2) - ВД^2 = 2(100 + 144) - 124 = 364, \text{ т.е. } АС = 2\sqrt{91}.$$

Большую диагональ параллелограмма можно было также найти, используя теорему косинусов для треугольника АСД.

Ответ: АВ = СД = 10, АД = ВС = 12, АС = $2\sqrt{91}$.

Пример 10.13 Периметр ромба равен 48, а сумма длин диагоналей равна 26. Найдите площадь ромба.

Решение.

Пусть в ромбе АВСД (см. рисунок 86) АВ = ВС = СД = ДА = a; тогда: $4a = 48$ и $a = 12$.

Пусть АС = d_1, ВД = d_2, тогда: $d_1 + d_2 = 26$.

$S_{АВСД} = \frac{1}{2} АС \cdot BD = \frac{1}{2} d_1 \cdot d_2$ (смотрите *формулы для нахождения площади ромба*).

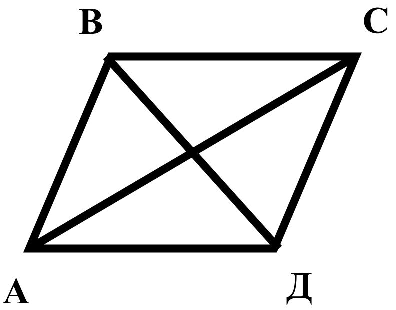


Рисунок 86

Учитывая, что для ромба $4a^2 = d_1^2 + d_2^2$ (смотрите *свойства ромба),* получаем систему: $\begin{cases} d_1^2 + d_2^2 = 4 \cdot 12^2, \\ d_1 + d_2 = 26. \end{cases}$ Заметим, что, для получения решения задачи, нам нет необходимости находить значения d_1, d_2 отдельно, а достаточно найти их произведение.

Так как $d_1^2+d_2^2=d_1^2+2d_1 \cdot d_2+d_2^2-2d_1 \cdot d_2=(d_1+d_2)^2-2d_1 \cdot d_2$, то система приобретает вид: $\begin{cases}(d_1+d_2)^2-2d_1 \cdot d_2=24^2,\\ d_1+d_2=26.\end{cases}$

Применяя метод подстановки, получаем: $26^2-2d_1 \cdot d_2=24^2$, откуда следует, что $d_1 \cdot d_2=50$. Следовательно, площадь ромба равна 25.

Ответ: 25.

Пример 10.14 Диагонали трапеции АВСД с основаниями ВС и АД пересекаются в точке О. Площадь треугольника ВОС равна 6, ВО = 2, ДО = 4. Найдите площадь трапеции.

Решение.

Из вершин А и С трапеции опустим перпендикуляры на диагональ ВД. Основания перпендикуляров обозначим М и К (см. рисунок 87).

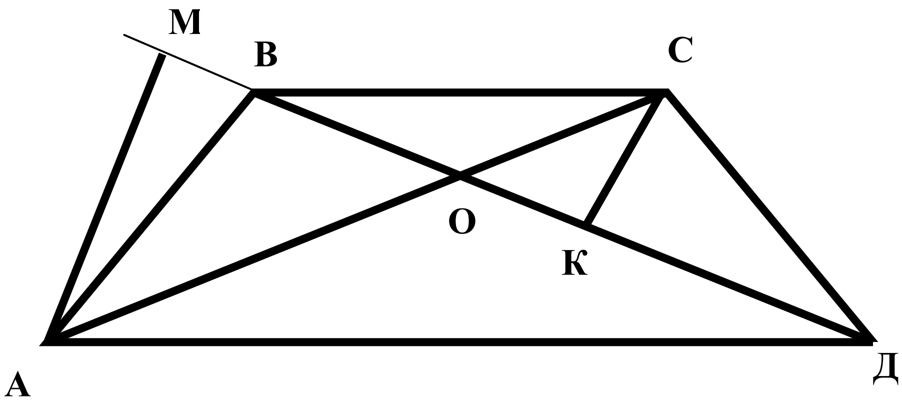


Рисунок 87

$S_{\text{АВСД}}=S_{\text{АВО}}+S_{\text{ВОС}}+S_{\text{СОД}}+S_{\text{АОД}}$.

Треугольники ВОС и АОД подобные (по трем углам), причем коэффициент подобия $\kappa=2$, т.к. ОД = 2 ВО; следовательно, $S_{\text{АОД}}=4S_{\text{ВОС}}=24$.

Так как $S_{\text{ВОС}}=6$ и $S_{\text{ВОС}}=\frac{1}{2}\text{ВО}\cdot\text{СК}$, где ВО = 2, то СК = 6, и, следовательно, $S_{\text{СОД}}=\frac{1}{2}\text{ОД}\cdot\text{СК}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 6=12$.

Аналогично, так как $S_{\text{АОД}}=24$ и $S_{\text{АОД}}=\frac{1}{2}\text{ОД}\cdot\text{АМ}$, где ОД = 4, то АМ = 12, и, следовательно, $S_{\text{АВО}}=\frac{1}{2}\text{ВО}\cdot\text{АМ}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 12=12$.

Таким образом, $S_{\text{АВСД}}=12+6+12+24=54$.

Ответ: 54.

Пример 6.15 Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна $32\sqrt{3}$. Определите боковую сторону трапеции, если острый угол при основании равен 60°.

Решение.

Пусть в трапеции АВСД АВ = СД, $\angle$ВАД = 60° (см. рисунок 88).

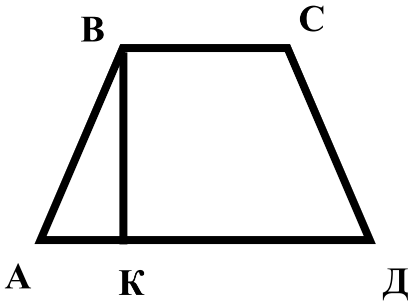


Рисунок 88

Построим ВК $\perp$ АД. $S_{\text{АВСД}} = \dfrac{\text{ВС} + \text{АД}}{2} \cdot \text{ВК}$ (смотрите *формулы для определения площади трапеции*).

В трапецию можно вписать окружность, значит: АВ + СД = ВС + АД (смотрите *необходимые и достаточные условия существования вписанной в четырехугольник окружности*).

Учитывая, что АВ = СД, имеем: ВС + АД = 2 АВ. Треугольник АВК - прямоугольный, $\angle$ВАК = $\angle$ВАД = 60°, значит, ВК = $\text{АВ} \cdot \sin 60° = \dfrac{\text{АВ}\sqrt{3}}{2}$.

Таким образом, $S_{\text{АВСД}} = \dfrac{\text{ВС} + \text{АД}}{2} \cdot \text{ВК} = \dfrac{2\text{АВ}}{2} \cdot \dfrac{\text{АВ}\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\text{АВ}^2\sqrt{3}}{2}$.

Так как $S_{\text{АВСД}} = 32\sqrt{3}$, получаем уравнение: $\dfrac{\text{АВ}^2\sqrt{3}}{2} = 32\sqrt{3}$, откуда следует, что АВ = 4.

Ответ: 4.

Пример 10.16 Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её диагональ, равная 10, образует с основанием угол, косинус которого равен $\dfrac{\sqrt{2}}{10}$.

Решение

Пусть АВСД – данная трапеция, где АВ = СД, АС = ВД = 10, О – точка пересечения диагоналей АС и ВД (см. рисунок 89).

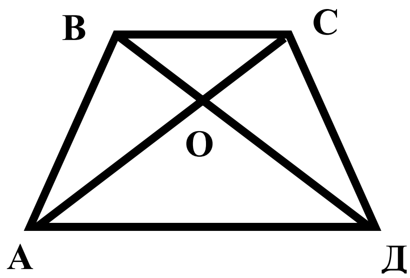


Рисунок 89

Известно, что площадь любого выпуклого четырехугольника можно определить по формуле: $S=\frac{1}{2}d_1 d_2 \cdot sin\,\alpha$, где d_1, d_2 - диагонали четырехугольника, α - угол между ними.

Следовательно, $S_{АВСД}=\frac{1}{2}АС\cdot ВД\cdot sin\angle АОД$, где $\angle АОД=\pi - 2\angle ОДА$.

$$sin\angle АОД=sin(2\angle ОДА)=2\,sin\angle ОДА\cdot cos\angle ОДА=2\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{10}=\frac{7}{25}.$$

Таким образом, $S_{АВСД}=\frac{1}{2}\cdot 10\cdot 10\cdot\frac{7}{25}=14.$

Ответ: 14.

Пример 10.17 Вычислите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44 , а непараллельные равны 17 и 25 .

Решение.

Пусть АВСД - трапеция, в которой АВ =25, ВС =16, СД = 17, АД = 44.

1 способ решения. Построим ВК $\perp$ АД и СМ $\perp$ АД (см. рисунок 90).

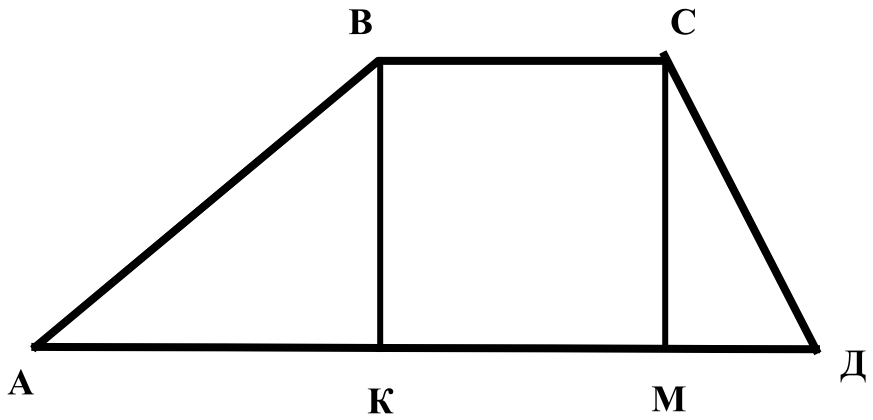


Рисунок 90

Пусть АК = x, тогда ВС = КМ = 16, МД = АД - КМ - АК = (28 - x).

Треугольники АВК и СМА - прямоугольные, следовательно,

$ВК^2=АВ^2-АК^2=25^2-x^2$; $СМ^2=СД^2-МД^2=17^2-(28-x)^2$.

Так как ВК = СМ, то получаем уравнение: $25^2-x^2=17^2-(28-x)^2$. Из которого следует, что $x=20$ и ВК = 15.

Площадь трапеции АВСД, таким образом, равна $\frac{44+16}{2}\cdot 15=450$.

2 способ решения. Построим ВЕ параллельно СД и ВК перпендикулярно АД (см. рисунок 91).

ВЕ = СД = 17, ВС = ЕД = 16, АЕ = АД - ЕД = 28.

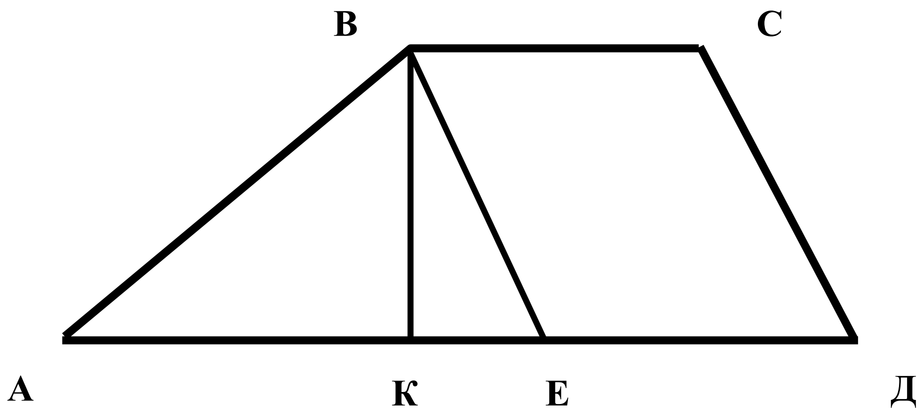


Рисунок 91

Заметим, что $S_{\text{Д ABE}} = \dfrac{1}{2}\text{AE}\cdot\text{BK}$ и $S_{\text{Д ABE}} = \sqrt{p(p-\text{AB})(p-\text{BE})(p-\text{AE})}$,

где $p = \dfrac{\text{AB}+\text{BE}+\text{AE}}{2}$ (*формула Герона*).

Так как $p = 35$, то $\dfrac{1}{2}\cdot 28\cdot\text{BK} = \sqrt{35\cdot(35-25)\cdot(35-17)\cdot(35-28)}$ и BK=15. Площадь трапеции АВСД будет равна 450 (см. 1 способ решения).

Ответ: 450 .

Пример 10.18 Найдите диагональ и боковую сторону равнобочной трапеции с основаниями 20 и 12, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

Решение.

Пусть АВСД - трапеция, в которой ВС = 12, АД = 20, АВ = СД, О - центр описанной около данной трапеции окружности (см. рисунок 92), ВК и СN - перпендикуляры, опущенные из вершин трапеции на большее основание.

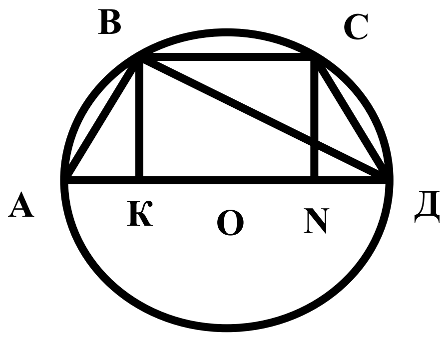


Рисунок 92

Тогда KN = BC = 12, $\text{AK} = \text{NД} = \dfrac{1}{2}(\text{АД} - \text{ВС}) = 4$, КД = АД - АК =16.

Так как АД - диаметр окружности, то треугольник АВД - прямоугольный (смотрите *свойства вписанных углов*), ВК - высота, опущенная из вершины прямого угла на гипотенузу, следовательно, $АВ^2 = АК \cdot АД$, $ВД^2 = КД \cdot АД$, откуда следует, что $АВ = 4\sqrt{5}$, $ВД = 8\sqrt{5}$.

Ответ: $АВ = 4\sqrt{5}$, $ВД = 8\sqrt{5}$.

Пример 10.19 Меньшая диагональ правильного шестиугольника равна $4\sqrt{3}$ см. Найдите длину описанной окружности.

Решение.

Пусть АВСДЕF - правильный шестиугольник, АС = $4\sqrt{3}$ см (см. рисунок 93).

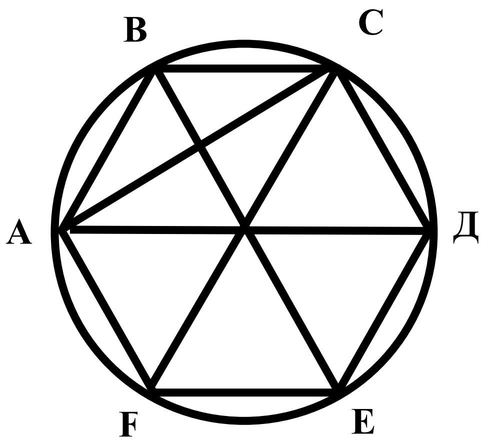


Рисунок 93

Известно, что для *правильных шестиугольников радиус описанной окружности равен длине стороны*, т.е. R = АВ = ВС = СД =ДЕ = ЕF = FА.

АД - диаметр, значит, АД = $2R$ и треугольник АСД - прямоугольный, следовательно, $АД^2 = АС^2 + СД^2$, т.е. $4R^2 = 48 + R^2$, откуда следует, что $R = 4$ и длина окружности, описанной около данного шестиугольника, равна 8π.

Ответ: 8π.

Пример 10.20 Окружность, вписанная в ромб АВСД, касается сторон АВ и ВС в точках М и Р, причем МР = ВР. Найдите периметр этого ромба, если радиус окружности равен $\sqrt{3}$.

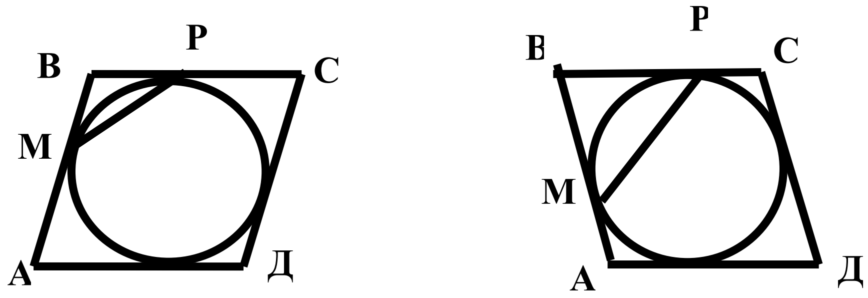
Решение.

Теоретически возможны два случая (см. рисунок 94).

Так как МВ = ВР (*свойства отрезков касательных, проведенных к окружности из одной точки*) и МР = ВР, по условию, то МВ = ВР = МР, т.е. треугольник МВР - равносторонний и $\angle$МВР =60°.

Следовательно, возможен только второй вариант.

Пусть сторона ромба - a, а радиус вписанной окружности - r. Известно, что высота ромба $h = 2\,r$.



1 вариант *2 вариант*

Рисунок 94

Учитывая, что площадь ромба можно найти, опираясь на формулы:

$S = a \cdot h = 2\ a \cdot r$ и $S = a^2 \cdot sin\alpha$, где α - острый угол ромба, получаем уравнение: $2\sqrt{3}a = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Откуда следует, что $\left[\begin{array}{l} a = 0, \\ a = 4. \end{array}\right.$

Так как $a \neq 0$, то $a = 4$, и периметр ромба равен 16.

Ответ: 16.

Пример 10.21 Правильный многоугольник $A_1A_2A_3...A_n$ вписан в окружность с радиусом 10. Найдите проекцию его диагонали A_3A_7 на диагональ A_1A_7, если внутренний угол этого многоугольника равен 150°.

Решение.

Определим число сторон данного многоугольника. С одной стороны, сумма всех внутренних углов любого выпуклого *n*-угольника равна 180°(*n* - 2).

С другой стороны, многоугольник - правильный, и его внутренний угол равен 150°, т. е. сумма всех его внутренних углов равна 150° *n*.

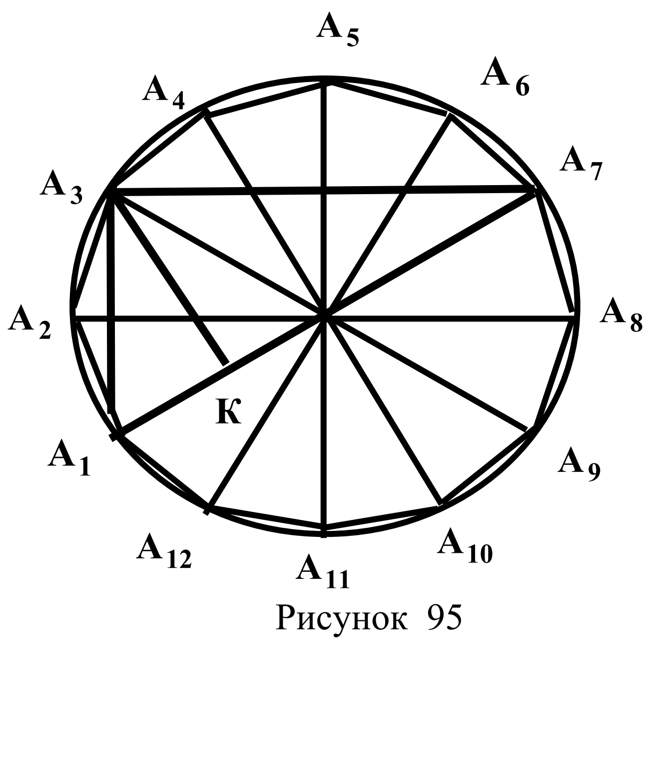


Рисунок 95

Приходим к уравнению: $180\,(n - 2) = 150\,n$, решая которое, получаем, что $n = 12$ (см. рисунок 95).

Опустим перпендикуляр A_3K на A_1A_7, тогда KA_7 - проекция A_3A_7 на A_1A_7. Нетрудно заметить, что A_1A_7 - диаметр окружности, описанной около данного 12 - угольника и, следовательно, $A_1A_7 = 2R = 20$. $\angle A_1A_3A_7$ - вписанный угол, опирающийся на диаметр, следовательно, он равен 90°, и треугольник $A_1A_3A_7$ - прямоугольный. Точки A_1, A_3, A_5, A_7, A_9, A_{11} являются вершинами правильного шестиугольника, который можно вписать в эту же окружность, следовательно, $A_1A_3 = R = 10$. Так как $A_1A_7 = 2A_1A_3$, то $\angle A_3A_7A_1 = 30°$, $A_3A_7 = A_1A_7\,cos\,30° = 10\sqrt{3}$ и $KA_7 = A_3A_7\,cos\,30° = 15$.

Ответ: 15.

Задания для самостоятельного решения

1. Точка на гипотенузе, равноудаленная от обоих катетов, делит гипотенузу на отрезки длиной 30 см и 40 см. Найдите катеты треугольника.

2. Основание равнобедренного треугольника равно 6. Медиана боковой стороны делит периметр в отношении 2 : 1. Найдите боковую сторону.

3. Катеты прямоугольного треугольника 30 и 40. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе.

4. В равнобедренном треугольнике с боковой стороной, равной 4 см, проведена медиана боковой стороны. Найдите основание треугольника, если медиана равна 3 см.

5. В треугольнике сумма двух сторон равна 14 см, а третья сторона делится биссектрисой противолежащего угла на отрезки, равные 3 см и 4 см. Найдите стороны треугольника.

6. Высота равнобедренного треугольника равна 20 см, а основание относится к боковой стороне как 4 : 3. Найдите радиус вписанного круга.

7. В равнобедренном треугольнике MNQ с основанием MQ высоты MA и NB пересекаются в точке C, причем MC=15, AC=12. Найдите площадь треугольника MNC.

8. Один из катетов прямоугольного треугольника равен 15, а проекция второго катета на гипотенузу равна 16. Найдите диаметр окружности, описанной около этого треугольника.

9. В равнобедренном треугольнике боковая сторона делится точкой касания с вписанной окружностью в отношении 5 : 8, считая от основания треугольника. Найдите основание треугольника, если радиус вписанной окружности равен 10 см.

10. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AC, равной 20 см, проведена медиана BM. Окружность, вписанная в треугольник ABM, касается медианы BM в точке P. Найдите катет BC, если BP : PM = 3 : 2.

11. В окружность радиуса R вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найдите площадь треугольника.

12. Периметр параллелограмма равен 90 см, острый угол содержит 60°. Диагональ параллелограмма делит его тупой угол на части в отношении 1:3. Найдите стороны параллелограмма.

13. В параллелограмме ABCD биссектриса угла А пересекает сторону ВС в точке К и прямую DC в точке L. Найдите периметр треугольника АВК, если AD = 10, KL = 7,5; CL = 6.

14. Найдите сторону ромба, зная, что его диагонали относятся как 1:2 и площадь ромба равна 12 см ^{2}.

15. В ромб, который делится своей диагональю на два равносторонних треугольника, вписана окружность с радиусом 2 см. Найдите сторону ромба.

16. В трапеции АВСД с основаниями ВС и АД диагонали пересекаются в точке О, причем АО = 3ОС. Площадь треугольника АОД равна 36. Найдите площадь трапеции.

17. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если её высота равна 3, а тангенс угла между диагональю и основанием равен 0,25.

18. Площадь равнобокой трапеции, описанной около круга, равна S. Найдите боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании равен 30 °.

19. В равнобокой трапеции большее основание равно 44, боковая сторона 17 и диагональ 39. Найдите площадь трапеции.

20. В равнобочной трапеции даны основания a = 21см, b = 9см и высота h = 8см. Найдите радиус описанного круга.

21. К окружности проведены касательные МА и МВ (А и В - точки касания). Найдите длину хорды АВ, если радиус окружности равен 20, а расстояние от точки М до хорды равно 9.

22. В окружность вписан правильный девятиугольник $A_1A_2A_3...A_9$ с диагональю A_1A_4, равной 12. В эту же окружность вписан правильный шестиугольник. Найдите радиус окружности, вписанной в шестиугольник.

23. Найдите сторону правильного восьмиугольника ABCDEFGH, если площадь треугольника ADG равна $4+3\sqrt{2}$.

24. В окружность вписаны равнобедренный остроугольный треугольник площади S = 42 и трапеция так, что её большее основание совпадает с диаметром окружности, а боковые стороны параллельны боковым сторонам треугольника. Средняя линия трапеции l = 7. Найдите высоту трапеции.

Ответы: **1)** 56; 42; **2)** 24; **3)** 25; **4)** $\sqrt{10}$; **5)** 6; 8; 7; **6)** 8; **7)** 270; **8)** 25; **9)** 30; **10)** 16; **11)** $\frac{R^2\sqrt{3}}{4}$; **12)** 30; 15; **13)** 13; **14)** $\sqrt{15}$; **15)** $\frac{8}{\sqrt{3}}$; **16)** 64; **17)** 36; **18)** $\sqrt{2S}$; **19)** 540; **20)** $\frac{85}{8}$; **21)** 24; **22)** 6; **23)** 2; **24)** 6.

11 Стереометрия

Приступать к повторению *стереометрии* рекомендуется после того, как Вы усвоили методы решения планиметрических задач, так как любая стереометрическая задача в итоге сводится к решению планиметрической. Изучая теорию, обратите особое внимание на признаки параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, правила определения углов между прямыми (в том числе, и скрещивающимися), плоскостями, угла между прямой и плоскостью, научитесь находить расстояния от точки до прямой и плоскости. Повторите все свойства многогранников и тел вращения, обратите особое внимание на свойства параллелепипедов, правильных многогранников, сферы, шара, цилиндра и конуса. Изучите свойства пирамид, имеющих равные боковые ребра (ребра которых наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом) или равные апофемы боковых граней (боковые грани которых наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом). Этот вопрос очень хорошо изложен в [116]. ***Выучите все формулы*** для нахождения площадей поверхностей и объемов тел и их частей ([36]). Необходимо также научиться строить сечения тел плоскостями. Подробное изложение методов решения задач по стереометрии (в том числе, и повышенной степени сложности) имеется в [2], [11], [35], [38], [42], [50], [67], [68], [83], [88], [93], [107], [116], [121], [130], [133], [136], [138], [146], [150], [153], [156] – [158] и др.

Пример 11.1 Высота правильной треугольной пирамиды равна 2, двугранные углы при основании равны 30°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

Решение.

Пусть АВСД - правильная пирамида, ДО - высота этой пирамиды (см. рисунок 96). Из *свойств правильных пирамид* следует, что основание высоты пирамиды попадает в центр основания пирамиды, которое является правильным треугольником. Т.е. точка О - центр вписанной и описанной окружностей, и, следовательно, - точка пересечения медиан, высот и биссектрис (смотрите *свойства правильных треугольников*).

Пусть АК и ВМ - высоты треугольника АВС (они проходят через точку О и являются одновременно медианами и биссектрисами), тогда на основании *теоремы о трех перпендикулярах* (ДК - наклонная, КО - её проекция и КО $\perp$ ВС) ДК $\perp$ ВС и $\angle$ДКО - линейный угол, соответствующий двугранному углу между плоскостями ДВС и АВС, т. е. $\angle$ДКО = 30°.

$$S_{\text{бок.пов.АВСД}} = 3S_{\text{ВДС}} = 3 \cdot \frac{1}{2}\text{ВС} \cdot \text{ДК}.$$

Треугольник ОДК - прямоугольный, $\angle$ДКО = 30°, ДО = 2, следовательно, ДК = 4 , КО = ДК$\cdot$ cos 30°= $4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$ (или ОК=ДО $\cdot$ ctg 30° = 2 $\cdot \sqrt{3}$).

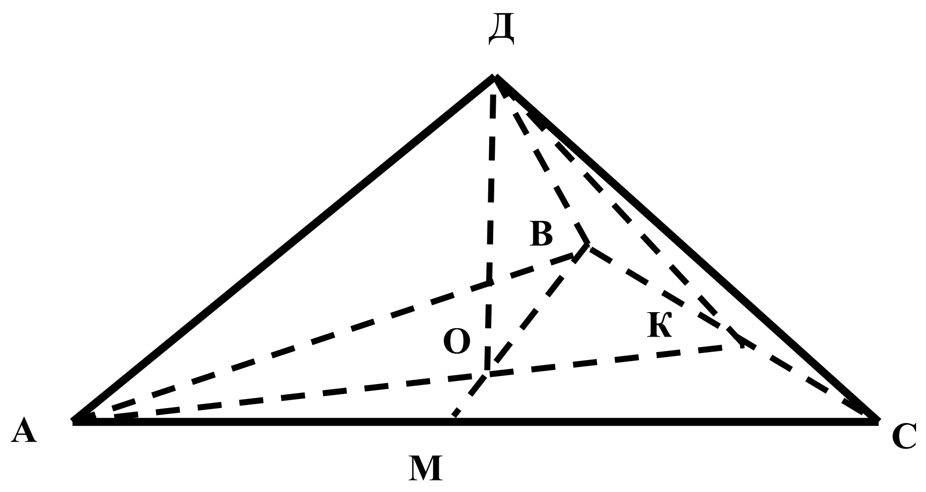


Рисунок 96

ОК - радиус вписанной в треугольник АВС окружности, *из свойств правильных треугольников* (смотрите формулу для определения радиуса вписанной окружности: $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$) следует, что ВС = ОК $\cdot 2\sqrt{3}$ = $2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{3}$ =12.

Таким образом, площадь боковой поверхности пирамиды АВСД равна: $3 \cdot \dfrac{1}{2} \cdot 4 \cdot 12 = 72$.

Ответ: 72.

Пример 11.2 В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник со стороной, равной 2. Одна из боковых граней также равносторонний треугольник и перпендикулярна основанию. Найдите объем пирамиды.

Решение.

Пусть АВСД - пирамида, в которой АВС - равносторонний треугольник, АДВ - равносторонний треугольник и грань АДВ перпендикулярна плоскости АВС. Пусть ДК - высота грани АДВ (т.е. апофема пирамиды) (см. рисунок 97).

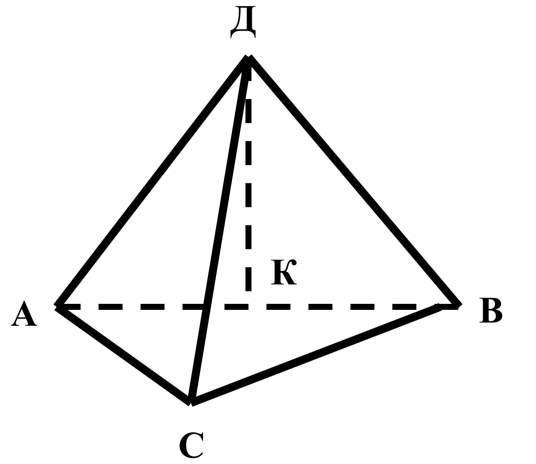


Рисунок 97

Так как грань АДВ перпендикулярна грани АВС и ДК - перпендикуляр к АВ - линии пересечения данных граней (плоскостей), то ДК - перпендикуляр к плоскости АВС и, следовательно, является высотой данной пирамиды. В таком случае, $V_{\text{АВСД}} = \frac{1}{3} S_{\text{АВС}} \cdot \text{ДК}$. $S_{\text{АВС}} = \frac{1}{2}\text{АВ} \cdot \text{АС} \cdot sin 60° = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Треугольник АДК - прямоугольный, $\angle$ДАК = 60°, АД = ДВ = АВ =2, следовательно, $\text{ДК} = \text{АД} \cdot sin 60° = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$. Таким образом, $V_{\text{АВСД}} = \frac{1}{3}\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 1$.

Ответ: 1.

Пример 11.3 В основании пирамиды лежит треугольник со стороной, равной a, и противолежащим ей углом 135°. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом 60°. Найдите высоту пирамиды.

Решение.

Пусть АВСД - пирамида, где $\angle$АВС =135 °, АС = a, ребра АД, ДВ и ДС наклонены к плоскости основания под углом 60° (см. рисунок 98).

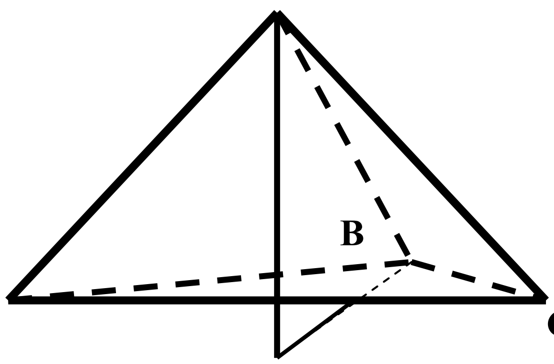


Рисунок 98

Так как *ребра* АД, ВД, СД пирамиды АВСД по условию *наклонены к плоскости основания под одним и тем же углом,* то основание высоты ДО пирамиды попадает в центр окружности, описанной около основания. Так как в основании лежит тупоугольный треугольник, то центр окружности, описанной около этого треугольника, лежит вне данного треугольника. $\angle$ДВО = 60°.

Учитывая, что для любого треугольника радиус описанной около этого треугольника окружности можно найти из формулы: $\frac{a}{sin\text{A}} = \frac{b}{sin\text{B}} = \frac{c}{sin\text{C}} = 2R$ (смотрите теорему синусов), получаем, что

$$R = \frac{\text{AC}}{2sin\angle\text{ABC}} = \frac{a}{2sin135°} = \frac{a}{2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

Треугольник ОДВ - прямоугольный, $\angle$ДВО = 60°, ОВ = R. Следовательно, ДО = ОВ $\cdot tg\, 60° = \frac{a}{\sqrt{2}}\sqrt{3} = a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Ответ: $a\sqrt{\frac{3}{2}}$.

Пример 11.4 Боковое ребро МС пирамиды МАВС (см. рисунок 99) перпендикулярно плоскости основания АВС и равно 4. Плоскость, параллельная основанию, проходит через середину высоты пирамиды и пересекает боковые ребра в точках A_1, B_1 и C_1. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $MA_1B_1C_1$, если АС = ВС = 5, а высота СК треугольника АВС равна 3.

Решение.

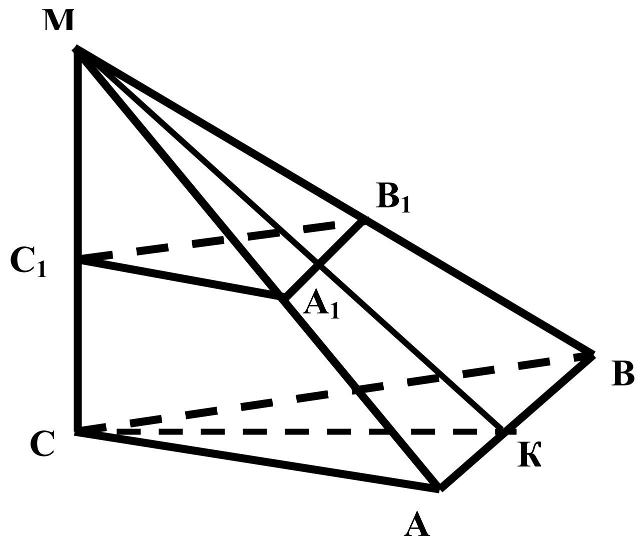


Рисунок 99

Так как при *пересечении двух параллельных плоскостей третьей линии пересечения параллельны,* то $C_1A_1 \parallel CA, C_1B_1 \parallel CB, A_1B_1 \parallel AB$. Пирамида МАВС в таком случае подобна пирамиде $MA_1B_1C_1$, коэффициент подобия равен 2, площади боковых поверхностей в этом случае относятся как 4 : 1.

Т. е. $S_{\text{бок.пов.}MA_1B_1C_1} = \frac{1}{4}S_{\text{бок.пов.MABC}}$.

$S_{\text{бок.пов.MABC}} = S_{\text{CMA}} + S_{\text{CMB}} + S_{\text{BMA}}$.

Треугольники СМА и СМВ равны, как прямоугольные треугольники, имеющие по два равных катета (СМ - общий, АС = ВС), следовательно, $S_{\text{CMA}} = S_{\text{CMB}} = \frac{1}{2}\text{CM} \cdot \text{CA}$.

МК $\perp$ АВ на основании теоремы о трех перпендикулярах (МК - наклонная, СК - проекция и СК $\perp$ АВ по условию), следовательно, $S_{\text{AMB}} = \frac{1}{2}\text{AB} \cdot \text{MK}$.

Треугольник СМК - прямоугольный, $\angle$МСК = 90°, СМ = 4, СК = 3, следовательно, $MK = \sqrt{16+9} = 5$.

Так как треугольник АВС - равнобедренный (АС = ВС), то СК - высота, медиана и биссектриса, т.е. АВ = 2АК. Треугольник АСК - прямоугольный, $\angle$СКА =90°, АС =5, СК = 3, значит, $AC^2 = AK^2 + CK^2$, откуда следует, что $AK = \sqrt{25-9} = 4$ и АВ = 8. Таким образом,

$$S_{\text{бок.пов.MABC}} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 40 \quad \text{и} \quad S_{\text{бок.пов.}MA_1B_1C_1} = 10.$$

Ответ: 10.

Пример 11.5 В основании пирамиды (см. рисунок 100) лежит правильный шестиугольник АВСДЕF. Боковое ребро BS перпендикулярно плоскости основания и равно ребру основания. Найдите градусную меру угла между боковым ребром FS и плоскостью основания.

Решение.

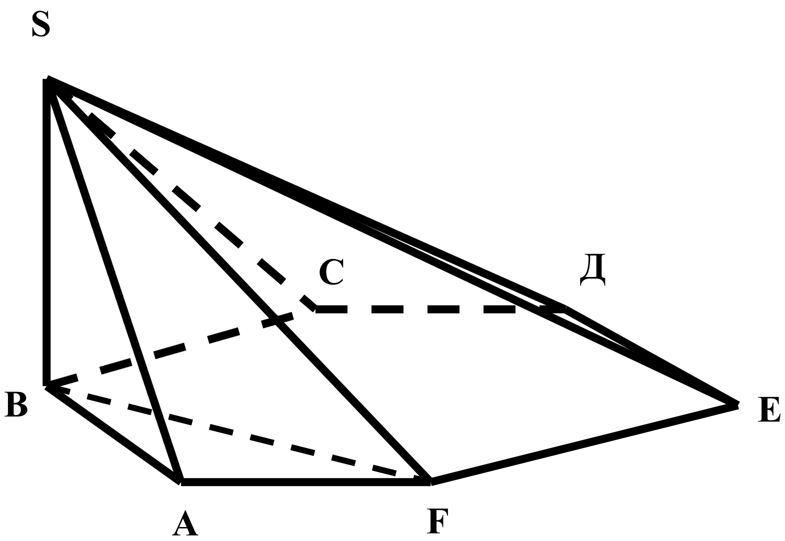


Рисунок 100

Угол между ребром SF и плоскостью основания АВСДЕF равен $\angle$SFB, т. к. SB $\perp$ АВСДЕF и BF - проекция SF на данную плоскость; $tg\,\angle SFB = \frac{SB}{BF}$.

Пусть АВ = ВС = СД = ДЕ = EF = FA = BS = a. Так как АВСДЕF - правильный шестиугольник, то в треугольнике ABF АВ = AF = a, $\angle$BAF =120°.

Применяя теорему косинусов, получаем:

$$BF^2 = AB^2 + AF^2 - 2AB \cdot AF \cdot cos\angle BAF = a^2 + a^2 - 2a^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 3a^2, \text{ т.е.}$$

$BF = a\sqrt{3}$. Следовательно, $tg\,\angle SFB = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\angle$SFB = 30 °.

Ответ: 30°.

Пример 11.6 Дан куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Через точки А и $В_1$ и середину ребра $СС_1$ проведена секущая плоскость. Найдите площадь полной поверхности куба, если площадь сечения равна 36.

Решение.

Пусть точка М - середина ребра $СС_1$ (см. рисунок 101). Построим сечение, проходящее через точки А, $В_1$ и М. Сначала в плоскости $АА_1В_1В$ проведем прямую, проходящую через точки А и $В_1$, затем в плоскости $ВВ_1С_1С$ соединим отрезком прямой точки $В_1$ и М.

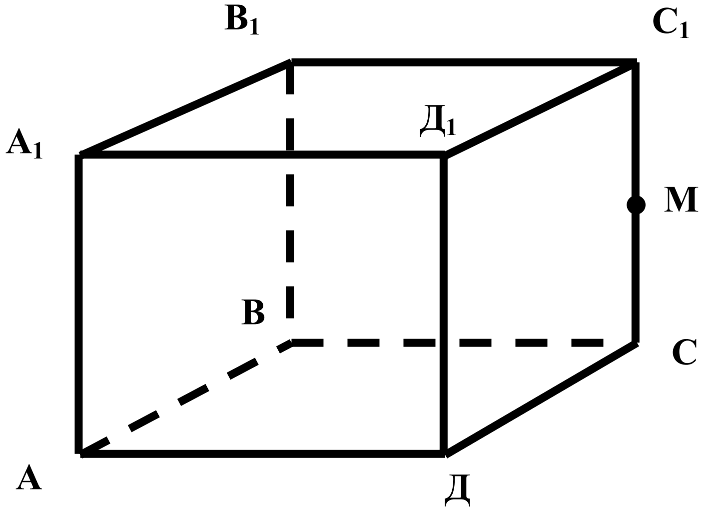


Рисунок 101

Так как грани $АА_1В_1В$ и $ДД_1С_1С$ параллельны, то сечение и грань $ДД_1С_1С$ пересекаются по прямой, проходящей через точку М параллельно $АВ_1$, а, значит, параллельно $ДС_1$. Обозначим точку пересечения этой прямой с ребром ДС как К, затем в плоскости АВСД соединим отрезком прямой точки А и К. $АВ_1МК$ - искомое сечение (см. рисунок 102).

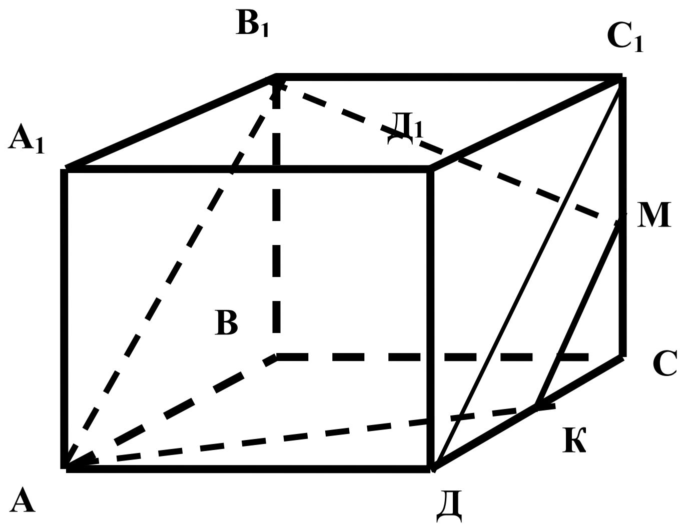


Рисунок 102

Нетрудно заметить, что AB_1MK - трапеция, в которой $AK = B_1M$. Пусть ребро куба равно a, тогда $AB_1 = a\sqrt{2}$, $KM = \dfrac{a\sqrt{2}}{2}$ (средняя линия треугольника $ДC_1C$), $AK = B_1M = \sqrt{a^2 + \dfrac{a^2}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}a$.

В плоскости сечения AB_1MK построим $ML \perp AB_1$ и $KE \perp AB_1$ (см. рисунок 103). $B_1L = EA = \dfrac{1}{2}\left(a\sqrt{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}a = \dfrac{\sqrt{2}}{4}a$.

Учитывая, что треугольник EKA - прямоугольный, получаем, что
$KE = \sqrt{\dfrac{5}{4}a^2 - \dfrac{1}{8}a^2} = \sqrt{\dfrac{9}{8}a^2} = \dfrac{3a}{2\sqrt{2}}$.

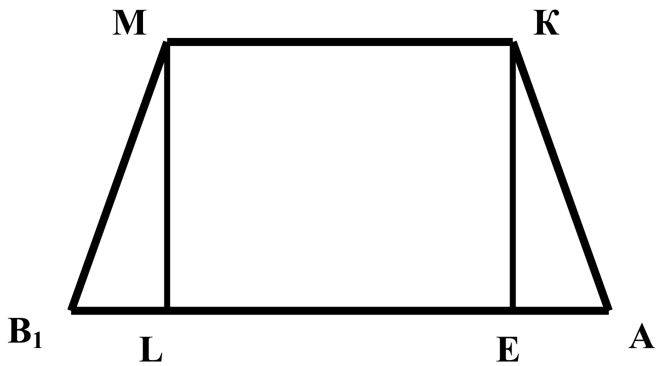


Рисунок 103

$$S_{B_1MKA} = \frac{1}{2}\left(a\sqrt{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3a\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3a}{2\sqrt{2}} = \frac{9a^2}{8}.$$

Так как по условию $S_{B_1MKA} = 36$, то $\dfrac{9a^2}{8} = 36$ и $a^2 = 32$.

Следовательно, площадь полной поверхности куба равна: $6a^2 = 192$.
Ответ: 192.

Пример 11.7 Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ - прямоугольный треугольник, катеты которого BC и AC равны $2\sqrt{6}$. Плоскость ABC_1 наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите объем призмы.

Решение.

В плоскости ABC построим CK перпендикулярно AB, в плоскости AC_1B проведем отрезок, соединяющий точки K и C_1 (см. рисунок 104).

Так как призма $ABCA_1B_1C_1$ - прямая и ABC - основание этой призмы, то $CC_1 \perp$ плоскости ABC, т.е. C_1K - наклонная, а CK - её проекция.

$CK \perp AB$, следовательно, на основании теоремы о трех перпендикулярах $C_1K \perp AB$ и $\angle C_1KC$ является линейным углом, соответствующим углу между плоскостями ABC_1 и ABC, т.е. $\angle C_1KC = 30°$.

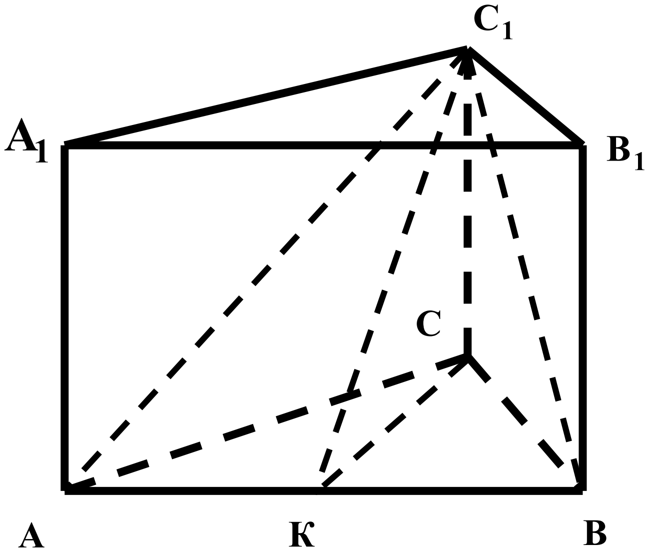


Рисунок 104

Треугольник ABC - прямоугольный ($\angle C=90°$) и равнобедренный (BC=AC $=2\sqrt{6}$). Следовательно, $S_{\text{ABC}} = \frac{1}{2}\text{BC}\cdot\text{AC} = \frac{1}{2}\cdot\left(2\sqrt{6}\right)^2 = 12.$

$\angle CAB = \angle CBA = 45°$, значит, $KC = AC\cdot sin45° = 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{3}$.

Учитывая, что треугольник C_1KC - прямоугольный, в котором: $\angle C=90°$, $\angle K = 30°$, $KC = 2\sqrt{3}$, получаем: $CC_1 = KC\cdot tg\,30° = 2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 2$.

Таким образом, $V_{\text{ABCA}_1\text{B}_1\text{C}_1} = S_{\text{ABC}}\cdot CC_1 = 12\cdot 2 = 24$.

Ответ: 24.

Пример 11.8 Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами AC = 6 и CB = 8, а её боковое ребро равно $2\sqrt{11}$. В призме проведены два сечения. Одно из них проходит через ребро AC и вершину B_1, а другое - через ребро CC_1 и середину ребра AB. Найдите длину отрезка, по которому пересекаются эти два сечения.

Решение.

Пусть точки Д и $Д_1$ - середины ребер AB и A_1B_1. Тогда сечение, проходящее через ребро CC_1 и середину ребра AB - прямоугольник $ДД_1C_1C$. Действительно, при построении данного сечения мы сначала в плоскости ABC проводим прямую, проходящую через точки Д и C. Так как сечение имеет с плоскостью $A_1B_1C_1$ общую точку C_1, то оно пересекается с данной плоскостью по прямой, проходящей через эту точку. Плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны, поэтому прямая должна быть параллельна ДC. Следовательно, это - $Д_1C_1$.

Для получения сечения, проходящего через ребро AC и вершину B_1, достаточно на соответствующих гранях построить отрезки прямых, соединяющих точки A и B_1 и точки C и B_1. Таким образом, второе сечение - треугольник AB_1C. Точку пересечения отрезков AB_1 и $ДД_1$ обозначим К (см. рисунок 105).

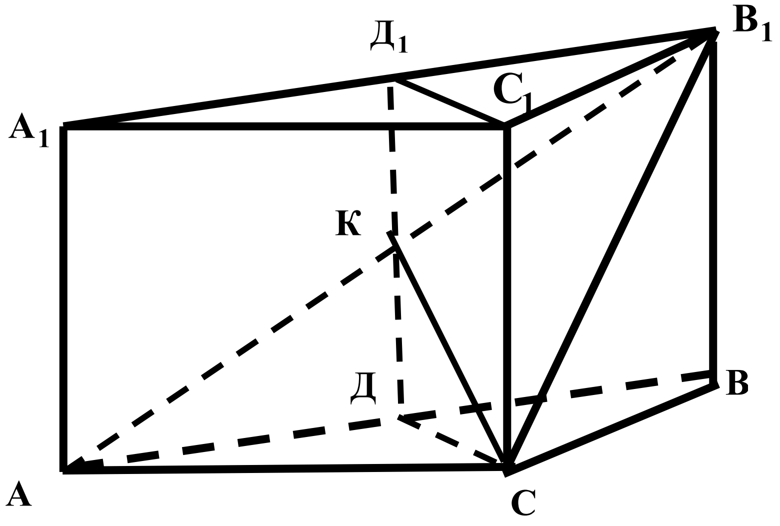


Рисунок 105

Нетрудно заметить, что точки К и С принадлежат обоим сечениям, следовательно, сечения пересекаются по отрезку СК.

$ДД_1 \parallel BB_1$, значит, $ДК \parallel BB_1$ и $ДК = \frac{1}{2}BB_1 = \sqrt{11}$.

ДС - медиана прямоугольного треугольника АВС, проведенная к гипотенузе, следовательно, она совпадает с радиусом описанной около данного треугольника окружности, т.е. $ДС = \frac{1}{2}AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 8^2} = 5$.

Треугольник ДКС - прямоугольный: $\angle КДС = 90°$, ДС =5, ДК=$\sqrt{11}$, следовательно, $СК = \sqrt{ДС^2 + ДК^2} = \sqrt{11 + 25} = 6$.

Ответ: 6.

Чаще всего на экзаменах предлагают задачи на комбинации тел. С методами решения подобных заданий можно ознакомиться, например, по пособиям [32], [38], [50], [68], [83], [93], [116], [153].

Пример 11.9 Осевое сечение конуса - правильный треугольник. В этот конус вписана сфера. Найдите её площадь, если образующая конуса равна 3.

Решение.

Пусть АВС - осевое сечение конуса, где АВ = ВС = АС = 3.

Опираясь на свойства вписанной в конус сферы, можно заметить, что точка касания сферы с основанием конуса (точка Д) - центр основания конуса, а центр сферы (точка О) будет лежать на высоте конуса (см. рисунок 106).

Рассмотрим осевое сечение конуса, проходящее через диаметр АС (см. рисунок 107). Для того, чтобы найти радиус сферы, достаточно найти радиус окружности, вписанной в треугольник АВС.

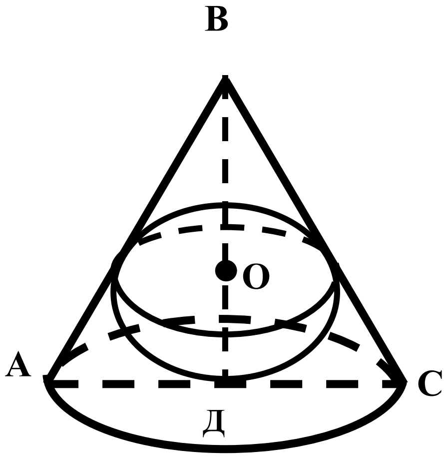


Рисунок 106

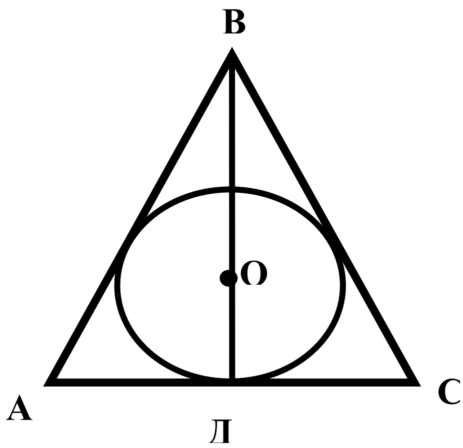


Рисунок 107

Так как треугольник ABC - правильный, то $r = \frac{R}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$.

Следовательно, ОД = $\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и площадь сферы равна $4\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 3\pi$.

Ответ: 3π.

Пример 11.10 В усеченном конусе отношение радиусов оснований равно 0,5. В него вписан другой конус. Основание этого конуса совпадает с меньшим основанием усеченного конуса, а вершина лежит в центре большего основания усеченного конуса. Плоскость, параллельная основаниям конусов, делит их высоту в отношении 2 : 3, считая от большего основания усеченного конуса. Определите отношение $V_1 : V_2$, где V_1 - объем части вписанного конуса, которая отсекается от него этой плоскостью и прилегает к его основанию, а V_2 - объем части усеченного конуса, которая отсекается от него той же плоскостью и прилегает к его большему основанию.

Решение.

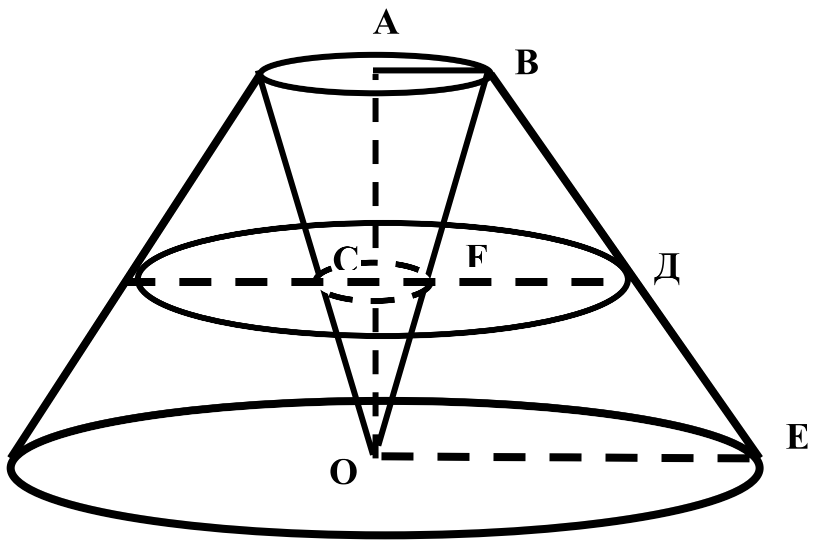


Рисунок 108

Рассмотрим осевое сечение (см. рисунок 108). Пусть AB = r , OE = R , CF = r_1, СД = r_2, AO = h, CO : CA = 2 : 3.

Тогда $R = 2\,r$, $\text{CA} = \frac{3}{5}h$, $\text{OC} = \frac{2}{5}h$. Используя *формулу для определения объема усеченного конуса*, мы получим, что

$$V_1 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{3}{5}h \cdot (r^2 + r \cdot r_1 + r_1^2), \quad V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{2}{5}h \cdot (R^2 + R \cdot r_2 + r_2^2).$$

Рассмотрим трапецию OABE (см. рисунок 109) в осевом сечении данных конусов. Нетрудно заметить, что треугольник OCF подобен треугольнику OAB, коэффициент подобия равен $\frac{2}{5}$. Следовательно, $\text{CF} = r_1 = \frac{2}{5}\text{AB} = \frac{2}{5}r$.

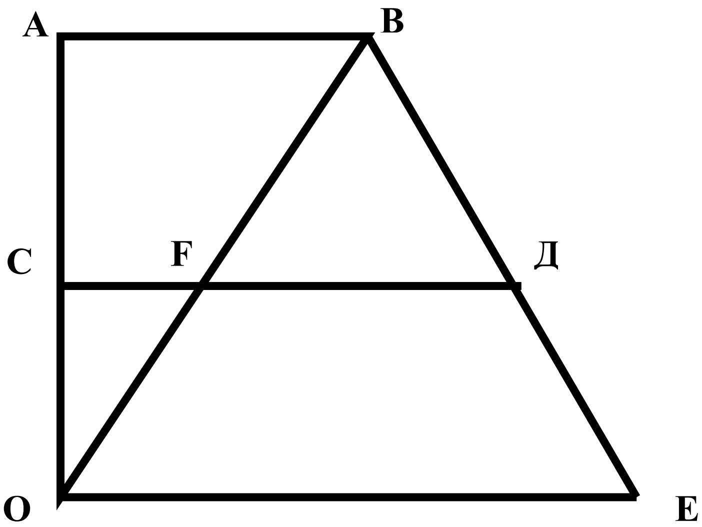


Рисунок 109

Треугольник FBД подобен треугольнику OBД, коэффициент подобия равен $\frac{3}{5}$. Следовательно, $\text{FД} = \frac{3}{5}\text{OE} = \frac{3}{5}R = \frac{6}{5}r$ и $\text{СД} = r_2 = \text{CF} + \text{FД} = \frac{8}{5}r$.

Таким образом,

$$V_1 = \frac{1}{5}h\pi \cdot (r^2 + \frac{2}{5}r^2 + \frac{4}{25}r^2) = \frac{39}{125}h\pi\, r^2,$$

$$V_2 = \frac{2}{15}h\pi \cdot (4r^2 + \frac{16}{5}r^2 + \frac{64}{25}r^2) = \frac{488}{375}h\pi\, r^2, \qquad \frac{V_1}{V_2} = \frac{117}{488}.$$

Ответ: $\frac{117}{488}$.

Пример 11.11 Сфера радиуса 2 касается плоскости в точке A. В этой же плоскости лежит основание конуса. Прямая, проходящая через центр основания конуса (точку C) и точку сферы, диаметрально противоположную точке A, проходит через точку M. Точка M является точкой касания сферы и конуса (их единственная общая точка). Найдите высоту конуса, если AC =1.

Решение.

Пусть O - центр сферы, B - точка сферы, диаметрально противоположная точке A, P - вершина конуса (см. рисунок 110).

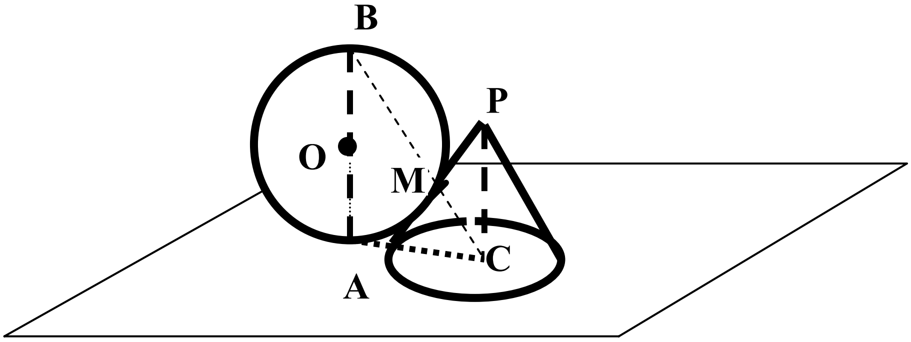


Рисунок 110

Рассмотрим сечение сферы и конуса плоскостью, проходящей через точки A, B и C. Нетрудно заметить, что высота конуса PC будет принадлежать этой плоскости, так как AB || PC (как прямые перпендикулярные одной плоскости). Точка M принадлежит отрезку BC, следовательно, точка M принадлежит секущей плоскости. Так как точка M - точка касания сферы и конуса, то сечение сферы - окружность, проходящая через точки A, M, B с центром в точке O. Образующая конуса, проходящая через точки P и M также принадлежит секущей плоскости и является касательной к данной окружности. Точку пересечения образующей PM конуса с прямой, проходящей через точки A и C, обозначим - F (см. рисунок 111).

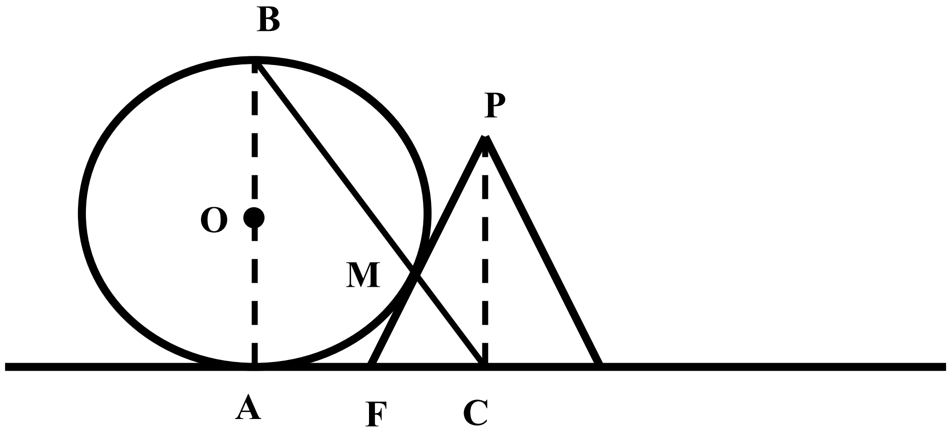


Рисунок 111

Соединим отрезками прямых точки O и F, A и M, проведем прямую через точки O и M, обозначим точку её пересечения с PC - L (см. рисунок 112).

Треугольники OBM и MLC - подобные (так как PC || AB, то $\angle OBM = \angle MCL$, $\angle MLC = \angle MOB$). OB = OM (как радиусы), следовательно, LM = LC.

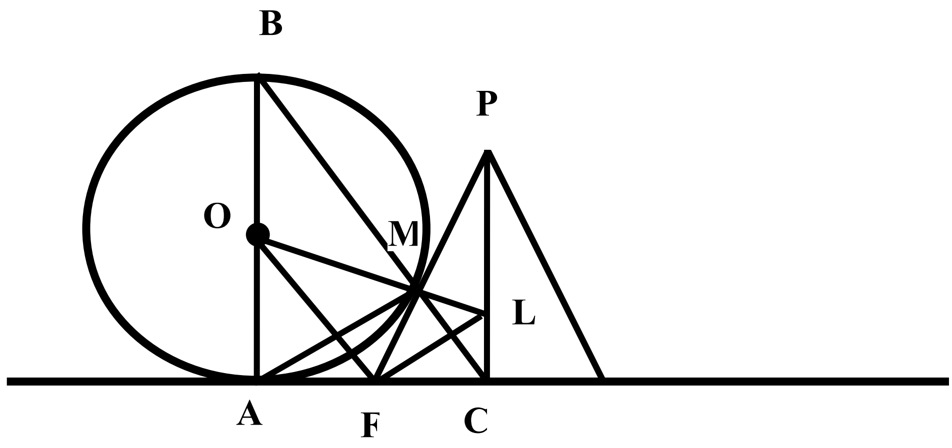


Рисунок 112

OM - радиус, проведенный в точку касания, значит, OM $\perp$ PF и FM $\perp$ ML.

Так как LC $\perp$ CF (PC - высота конуса), то треугольники FML и LCF - равные прямоугольные треугольники (FL - общая, LM = LC). Следовательно, FM = FC.

Точка A - точка касания сферы и плоскости, поэтому, AF - касательная к окружности, получившейся в сечении сферы. AF и FM - отрезки касательных, проведенных к данной окружности из одной точки, следовательно, AF = FM.

Так как FM = FC, то AF = FM = FC = $\frac{1}{2}\mathrm{AC} = \frac{1}{2}$ (FM - медиана треугольника AMC).

Треугольник FPC - прямоугольный, FC = $\frac{1}{2}$. $\angle$ PFC = $\angle$MFC = $\angle$AOM (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами: OA $\perp$ FC, OM $\perp$ FM). $\angle$AOM = 2 $\angle$ABM (как центральный и вписанный углы, опирающиеся на одну и ту же дугу AM).

Треугольник ABC - прямоугольный (AB $\perp$ AC), AC = 1, AB = 4, следовательно, $tg\angle\mathrm{ABC} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}$.

$$tg\angle\mathrm{PFC} = tg\angle\mathrm{AOM} = tg(2\angle\mathrm{ABC}) = \frac{2tg\angle\mathrm{ABC}}{1 - tg^2\angle\mathrm{ABC}} = \frac{2\cdot\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{16}} = \frac{8}{15}.$$

$$\mathrm{PC} = \mathrm{FC}\cdot tg\angle\mathrm{PFC} = \frac{1}{2}\cdot\frac{8}{15} = \frac{4}{15}.$$

Ответ: $\frac{4}{15}$.

Пример 11.12 Отрезок PN – диаметр сферы, $PN = 4\sqrt{3}$. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды PNML наибольший. Найдите площадь треугольника TNK, где T и K – середины ребер PM и PL соответственно.

Решение.

Пусть O – центр сферы, R – её радиус. Тогда PN = 2R и $R = 2\sqrt{3}$. Так как точки M и L лежат на сфере, то OP = ON = OM = OL = $2\sqrt{3}$ (см. рисунок 113).

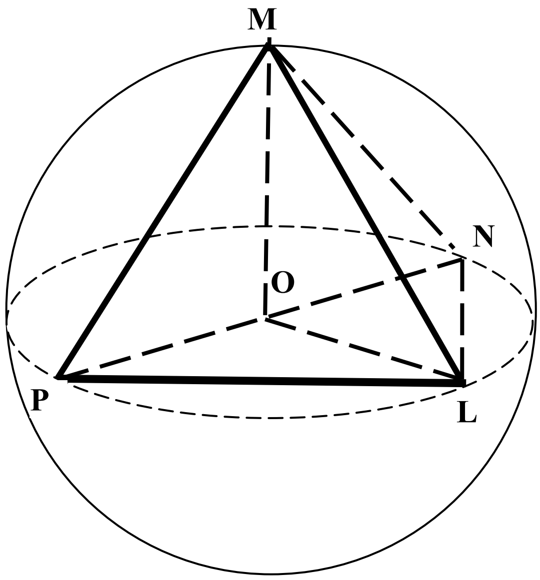


Рисунок 113

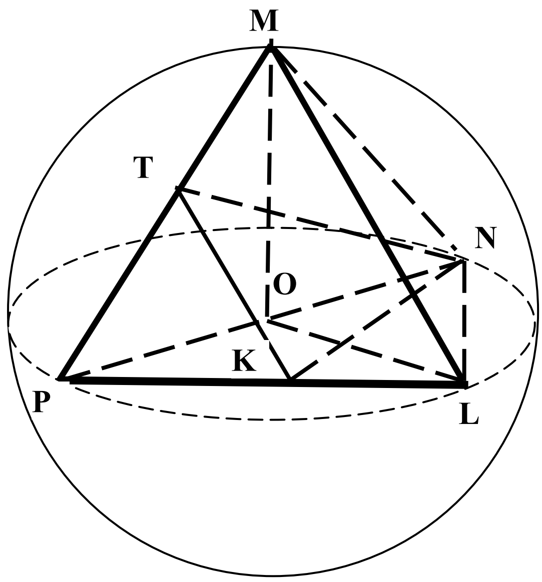


Рисунок 114

Рассмотрим треугольники PMN и PLN. Сечения сферы, проходящие через плоскости данных треугольников, – диаметральные сечения, так как PN – диаметр сферы. Следовательно, $\angle PMN = \angle PLN = 90°$, как вписанные углы, опирающиеся на диаметр.

Выберем в качестве основания пирамиды PNML треугольник PLN, тогда $V_{PNML} = \frac{1}{3} S_{PNL} \cdot H$, где H – высота пирамиды, равная расстоянию от точки M до плоскости основания, т.е. до плоскости треугольника PLN. Так как точка M лежит на сфере, а плоскость PLN содержит центр сферы, то $H \le R$, причем, $H = R$, если OM $\perp$ PNL.

$S_{PNL} = \frac{1}{2} PN \cdot h$, где h – высота треугольника, равная расстоянию от точки L до PN. Так как точки P, N, L лежат на окружности радиуса R и отрезок PN содержит центр этой окружности точку O, то $h \le R$, причем, $h = R$, только, если OL $\perp$ PN.

Следовательно, $V_{PNML} = \frac{1}{3} S_{PNL} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2R \cdot h \cdot H \le \frac{1}{3} R^3$ и пирамида PNLM имеет наибольший объем только тогда, когда OM $\perp$ PNL и OL $\perp$ PN.

Треугольники PNL и PMN в этом случае являются прямоугольными и равнобедренными, причем имеют общую гипотенузу PN, значит, $\Delta PNL = \Delta PMN$.

Отрезки NK и NT (см. рисунок 114) являются медианами этих треугольников, проведенными к равным сторонам, следовательно, NK = NT и треугольник TNK является равнобедренным.

Треугольники POM, LOM, POL – прямоугольные равнобедренные, с катетами длиной *R,* следовательно, PM = PL = ML и треугольник PML является равносторонним. Более того, так треугольники PMN и PLN – равнобедренные, то PM = PL = NL = MN = ML = $\sqrt{OL^2 + OM^2} = \sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$ (ранее мы доказали, что OM $\perp$ PNL, значит, треугольник MOL – прямоугольный).

TK– средняя линия треугольника PML, следовательно, $TK = \frac{1}{2}ML = \frac{R}{\sqrt{2}}$.

$NK = NT = \sqrt{MN^2 + TM^2} = \sqrt{2R^2 + \frac{R^2}{2}} = \sqrt{\frac{5}{2}} \cdot R$ (треугольник TMN – прямоугольный). Треугольник TNK - равнобедренный, его высоту h_1, проведенную к стороне TK, можно найти по теореме Пифагора: $h_1 = \sqrt{TN^2 - \left(\frac{1}{2}TK\right)^2} = \sqrt{\frac{5R^2}{2} - \frac{R^2}{8}} = \sqrt{\frac{19}{8}} \cdot R = \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{2}} \cdot R$.

Таким образом, $S_{TNK} = \frac{1}{2}TK \cdot h_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{R}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{19}}{2\sqrt{2}} \cdot R = \frac{\sqrt{19}}{8}R^2$.

Ответ: $\frac{\sqrt{19}}{8}R^2$.

Следует отметить, что, приводя примеры в главах 10 и 11, мы стремились обратить Ваше внимание на те моменты, которые чаще всего вызывают затруднения абитуриентов.

С примерами заданий по планиметрии и стереометрии, которые предлагались на ЕГЭ, Вы можете ознакомиться, например, по [17], [23], [24], [26], [27], [46] – [48], [53], [55] – [61], [73] – [76], [79] – [81], [91] – [92], [94], [97] – [100], [102] – [104], [122] – [124], [132], [140], [141], [147] – [149], [159], [160].

А примеры заданий по геометрии, которые предлагались на вступительных экзаменах в ОГУ (в форме тестов), Вы можете найти в [85].

Задания для самостоятельного решения

1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а двугранные углы при основании равны 60°. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды.

2. Основание и боковая грань пирамиды ДАВС - правильные треугольники АВС и ДАС, плоскости которых взаимно перпендикулярны. Найдите АС, если объем пирамиды равен 1.

3. В основании пирамиды лежит треугольник со сторонами 10, 8 и 6. Боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 45°. Найдите объем пирамиды.

4. В основании пирамиды SABCD лежит квадрат ABCD со стороной, равной 5. Точка М делит ребро SB в отношении 2 : 3, считая от точки S. Через точку М проходит сечение, параллельное основанию пирамиды. Найдите его площадь.

5. Высота прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна $\sqrt{39}$, угол С основания АВС равен 90°, ВС = 4, АС = 3. Найдите градусную меру угла между прямыми КМ и ВС, если точки К и М - середины ребер AA_1 и АВ.

6. Дан куб $АВСДА_1В_1С_1Д_1$. Через точки A_1, В и середину ребра $ДД_1$ проведена секущая плоскость. Найдите ребро куба, если периметр сечения равен $3\sqrt{2}+2\sqrt{5}$.

7. Основанием прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ является прямоугольный треугольник с катетами АС =3 и СВ = 4, а ее боковое ребро равно $\sqrt{11}$. В призме проведены два сечения. Одно из них проходит через ребро АС и вершину B_1, а другое - через ребро CC_1 и середину ребра АВ. Найдите длину отрезка, являющегося общей частью этих сечений.

8. В правильную четырехугольную призму вписан цилиндр. Найдите площадь его боковой поверхности, если диагональ основания призмы равна $4\sqrt{2}$, а диагональ боковой грани 5.

9. В шар вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$, объем которой равен $54\sqrt{6}$. Прямая AB_1 образует с плоскостью ACC_1 угол 30°. Найдите площадь поверхности шара.

10. Внутри правильного тетраэдра АВСД расположен конус так, что его вершина является серединой ребра СД, а окружность основания конуса вписана в сечение тетраэдра, проходящее через середину ребра ВС параллельно прямым СД и АВ. Площадь боковой поверхности конуса равна $9\pi\sqrt{3}$. Найдите длину ребра тетраэдра.

11. Дана сфера радиусом 12. Сечением этой сферы плоскостью является окружность с диаметром АВ. Плоскость сечения удалена от центра сферы на расстояние 4. Точка D выбрана на сфере, а точка С – на окружности сечения так, что объем пирамиды АВСД наибольший. Найдите площадь треугольника DMN, где М и N – середины ребер АС и ВС соответственно.

Ответы: **1)** 96; **2)** 2; **3)** 40; **4)** 4; **5)** 60; **6)** 2; **7)** 3; **8)** 12π; **9)** 120π; **10)** 12; **11)** $\frac{297}{32}$.

12 Векторная алгебра

Приступать к изучению темы *"Векторная алгебра"* рекомендуется после полного повторения методов решения планиметрических и стереометрических задач, так как очень часто решение задачи по векторной алгебре удается свести к решению планиметрической или стереометрической задачи.

Данный раздел можно повторить, используя как школьные учебники [11], [16], [114], так и пособия [40] – [43], [116], [121], [152], [153]. При изучении теории рекомендуется обратить особое внимание на следующие моменты: основные определения и понятия (вектор, длина вектора, равные векторы, коллинеарные векторы, компланарные векторы, угол между векторами, проекция вектора на ось), линейные операции над векторами, координаты вектора (в том числе, их геометрический смысл), действия над векторами, заданными своими координатами. Необходимо также изучить тему скалярное произведение векторов: определение, свойства, приложения, правило нахождения для векторов, заданных своими координатами. Координатный метод часто применяется при решении планиметрических и стереометрических задач, поэтому желательно: знать уравнения окружности и сферы, уравнения прямой и плоскости, уметь по способу их задания, т.е. по соответствующим коэффициентам, определять их взаимное расположение. Наиболее подробное изложение методов решения задач по темам "Метод координат и векторная алгебра" (в том числе, и повышенной степени сложности) имеется в [11], [38], [41], [42], [50], [68], [85], [116], [119] – [121], [138], [150], [153].

Пример 12.1 Точка O - точка пересечения медиан треугольника ABC и $\overrightarrow{AO} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Разложите вектор $\overrightarrow{AB}$ по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение.

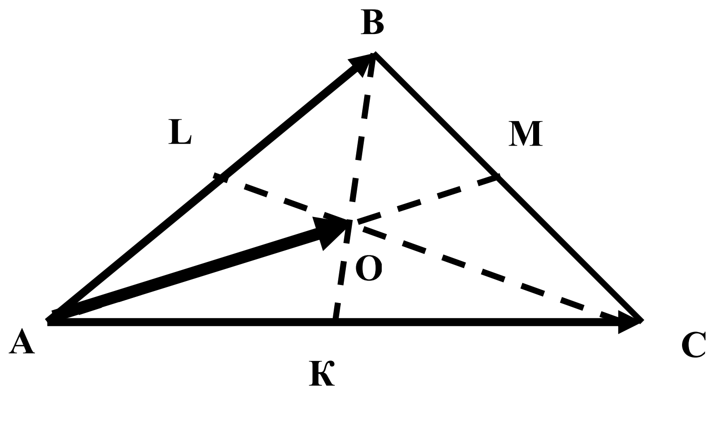


Рисунок 115

Пусть AM, CL и BK - медианы треугольника ABC (см. рисунок 115).

$$\vec{AB} = \vec{AM} + \vec{MB},\quad \vec{AM} = \frac{3}{2}\vec{AO} = \frac{3}{2}\vec{a},\quad \vec{MB} = \vec{CM},\ \text{т. е.}\quad \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{a} + \vec{CM},$$

$$\vec{CM} = \vec{CA} + \vec{AM} = -\vec{AC} + \frac{3}{2}\vec{AO} = -\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a}.\qquad \vec{AB} = \frac{3}{2}\vec{a} + \left(-\vec{b} + \frac{3}{2}\vec{a}\right) = 3\vec{a} - \vec{b}.$$

Ответ: $3\vec{a} - \vec{b}$.

Пример 12.2 АВСДА$_1$В$_1$С$_1$Д$_1$ - параллелепипед, М - середина ребра В$_1$С$_1$, N - середина ребра АВ. Найдите $\vec{MN}$, если $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AД} = \vec{b}, \vec{AA_1} = \vec{c}$.

Решение.

Предварительно сделаем дополнительное построение: в грани ВВ$_1$С$_1$С проведем МК параллельно В$_1$В, в грани АВСД отрезком прямой соединим точки К и N (см. рисунок 116).

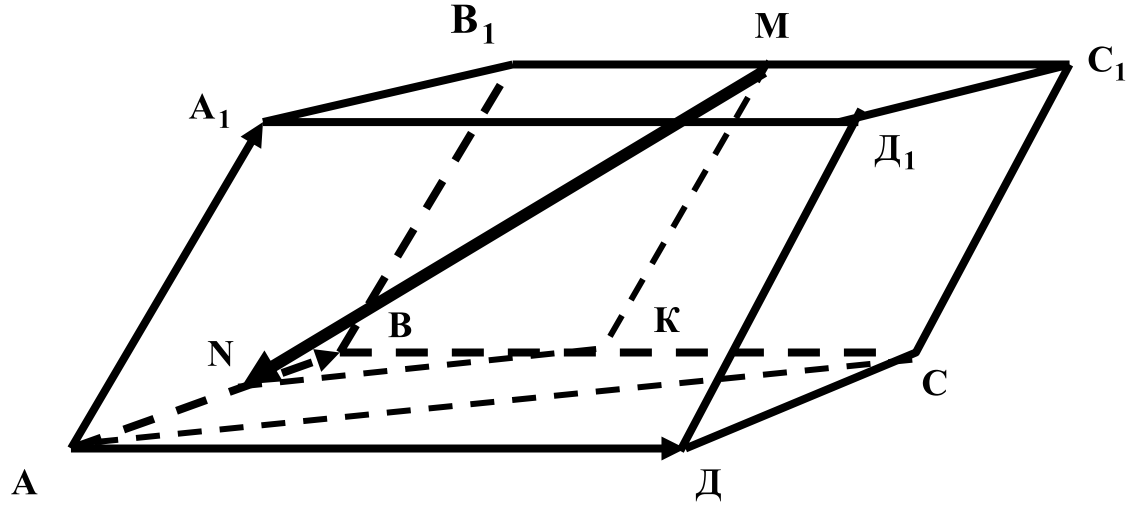


Рисунок 116

$$\vec{MN} = \vec{MK} + \vec{KN},\qquad \vec{MK} = \vec{A_1A} = -\vec{AA_1} = -\vec{c},$$

$$\vec{KN} = \frac{1}{2}\vec{CA} = -\frac{1}{2}\vec{AC} = -\frac{1}{2}\left(\vec{AB} + \vec{AД}\right) = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b},\qquad \vec{MN} = -\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}.$$

Ответ: $-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}$.

Пример 12.3 Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол 60°, причем $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 12$. Определите $|\vec{a} + \vec{b}|$ и $|\vec{a} - \vec{b}|$.

Решение.

Рассмотрим параллелограмм АВСД, в котором ∠ВАД=60°, $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AД} = \vec{b}$ (см. рисунок 117).

В этом случае, $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{ДB} = \vec{a} - \vec{b}$, ∠АДС =120°.

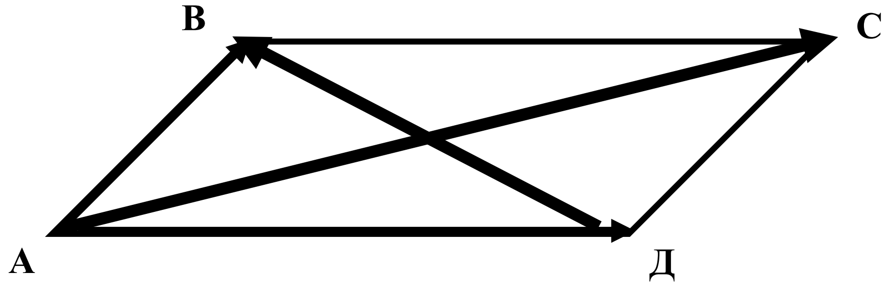


Рисунок 117

Применяя теорему косинусов для треугольников АВД и АДС, получаем:

$$ВД^2 = АВ^2 + АД^2 - 2\cdot АВ\cdot АД\cdot cos\angle ВАД = 5^2 + 12^2 - 2\cdot 5\cdot 12\cdot \frac{1}{2} = 109,$$

$$АС^2 = АД^2 + ДС^2 - 2\cdot АД\cdot ДС\cdot cos\angle СДА = 12^2 + 5^2 - 2\cdot 12\cdot 5\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 229.$$

Следовательно, $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{229}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{109}$.

Ответ: $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{229}$, $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{109}$.

Пример 12.4 Какой угол образует вектор $\vec{b} = \{2; -\sqrt{5}; 3\}$ с осью OZ ?

Решение.

1 способ решения (с помощью скалярного произведения векторов).

$(\widehat{\vec{b},OZ}) = (\widehat{\vec{b},\vec{k}})$, где $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$.

$$cos(\widehat{\vec{b},\vec{k}}) = \frac{(\vec{b},\vec{k})}{|\vec{b}|\cdot|\vec{k}|} = \frac{2\cdot 0 + (-\sqrt{5})\cdot 0 + 3\cdot 1}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2 + 3^2}\cdot\sqrt{0^2+0^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $(\widehat{\vec{b},OZ}) = 45°$.

2 способ решения (использование геометрического смысла координат вектора).

Известно, что если вектор $\vec{a} = \{x, y, z\}$, то $x = пр_{OX}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot cos(\widehat{\vec{a},OX})$; $y = пр_{OY}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot cos(\widehat{\vec{a},OY})$; $z = пр_{OZ}\,\vec{a} = |\vec{a}|\cdot cos(\widehat{\vec{a},OZ})$. Следовательно,

$$cos(\widehat{\vec{b},OZ}) = \frac{z}{|\vec{b}|} = \frac{3}{\sqrt{2^2 + (-\sqrt{5})^2 + 3^2}} = \frac{3}{\sqrt{18}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad и \quad (\widehat{\vec{b},OZ}) = 45°.$$

Ответ: 45°.

Пример 12.5 Определите координаты единичного вектора $\vec{b}$, противоположно направленного по отношению к вектору $\vec{a}=\{1,1,1\}$.

Решение.

$|\vec{b}|=1,\qquad |\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\sqrt{3},\qquad \vec{b}\uparrow\downarrow\vec{a}$. Следовательно, $\vec{a}=-\sqrt{3}\,\vec{b}$ и $\vec{b}=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\vec{a}=\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Ответ: $\left\{-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}};-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

Пример 12.6 Пусть в параллелограмме АВСД заданы: вершина С(6,-3,5) и векторы $\vec{AC}=\{-3;1;4\}$ и $\vec{BД}=\{2;-3;-5\}$, являющиеся его диагоналями. Определите сумму координат точки В.

Решение.

Пусть точка О - точка пересечения диагоналей ВД и АС (см. рисунок 118).

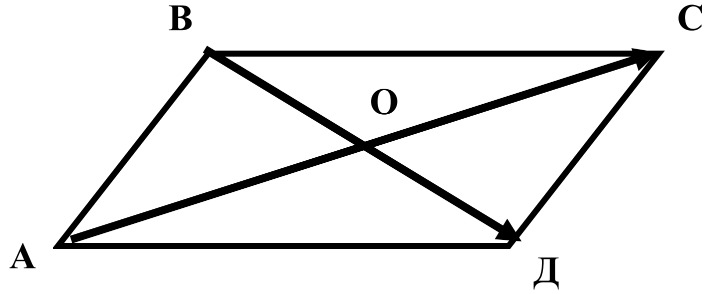


Рисунок 118

$$\vec{BC}=\vec{BO}+\vec{OC}=\frac{1}{2}\vec{BД}+\frac{1}{2}\vec{AC}=\left\{-\frac{1}{2};-1;\ -\frac{1}{2}\right\}.$$

Пусть (x, y, z) - координаты точки В, тогда $\begin{cases}\vec{BC}=\left\{-\dfrac{1}{2};-1;-\dfrac{1}{2}\right\},\\ \vec{BC}=\{6-x;-3-y;5-z\}\end{cases}$ и

$$\begin{cases}6-x=-\dfrac{1}{2},\\ -3-y=-1,\\ 5-z=-\dfrac{1}{2}\end{cases}\quad\Leftrightarrow\quad\begin{cases}x=6{,}5;\\ y=-2;\\ z=5{,}5\end{cases}\quad\Rightarrow\quad x+y+z=10.$$

Ответ: 10.

Пример 12.7 Известно, что $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=5,\ |\vec{c}|=8,\ \vec{a}\perp\vec{b}$,

$(\widehat{\vec{a},\vec{c}})=(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=\dfrac{\pi}{3}$. Найдите $(3\vec{a}-2\vec{b},\vec{b}+3\vec{c})$.

Решение.

$$(3\vec{a}-2\vec{b},\vec{b}+3\vec{c})=(3\vec{a},\vec{b}+3\vec{c})+(-2\vec{b},\vec{b}+3\vec{c})=(3\vec{a},\vec{b})+(3\vec{a},3\vec{c})+$$
$$+(-2\vec{b},\vec{b})+(-2\vec{b},3\vec{c})=3(\vec{a},\vec{b})+9(\vec{a},\vec{c})-2(\vec{b},\vec{b})-6(\vec{b},\vec{c})=$$
$$=3\cdot 0+9\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{c}|\cdot cos(\widehat{\vec{a},\vec{c}})-2\cdot|\vec{b}|^2-6\cdot|\vec{b}|\cdot|\vec{c}|\cdot cos(\widehat{\vec{b},\vec{c}})=$$
$$=9\cdot 3\cdot 8\cdot\frac{1}{2}-2\cdot 25-6\cdot 5\cdot 8\cdot\frac{1}{2}=108-50-120=-62.$$

Ответ: - 62.

Пример 12.8 Определите, при каких отрицательных значениях параметров α и β векторы $\vec{a}=\{3,-1,\alpha\}$ и $\vec{b}=\{2,\ \beta,\ 1\}$ ортогональны, если $|\vec{b}|=3$?

Решение.

$$|\vec{b}|=3 \;\Leftrightarrow\; \sqrt{2^2+\beta^2+1^2}=3 \;\Leftrightarrow\; \beta^2+5=9 \;\Leftrightarrow\; \beta^2=4 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l}\beta=2,\\ \beta=-2.\end{array}\right.$$

Так как по условию $\beta<0$, то $\beta=-2$.

$$\vec{a}\perp\vec{b} \;\Leftrightarrow\; (\vec{a},\vec{b})=0 \;\Leftrightarrow\; 3\cdot 2+(-1)\cdot\beta+\alpha\cdot 1=0 \;\Leftrightarrow\; \alpha-\beta+6=0.$$

Следовательно, $\alpha=-8$.

Ответ: $\alpha=-8$; $\beta=-2$.

Пример 12.9 Найдите угол между векторами $\vec{a}=3\vec{m}+2\vec{k}$ и $\vec{b}=\vec{m}+5\vec{k}$, где $\vec{m}$ и $\vec{k}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

Решение.

$$cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}.$$

$$(\vec{a},\vec{b})=(3\vec{m}+2\vec{k},\ \vec{m}+5\vec{k})=3(\vec{m},\vec{m})+2(\vec{k},\ \vec{m})+15(\vec{m},\vec{k})+10(\vec{k},\vec{k})=$$
$$=3\cdot|\vec{m}|^2+10\cdot|\vec{k}|^2=13, \quad \text{т. к.} \quad (\vec{k},\ \vec{m})=(\vec{m},\vec{k})=0,\ |\vec{m}|=|\vec{k}|=1.$$

$$|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\ \vec{a})}, \qquad |\vec{b}|=\sqrt{(\vec{b},\ \vec{b})}.$$

$$(\vec{a},\vec{a})=(3\vec{m}+2\vec{k},\ 3\vec{m}+2\vec{k})=9(\vec{m},\ \vec{m})+6(\vec{m},\ \vec{k})+6(\vec{k},\ \vec{m})+4(\vec{k},\vec{k})=$$
$$=9|\vec{m}|^2+4|\vec{k}|^2=13.$$

$$(\vec{b},\vec{b})=(\vec{m}+5\vec{k},\vec{m}+5\vec{k})=(\vec{m},\vec{m})+5(\vec{m},\vec{k})+5(\vec{k},\vec{m})+25(\vec{k},\vec{k})=$$

$$=|\vec{m}|^2+25|\vec{k}|^2=26.$$

Следовательно, $\cos(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\dfrac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ и $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=45°$.

Ответ: 45°.

Пример 12.10 Дана правильная пирамида ДАВС, все ребра которой равны $\sqrt{3}$. Точка М является серединой отрезка АС. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{ВД}$ и $\vec{МВ}$.

Решение.

Пусть точка О - основание высоты пирамиды ДАВС, опущенной из вершины Д на плоскость грани АВС. Так как пирамида правильная, точка О - центр правильного треугольника АВС, т.е. О - центр вписанной и описанной около данного треугольника окружностей и точка пересечения медиан, биссектрис и высот данного треугольника (см. рисунок 119).

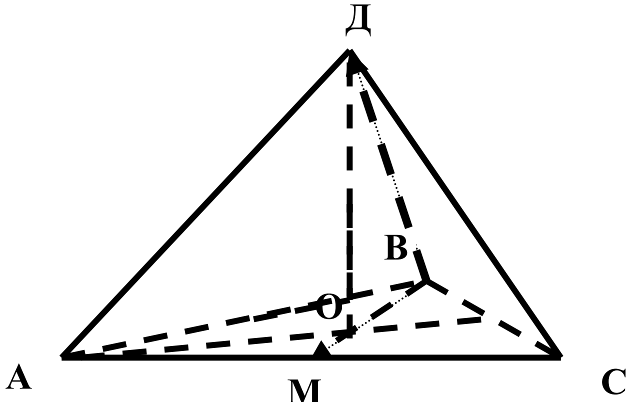


Рисунок 119

$$(\vec{ВД},\vec{МВ})=-(\vec{ВД},\vec{ВМ})=-|\vec{ВД}|\cdot|\vec{ВМ}|\cdot\cos(\widehat{\vec{ВД},\vec{ВМ}}),$$

$$|\vec{ВД}|=\sqrt{3},\quad |\vec{ВМ}|=АВ\cdot\sin\ 60°=\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2},\quad (\widehat{\vec{ВД},\vec{ВМ}})=\angle ДВО.$$

Треугольник ДВО - прямоугольный, ВД = $\sqrt{3}$, ВО - радиус описанной около треугольника АВС окружности, следовательно, ВО = $\dfrac{a}{\sqrt{3}}=\dfrac{АВ}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1$

и $\cos\angle ДВО=\dfrac{ВО}{ВД}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Таким образом, $(\vec{ВД},\vec{МВ})=-\sqrt{3}\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=-\dfrac{3}{2}$.

Ответ: $-\dfrac{3}{2}$.

Задания для самостоятельного решения

1. Пусть АВСДЕF - правильный шестиугольник. $\vec{AB} = \vec{a}, \vec{AF} = \vec{b}$. Тогда $\vec{CA}$ равен: А) $-2\vec{a} - \vec{b}$; В) $2\vec{a} - 3\vec{b}$; С) $-\vec{a} - \frac{3}{2}\vec{b}$; Д) определить нельзя.

2. В тетраэдре АВСД медиана $ДД_1$ грани АДВ делится точкой М пополам. Разложите вектор $\vec{CM}$ по векторам $\vec{CA}, \vec{CB}, \vec{CД}$.

3. Известно, что $|\vec{a}| = 13, |\vec{b}| = 19, |\vec{a} + \vec{b}| = 24$. Найдите $|\vec{a} - \vec{b}|$.

4. Найдите косинус угла между вектором $\vec{a} = \{2; 3; \sqrt{3}\}$ и осью ОУ.

5. Определите, при каких значениях параметров α и β векторы $\vec{a} = \{-2; 3; \beta\}$ и $\vec{b} = \{\alpha, -6, 2\}$ коллинеарные?

6. В ромбе АВСД точка О - точка пересечения диагоналей, $\vec{AO} = \{-2; 0; 4\}$, $\vec{BC} = \{3; 4; -6\}$, Д (1, 2, 1). Найдите утроенную сумму координат точки С.

7. Определите угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$ и $(\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - \vec{b}) + (2\vec{a} - \vec{b}, 2\vec{a} - \vec{b}) = 56$.

8. Найдите координаты вектора $\vec{c}$, зная, что $\vec{c} \perp \vec{a} = \{2; 3; -1\}$, $\vec{c} \perp \vec{b} = \{1; -2; 3\}$ и $(\vec{c}, \vec{e}) = 6$, $\vec{e} = \{1; 0; 0\}$.

9. Даны вершины треугольника АВС: А(-1;-2;4), В(- 4;-2;0), С(3;-2;1). Определите внутренний угол при вершине В.

10. Вычислите угол между векторами $\vec{k} = \sqrt{3}\vec{a} + \vec{b}$ и $\vec{m} = 2\vec{a} + 2\sqrt{3}\vec{b}$, где $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - единичные взаимно перпендикулярные векторы.

11. Дана правильная пирамида ЕАВСД, все ребра которой равны 2. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{ВД}$ и $\vec{ДЕ}$.

Ответы: **1)** $-\vec{в} - 2\vec{a}$; **2)** $\frac{1}{4}\vec{CA} + \frac{1}{4}\vec{CB} + \frac{1}{2}\vec{CD}$; **3)** 22; **4)** $\frac{3}{4}$; **5)** $\alpha = 4; \beta = -1$; **6)** 21; **7)** 120°; **8)** {6; -6; -6}; **9)** 45°; **10)** 30°; **11)** - 4.

Заключение

Если Вы читаете данную страницу учебного пособия, то это означает, что Вы повторили основные приемы и методы решения заданий по математике, и можете приступать к заключительному этапу подготовки - решению вариантов ЕГЭ и вступительных экзаменов в вузы.

В приложениях к нашему пособию содержатся: «Демонстрационный вариант ЕГЭ 2010 года» (Приложение Е), «Демонстрационный и тренировочные варианты ЕГЭ 2009 года» (Приложение А), «Демонстрационный и тренировочные варианты ЕГЭ 2008» (Приложение Б), «Демонстрационный и тренировочный варианты ЕГЭ 2007» (Приложение В), «Примеры вариантов ЕГЭ 2005 - 2007 годов» (Приложение Г).

С другими вариантами заданий, которые предлагались на ЕГЭ в 2000 - 2009 годах, можно ознакомиться по пособиям [12], [17], [47], [48], [55] – [61], [73] – [76], [79] – [81], [97] – [100], [102] – [104], [132], [147] – [149], [159], [160] или, аналогичным по содержанию изданиям, а также на сайте информационной поддержки ЕГЭ в Интернете: http://www.ege.edu.ru/.

Рекомендуется также просмотреть статьи и пособия [21] – [29], [44], [45], [50], [52], [53], [54], [62], [77], [112], [134], [140], [141], в которых дается тематическая подборка заданий по материалам ЕГЭ.

Для абитуриентов, которым предстоит сдавать экзамен по математике в форме тестирования, в Приложении Д мы приводим примеры вариантов, которые предлагались ранее в ОГУ. Вам также рекомендуется ознакомиться с материалами пособий [85], [90], в которых представлен обзор заданий, предлагавшихся ранее на экзаменах в ОГУ в форме тестирования.

С вариантами заданий, предлагавшихся в вузах России, можно ознакомиться по пособиям: [18] – [20], [33], [38], [50], [64] – [67], [69], [86], [96], [105], [107], [110], [116], [130], [133], [136], [146]; по публикациям в журналах "Математика в школе", "Квант" и в Приложении "Математика" к газете "1 сентября", а также на сайтах соответствующих вузов.

Желаем успехов!

Список использованных источников

1 **Абрамович, М. И.** Математика. Алгебра и элементарные функции : учебное пособие для подготовительных отделений втузов / М. И. Абрамович, М. Т. Стародубцев. – М. : Высшая школа, 1976. – 272 с.

2 **Абрамович, М. И.** Математика. Геометрия и тригонометрические функции : учебное пособие для подготовительных отделений втузов / М. И. Абрамович, М. Т. Стародубцев. - М. : Высшая школа, 1976. - 304 с.

3 **Азаров, А. И.** Математика для старшеклассников. Методы решения алгебраических уравнений, неравенств и систем : пособие для учащихся учреждений, обеспечивающих получение общего среднего образования / А. И. Азаров, С. А. Барвенков. – Минск : Аверсэв, 2004. - 448 с. – (Школьникам, абитуриентам, учащимся). – ISBN 985-478-165-8.

4 **Азевич, А. И**. Математика : руководство для подготовки к экзаменам / А. И. Азевич. – М. : ООО "Издательство Астрель": ООО "Издательство АСТ", 2004. - 158 с. - ISBN 5-271-07754-3, 5-17-020652-6.

5 Алгебра в таблицах. 7- 11 кл. : справочное пособие / авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. – М. : Дрофа, 2002. - 96 с. - ISBN 5-7107-5469-2.

6 Алгебра и начала анализа : сборник задач для подготовки к итоговой аттестации за курс средней школы / И. Р. Высоцкий, Л. И. Звавич, Б. П. Пигарев [и др.] ; под ред. С. А. Шестакова. – М. : МИОО : МЦНМО, 2002. - 208 с. – ISBN 5-94057-074-7.

7 Алгебра и начала анализа. 10 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. М. Колягин [и др.]. – М. : Мнемозина, 2001. - 364 с. – ISBN 5-346-00015-1.

8 Алгебра и начала анализа. 11 класс : учебник для общеобразовательных учреждений / Ю. М. Колягин [и др.] – М. : Мнемозина, 2005. – 240 с. – ISBN 5-346-00481-5.

9 Алгебра и начала анализа : учебник для 10 - 11 кл. средней школы / А. Н. Колмогоров, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын [и др.]; под ред. А. Н. Колмогорова. – М. : Просвещение, 1990. – 320 с. – ISBN 5-09-002691-2.

10 Алгебра. Тесты для 11 кл. Варианты и ответы централизованного (аттестационного) тестирования. – М. : Центр тестирования МО РФ, 2001. - 35 с. – ISBN 5-94635-018-8.

11 **Александров, А. Д.** Геометрия для 10 - 11 классов : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 1995. - 464 с. - ISBN 5-09-006564-0.

12 **Алексеев, И. Г.** Математика. Подготовка к ЕГЭ : учебно-методическое пособие / И. Г. Алексеев. - Саратов : Лицей, 2005. - 112 с. - ISBN 5-8053-0327-2.

13 **Алтынов, П. И.** Алгебра и начала анализа. Тесты. 10 - 11 кл. : учебно-методическое пособие / П. И. Алтынов. – М. : Дрофа, 1999. - 96 с. - ISBN 5-7107-3058-0.

14 **Алтынов, П. И.** Геометрия. Тесты. 10-11 кл. : учебно-методическое пособие / П. И. Алтынов. – М. : Дрофа, 2000. - 80 с. – ISBN 5-7107-3695-3.

15 **Амелькин, В. В.** Задачи с параметрами : справочное пособие по математике / В. В. Амелькин, В. Л. Рабцевич. – Минск : ООО «Асар», 2002. – 464 с. – ISBN 985-6572-47-9.

16 **Бевз, Г. П.** Геометрия, 7-11. / Г. П. Бевз [и др.]. - М: Просвещение, 1994. – 351 с. – ISBN 5-09-006779-1.

17 **Буданцева, М. Б.** Математика: 11 класс. ЕГЭ. 15 вариантов типовых заданий с решениями и ответами / М. Б. Буданцева. – М. : ТЦ Сфера, 2007. – 160 с. – ISBN 978-5-89144-800-1.

18 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (1997) / под ред. И. Н. Сергеева и А. А. Часовских. – М. : Издательство механико-математического факультета МГУ, 1997. - 72 с. – ISBN 5-87597-040-5.

19 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2000) / под ред. И. Н. Сергеева. – М. : Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2000. - 112 с.

20 Варианты вступительных экзаменов по математике в МГУ (2001) / под ред. И. Н. Сергеева. – М. : Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001. - 104 с.

21 **Варшавский, И. К.** Задания по тригонометрии на едином государственном экзамене / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2005. - № 6. - С. 2 – 12.

22 **Варшавский, И. К.** Логарифмические задания на едином государственном экзамене / И. К Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2005. - № 10. - С. 2 - 9.

23 **Варшавский, И. К.** Планиметрия на едином государственном экзамене / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2006. - № 9. - С. 2-14.

24 **Варшавский, И. К.** Планиметрия на едином государственном экзамене / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2007. - № 1. - С. 6-16.

25 **Варшавский, И. К.** Степени, корни и показательная функция в заданиях ЕГЭ / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2005. - № 9. - С. 2 - 12.

26 **Варшавский, И. К.** Стереометрия на едином государственном экзамене / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2006. - № 4. - С. 2 - 9.

27 **Варшавский, И. К.** Стереометрия на едином государственном экзамене / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2006. - № 5. - С. 2 - 10.

28 **Варшавский, И. К.** Текстовые задачи на едином государственном экзамене / И. К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2006. - № 1. - С. 6 - 18.

29 **Варшавский, И. К.** Функция, ее производная и первообразная на ЕГЭ / И К. Варшавский, М. Я. Гаиашвили, Ю. А. Глазков // Математика в школе. - 2005. - № 8. - С. 2 - 15.

30 **Виленкин, Н. Я.** Алгебра и математический анализ для 10 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 1995. – 335 с. – ISBN – 5-09-006090-8.

31 **Виленкин, Н. Я.** Алгебра и математический анализ для 11 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 1995. – 288 с. – ISBN 5-09-006565-9.

32 **Войтович, Ф.С.** Комбинации геометрических тел (вписанные и описанные шары) / Ф. С. Войтович. – Минск : Народная асвета, 1991. – 160 с. – ISBN 5-341-00460-4.

33 Вступительные экзамены в вузы (МГУ, МФТИ) // Математика в школе. - 2003. - № 10. - С. 47 - 71.

34 **Галицкий, М. Л.** Сборник задач по алгебре для 8 - 9 классов : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / М. Л. Галицкий, А. М. Гольдман, Л. И. Звавич. – М. : Просвещение, 1994. - 271 с. – ISBN 5-09-006085-1.

35 **Галицкий, М. Л.** Углубленное изучение алгебры и математического анализа: пособие для учителя / М. Л. Галицкий, М. М. Мошкович, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 1986. - 352 с. - ISBN: 5-09-006592-6.

36 Геометрия в таблицах. 7 -11 кл. : справочное пособие / авт.-сост. Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский. – М. : Дрофа, 2002. - 128 с. – ISBN 5-7107-5444-7.

37 Геометрия. Тесты для 11 кл. Варианты и ответы централизованного (аттестационного) тестирования. – М. : Центр тестирования МО РФ, 2001.- 35 с. – ISBN 5-94635-024-2.

38 **Говоров, В. М.** Сборник конкурсных задач по математике (с методическими указаниями и решениями) : учебное пособие / В. М. Говоров, П. Т. Дыбов, Н. В. Мирошин, С. Ф. Смирнова. – М. : Наука, 1986. - 384 с.

39 **Горнштейн, П. И.** Задачи с параметрами / П. И. Горнштейн, В. Б. Полонский, М. С. Якир. – М. : Илекса, Харьков : Гимназия, 2005. - 326 с. – ISBN 5-89237-021-6.

40 **Гусак, Г. М.** Математика для подготовительных отделений вузов: справочное пособие / Г. М. Гусак, Д. А. Капуцкая. – Минск : Вышэйшая школа, 1989. - 495 с. – ISBN 5-339-00226-8.

41 **Гусев, В. А.** Практикум по элементарной математике. Планиметрия / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. - М. : Вербум - М, 2000. - 112 с. – ISBN 5 -8391-0020-X.

42 **Гусев, В. А.** Практикум по элементарной математике. Геометрия / В. А. Гусев, В. Н. Литвиненко, А. Г. Мордкович. – М. : Просвещение, 1992. – 352 с. – ISBN 5-09-003840-6.

43 **Гусева, К. С.** ЕГЭ. Математика : раздаточный материал тренировочных тестов / К. С. Гусева, С. Л. Никушина, О. И. Судавная. - СПб. : Тригон, 2008. – 96 с. – ISBN 978-5-94684-9.

44 **Гусева, Н. Н.** Математика. Тренировочные задания тестовой формы с развернутым ответом : рабочая тетрадь для учащихся общеобразовательных

учреждений / Н. Н. Гусева, Е. С. Ионова, Л. В. Федотова, Е. А. Шуваева. – М. : Вентана -Граф, 2007. – 96 с. – ISBN 978-5-360-00537-7.

45 **Дворянинов, С.** Две дюжины задач для подготовки к ЕГЭ-2008 / С. Дворянинов // Математика. - 2007. - № 24. – С. 18 – 19, 48.

46 Демоверсия ЕГЭ-2008 // Математика. - 2007. - № 24. – С. 2 – 8.

47 **Денищева, Л. О.** Единый государственный экзамен 2007. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / Л. О. Денищева, Ю. А. Глазков, К. А. Краснянская, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. - ФИПИ – М. : Интеллект-Центр, 2007. - 272 с. – ISBN 5-89790-359-X.

48 **Денищева, Л. О.** Единый государственный экзамен 2008. Математика. Учебно-тренировочные материалы для подготовки учащихся / Л. О. Денищева, Ю. А. Глазков, К. А. Краснянская, А. Р. Рязановский, П. В. Семенов. - ФИПИ – М. : Интеллект-Центр, 2007. - 240 с. – ISBN 978-5-89790-457-0.

49 **Дорофеев, Г. В.** Сборник заданий для подготовки и проведения письменного экзамена по математике (курс А) и алгебре и началам анализа (курс В) за курс средней школы. 11 кл. / Г. В. Дорофеев, Г. К. Муравин, Е. А. Седова. – М. : Дрофа, 2000. – 160 с. – ISBN 5-7107-3285-0.

50 **Дорофеев, Г. В.** Пособие по математике для поступающих в вузы / Г. В. Дорофеев, М. К. Потапов, Н. Х. Розов. – М. : Наука, 1972. - 528 с.

51 **Дудницын, Ю. П.** Содержание и анализ письменных экзаменационных работ по алгебре и началам анализа : пособие для учителя / Ю. П. Дудницын, В. К. Смирнова. – М. : Просвещение, 1995. - 144 с. – ISBN 5-09-005949-7.

52 **Дьячков, А. К.** Единый государственный экзамен. Математика : справочные материалы, контрольно-тренировочные упражнения, задания с развернутым ответом: в 2 ч. – Ч. 1 / А. К. Дьячков, Н. И. Иконникова, В. М. Казак, Е. В. Морозова. – Челябинск : Взгляд, 2006. - 191 с. - ISBN 5-93946-097-6 (ч. 1); ISBN 5-93946-099-2.

53 **Дьячков, А. К.** Единый государственный экзамен. Математика : справочные материалы, контрольно-тренировочные упражнения, задания с развернутым ответом: в 2 ч. – Ч. 2 / А. К. Дьячков, Н. И. Иконникова, В. М. Казак, Е. В. Морозова. – Челябинск : Взгляд, 2006. – 219 с. – ISBN 5-93946-098-4 (ч. 2); ISBN 5-93946-099-2.

54 **Евсеева, А. И.** Уравнения с параметрами / А. И. Евсеева // Математика в школе. - 2003. - № 7. - С. 10 - 14.

55 ЕГЭ - 2008: математика: реальные задания / авт. – сост. В. В. Кочагин, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков [и др.]. – М. : АСТ: Астрель, 2008. – 125 с. – (Федеральный институт педагогических измерений). – ISBN 978-5-17-04885-8 (ООО «Издательство АСТ»); ISBN 978-5-271-19090-2 (ООО «Издательство Астрель»).

56 ЕГЭ 2008. Математика. Тренировочные задания / Корешкова Т.А., Мирошин В.В., Шевелева Н.В. – М. : Эксмо, 2008. – 80 с. – ISBN 978-5-699-23747-0.

57 Единый государственный экзамен 2001. Тестовые задания. Математика / С. В. Климин, Т. В. Стрункина, Е. И. Пантелеева [и др.]. - М-во образования РФ.- М. : Просвещение, 2002. - 24 с. – ISBN 5-09-011327-0.

58 Единый государственный экзамен 2002. Контрольные измерительные материалы. Математика / Л. О. Денищева, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков [и др.]. – М. : Просвещение, 2003. - 127 с. – ISBN 5-09-012141-9.

59 Единый государственный экзамен. Математика. Варианты контрольных измерительных материалов. / авт.-сост. Л. О. Денищева, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков [и др.]. - М. : Центр тестирования Минобразования России, 2002. - 79 с. – ISBN 5-94635-115-Х.

60 Единый государственный экзамен. Математика. Контрольные измерительные материалы: 2006 - 2007. – М.: Просвещение; СПб. : Просвещение, 2007. - 135 с. – ISBN 5-09-015567-4.

61 Единый государственный экзамен по математике : учебно-методическое пособие / сост. В. П. Киселева, А. С. Масленников, А. М. Новоселов [и др.]. - Йошкар-Ола : Научно - информационный центр государственной аккредитации, 2001. - 124 с. – ISBN 5-93727-008-8.

62 **Епеифанова, Т. Н.** Графические методы решения задач с параметрами / Т. Н. Епеифанова // Математика в школе - 2003. - № 7. - С. 17 - 20.

63 Задачи повышенной трудности по алгебре и началам анализа: учебное пособие для 10 -11 классов средней школы / Б. М. Ивлев, А. М. Абрамов, Ю. П. Дудницын, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 1990. - 48 с. – ISBN 5-09-003597-0.

64 Задачи по математике. Алгебра : справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. – М. : Наука, 1987. - 432 с.

65 Задачи по математике. Начала анализа : справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. – М. : Наука, 1990. - 608 с. – ISBN 5-02-014201-8.

66 Задачи по математике. Уравнения и неравенства : справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников, С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. – М. : Наука, 1987. – 240 с.

67 **Заляпин, В.И.** Математика. В помощь поступающим / В. И. Заляпин, Ю. Г. Малиновский, В. А. Могильницкий. – Челябинск : издательство Татьяны Лурье, 2000. - 320 с. – ISBN 5-89851-020-6.

68 **Зив, Б. Г.** Задачи по геометрии для 7-11 классов: книга для учителя / Б. Г. Зив, В. М. Мейлер, А. Г. Баханский. – М . : Просвещение, 1991. – 171 с. – ISBN 5-09-002850-8.

69 **Иванов, М. А.** Математика без репетитора: 800 задач с ответами и решениями для абитуриентов / М. А. Иванов. – М. : Вентана-Граф, 2002. - 320 с. – ISBN 5-9252-0102-7.

70 **Ивлев, Б. М.** Дидактические материалы по алгебре и началам анализа для 10 класса / Б. М. Ивлев, С. М. Саакян, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 1997. - 352 с. – ISBN 5-09-0028-71-0.

71 **Илюшкин, В. А.** Как решать задачи с параметрами на конкурсных экзаменах по математике / В. А. Илюшкин. - М. : Центр заочного обучения "Пифагор", 1994. - 64 с.

72 **Карп, А. П.** Сборник задач по алгебре и началам анализа : учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / А. П. Карп. – М. : Просвещение, 1995. - 176 с. – ISBN 5-09-006589-6.

73 **Клово, А. Г.** 10 настоящих вариантов заданий для подготовки к единому государственному экзамену – 2007 / А. Г. Клово. – М. : Федеральный центр тестирования, 2007. – 94 с. – ISBN 978-5-94635-262-8.

74 **Клово, А. Г.** Единственные реальные варианты заданий для подготовки к единому государственному экзамену. ЕГЭ - 2006. Математика / А. Г. Клово. – М. : Федеральный центр тестирования, 2006. - 94 с. – ISBN 5-94635-260-1.

75 **Клово, А. Г.** Пособие для подготовки к единому государственному экзамену по математике / А. Г. Клово, В. Ю. Калашников, А. М. Середа [и др.]. – М. : Федеральный центр тестирования, 2005. - 393 с. – ISBN 5-94635-220-2.

76 **Клово, А. Г.** Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену ЕГЭ – 2008. Математика / А. Г. Клово. – М. : ФГУ «Федеральный центр тестирования», 2007. – 101 с. – ISBN 978-5-94635-309-0.

77 **Кожухова, С. А.** Свойства функций в задачах с параметром / С. А. Кожухова, С. К. Кожухов // Математика в школе. - 2003. - № 7. - С. 14 -17.

78 Контроль знаний по математике с применением ЭВМ : методическое пособие / М. М. Мирошникова, В. Б. Ожегов, Л. А. Черкасс. – М. : Высшая школа, 1990. - 192 с. – ISBN 5-06-001542-4.

79 **Корешкова, Т. А.** ЕГЭ 2005. Математика. Типовые тестовые задания / Т. А. Корешкова, Ю. А. Глазков, В. В. Мирошин, Н. В. Шевелева. – М. : Экзамен, 2005. - 80 с. – ISBN 5-472-00696-1.

80 **Корешкова, Т. А.** ЕГЭ 2008. Математика. Типовые тестовые задания / Т. А. Корешкова, Ю. А. Глазков, В. В. Мирошин, Н. В. Шевелева. – М. : Экзамен, 2008. – 94 с. - ISBN 978-5-377-01511-6.

81 **Корешкова, Т. А.** ЕГЭ. Математика. Типовые тестовые задания / Т. А. Корешкова, Ю. А. Глазков, В. В. Мирошин, Н. В. Шевелева. – М. : Экзамен, 2007. - 78 с. – ISBN 5-472-02523-0.

82 **Королев, С. В.** Тригонометрия на экзамене по математике: учебное пособие / С. В. Королев. – М. : Экзамен, 2006. - 254 с. – ISBN 5-472-01069-1.

83 **Костицын, В. Н.** Практические занятия по стереометрии / В. Н. Костицын. – М. : Экзамен, 2004. - 160 с. – ISBN 5-94692-764-7.

84 **Кострикина, Н. П.** Задачи повышенной трудности в курсе алгебры 7 - 9 классов / Н. П. Кострикина. – М. : Просвещение, 1991. - 239 с. – ISBN 5-09-002714-5.

85 **Кострюков, А. В.** Математика: учебное пособие для поступающих в вузы / А. В. Кострюков, Г. А. Сикорская. – Оренбург : ГОУ ОГУ, 2004. - 474 с.

86 **Кравцев, С. В.** Методы решения задач по алгебре: от простых до самых сложных / С. В. Кравцев, Ю. Н. Макаров, В. Ф. Максимов, М. И. Нараленков, В. Г. Чирский. – М. : Экзамен, 2005. - 544 с. – ISBN 5-472-00481-0 (переплет); ISBN 5-472-00482-9 (обложка).

87 **Крамор, В. С.** Задачи с параметрами и методы их решения / В. С. Крамор. – М. : ОНИКС : Мир и Образование, 2007. – 416 с. – ISBN 978-5-488-

01066-6 (ООО « Издательство Оникс»); ISBN 978-5-94666-362-5 (ООО «Издательство «Мир и образование»).

88 **Крамор, В. С.** Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа / В. С. Крамор. – М. : Просвещение, 1990. - 416 с. – ISBN 5-09-001295-4.

89 **Крамор, В. С.** Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии / В. С. Крамор – М. : Просвещение, 1992. - 320 с. – ISBN 5-09-003862-7.

90 **Крючкова, И. В.** Методические указания по математике для поступающих в Оренбургский государственный университет / И. В. Крючкова. - Оренбург: ОГУ, 1995. - 89 с.

91 **Лаппо, Л. Д.** ЕГЭ. Математика. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ : учебно-методическое пособие / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. – М. : Экзамен, 2007. – 79 с. – ISBN 5-377-00220-2 (978-5-377-00220-8).

92 **Лаппо, Л. Д.** ЕГЭ. Математика. Практикум по выполнению типовых тестовых заданий ЕГЭ : учебно-методическое пособие / Л. Д. Лаппо, М. А. Попов. – М. : Экзамен, 2008. – 79 с. – ISBN 978-5-377-01322-8.

93 **Литвиненко, В. Н.** Задачи на развитие пространственных представлений : книга для учителя / В. Н. Литвиненко. - М. : Просвещение, 1991. - 127 с. – ISBN 5-09-002712-9.

94 **Липилина, В. В.** Единый государственный экзамен. Математика : учебное пособие для поступающих в вузы / В. В. Липилина. - Оренбург: ГОУ ОГУ, 2005. - 130 с. – ISBN 5-7410-0432-6.

95 **Лурье, М. В.** Задачи на составление уравнений : учебное руководство / М. В. Лурье, Б. И. Александров. - М. : Наука, 1990. - 96 с. – ISBN 5-02-014250-6.

96 **Марков, В. К.** Метод координат и задачи с параметрами : пособие для поступающих в Московский государственный университет / В. К. Марков. – М. : Изд-во МГУ, 1970. – 145 с.

97 Математика. ЕГЭ – 2007: реальные варианты / В. В. Кочагин, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков [и др.]. – М. : АСТ : Астрель, 2007. – 94 с. - ISBN 978-5-17-043899-0/978-5-271-16848-2.

98 Математика. ЕГЭ – 2007. Учебно-тренировочные тесты / под ред. Ф.Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2007. – 176 с. – ISBN 5-902806-15-1.

99 Математика. Контрольные измерительные материалы единого государственного экзамена в 2004 г. – М. : Центр тестирования Минобразования России, 2004. - 176 с. – ISBN 5-94635-217-2.

100 Математика. Подготовка к ЕГЭ - 2008. Вступительные испытания / под ред. Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2007. – 400 с. – ISBN 978-5-902806-36-3.

101 Математика : пособие для подготовки к централизованному тестированию. - Челябинск, 2000. - 104 с.

102 Математика: реальные варианты: ЕГЭ 2007 – 2008 / авт. – сост. В. В. Кочагин, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков [и др.]. – М. : АСТ : Астрель, 2007. – 123 с. – ISBN 978-5-17-043900-3 (ООО «Издательство АСТ»); ISBN 978-5-271-16849-9 (ООО «Издательства Астрель»).

103 Математика: реальные тесты и ответы. - Сергиев посад : ФОЛИО, 2007. - 164 с. - (Единый государственный экзамен – 2007). - ISBN 5-94966-122-2.

104 Математика. Сборник тестов ЕГЭ 2001 – 2008 / под редакцией Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2008. – 192 с. – ISBN 978-5-902806-48-6.

105 Материалы вступительных экзаменов 2003 года // Квант. - 2004. - № 1. - С. 43 - 49, 54 - 60.

106 **Моденов, В. П.** Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод : учебное пособие / В. П. Моденов. – М. : Экзамен, 2006. - 285 с. – ISBN 5-472-01138-8.

107 **Моденов, В. П.** Пособие по математике. Часть 1. / В. П. Моденов. – М. : Из - во МГУ, 1977. – 480 с.

108 **Никольский, С. М.** Алгебра и начала анализа: учебник для 10 класса общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2006. - 432 с. – ISBN 5-09-015108-3.

109 **Никольский, С. М.** Алгебра и начала анализа: учебник для 11 класса общеобразовательных учреждений / С. М. Никольский, М. К. Потапов, Н. Н. Решетников, А. В. Шевкин. – М. : Просвещение, 2006. - 448 с. – ISBN 5-09-15038-9.

110 **Олехник, С. Н.** Сборник задач по алгебре, тригонометрии и элементарным функциям / С. Н. Олехник, М. К. Потапов. – М. : Изд. отдел УНЦ ДО МГУ, 1997. - 132 с. – ISBN 5-88800-086-8.

111 **Панчихин, А. А.** Тригонометрические функции в задачах / А. А. Панчихин, Е. Т. Шавгулидзе. – М. : Наука, 1986. - 160 с.

112 **Петров, В. А.** Об использовании графиков при выполнении заданий ЕГЭ типа С 4 / В. А. Петров // Математика в школе. - 2005. - № 7. - С. 37 - 39.

113 **Петрова, И. Н.** Проценты на все случаи жизни : учебное пособие для учащихся, абитуриентов и учителей / И. Н. Петрова. – Челябинск : Южно-Уральское книжное издательство, 1996. - 128 с. – ISBN 57688-0688-1.

114 **Погорелов, А. В**. Геометрия для 7-11 классов средней школы / А. В. Погорелов. – М. : Просвещение, 1990. – 384 с. – ISBN 5-09-002728-5.

115 **Полозенко, Н. А.** Сборник тестов по математике / Н. А. Полозенко. – СПб.: Специальная литература, 1999. - 144 с. – ISBN 5-86457-048-6.

116 Пособие по математике для поступающих в вузы / под ред. Г. Н. Яковлева. – М. : Наука, 1988. – 720 с. – ISBN 5-02-013745-6.

117 **Потапов, М. К.** Алгебра и анализ элементарных функций / М. К. Потапов, Александров, П. И. Пасиченко. – М. : Наука, 1980. - 560 с.

118 **Потапов, М. К.** Конкурсные задачи по математике: справочное пособие / М. К. Потапов, С. Н. Олехник, Ю. В. Нестеренко. – М. : Наука, 1992. - 480 с. – ISBN 5-02-013956-4.

119 **Прасолов, В. В.** Задачи по планиметрии. Ч.1 / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1991. - 320 с. – (Б-ка мат. кружка. Вып.15). – ISBN 5-02-014642-0 (Ч. 1).

120 **Прасолов, В. В.** Задачи по планиметрии. Ч.2 / В. В. Прасолов. – М. : Наука, 1991. - 240 с. – (Б-ка мат. кружка). – ISBN 5-02-014643-9 (Ч. 2).

121 **Прасолов, В. В.** Задачи по стереометрии / В. В. Прасолов, И. Ф. Шарыгин. – М. : Наука, 1989. – 288 с. – ISBN 5-02-013921-1.

122 Решебник. Математика. ЕГЭ - 2007. Вступительные экзамены / под ред. Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2006. – 688 с. – ISBN 5-902806-19-4.

123 Решебник. Математика. ЕГЭ - 2007. Учебно-тренировочные тесты / под ред. Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2007. – 128 с. – ISBN 5-902806-31-3.

124 **Рурукин, А. Н.** Единый государственный экзамен. Математика. Пособие для подготовки. Подробный разбор заданий 2001 -2003 / А. Н. Рурукин. – М. : ВАКО, 2003. - 256 с. – ISBN 5-94665-048-3.

125 **Руцкова, И. Г.** Иррациональные уравнения и неравенства : методические указания / И. Г. Руцкова. – Оренбург : ОГУ, 1999. – 23 с. – ISBN 5-7410-0448-2.

126 **Руцкова, И. Г.** Методические указания и контрольные работы по математике для слушателей курсов по подготовке к ЕГЭ и вступительным экзаменам в вузы: учебно-методическое пособие / И. Г. Руцкова. – Оренбург : РИК ГОУ ОГУ, 2004. - 232 с.

127 **Руцкова, И. Г.** Уравнения и неравенства с абсолютной величиной : методические указания / И. Г. Руцкова. – Оренбург : ОГУ, 1997. – 18 с. – ISBN 5-7410-0258-7.

128 **Рыжик, В. И.** Дидактические материалы по геометрии для 10 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / И. В. Рыжик. – М. : Просвещение, 2008 – 48 с. - ISBN 978-5-09-015968-5.

129 **Рыжик, В. И.** Дидактические материалы по геометрии для 11 класса: учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики / И. В. Рыжик. – М. : Просвещение, 2000. – 47 с. – ISBN 5-09-009788-7.

130 **Рязановский, А. Р.** Математика. Решение задач повышенной сложности / А. Р. Рязановский, В. В. Мирошин. – М. : Интеллект-Центр, 2007. – 480 с. – ISBN 978-5-89790-381-8.

131 **Саакян, С. М.** Задачи по алгебре и началам анализа : пособие для учащихся 10-11 кл. / С. М. Саакян, А. М. Гольдман, Д. В. Денисов. – М. : Просвещение, 1997. - 256 с.

132 Самое полное издание реальных заданий ЕГЭ 2008: Математика / авт.-сост. В. В. Кочагин, Е. М. Бойченко, Ю. А. Глазков [и др.]. – М. : АСТ : Астрель, 2008. – 124 с. – (Федеральный институт педагогических измерений) – ISBN 978-5-17-049586-3 (ООО «Издательство АСТ»); ISBN 978-5-271-19311-8 (ООО «Издательство Астрель»).

133 Сборник конкурсных задач по математике для поступающих во втузы : учебное пособие / под ред. М. И. Сканави. – М. : Высшая школа, 1988. - 431 с.

134 **Семенов, П.** Структура заданий С в контрольно-измерительных материалах ЕГЭ-2007 / П. Семенов // Математика. - 2007. - № 24. – С. 12 -18.

135 **Сергеев, И.** Кому нужны такие критерии? / И. Сергеев // Математика. - 2007. - № 24. – С. 9 – 12.

136 **Сергеев, И. Н.** Математика. Задачи с ответами и решениями : пособие для поступающих в вузы / И. Н. Сергеев. – М. : КДУ, 2005. – 360 с. – ISBN 5-98227-082-2.

137 Система тренировочных задач и упражнений по математике / А. Я. Симонов, Д. С. Бакаев, А. Г. Эпельман [и др.]. - М. : Просвещение, 1991. - 208 с. – ISBN 5-09-002848-6.

138 Справочник по элементарной математике для поступающих в вузы / под ред. П. Ф. Фильчакова. - Киев: Наукова Думка, 1972. - 528 с.

139 **Столин, А. В.** Комплексные упражнения по математике с решениями. 7 - 11 классы / А. В. Столин. – Харьков : ИМП "Рубикон", 1995. - 240 с. – ISBN 5-7707-3485-X.

140 Тематические тесты. Математика. ЕГЭ – 2008. Часть I (А1 - А10, В1 - В3) / под ред. Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2007. – 256 с. – ISBN 978-5-902806-39-4.

141 Тематические тесты. Математика. ЕГЭ – 2008. Часть II (В4 - В8, С1 – С2) / под ред. Ф. Ф. Лысенко. – Ростов-на-Дону : Легион, 2008. –160 с. – ISBN 978-5-902806-54-7.

142 Тесты. Алгебра 11 класс. Варианты и ответы централизованного (аттестационного) тестирования. – М. : Центр тестирования МО РФ, 2002. - 32 с. – ISBN 5-94635-099-4.

143 Тесты. Геометрия 11 класс. Варианты и ответы централизованного (аттестационного) тестирования. – М. : Центр тестирования МО РФ, 2002. - 32 с. – ISBN 5-94635-103-6.

144 Тесты. Математика. Варианты и ответы централизованного (абитуриентского) тестирования. – М. : ФГУ «Федеральный центр тестирования», 2007. - 95 с. – ISBN 978-5-94635-332-8.

145 Тесты. Математика. 5 -11 кл. - М.: ООО "Агентство "КРПА "Олимп": ООО "Издательство АСТ", 2002. - 425 с. – ISBN 5-17-004248-5 (ООО «Издательство АСТ»); ISBN 5-7390-0897-2 (КРПА «Олимп»).

146 **Ткачук, В. В.** Математика – абитуриенту / В. В. Ткачук. – М. : МЦНМО, 2005. - 944 с. – ISBN 5-94057-059-3.

147 Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика / авт.-сост. Л. О. Денищева, Ю. А. Глазков [и др.]. – М. : Интеллект - Центр, 2002. - 104 с. – ISBN 5-89790-129-5.

148 Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика / авт.-сост. Л. О. Денищева, Ю. А. Глазков [и др.]. - М. : Интеллект - Центр, 2003. - 128 с. – ISBN 5-89790-158-9.

149 Учебно-тренировочные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. Математика / авт.-сост. Л. О. Денищева, Ю.А. Глазков [и др.]. – М. : Интеллект - Центр, 2004. - 176 с. – ISBN 5-89790-200-3.

150 **Фетисов, А. И.** Геометрия в задачах : пособие для учащихся школ и классов с углубленным теоретическим и практическим изучением математики / А. И. Фетисов. – М. : Просвещение, 1977.

151 **Хэкало, С. П.** Необходимые и достаточные условия в задачах с параметрами / С. П. Хэкало //Математика в школе. - 2003. - № 7. - С. 20 - 23.

152 **Цыпкин, А. Г.** Справочник по математике для средней школы / А. Г. Цыпкин. - М. : Наука, 1979. - 400 с.

153 **Цыпкин, А. Г.** Справочник по методам решения задач по математике для средней школы / А. Г. Цыпкин, А. И. Пинский. – М. : Наука, 1989. - 576 с. – ISBN 5-02-013792-8.

154 **Черкасов, О. Ю.** Проверь свои знания по математике / О. Ю. Черкасов, А. Г. Якушев. – М. : Издательский отдел УНЦ ДО МГУ, 1997. - 96 с. – ISBN 5-88800-045-0.

155 **Шагин, В. Л.** 30 задач за 90 минут (Пособие для подготовки к ЕГЭ по математике и конкурсным экзаменам в вузы) / В. Л. Шагин. – М. : Вита-Пресс, 2003. – 112 с. – ISBN 5-7755-0607-3.

156 **Шарыгин, И. Ф.** Планиметрия. 9 - 11 кл. От учебной задачи к творческой : пособие для учащихся / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2001. - 400 с. – ISBN 5-7107-3283-4.

157 **Шарыгин, И. Ф.** Решение задач: учебное пособие для 10 класса общеобразовательных учреждений / И. Ф. Шарыгин. – М. : Просвещение, 1994. – 252 с. – ISBN -5-09-005948-9.

158 **Шарыгин, И. Ф.** Факультативный курс по математике. Решение задач : учебное пособие для 11 класса средней школы / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев. – М. : Просвещение, 1991. - 384 с. – ISBN 5-09-001288-1.

159 Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. ЕГЭ - 2006. Математика. – М. : Федеральное государственное учреждение "Федеральный центр тестирования", 2005. - 102 с. – ISBN 5-94635-247-4.

160 Экзаменационные материалы для подготовки к единому государственному экзамену. ЕГЭ – 2007. Математика. – М. : Федеральный центр тестирования, 2006. - 108 с. - ISBN: 5-94635-296-2 (978-5-94635-296-3).

Приложение А
(справочное)

Демонстрационный и тренировочные варианты ЕГЭ 2009 года

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1 - А10 и В1 - В3) базового уровня по материалу курса математики. К каждому заданию А1 - А10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1 – В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4 - В11, С1, С2) по материалу курса математики. К заданиям В4 - В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 — записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два — алгебраических (С3, С5) и одно - геометрическое (С4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Часть 1

При выполнении заданий А1 - А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\frac{10^{1,4}}{10^{0,7}}$.

1) 0,7 2) 2 3) $10^{0,7}$ 4) 10^2

А2. Вычислите: $\sqrt[3]{0{,}064 \cdot 27}$.

1) 0,36 2) 3,4 3) 1,2 4) 0,012

А3. Вычислите: $log_2 400 - log_2 25$.

1) 8 2) 2 3) 3 4) 4

А4. На одном из рисунков (см. рисунок 120) изображен график функции $y = log_2 x$. Укажите номер этого рисунка.

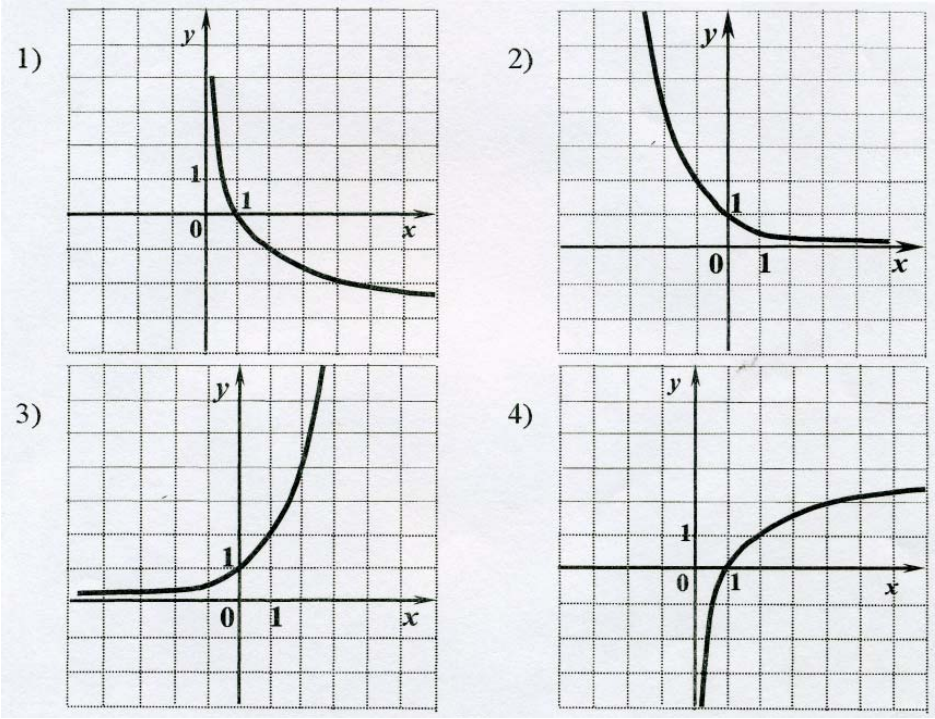


Рисунок 120

А5. Найдите производную функции $h(x) = e^x - 4x^2$.

1) $h'(x) = e^x - \frac{4}{3}x^3$ 2) $h'(x) = e^x - 8x$

3) $h'(x) = e^x - 2x$ 4) $h'(x) = e^x - 4x$

А6. Найдите множество значений функции $y = 3cos\,x$.

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $[-3; 3]$ 3) $[-1; 1]$ 4) $[0; 3]$

А7. На рисунке (см. рисунок 121) показано изменение уровня воды водохранилища в течение 12 часов во время паводка. Как только уровень воды превысил отметку 10 метров, через сливные отверстия в плотине начали сбрасывать воду до того момента, пока её уровень понизился до отметки 10 метров. Определите, сколько часов длился сброс воды.

1) 10 2) 2 3) 6 4) 4

Рисунок 121

А8. Решите неравенство $\frac{6x+18}{7x} \le 0$.

1) $[-3; 0) \cup (0; +\infty)$ 2) $[-3; 0)$ 3) $[-3; +\infty)$ 4) $(-\infty; -3] \cup (0; +\infty)$

A9. Решите уравнение $cos\,x-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$.

1) $(-1)^n\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$ 2) $\pm\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$

3) $\frac{\pi}{4}+2\pi n,\ n\in Z$ 4) $\pm\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$

A10. Решите неравенство $4^{6x+11}\geq 16$.

1) $(-\infty;-1{,}5]$ 2) $[-1{,}5;\ +\infty)$ 3) $\left[-\frac{5}{3};+\infty\right)$ 4) $\left(-\infty;\ -\frac{5}{3}\right]$

Ответом на задания В1 - В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Найдите $cos\,\alpha$, если $sin\,\alpha=\frac{4}{5},$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

В2. На рисунке (см. рисунок 122) изображен график функции $y=f(x)$ и касательная к нему в точке с абсциссой x_0. Найдите значение производной в точке x_0.

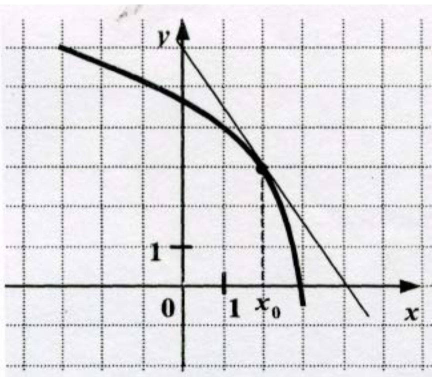


Рисунок 122

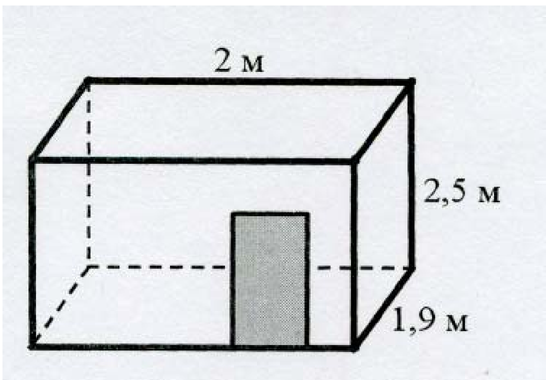


Рисунок 123

В3. Для оклейки стен ванной комнаты (см. рисунок 123) нужно приобрести керамическую плитку, причем плитка покупается с запасом в 10% от оклеиваемой площади. Ширина двери равна 0,75 м, высота – 2 м. Цена плитки 300 р. за 1 м^2. Определите стоимость плитки, если стены решено оклеить полностью, от пола до потолка.

Часть 2

B4. Решите уравнение $5^x + 20 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^x - 125 = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение.)

B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (-2; 7). На рисунке (см. рисунок 124) изображен график её производной. Укажите точку минимума функции $y = f(x)$ на промежутке (-2; 7).

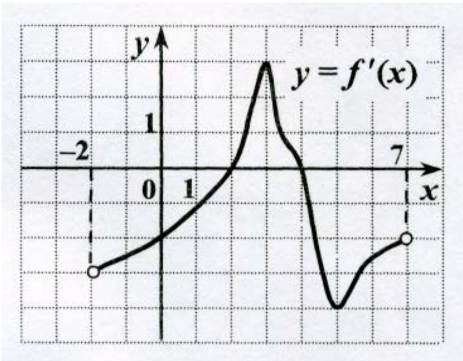


Рисунок 124

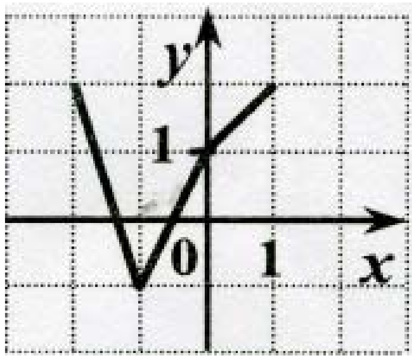


Рисунок 125

B6. Вычислите значение выражения $6^{log_6 5} + 100^{lg \sqrt{8}}$.

B7. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 3. На рисунке (см. рисунок 125) изображен график этой функции при $-2 \le x \le 1$. Найдите значение выражения $\dfrac{f(-1) \cdot f(9)}{f(-2)}$.

B8. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\left||x| + 5 - a\right| = 2$ имеет ровно 3 корня. (Если значений a более одного, то в бланке ответов запишите их сумму.)

B9. Объемы ежегодной добычи нефти первой, второй и третьей скважинами относятся как 6 : 7 : 10. Планируется уменьшить годовую добычу нефти из первой скважины на 10% и из второй - тоже на 10%. На сколько процентов нужно увеличить годовую добычу нефти из третьей скважины, чтобы суммарный объем добываемой нефти не изменился?

B10. Концы отрезка MK лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Угол между прямой MK и плоскостью основания цилиндра равен 30°, $MK = 8$, площадь боковой поверхности цилиндра равна 40π. Найдите периметр осевого сечения цилиндра.

B11. Средняя линия прямоугольной трапеции равна 9, а радиус вписанной в неё окружности равен 4. Найдите большее основание трапеции.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем - решение.

С1. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\dfrac{2x}{x^2+16}$ при $|x-5,5|\le 2,5$.

С2. Найдите все значения $x,$ при каждом их которых выражения $\dfrac{sin 2x}{tgx}$ и $\dfrac{\sqrt{2}\,sin^4\frac{x}{2}-\sqrt{2}\,cos^4\frac{x}{2}}{tgx}$ принимают равные значения.

Часть 3

Для записи ответов на задания (С3—С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем - обоснованное решение.

С3. Найдите все значения $x>1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a=log_2 x+2log_x 32-2$ и $b=41-log_2^2 x^2$ больше 5.

С4. Около правильной пирамиды $FABC$ описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания ABC пирамиды. Точка M лежит на ребре AB так, что $AM : MB = 1 : 3$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Объем пирамиды $TBCM$ равен $\dfrac{5}{64}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $FABC$.

С5. Найдите все значения параметра $p,$ при каждом из которых уравнение $(1{,}5p-7)\cdot 32^{0{,}4x+0{,}2}+(29p-154)\cdot 0{,}125^{-\frac{x}{3}}+11p-41=0$ имеет ровно $10p-p^2-24$ различных корней.

Ответы: **А1)** 3; **А2)** 3; **А3)** 4; **А4)** 4; **А5)** 2; **А6)** 2; **А7)** 4; **А8)** 2; **А9)** 2; **А10)** 2; **В1)** 0,6; **В2)** - 1,5; **В3)** 5940; **В4)** 2; **В5) 2**; **В6)** 13; **В7)** - 0,5; **В8)** 7; **В9)** 13; **В10)** 28; **В11)** 12; **С1)** 0,2; **С2)** $(-1)^{n+1}\cdot\dfrac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in Z$; **С3)** $(1;8)\cup(32;+\infty)$; **С4)** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$; **С5)** 6.

С решениями заданий С1 – С5, критериями проверки и оценки можно ознакомиться на сайте www.fipi.ru.

Тренировочные варианты ЕГЭ 2009

Вариант 1

Часть 1

При выполнении заданий А1 - А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\dfrac{6^{1,7}}{6^{0,7}}$.

1) $6^{0,7}$ 2) 2 3) 0,7 4) 6^2

А2. Вычислите: $\sqrt[3]{0{,}008 \cdot 27}$.

1) 0,18 2) 0,006 3) 3,2 4) 0,6

А3. Вычислите: $log_3 15 + log_3 0{,}2$.

1) 1 2) 2 3) -1 4) $log_3 15{,}2$

А4. На рисунке (см. рисунок 126) изображен график одной из данных функций. Укажите эту функцию.

1) $y = \left(\dfrac{1}{7}\right)^x$ 2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 3) $y = 7^x$ 4) $y = 3^x$

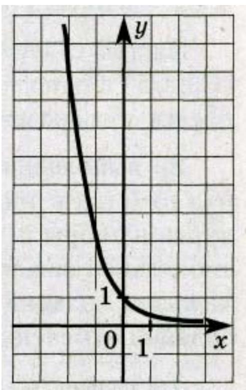


Рисунок 126

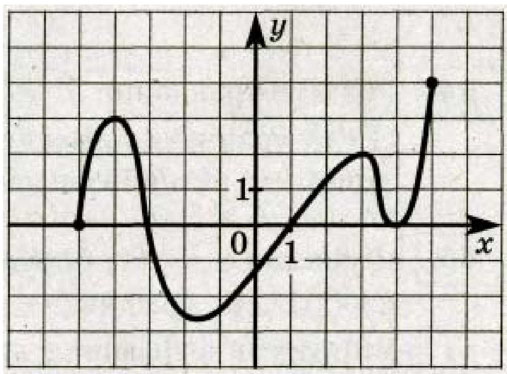


Рисунок 127

А5. Найдите производную функции $y = 20x^4 - e^x$.

1) $y' = 80x^3 - xe^{x-1}$ 2) $y' = 4x^5 - \dfrac{e^{x+1}}{x+1}$ 3) $y' = 80x^3 - e^x$ 4) $y' = 5x^3 - xe^{x-1}$

А6. Найдите множество значений функции $y = 11 cos\, x$.

1) [0; 11] 2) [-1; 1] 3) (- ∞; + ∞) 4) [-11; 11]

А7. Функция задана графиком (см. рисунок 127). Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.

1) (-5; 0) 2) (- 3; 1) 3) (-3; 4) 4) (-5; 4)

А8. Решите неравенство $\frac{6x+18}{7x} \le 0$.

1) [- 3; 0) ∪ (0; + ∞) 2) [- 3; 0) 3) [- 3; + ∞) 4) (- ∞; -3] ∪ (0; + ∞)

А9. Решите уравнение $sin\, x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0$.

1) $\pm \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$

А10. Решите неравенство: $49^x \ge 7^{2-2x}$.

1) [- 0,5; + ∞) 2) [0,5; + ∞) 3) (- ∞; 1,5] 4) [1; + ∞)

Ответом на задания В1 - В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $7 \cdot 5^{log_5 x} = x + 21$.

В2. Решите уравнение $\sqrt{7x^2 - 24} = -x$.

В3. Найдите значение выражения $2 + 4tg^2 x \cdot cos^2 \alpha$, если $sin\, \alpha = 0{,}6$.

Часть 2

В4. Решите уравнение $5^x - 20 \cdot \left(\sqrt{5}\right)^x - 125 = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение).

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (a, b). На рисунке 128 изображен график её производной. Найдите число точек минимума функции $y = f(x)$ на промежутке (a, b).

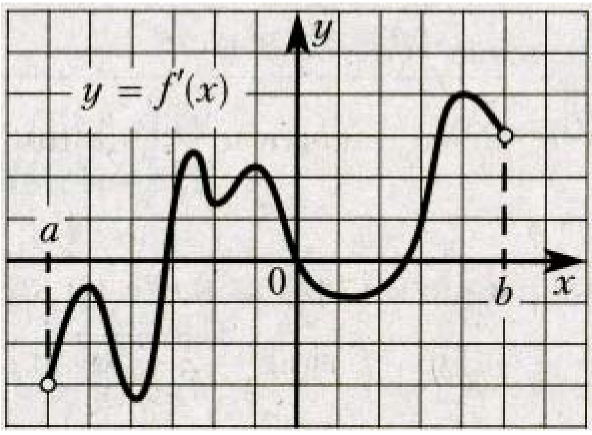


Рисунок 128

В6. Найдите значение выражения $log_{\frac{1}{3}}\left(3\sqrt{3} - \sqrt{18}\right) + log_{\frac{1}{3}}\left(3\sqrt{3} + \sqrt{18}\right)$.

В7. Найдите количество целочисленных решений неравенства

$$\frac{x^2 + 2x - 15}{3 + \sqrt{9 - x^2}} \leq 0\,.$$

В8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой, является нечетной и периодической с периодом 8. На промежутке [-4; 1) она задается формулой $f(x) = -x^2 - 4x - 2$. Найдите значение выражения $4f(-18) + 3f(16)$.

В9. Двум операторам поручили набрать на компьютере текст книги объемом 315 страниц. Один оператор, отдав второму 144 страницы книги, взял остальные страницы себе. Первый выполнил свою работу за 19 дней, а второй свою – за 12. На сколько процентов нужно было увеличить часть работы второго оператора (уменьшив часть работы первого), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое число дней?

В10. Точки K и M лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла наклона прямой KM к плоскости основания цилиндра равен 0,6, KM = 10, объем цилиндра равен 150π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

В11. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если ее диагональ равна $2\sqrt{13}$, а средняя линия равна 4.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Найдите наибольшее значение функции $\dfrac{8x}{x^2+16}$ при $|x+5{,}5| \le 2{,}5$.

С2. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $3x^2 \log_3(2+3x) - 6x \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[3]{2+3x}$ и $3x^2 + 2x$ принимают равные значения**.**

Для записи ответов на задания этой части (С3 - С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения параметра $x > 1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a = \log_3 x + 9\log_x 9 - 6$ и $b = \log_x\left(81x^2\right)$ больше 3.

С4. В шар радиусом $\sqrt{22}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая AC_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 45°. Найдите объем призмы.

С5. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых число различных корней уравнения $\dfrac{(7p+3)x+35p-2}{x+5} = p^2+3$ равно числу различных корней уравнения $(p+3)x^2 + 2x(p+9) + 27 = 0$.

Ответы: **А1)** 1; **А2)** 4; **А3)** 1; **А4)** 2; **А5)** 3; **А6)** 4; **А7)** 2; **А8)** 2; **А9)** 4; **А10)** 2; **В1)** 3,5; **В2)** - 2; **В3)** 3,44; **В4)** 4; **В5)** 2; **В6)** -2; **В7) 7**; **В8)** 34; **В9)** 25; **В10)** 60; **В11)** 24; **С1)** - 0,8; **С2)** 0; $\frac{1}{3}$; **С3)** $x \in (1; 81) \cup (729; +\infty)$; **С4)** $72\sqrt{2}$; **С5)** -3; 7; 9.

Текст данного варианта и ответы к нему приводятся по пособию Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2009. – С. 250 – 254. Там же можно ознакомиться с решениями заданий С1 – С5 этого варианта.

Вариант 2

Часть 1

При выполнении заданий А1 - А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\dfrac{7^{2,7}}{7^{0,9}}$.

1) 7^3 2) 1,8 3) 3 4) $7^{1,8}$

А2. Вычислите: $\sqrt[4]{625 \cdot 0{,}0016}$.

1) 1 2) 5,2 3) 0,05 4) 0,001

А3. Вычислите: $log_3 15 + log_3 0{,}6$.

1) 1 2) 2 3) -1 4) 0

А4. На рисунке (см. рисунок 129) изображен график одной из данных функций. Укажите эту функцию.

1) $y = \left(\dfrac{1}{7}\right)^x$ 2) $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 3) $y = 7^x$ 4) $y = 3^x$

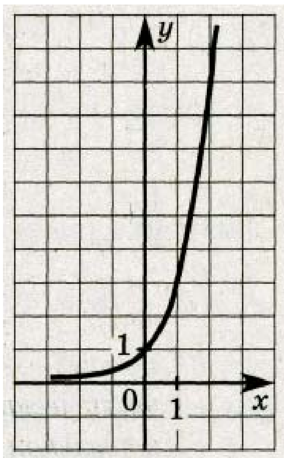


Рисунок 129

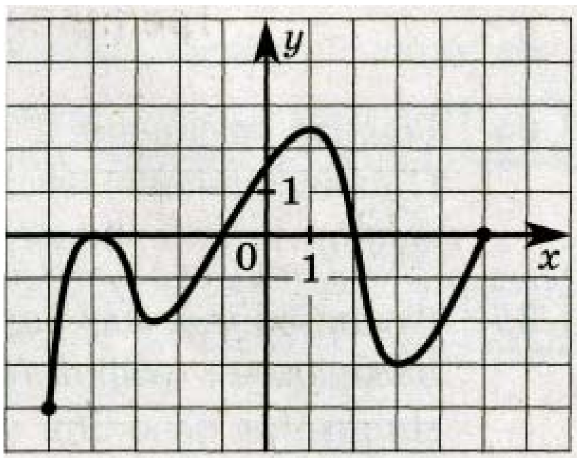


Рисунок 130

А5. Найдите производную функции $y = e^x - 0{,}3x^2$.

1) $y' = e^x - 0{,}6x$ 2) $y' = xe^{x-1} - 0{,}1x^3$ 3) $y' = e^x - 0{,}1x^3$ 4) $y' = e^x - 0{,}9x$

А6. Найдите наибольшее целое значение функции $y = 6{,}5\, sin\, x$.

1) 1 2) 6 3) 7 4) 0

А7. Функция задана графиком (см. рисунок 130). Укажите промежуток, на котором она принимает только положительные значения.

1) (0; 5)   2) (-1; 5)   3) (-1; 2)   4) (-4; 2)

А8. Решите неравенство $\frac{5x+15}{2x} \geq 0$.

1) [-3; 0)$\cup$(0; + ∞)   2) [-3; 0)   3) [-3;+ ∞)   4) (- ∞; -3]$\cup$(0; + ∞)

А9. Решите уравнение $\sin x - \frac{1}{2} = 0$.

1) $\pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$

3) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$ 4) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$

А10. Решите неравенство: $8^{3x} \leq 2^{4x+15}$.

1) (- ∞; -15]   2) (- ∞; 3]   3) [3; + ∞)   4) [-15; + ∞)

Ответом на задания В1 - В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $5 \cdot 4^{\log_4 x} = 7{,}2 - 3x$.

В2. Решите уравнение $\sqrt{4x^2 - 27} = -x$.

В3. Найдите значение выражения $2 + 3tg^2 x \cdot \cos^2 x$, если $\sin x = 0{,}4$.

Часть 2

В4. Решите уравнение $2^x - 6 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^x - 16 = 0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите их произведение).

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (a; b). На рисунке 131 изображен график её производной. Найдите число точек минимума функции $y = f(x)$ на промежутке (a; b).

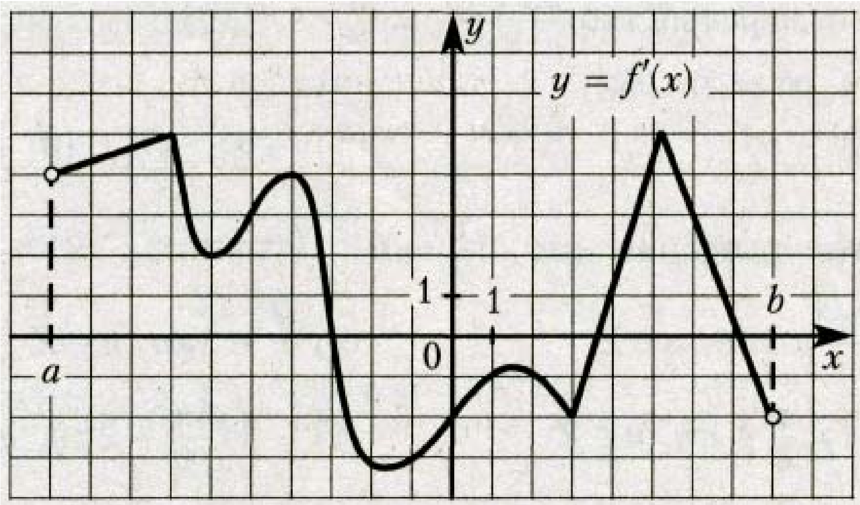


Рисунок 131

B6. Вычислите значение выражения $81^{log_9 \sqrt{19}} - 7^{log_7 8}$.

B7. Найдите количество целочисленных решений неравенства $\dfrac{x^2 - 2x - 24}{4 + \sqrt{16 - x^2}} \leq 0$.

B8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является периодической с периодом 7. На отрезке [- 5; 0) она задается формулой $f(x) = 2 - |x + 1|$. Найдите значение выражения $4f(17) - 3f(-13)$.

B9. Двум сотрудникам издательства получили отредактировать рукопись объемом 560 страниц. Один сотрудник, отдав второму 480 страниц рукописи, взял остальные страницы себе и выполнил свою часть работы за время, в 8 раз меньшее, чем второй – свою. На сколько страниц меньше первый сотрудник должен был отдать второму (добавив себе), чтобы они, работая с прежней производительностью, выполнили свою работу за одинаковое время?

B10. Точки B и D лежат на окружностях двух оснований цилиндра. Синус угла между прямой BD и плоскостью основания цилиндра равен 0,3, BD=15, объем цилиндра равен 450π. Найдите площадь осевого сечения цилиндра.

B11. В параллелограмме $ABCD$ биссектриса угла B пересекает сторону CD в точке T и прямую AD в точке M. Найдите периметр треугольника ABM, если $BC = 15$, $BT = 18$, $TM = 12$.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Найдите наименьшее значение функции $f(x)=\dfrac{-5x}{x^2+4}$ при $|x+3,5|\le 2,5$

С2. Найдите все значения x, при каждом из которых выражения $x^2 \log_2(3x+1)-x\log_{\frac{1}{2}}\sqrt[3]{3x+1}$ и $3x^2+x$ принимают равные значения.

Часть 3

Для записи ответов на задания С3 – С5 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С3. Найдите все значения параметра $0<x<1$, при каждом из которых наибольшее из двух чисел $a=\log_{0,25}x-2\log_x 16+2$ и $b=\log_x\left(\dfrac{x^6}{16}\right)$ больше 7.

С4. В шар радиусом $0,5\sqrt{11}$ вписана правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$. Прямая BA_1 образует с плоскостью BCC_1 угол 45°. Найдите объем призмы.

С5. Найдите все значения параметра p, при каждом из которых число различных корней уравнения $\dfrac{(2-3p)x+7+6p}{x-2}=p^2+2$ равно числу различных корней уравнения $(4-3p)x^2-(p-4)x+1=0$.

Ответы: **А1)** 4; **А2)** 1; **А3)** 2; **А4)** 4; **А5)** 1; **А6)** 2; **А7)** 3; **А8)** 4; **А9)** 3; **А10)** 2; **В1)** 0,9; **В2)** - 3; **В3)** 2,48; **В4)** 6; **В5)** 2; **В6)** 11; **В7)** 9; **В8)** - 4; **В9)** 240; **В10)** 90; **В11)** 80; **С1)** 0,75; **С2)** 0; $\dfrac{7}{3}$; **С3)** $x\in\left(0;\dfrac{1}{256}\right)\cup\left(\dfrac{1}{16};1\right)$; **С4)** 4,5; **С5)** $-4;-3;\dfrac{4}{3}$.

Текст данного варианта и ответы к нему приводятся по пособию Единый государственный экзамен 2009. Математика. Универсальные материалы для подготовки учащихся / ФИПИ – М.: Интеллект-Центр, 2009. – С. 260 – 264.

Приложение Б
(справочное)

Демонстрационный и тренировочные варианты ЕГЭ 2008 года

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин). Работа состоит из трех частей и содержит 26 заданий.

Часть 1 содержит 13 заданий (А1 - А10 и В1 - В3) обязательного уровня по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10 - 11 классов. К каждому заданию А1 - А10 приведены 4 варианта ответа, из которых только один верный. При выполнении этих заданий надо указать номер верного ответа. К заданиям В1 – В3 надо дать краткий ответ.

Часть 2 содержит 10 более сложных заданий (В4 - В11, С1, С2) по материалу курса «Алгебра и начала анализа» 10 - 11 классов, а также различных разделов курсов алгебры и геометрии основной и средней школы. К заданиям В4 - В11 надо дать краткий ответ, к заданиям С1 и С2 — записать решение.

Часть 3 содержит 3 самых сложных задания, два — алгебраических (С3, С5) и одно - геометрическое (С4). При их выполнении надо записать обоснованное решение.

За выполнение работы выставляются две оценки: аттестационная отметка и тестовый балл. Аттестационная отметка за усвоение курса алгебры и начал анализа 10 - 11 классов выставляется по пятибалльной шкале. При ее выставлении не учитывается выполнение четырех заданий (В9, В10, В11, С4). В тексте работы номера этих заданий отмечены звездочкой.

Тестовый балл выставляется по 100-балльной шкале на основе первичных баллов, полученных за выполнение всех заданий работы.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Часть 1

При выполнении заданий А1 - А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Выполните действия: $6c^{\frac{3}{7}} + 4\left(c^{\frac{1}{7}}\right)^3$.

1) $70c^{\frac{3}{7}}$ 2) $70c^{\frac{6}{7}}$ 3) $10c^{\frac{6}{7}}$ 4) $10c^{\frac{3}{7}}$

А2. Найдите значение выражения $4 \cdot 3^{log_3 5}$.

1) $log_3 20$ 2) 625 3) $12 log_3 5$ 4) 20

А3. Вычислите: $\frac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1) 1 2) $\frac{1}{3}$ 3) 9 4) 27

А4. На одном из рисунков (см. рисунок 132) изображен график четной функции. Укажите этот рисунок.

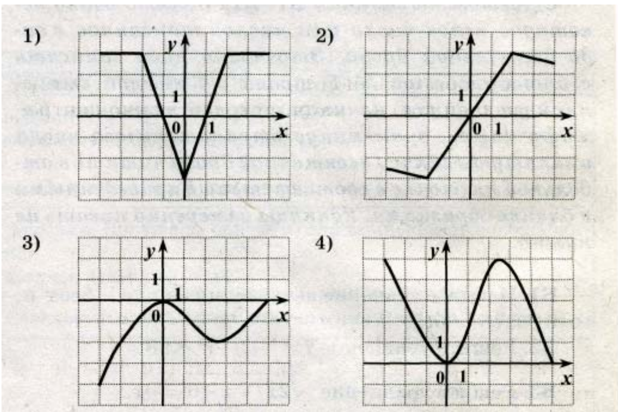


Рисунок 132

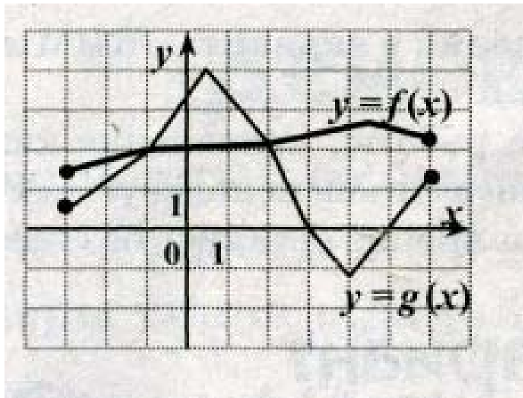


Рисунок 133

А5. Найдите производную функции $y = x^6 - 4 sin x$.

1) $y' = 6x^5 + 4 cos x$ 2) $y' = 6x^5 - 4 cos x$

3) $y' = \frac{x^7}{7} + 4 cos x$ 4) $y' = x^5 - 4 cos x$

А6. Найдите множество значений функции $y = 1,5 + log_{2,5} x$.

1) $(-\infty; +\infty)$ 2) $(0; +\infty)$ 3) $(1,5; +\infty)$ 4) $(-\infty; 1,5)$

А7. Решите уравнение $cos 2x = 1$.

1) $\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$ 2) $\pi n, n \in Z$ 3) $\frac{\pi n}{2}, n \in Z$ 4) $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

А8. Решите неравенство $log_{\frac{1}{7}}(x + 3) > -1$.

1) $(-\infty; 7)$ 2) $(-\infty; 4)$ 3) $(-3; 4)$ 4) $(-3; 7)$

А9. На рисунке (см. рисунок 133) изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке [- 3; 6]. Укажите те значения x, для которых выполняется неравенство $f(x) \ge g(x)$.

1) [-1; 2] 2) [- 3; 3] $\cup$ [5; 6] 3) [- 3; 2] 4) [- 3; - 1] $\cup$ [2; 6]

А10. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^{5-4x} - \frac{1}{27}}$.

1) (0,5; + ∞) 2) (- ∞; 0,5] 3) [0,5; + ∞) 4) [2; + ∞)

Ответом на задания В1 - В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Найдите значение выражения $3sin^2 \alpha - 5cos^2 \alpha$, $cos\, \alpha = -0{,}5$.

В2. Решите уравнение $7^{x+1} - 5 \cdot 7^x = 98$.

В3. Решите уравнение $\sqrt{2x^2 - x - 6} = -x$.

Часть 2

В4. Вычислите значение выражения $log_2 sin\frac{\pi}{12} + log_2 sin\frac{\pi}{6} + log_2 sin\frac{5\pi}{12}$.

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке А(-7; 14). Найдите $f(-7)$.

В6. Найдите количество целочисленных решений неравенства $6 - 5x - x^2 \ge 0$, удовлетворяющих неравенству $1 + tg^2\frac{\pi x}{4} > 0$.

В7. Решите уравнение $25x^2 - 20x + 6 = \left(\sqrt{2} - cos\frac{5\pi x}{4}\right) \cdot \left(\sqrt{2} + cos\frac{5\pi x}{4}\right)$.

(Если уравнение имеет более одного корня, то в бланке ответов запишите сумму всех его корней).

B8. Функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой и является четной периодической функцией с периодом, равным 6. На отрезке [0; 3] функция задана формулой $f(x) = 2 + 2x - x^2$. Определите количество нулей этой функции на отрезке [- 5; 4].

B9*. В комиссионном магазине цена товара, выставленного на продажу, ежемесячно уменьшается на одно и тоже число процентов от предыдущей цены. Определите, на сколько процентов каждый месяц уменьшалась цена магнитофона, если, выставленный на продажу за 4000 рублей, он через два месяца был продан за 2250 рублей.

B10*. Основание прямой треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ - правильный треугольник ABC, сторона которого равна $8\sqrt{3}$. На ребре BB_1 отмечена точка P так, что $BP : PB_1 = 3 : 5$. Найдите тангенс угла между плоскостями ABC и ACP, если расстояние между прямыми BC и AC_1 равно 16.

B11*. Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если точки M, P и K - середины сторон AB, CD, EF соответственно.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наибольшее значение функции $f(x) = \left|\sqrt{1-x^2} - 2\right| + \sqrt{1-x^2} + x^3 - 3x^2$.

C2. Решите уравнение $log_{3-4x^2}\left(9 - 16x^4\right) = 2 + \dfrac{1}{log_2\left(3 - 4x^2\right)}$.

Часть 3

Для записи ответов на задания (С3—С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения ***a***, для которых при каждом x из промежутка $(-3; -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ **не равно** значению выражения ax^2.

С4*. Отрезок PN - диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды PNML наибольший. Найдите синус угла между прямой NT и плоскостью PMN, если T — середина ребра ML.

С5. Решите уравнение $f(g(x))+g(3+f(x))=30$, если известно, что $f(x)=0{,}5x^4-4x+5$ и $g(x)=\begin{cases}25, & x\ge 4,\\ 2^x+\dfrac{9}{5-x}, & x<4.\end{cases}$

Тренировочные варианты ЕГЭ 2008

Вариант 1

Часть 1

При выполнении заданий А1 - А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $m^{5,4}\cdot 6m^{-0,2}$.

1) $6m^{5,2}$ 2) $6m^{5,6}$ 3) $6^{-0,2}m^{5,6}$ 4) $6^{-0,2}m^{5,2}$

А2. Вычислите: $\dfrac{\sqrt[3]{189}}{3\sqrt[3]{7}}$.

1) 1 2) $\dfrac{1}{3}$ 3) 9 4) 27

А3. Вычислите: $log_6 12 - log_6 72$.

1) - 2 2) -1 3) 2 4) 4

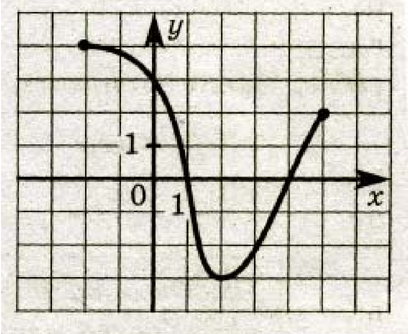


Рисунок 134

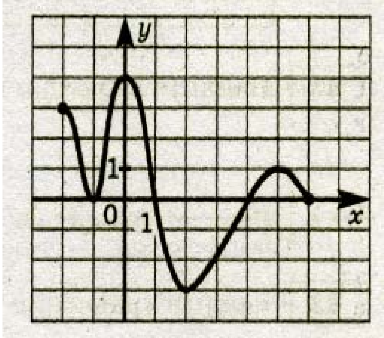


Рисунок 135

А4. Функция задана графиком (см. рисунок 134). На каком из указанных промежутков она возрастает?

1) [1; 4] 2) [2; 5] 3) [0; 5] 4) [-2; 1]

А5. Найдите производную функции $y = 14x^6 + e^x$.

1) $y' = 20x^5 + e^x$ 2) $y' = 2x^7 + \dfrac{e^{x+1}}{x+1}$ 3) $y' = 84x^5 + xe^{x-1}$ 4) $y' = 84x^5 + e^x$

А6. Найдите множество значений функции $y = 3\sin x$.

1) [-3; 3] 2) [0; 3] 3) [-1; 1] 4) (- ∞; + ∞)

А7. Функция задана графиком (см. рисунок 135). Укажите промежуток, на котором она принимает только отрицательные значения.

1) (-2; -1) 2) (-2; 0) 3) (1; 4) 4) (-1; 4)

А8. Решите неравенство $\dfrac{3+x}{(x-9)(x-1)} \le 0$.

1) (- ∞; -3] 2) (- ∞; -3] ∪ (1; 9) 3) (- ∞; - 9) 4) [- 3; 1) ∪ (9; + ∞)

А9. Решите уравнение $\sin x = 0$.

1) $\dfrac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$ 2) $\dfrac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$ 3) $2\pi n,\ n \in Z$ 4) $\pi n,\ n \in Z$

А10. Найдите область определения функции $y = \sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^{5-4x} - \dfrac{1}{27}}$.

1) [0,5; + ∞) 2) (- ∞; 0,5] 3) (0,5; + ∞) 4) [2; + ∞)

Ответом на задания В1 - В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке строго по образцу в верхней части бланка. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Найдите значение выражения $2\sin^2\alpha + 6\cos^2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}2$.

В2. Решите уравнение $3^{x+2} + 6 \cdot 3^x = 5$.

В3. Решите уравнение $\sqrt{3x^2 - 4x + 5} - 2x = 0$.

Часть 2

B4. Вычислите значение выражения

$$log_{\pi} sin\frac{\pi}{2} + log_2 cos^2\frac{\pi}{12} + log_2 cos^2\frac{5\pi}{12}.$$

B5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = f(x)$ в точке M(4; - 9). Найдите $f'(4)$.

B6. Сколько целочисленных решений неравенства $6 + 5x - x^2 \geq 0$ удовлетворяют условию $1 + ctg^2\left(-\frac{6\pi x}{5}\right) \geq 0$?

B7. Решите уравнение $25x^2 + 60x + 39 = \left(\sqrt{3} - cos\frac{5\pi x}{4}\right)\left(\sqrt{3} + cos\frac{5\pi x}{4}\right)$.

B8. Функция f определена на всей числовой прямой, является нечетной и периодической с периодом 8. На отрезке [0; 4] она задана равенством $f(x) = 4x - x^2$. Определите количество решений уравнения $f(x) = -1$ на отрезке [- 5; 5].

B9*. Для выполнения заказа первый рабочий должен сделать 660 деталей, а второй - 620. При этом первый должен делать на 2 детали в день больше второго и закончить работу на один день раньше второго. Сколько деталей в день должен делать второй рабочий, чтобы заказ был выполнен в срок?

B10*. В правильной треугольной пирамиде отношение длины высоты к длине стороны основания равно $2:\sqrt{3}$. Найдите угол между плоскостью основания этой пирамиды и плоскостью сечения, проходящего через сторону основания и середину противолежащего бокового ребра.

B11*. Площадь равнобедренного треугольника ABC равна 90, а боковая сторона равна $10\sqrt{3}$. К основанию AB и стороне BC проведены высоты CP и AH, пересекающиеся в точке K. Найдите площадь треугольника CKH.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наименьшее значение функции

$$f(x) = \left|\sqrt{4 - x^2} - 6\right| + \sqrt{4 - x^2} + x^4 - 4x^3.$$

С2. Решите уравнение $log_{25-9x^2}\left(625-81x^4\right)=2+\frac{1}{log_3\left(25-9x^2\right)}$.

Часть 3

Для записи ответов на задания этой части (С3 - С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения ***a***, для которых при каждом x из промежутка $[-3;-1)$ значение выражения x^4-7x^2-3 **не равно** значению выражения ax^2.

С4*. В пирамиде FABC грани ABF и ABC перпендикулярны, $FB:FA=8:5$. Тангенс угла между прямой BC и плоскостью ABF равен 5. Точка M выбрана на ребре BC так, что $BM:MC=3:5$. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек M и B. Центр сферы, описанной около пирамиды FABC, лежит на ребре AB, площадь этой сферы равна 256π. Найдите объем пирамиды ABMT.

С5. Решите уравнение $f(g(x))=g(f(x))$, если для каждого действительного числа x известно, что $f(x)=\left|x^2+2x\right|+1$ и $g(x)$ равно наименьшему из чисел 1 и $2^x+4^{x-1}-2$.

Вариант 2

Часть 1

При выполнении заданий А1 - А10 в бланке ответов № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\frac{11^{1,2}}{11^{0,6}}$.

1) $11^{0,6}$ 2) 2 3) $0,6$ 4) 11^2

А2. Найдите значение выражения $2\cdot 3^{log_3 6}$.

1) 1 2) 12 3) 36 4) $6log_3 6$

А3. Вычислите: $\sqrt[3]{32k}\cdot\sqrt[3]{2k^2}$.

1) $\sqrt[3]{16k}$ 2) $8k^2$ 3) $4к$ 4) $4\sqrt[3]{k}$

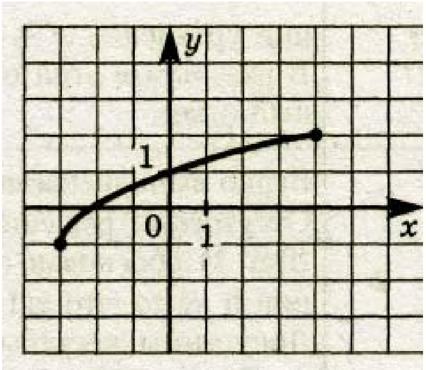


Рисунок 136

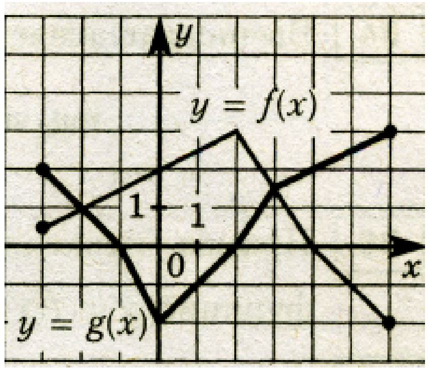


Рисунок 137

А4. Функция задана графиком (см. рисунок 136). Укажите область определения функции.

1) [- 1; 2] 2) [- 3; 4] 3) [- 2; 4] 4) [0; 2]

А5. Найдите производную функции $y = x^7 + 0{,}8x^5 - 6$.

1) $y' = 7x^6 + 4x^4 - 6$ 2) $y' = 7x^7 + 4x^5$

3) $y' = 7x^6 + 4x^4$ 4) $y' = 7x^7 + 4x^5 - 6$

А6. Найдите множество значений функции $y = 9 + log_3 x$.

1)(- ∞; + ∞) 2) (- ∞; 9) 3) (0; + ∞) 4) (9; + ∞)

А7. Решите неравенство $\frac{(x-1)(x+3)}{9x} > 0$.

1) (-3; 0) ∪ (1; + ∞) 2) (-3; 0) ∪ (0; 1)

3) (- ∞; -3) ∪ (0; 1) 4) (- ∞; -3) ∪ (1; + ∞)

А8. На рисунке (см. рисунок 137) изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданных на промежутке [-3; 6]. Укажите те значения *x*, для которых выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$.

1) [-1; 4] 2) [- 3; - 2] ∪ [3; 6] 3) [- 3; - 1] ∪ [2; 6] 4) [- 2; 3]

А9. Решите уравнение $tg5x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

1) $-\frac{5\pi}{6} + 5\pi n,\ n \in Z$ 2) $-\frac{\pi}{30} + \frac{\pi n}{5},\ n \in Z$

3) $-\dfrac{\pi}{30}+\pi n,\ n\in Z$ 4) $-\dfrac{\pi}{6}+\pi n,\ n\in Z$

А10. Найдите область определения функции $log_2(x-5)<4$.
1) (- ∞; 21) 2) (21; + ∞) 3) (5; 9) 4) (5; 21)

Ответом на задания В1 - В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке строго по образцу в верхней части бланка. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $5^{4x+132}=25$.

В2. Решите уравнение $log_5 x+log_5 3=log_5 6$.

В3. Найдите значение выражения $1-3sin^2 x$, если $cos^2 x=0,9$.

Часть 2

В4. Вычислите значение выражения $log_2 sin^2\dfrac{3\pi}{8}+log_2 sin^2\dfrac{\pi}{8}$.

В5. Прямая, проходящая через точку N(6; 16), касается графика функции $y=f(x)$ в точке М(-2; - 8). Найдите $f'(-2)$.

В6. Сколько целочисленных решений неравенства $x^2+11x+18\le 0$ удовлетворяют условию $1+tg^2\left(\dfrac{\pi x}{6}\right)>0$?

В7. Решите уравнение $16x^2+24x+12=\left(\sqrt{3}-cos\dfrac{14\pi x}{3}\right)\left(\sqrt{3}+cos\dfrac{14\pi x}{3}\right)$

В8. Функция f определена на всей числовой прямой, является четной и периодической с периодом 6. На отрезке [- 3; 0] она задана равенством $f(x)=x^2-2x-2$. Определите количество решений уравнения $f(x)=1$ на отрезке [- 7; 5].

B9*. За 200 км до станции назначения поезд был задержан у семафора на час. Затем машинист увеличил на 10 км/ч скорость, с которой поезд ехал до остановки, и поэтому поезд прибыл в пункт назначения по расписанию. С какой скоростью ехал поезд после остановки?

B10*. В основании конуса проведена хорда. Через данную хорду и вершину конуса С проведена плоскость так, что угол при вершине С образовавшегося в сечении треугольника равен 60°, Найдите расстояние от центра основания конуса О до данной плоскости, если высота конуса равна 2, а образующая равна $\frac{8}{3}$.

B11*. Сторона правильного шестиугольника ABCDEF равна $32\sqrt{3}$. Найдите радиус окружности, вписанной в треугольник MPK, если M, P и K - середины сторон AB, CD, EF соответственно.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите наибольшее значение функции

$$f(x)=\left|\sqrt{x-x^2}-4\right|+\sqrt{x-x^2}-x^3+3x^2.$$

C2. Решите уравнение $log_{2-x^2}\left(4-x^4\right)=\frac{1}{log_5\left(2-x^2\right)}+4log_{25}5$.

Часть 3

Для записи ответов на задания этой части (С3 - С5) используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения *a,* для которых при каждом *x* из промежутка $[-5;-1)$ значение выражения x^2-3 не равно значению выражения $(a+4)|x|$.

C4*. Отрезок PM, равный 8, - диаметр сферы. Точки M, L лежат на сфере так, что объем пирамиды PNML наибольший. Найдите площадь треугольника KLT, где K и T — середины ребер PM и NM соответственно.

C5. Решите уравнение $f(g(x)+1)=g(f(x))+1$, если для каждого действительного числа x известно, что $f(x)=3(x-1)-x^2$ и $g(x)$ равно равно наименьшему из чисел - 2 и $1-2^{1-x}-4^{-x}$.

Ответы:

Демонстрационный вариант: **A1)** 4; **A2)** 4; **A3)** 1; **A4)** 1; **A5)** 2; **A6)** 1; **A7)** 2; **A8)** 3; **A9)** 4; **A10)** 3; **B1)** 1; **B2)** 2; **B3)** - 2; **B4)** - 3; **B5)** -2; **B6)** 6; **B7)** 0,4; **B8)** 4; **B9)** 25; **B10)** 0,5; **B11)** 12; **C1)** 2; **C2)** {- 5; 5}; **C3)** $(-\infty-9)\cup\left[\frac{7}{9};+\infty\right)$; **C4)** $\frac{1}{\sqrt{6}}$; **C5)** - 1.

Тренировочный вариант 1: **A1)** 1; **A2)** 1; **A3)** 2; **A4)** 2; **A5)** 4; **A6)** 1; **A7)** 3; **A8)** 2; **A9)** 4; **A10)** 1; **B1)** 5,84; **B2)** - 1; **B3)** 1; **B4)** - 4; **B5)** -2,25; **B6)** 6; **B7)** – 1,2; **B8)** 3; **B9)** 20; **B10)** 45; **B11)** 32; **C1)** -10**; C2)** $\pm\frac{5\sqrt{2}}{6}$; **C3)** $a\in(-\infty;-9]\cup\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$; **C4)** 64; **C5)** $log_2 2(\sqrt{3}-1)$.

Тренировочный вариант 2: **A1)** 1; **A2)** 2; **A3)** 3; **A4)** 2; **A5)** 3; **A6)** 1; **A7)** 1; **A8)** 2; **A9)** 2; **A10)** 4; **B1)** -2,75; **B2)** 2; **B3)** 0,7; **B4)** -3; **B5)** 3; **B6)** 6; **B7)** – 0,75; **B8)** 5; **B9)** 50; **B10)** 1; **B11)** 24; **C1)** 6**; C2)** $\pm\frac{2}{\sqrt{3}}$; **C3)** $a\in(-\infty;-6]\cup(0{,}4;+\infty)$; **C4)** $4\sqrt{5}$; **C5)** $log_2(1+\sqrt{2})$.

Приложение В
(справочное)
Демонстрационный и тренировочный варианты ЕГЭ 2007

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2007 года

Часть 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Найдите значение выражения $4^{6p} \cdot 4^{-4p}$ при $p = \frac{1}{4}$.

1) 1 2) 2 3) 32 4) 4

А2. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[3]{54} \cdot \sqrt{16}}{\sqrt[3]{250}}$.

1) 1,2 2) $\dfrac{6\sqrt[3]{2}}{5}$ 3) 2,4 4) $\sqrt[3]{2}$

А3. Найдите значение выражения $log_4(64c)$, если $log_4 c = -3{,}5$.

1) -6,5 2) – 0,5 3) – 10,5 4) – 67,5

А4. На одном из следующих рисунков (см. рисунок 138) изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

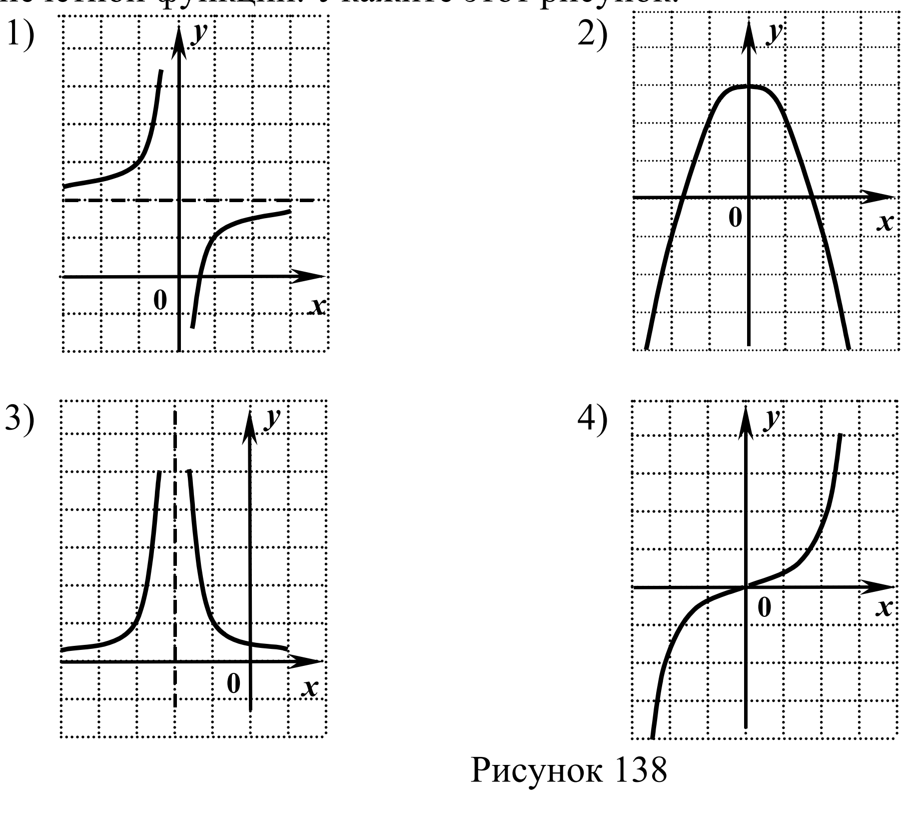


Рисунок 138

А5. Найдите производную функции $y=(x-3)cos\,x$.

1) $y'=cos\,x+(x-3)sin\,x$ 2) $y'=(x-3)sin\,x-cos\,x$

3) $y'=cos\,x-(x-3)sin\,x$ 4) $y'=-sin\,x$

А6. Укажите множество значений функции $y=2^x+5$.

1) $(5;\ +\infty)$ 2) $(0;\ +\infty)$ 3) $(-\infty;\ +\infty)$ 4) $(7;\ +\infty)$

А7. На рисунке (см. рисунок 139) изображены графики функций $y=f(x)$ и $y=g(x)$, заданных на промежутке $[-3;\ 6]$. Укажите множество всех значений x, для которых выполняется неравенство $f(x)\ge g(x)$.

1) [-1; 5]
2) $[-3;\ -2]\cup[4;\ 6]$
3) $[-3;\ -1]\cup[5;\ 6]$
4) $[-2;\ 4]$

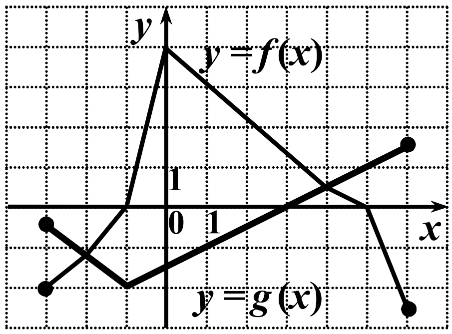


Рисунок 139

А8. Найдите область определения функции $f(x)=\dfrac{25}{3-\sqrt[4]{x}}$.

1) $[0;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$ 2) $[0;\ +\infty)$

3) $[0;\ 81)\cup(81;\ +\infty)$ 4) $(-\infty;\ 81)\cup(81;\ +\infty)$

А9. Решите неравенство $log_{\frac{1}{2}}(7x-21)>log_{\frac{1}{2}}(6x)$.

1) $(-\infty;\ 21)$ 2) $(3;\ 21)$ 3) $(3;+\infty)$ 4) $(21;+\infty)$

А10. Решите уравнение $2cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)-1=0$.

1) $\pm\dfrac{4}{3}+8n$, $n\in Z$ 2) $\dfrac{4}{3}+8n$, $n\in Z$ 3) $\dfrac{4}{3}+8n$, $n\in Z$ 4) $\dfrac{2}{3}+4n$, $n\in Z$

Ответом к заданиям В1 – В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно

В1. Решите уравнение $7\cdot 5^{log_5 x}=x+21$.

B2. Найдите значение выражения $5\sin(\pi+\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$, если $\sin\alpha = 0{,}5$.

B3. Решите уравнение $x^2\sqrt{x-1}-4\sqrt{x-1}=0$. (Если уравнение имеет более одного корня, то в ответе запишите сумму всех его корней).

Часть 2

B4. Найдите значение выражения $2^x - y$, если (x,y) является решением системы уравнений $\begin{cases} 7\cdot 2^x + 6y = 2, \\ 2^{x+1} - 3y = 43. \end{cases}$

B5. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке (- 4; 5). На рисунке (см. рисунок 140) изображен график ее производной. Найдите число касательных к графику функции $y=f(x)$, которые наклонены под углом в $45°$ к положительному направлению оси абсцисс.

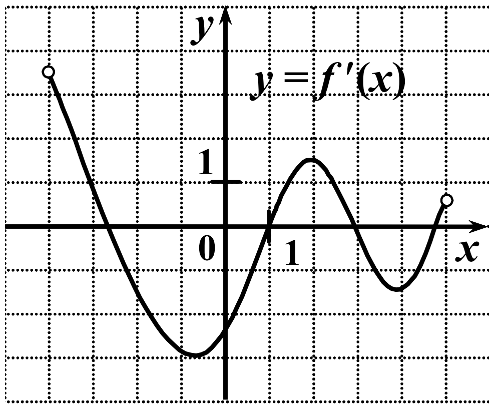


Рисунок 140

B6. Найдите значение выражения $\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+2\sqrt{x-1}}$ при $x=1{,}2007$.

B7. Найдите наименьший корень уравнения $\log_3(x+1)^2+\log_3|x+1|=6$.

B8. Периодическая функция $y=f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 2 и $f(1)=5$. Найдите значение выражения $3f(7)-4f(-3)$.

B9*. Денежный вклад в банк за год увеличивается на 11 %. Вкладчик внес в банк 7000 рублей. В конце первого года он решил увеличить сумму вклада и продлить срок действия договора еще на год, чтобы в конце второго года иметь на счету не менее 10000 рублей. Какую наименьшую сумму необходимо дополнительно положить на счет по окончании первого года, чтобы при той же процентной ставке (11 %) реализовать этот план? (Ответ округлите до целых.)

B10*. Высота правильной четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равна 8, а сторона основания равна $6\sqrt{2}$. Найдите расстояние от вершины A до плоскости A_1BD.

B11*. Дан ромб ABCD с острым углом B. Площадь ромба равна 320, а синус угла B равен 0,8. Высота CH пересекает диагональ BD в точке K. Найдите длину отрезка CK.

Для записи ответов на задания C1 и C2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

C1. Найдите значение функции $f(x)=10^{lg\frac{x^3-3x}{x+5}-log_{0,1}(x+5)}$ в точке максимума.

C2. Решите уравнение $sin\,2x\cdot tgx+1=3sin\,x$.

Часть 3

Для записи ответов на задания (C3 – C5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

C3. Найдите все значения *x*, которые удовлетворяют неравенству $(2a-1)x^2<(a+1)x+3a$ при любом значении параметра *a*, принадлежащем промежутку (1; 2).

C4*. Дана правильная треугольная пирамида со стороной основания, равной $2\sqrt{7}$. Центр основания пирамиды является вершиной конуса, окружность основания которого вписана в боковую грань пирамиды. Найдите радиус основания конуса.

C5. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} y(1-x)^2+x^3=0, \\ 2x-\dfrac{10}{x\,log_y 2}=5log_{32}\left(0{,}125y^2\right)-7. \end{cases}$$

Ответы: **A1)** 2; **A2)** 3; **A3)** 2; **A4)** 4; **A5)** 3; **A6)** 1; **A7)** 4; **A8)** 3; **A9)** 2; **A10)** 1; **B1)** 3,5; **B2)** - 3; **B3)** 3; **B4)** 17; **B5)** 3; **B6)** 2; **B7)** - 10;

B8) - 5; **B9)** 1240; **B10)** 4,8; **B11)** 10; **C1)** 2; **C2)** $\left(-1\right)^n \cdot \dfrac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; **C3)** (-1; 2]; **C4)** 1; **C5)** 2.

Тренировочный вариант ЕГЭ 2007

ЧАСТЬ 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Найдите значение выражения $\dfrac{5^{-5a}}{5^{-14a}}$ при $a = \dfrac{1}{3}$.

1) 5 2) 125 3) 0,125 4) 0,08

А2. Упростите выражение $\dfrac{\sqrt[4]{4} \cdot \sqrt{8}}{\sqrt[4]{256}}$.

1) 1 2) $\sqrt[4]{2}$ 3) 0,5 4) 4

А3. Найдите значение выражения $log_3(14a) - log_3(21a) - log_3(6a)$, если $log_3 a = -2{,}2$.

1) - 2,2 2) 4,2 3) - 4,2 4) 0,2

А4. На одном из следующих рисунков (см. рисунок 141) изображен график четной функции. Укажите этот рисунок.

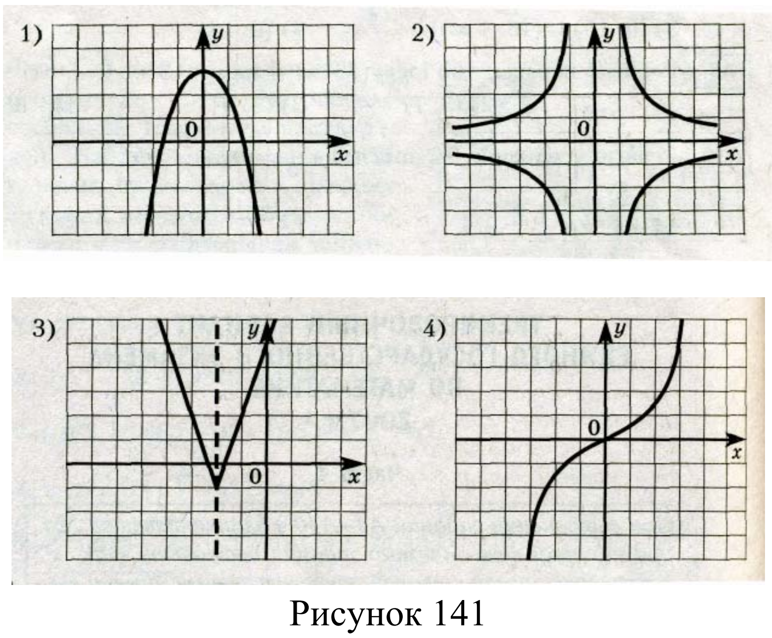


Рисунок 141

А5. Найдите производную функции $f(x) = sin\,x - x\,cos\,x$.

1) $y' = cos\,x + sin\,x$ 2) $y' = x\,sin\,x$ 3) $y' = x\,cos\,x$ 4) $y' = cos\,x - sin\,x$

А6. Укажите множество значений функции $y = -2 - 5^{-x}$.

1) (- 7; + ∞) 2) (- ∞; - 5) 3) (- ∞; - 2) 4) (- 2; + ∞)

А7. На рисунке (см. рисунок 142) Изображены графики функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, заданные на промежутке [-3; 5]. Укажите множество всех значений x, для которых выполняется неравенство $f(x) < g(x)$.

1) (-2; 1) 2) (- 3; -1) ∪ (3; 5) 3) (- 3; -2) ∪ (2; 5) 4) (- 1; 3)

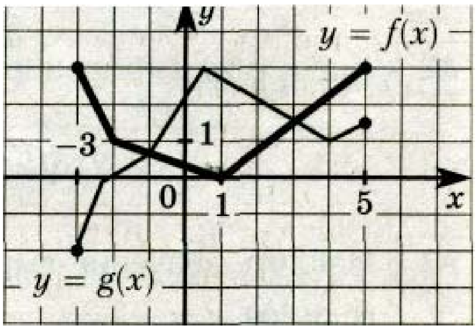


Рисунок 142

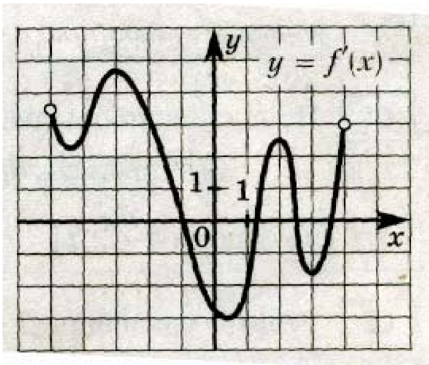


Рисунок 143

А8. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{\sqrt{3-x}}{2-\sqrt[4]{x}}$.

1) [0; 2) ∪ (2; 3] 2) [0; 3] 3) [0; 16) ∪ (16; + ∞) 4) [0; 16]

А9. Решите неравенство $log_{0,2}(7-x) \le log_{0,2}(-3+x)$.

1) (-3; 7) 2) (3; 7) 3) (3; 5] 4) (- 3; 5)

А10. Решите уравнение $0{,}2\,sin(2\pi x) - \dfrac{1}{5} = 0$.

1) $\dfrac{1}{4} + n,\ n \in Z$ 2) $\dfrac{(-1)^n}{2} + n,\ n \in Z$ 3) $n, n \in Z$ 4) $\dfrac{n}{2}, n \in Z$

Ответом к заданиям В1 – В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $16 \cdot 16^{log_4 \sqrt{x}} = 34 - x$.

В2. Найдите значение выражения $4 sin\left(\frac{5\pi}{2} + \alpha\right) \cdot cos\left(\alpha - \frac{7\pi}{2}\right)$**,** если $sin 2\alpha = 0{,}5$.

В3. Решите уравнение $(2x^2 - 9x)\sqrt{2 - x} = -9\sqrt{2 - x}$. (Если уравнение имеет более одного корня, в ответе запишите сумму всех его корней).

Часть 2

В4. Найдите значение выражения $4x + lg\, y$**,** если $(x; y)$ является решением системы уравнений $\begin{cases} 2^{x+1} + lg\, y = 2, \\ lg(y - 2) - lg\frac{8}{y} = 1. \end{cases}$

В5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (-5; 4). На рисунке (см. рисунок 143) изображен график её производной. Найдите число всех касательных, проведенных к графику функции $y = f(x)$, которые образуют с положительным направлением оси абсцисс угол 60°.

В6. Найдите значение выражения $\sqrt{x + 3 - 2\sqrt{x + 2}} + \sqrt{x + 11 - 6\sqrt{x + 2}}$ при x = 4, 5678.

В7. Найдите наименьший корень уравнения

$$log_{0,25} \sqrt[4]{(x^2 - 4x + 4)^2} + log_4 |3 - x| = 0.$$

В8. Периодическая функция $y = f(x)$ определена для всех действительных чисел. Её период равен 7 и $f(11)$ = - 2. Найдите значение выражения $6 + 3f(-17) - 5f(18)$.

В9*. Расстояние между городами А и В равно 900 км. Два поезда одновременно отправляются, один из А в В, другой из В в А. Они встречаются в пункте С. Первый поезд прибывает в город В через 4 часа после встречи со вторым поездом, а второй прибывает в город А через 16 часов после встречи с первым поездом. Определите расстояние АС.

В10*. В пирамиде ABCD AB = DC = 6, AD = AC = CB = BD = $\sqrt{34}$. Найдите объем пирамиды.

B11*. Площадь треугольника ABC равна 60. Точка C является серединой отрезка AC_1. Медиана AA_1 треугольника ABC_1 пересекает сторону BC в точке M. Найдите площадь треугольника CMA_1C_1.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Найдите наибольшее значение функции $f(x)=\sqrt{16+8x+x^2}\left(\dfrac{4x^3}{x+4}-x+4\right)$ на отрезке [-2; 2].

С2. Решите уравнение $2-3\sin\dfrac{x}{2}ctg\dfrac{x}{2}=\sin^2\dfrac{x}{2}-\sin^2\dfrac{x}{4}$.

Часть 3

Для записи ответов на задания (С3 – С5) используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения параметра ***c***, при каждом из которых уравнение $|cx-2|=2c-x$ имеет хотя бы одно решение, принадлежащее промежутку [-2; 1).

С4. В основании прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит прямоугольник ABCD, AB = 1, AD = 2, боковое ребро AA_1 = 3. Шар с центром в точке F касается плоскости AB_1D_1. Точка F лежит на диагонали AC основания параллелепипеда так, что AF = 2FC. Найдите площадь поверхности этого шара.

С5. Найдите количество всех решений системы уравнений

$$\begin{cases} y(1-x^2)+x^3=0, \\ 2x+\dfrac{10}{x\log_y 2}=7+5\log_{32}(8y^2). \end{cases}$$

Ответы: **А1)** 2; **А2)** 1; **А3)** 4; **А4)** 1; **А5)** 2; **А6)** 3; **А7)** 4; **А8)** 2; **А9)** 3; **А10)** 1; **В1)** 2; **В2)** - 1; **В3)** 3,5; **В4)** - 3; **В5)** 4; **В6)** 2; **В7)** 2,5; **В8)** 10; **В9)** 600; **В10)** 24; **В11)** 40; **С1)** 44; **С2)** $\pm\dfrac{2\pi}{3}+4\pi n, n\in Z$; **С3)** [- 1; + ∞); **С4)** $\dfrac{3600\pi}{29}$; **С5)** 1.

Приложение Г
(справочное)

Примеры вариантов ЕГЭ 2005 – 2007 годов

Вариант 2005 года

Часть 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке № 1 под номером выполняемого задания поставьте знак «×» в клеточку, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Вычислите $\dfrac{\sqrt[3]{(-2)^{24}}}{2^5 \cdot \sqrt[4]{(-2)^{24}}}$.

1) 2^3 2) 2^{-3} 3) $2^{\frac{4}{15}}$ 4) $2^{-\frac{4}{15}}$

А2. Найдите значение выражения $\dfrac{2^{-a}}{-4^{\frac{a}{b}}}$, при $a = 2$, $в = 4$.

1) $-2^{2,5}$ 2) $2^{2,5}$ 3) $-0,125$ 4) $0,125$

А3. Найдите значение выражения $5 \cdot 0,5^{\log_{0,25} 4}$.

1) 2, 5 2) 20 3) - 20 4) 10

А4. Упростите выражение $-3\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha - \dfrac{6}{1+tg^2\alpha} + 2$.

1) - 1 2) $\cos 2\alpha$ 3) $-\sin 2\alpha$ 4) -4

А5. На рисунке (см. рисунок 144) изображен график квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$.

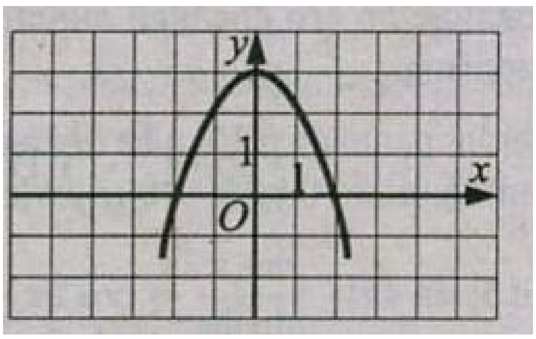


Рисунок 144

Какое из следующих утверждений является истинным?

1) $a > 0, c > 0$ 2) $a < 0, c > 0$ 3) $a > 0, c < 0$ 4) $a < 0, c < 0$

А6. Найдите множество значений функции $y = 3sin3x - 3$.

1) [-1; 1] 2) [- 6; 0] 3) $\left[-3\frac{1}{3}; -2\frac{2}{3}\right]$ 4) $\left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

А7. Решите неравенство $5^{7x-4} \geq 25^x$.

1) $\left[\frac{2}{3}; +\infty\right)$ 2) [0,8; + ∞) 3) $\left(-\infty; \frac{2}{3}\right]$ 4) (- ∞; 0,8]

А8. Решите неравенство $\frac{x^2 - x - 6}{x + 1} > 0$.

1) (- 2; 3) 2) (- ∞; -2)∪(1; 3) 3) (- ∞; -2)∪(3; + ∞) 4) (-2; -1)∪ 3; + ∞)

А9. Решите уравнение $tg2x = \sqrt{3}$.

1) $\frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ 2) $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$

3) $(-1)^n \frac{\pi}{3} + \pi n, n \in Z$ 4) $(-1)^n \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$.

А10. Найдите производную функции $y = 2cos\left(3x^2 \cdot e^x\right)$.

1) $-12x\,sin\left(3x^2 \cdot e^x\right)$ 2) $-12x\,sin\left(3x^2\right)$

3) $-6x(x + 2) \cdot e^x\,sin\left(3x^2 \cdot e^x\right)$ 4) $-2sin\left(6x \cdot e^x\right)$

Ответом на задания В1 – В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $log_5 x - log_5 8 = 3log_5 4$.

В2. Решите уравнение $\sqrt{x^2 - 4x} = x + 2$.

В3. Найдите угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $f(x) = \frac{cos4x^2}{\sqrt{\pi}}$ в его точке с абсциссой $x_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Часть 2

В4. Вычислите $\sqrt[5]{2\sqrt{2}-2}\cdot\sqrt[5]{2+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt[5]{256}$.

В5. Найдите значение выражения $\cos 2x$, если $\sin x=\frac{1}{\sqrt{5}}$.

В6. Функция $y=f(x)$ определена на промежутке [-5; 5]. На рисунке (см. рисунок 145) изображен график её производной. Укажите точку, в которой функция $y=f(x)$ принимает наибольшее значение.

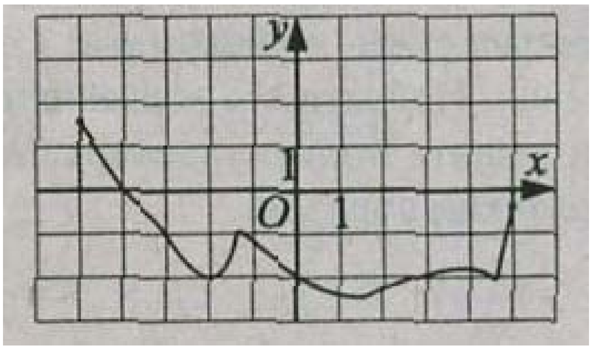


Рисунок 145

В7. Найдите число всех различных корней уравнения $\cos 4x\cdot\sqrt{5x-4}\cdot\sqrt{5-4x}=0$.

В8. Найдите значение функции $y=f(-x)g(-x)f(x)+f(x)g(x)$ в точке $x_0\neq 0$, если $y=f(x)$ - нечетная функция, $y=g(x)$ - четная функция, $f(x_0)=4,\ g(x_0)=3$.

В9. Предприятие предполагает продать продукции на 5% больше, чем в прошлом году. Насколько процентов ему надо понизить цену, чтобы получить на 0,8% больше денег, чем в прошлом году?

В10. В правильном тетраэдре расстояние между скрещивающимися ребрами равно $\sqrt[4]{3}$. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

В11. В равнобедренном треугольнике АВС с основанием ВС высоты BB_1 и CC_1 пересекаются в точке М, при этом ВМ = 10, $MB_1=6$. Найдите площадь треугольника АВМ.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Найдите все значения x, для которых точки графика функции $y = \dfrac{log_2^2(3x-600)}{35-x}$ лежат не выше соответствующих точек графика функции $y = \dfrac{5{,}3}{x-35}$.

С2. Решите уравнение $\sqrt{(5-4lg\,x)^2} + \sqrt{(lg\,x+3)(lg\,x-4)} = 4lg\,x - 5$.

Для записи ответов на задания С3 – С5 используйте бланк ответов № 2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все положительные значения a, при каждом из которых наименьшее из чисел $b = a^{10} - 3a^5 + 4$ и $c = a^{-7}\left(a^{-3} - 5a^2\right) + 2$ больше 2.

С4. Через центр O данной сферы проведено сечение. Точка F выбрана на сфере, а точки A, B, C – на окружности сечения так, что объем пирамиды FABC наибольший. Найдите тангенс угла между FM и плоскостью, проходящей через точки C, F и середину отрезка AB, если M – середина BC.

С5. Даны два уравнения:
$\dfrac{2x^4 + 3(5+p)x - 6\left(6p^2 - 7p + 10\right)}{x^2 + 2p} = 2x^2 - 4p + 1$ и $\dfrac{2^{x-5}}{p+1} = \dfrac{p-1}{\sqrt{x+4}}$. Значение параметра p выбирается таким образом, что число различных корней второго уравнения в сумме с числом $p - 1$ дает число различных корней первого уравнения. Найдите все значения параметра p, удовлетворяющие условию и решите второе уравнения при каждом значении параметра, выбранного указанным способом.

Ответы: **А1)** 2; **А2)** 3; **А3)** 4; **А4)** 1; **А5)** 2; **А6)** 2; **А7)** 2; **А8)** 4; **А9)** 2; **А10)** 3; **В1)** 512; **В2)** - 0, 5; **В3)** 0; **В4)** 4; **В5)** 0,6; **В6)** - 4; **В7)** 3; **В8)** - 36; **В9)** 4; **В10)** 6; **В11)** 60; **С1)** (200; + ∞); **С2)** 10000; **С3)** $\left(0; \sqrt[5]{0{,}5}\right)$; **С4)** $\sqrt{\dfrac{3}{17}}$; **С5)** p=2; x=5.

Текст заданий данного варианта и ответы к ним приводятся по сборнику [104], стр.120 - 126. Там же можно ознакомиться с решениями заданий этого варианта (стр. 137 – 141) и получить представление о других вариантах 2005 года.

Вариант 2006 года

Часть 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\sqrt[5]{5^{10} \cdot q^{15}}$.

1) $5^{15}q^{20}$ 2) $5^{50}q^{75}$ 3) 5^2q^3 4) 5^5q^{10}

А2. Найдите значение выражения $9^{5a} \cdot 9^{-3a}$ при $a = \frac{1}{4}$.

1) $\frac{1}{81}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) 3 4) $4\frac{1}{2}$

А3. Найдите значение выражения $log_6(36t)$, если $log_6 t = -9,8$.

1) - 7,8 2) - 45,8 3) - 11,8 4) - 19,6

А4. Найдите производную функции $y = e^x - 0,9x^2$.

1) $y' = xe^{x-1} - 1,8x$ 2) $y' = e^x - 1,8x$ 3) $y' = e^x - 0,3x^3$ 4) $y' = e^x - 0,81x$

А5. На одном из следующих рисунков (см. рисунок 146) изображен график нечетной функции. Укажите этот рисунок.

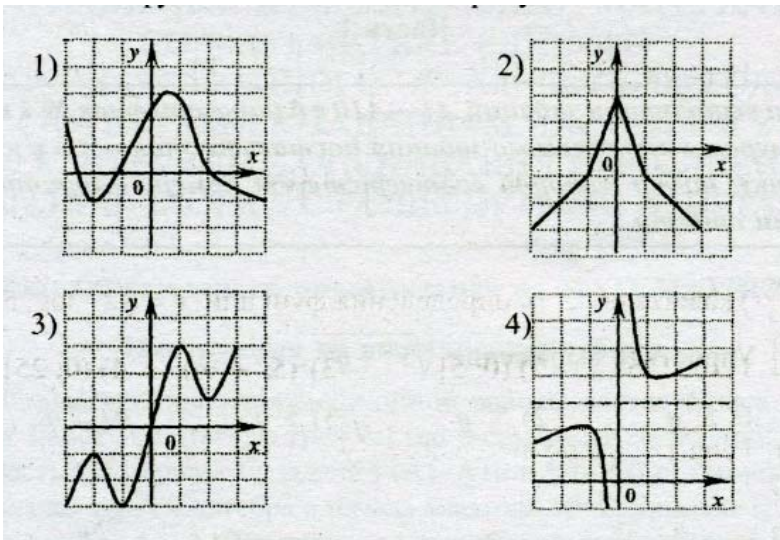


Рисунок 146

А6. Найдите множество значений функции $y = 50^x + 1$.

1) (0; + ∞) 2) (1; 51) 3) (1; + ∞) 4) (50; + ∞)

А7. Решите неравенство $f(x) < 0$, если на рисунке (см. рисунок 147) изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке [- 6; 8].

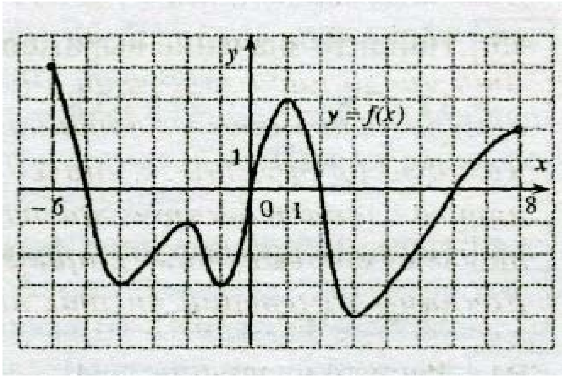


Рисунок 147

1) (- 5; 0) $\cup$ (2; 6)   2) (- 4; 0)   3) (- 3; 4)   4) [- 6; - 4) $\cup$ (- 2; -1) $\cup$ (1; 3)

А8. Решите неравенство $\dfrac{x+5}{(x-1)(5x+3)} \le 0$.

1) (- ∞; - 5]   2) (- ∞; -5] $\cup \left(-\dfrac{3}{5};1\right)$ 3) (1; + ∞)   4) $\left[-5;-\dfrac{3}{5}\right] \cup (1;+\infty)$

А9. Укажите область определения функции $f(x) = \sqrt[6]{2 - log_5 5x}$.

1) (0; 125)   2) (0; 5]   3) (5; + ∞)   4) (0; 25]

А10. Решите уравнение $cos\,3x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

1) $\pm\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in Z$ 2) $(-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in Z$

3) $(-1)^n \cdot \dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in Z$ 4) $\pm\dfrac{\pi}{12} + \dfrac{2\pi n}{3},\ n \in Z$

Ответом на задания В1 – В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак " минус" отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $x \cdot 4^{3x} - 16 \cdot 4^{3x} = 0$.

B2. Найдите значение выражения $5sin^2\alpha + 8cos^2\alpha$, если $sin\alpha = -0{,}2$.

B3. Вычислите: $\sqrt[3]{119} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{49}{17}}$.

Часть 2

B4. Найдите значение выражения $\sqrt{6}tg\alpha\, cos(\pi + \alpha)$, если $sin\alpha = \dfrac{\sqrt{6}}{4}$.

B5. Функция $y = f(x)$ определена на промежутке (- 5; 6). На рисунке (см. рисунок 148) изображен график её производной. Найдите точку x_0, в которой функция $y = f(x)$ принимает наименьшее значение на отрезке [- 4; 5].

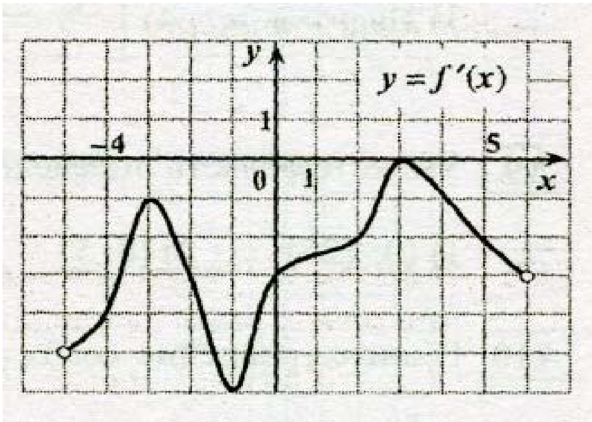


Рисунок 148

B6. Найдите разность между наибольшим и наименьшим значениями функции $y = \sqrt{16 - x^2}$ на отрезке $[-\sqrt{7}; 2\sqrt{3}]$.

B7. Решите уравнение $3^{(\sqrt{3} - sin12\pi x)\cdot(\sqrt{3} + sin12\pi x)} = 27 + (4x - 5)^2$.

B8. Четная функция $y = f(x)$ определена на всей числовой прямой. Для функции $g(x) = 3,7 + \dfrac{f(x - 6,5)}{x - 6,5}$ вычислите сумму $g(6) + g(7)$.

B9*. Три насоса, работая вместе, заполняют цистерну нефтью за 5 часов. Производительности насосов относятся как 4 : 3: 1. Сколько процентов объема цистерны будет заполнено за 8 часов совместной работы второго и третьего насосов?

В10*. Основание прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ - параллелограмм ABCD, в котором $CD = 4\sqrt{3}$ и $\angle C = 120°$. Тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью A_1BC равен 2,5. Найдите высоту призмы.

В11*. Найдите среднюю линию равнобедренной трапеции, описанной около окружности радиуса $\sqrt{5}$, если тангенс угла при основании трапеции равен 0, 5.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Решите уравнение $log_6^2 x + log_6 x + 14 = \left(\sqrt{16 - x^2}\right)^2 + x^2$.

С2. Найдите все значения *x*, при каждом их которых расстояние между соответствующими точками графиков функций $f(x) = 0{,}8 \cdot 5^{0{,}25x+3}$ и $g(x) = 12$ меньше, чем 8.

Часть 3

Для записи ответов на задания С3 – С5 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

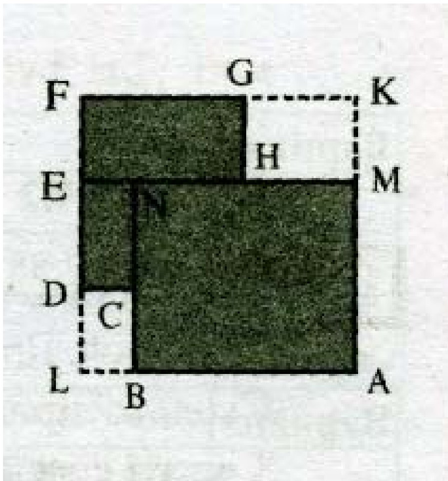


Рисунок 149

С3. Требуется разместить на земле участок площадью 3400 $м^2$, который состоит из трех прямоугольных частей и имеет форму многоугольника ABCDFGHM, изображенного на рисунке (см. рисунок 149), где BC = 20 м, CD = 15 м, GH = 30 м и HM $\geq$ 40 м. Найдите наименьшее значение периметра такого участка и какие-либо значения длин AK, AL и HM, при которых периметр является наименьшим.

С4. Около правильной пирамиды FABC описана сфера, центр которой лежит в плоскости основания АВС пирамиды. Точка М лежит на ребре АВ так, что AM : MB = 1: 5. Точка T лежит на прямой AF и равноудалена от точек М и В. Объем пирамиды TACM равен $\frac{21\sqrt{3}}{16}$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды FABC.

С5. Найдите все значения α**,** при каждом из которых оба числа $2cos\alpha+9$ и $2cos2\alpha+4cos\alpha+4$ являются решениями неравенства $\frac{2-log_2|x-5|}{(49+7x-2x^2)\sqrt{x+1}}\le 0$.

Ответы: **А1)** 3; **А2)** 3; **А3)** 1; **А4)** 2; **А5)** 3; **А6)**3; **А7)** 1; **А8)** 2; **А9)** 2; **А10)** 4; **В1)** 16; **В2)** 7, 88; **В3)** 7; **В4)** - 1,5; **В5)** 5; **В6)** 2; **В7)** 1, 25; **В8)** 7, 4; **В9)** 80; **В10)** 15; **В11)** 1; **С1)** $\frac{1}{36}$; **С2)** (- 8; - 4); **С3)** 280 м, 70 м, 70 м, 40 м ; **С4)** 3; **С5)** $\pm\frac{2\pi}{3}+2\pi n, n\in Z$**.**

С другими вариантами 2006 года можно ознакомиться по пособиям [60], [102].

Вариант 2007 года

Часть 1

При выполнении заданий А1 – А10 в бланке ответов №1 под номером выполняемого задания поставьте знак "×" в клеточке, номер которой соответствует номеру выбранного вами ответа.

А1. Упростите выражение $\sqrt[3]{7^{12}c^{15}}$.

1) 7^9c^{12} 2) 7^4c^5 3) $7^{36}c^{45}$ 4) $7^{15}c^{18}$

А2. Найдите значение выражения $4^{3a}\cdot 4^{-5a}$ при $a=-\frac{1}{2}$.

1) $\frac{1}{2}$ 2) 2 3) 3 4) 4

А3. Вычислите: $log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{225}+log_{\frac{1}{5}}9$.

1) -2 2) 2 3) 25 4) -1

А4. На каком из следующих рисунков (см. рисунок 150) изображен график функции, возрастающей на промежутке [0; 2]?

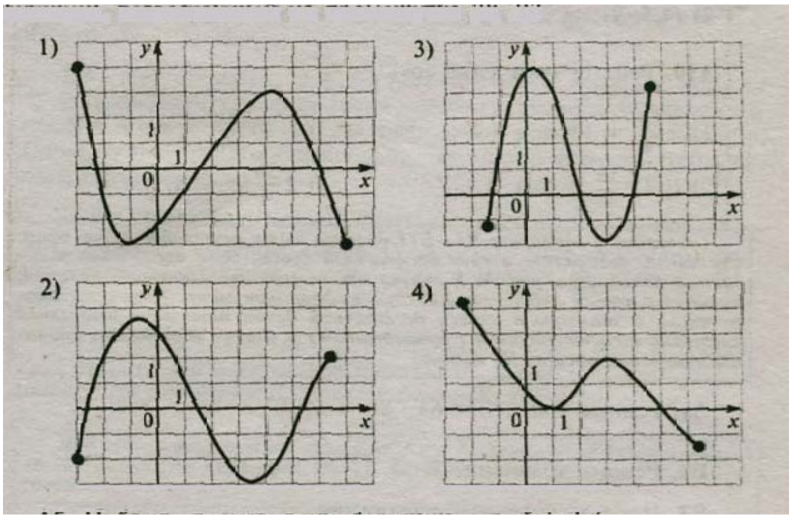


Рисунок 150

А5. Найдите производную функции $y = e^x + 3x^2$.

1) $y' = xe^{x-1} + 6x$ 2) $y' = e^x + x^3$ 3) $y' = e^x + 2x$ 4) $y' = e^x + 6x$

А6. Решите неравенство $f(x) \geq 0$, если на рисунке (см. рисунок 151) изображен график функции $y = f(x)$, заданной на промежутке [-7; 5].

1) [- 5; - 2] ∪ [- 1; 0] ∪ [3; 5] 2) [0; 4]
3) [- 6; -3] ∪ [1; 4] 4) [- 7; - 5] ∪ [- 2; -1] ∪ [0; 3]

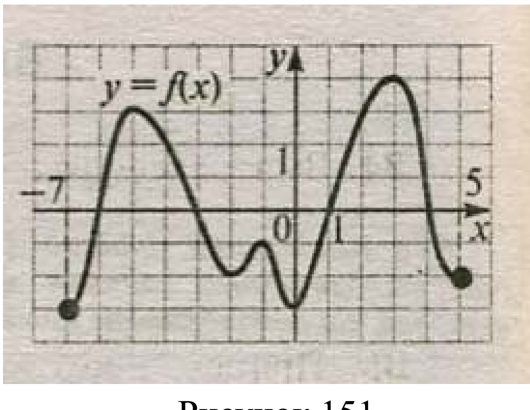


Рисунок 151

А7. Укажите множество значений функции $y = 3^x + 10$.

1) (- ∞; + ∞) 2) (10; + ∞) 3) (0; 10) 4) [13; + ∞)

А8. Найдите область определения функции $f(x) = \dfrac{25}{3 - \sqrt[4]{x}}$.

1) [0; 3)∪(3; + ∞) 2) [0; + ∞) 3)[0; 81)∪(81; + ∞) 4) (- ∞; 81)∪(81; + ∞)

А9. Решите неравенство $log_{\frac{5}{6}}(2x-9) > log_{\frac{5}{6}} x$.

1) (- ∞; 9) 2) (4,5; 9) 3) (4,5; + ∞) 4) (9; + ∞)

А10. Решите уравнение $cos\frac{x}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1) $\pm\frac{5\pi}{4} + 10\pi n,\ \ n \in Z$ 2) $(-1)^n \frac{5\pi}{4} + 5\pi n,\ \ n \in Z$

3) $(-1)^n \frac{5\pi}{4} + \pi n,\ \ n \in Z$ 4) $\pm\frac{5\pi}{4} + 2\pi n,\ \ n \in Z$

Ответом на задания В1 – В11 должно быть некоторое целое число или число, записанное в виде десятичной дроби. Это число надо записать в бланк ответов №1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус отрицательного числа и запятую в записи десятичной дроби пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

В1. Решите уравнение $64 \cdot 8^{2x} + x \cdot 8^{2x} = 0$.

В2. Решите уравнение $7 \cdot 5^{log_5 x} = x + 21$.

В3. Найдите значение выражения $4sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + cos(\pi - \alpha)$, если $cos\alpha = -0,8$.

Часть 2

В4. Вычислите значение выражения $log_{\sqrt{2}} sin\frac{\pi}{8} + log_{\sqrt{2}} sin\frac{3\pi}{8}$.

В5. Прямая, проходящая через начало координат, касается графика функции $y = h(x)$ в точке $N(4;\ -6)$. Найдите $h'(4)$.

В6. Сколько целочисленных решений имеет неравенство $\frac{6-5x-x^2}{3+\sqrt[4]{x}} \geq 0$?

В7. Решите уравнение $2^{\left(\sqrt{3}-cos10\pi x\right)\left(\sqrt{3}+cos10\pi x\right)} = 8 + (20x+3)^2$.

В8. Функция $y = h(x)$ определена на всей числовой прямой и является нечетной периодической функцией с периодом, равным 4. На отрезке [0; 2] функция $y = h(x)$ задана равенством $h(x) = x^2 - 2x$. Определите количество нулей функции $y = h(x)$ на отрезке [- 3; 3].

В9*. Два фермера, работая вместе, могут вспахать поле за 25 часов. Производительности труда первого и второго фермеров относятся как 2 : 5. Фермеры планируют работать поочередно. Сколько времени должен проработать второй фермер, чтобы это поле было вспахано за 45,5 часа?

В10*. Основание прямой призмы $ABCA_1B_1C_1$ - треугольник ABC, площадь которого равна 15, AB = 7. Боковое ребро призмы равно 18. Найдите тангенс угла между плоскостью основания призмы и плоскостью ABC_1.

В11*. В параллелограмме ABCD биссектриса угла D пересекает сторону AB в точке K и прямую BC в точке P. Найдите периметр треугольника CDP, если DK = 18, PK = 24, AD = 15.

Для записи ответов на задания С1 и С2 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем решение.

С1. Найдите точки минимума функции

$$f(x) = \left(6^{\sqrt{1-x}} + 7\right)^2 - 4x^2 - 36^{\sqrt{1-x}} - 14 \cdot 6^{\sqrt{1-x}} + 0{,}5x^4.$$

С2. Решите уравнение $sin^2\left(\frac{2x}{3}\right) + 8sin\left(\frac{2x}{3}\right)sin\left(\frac{x}{3}\right) + 16 = 16cos^2\left(\frac{x}{3}\right).$

Часть 3

Для записи ответов на задания С3 – С5 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем обоснованное решение.

С3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-5; -1]$ значение выражения $x^2 - 3$ не равно значению выражения $(a+4)|x|$.

С4. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На его боковых ребрах AA_1 и BB_1 лежат точки M и P соответственно так, что $AM : MA_1 = 8 : 11$, $B_1P : PB = 2 : 1$. Во сколько раз объем данного параллелепипеда больше объема пирамиды с вершиной в точке P, основанием которой является сечение данного параллелепипеда плоскостью BMD_1?

С5. Докажите, что система уравнений

$$\begin{cases} 10x^3 + 47x^2 + 52x + 12 = 0, \\ log_{8+5x}\left(y + \dfrac{6}{x} + 6\right) = \dfrac{y + 10(x+1)}{y-1} + \sqrt{\dfrac{36}{x} - 5x(7+5x) + 24} \cdot lg(y+1) \end{cases}$$

не имеет решений.

Ответы: **A1)** 2; **A2)** 4; **A3)** 2; **A4)** 1; **A5)** 4; **A6)** 3; **A7)** 2; **A8)** 3; **A9)** 2; **A10)** 1; **B1)** - 64; **B2)** 3,5; **B3)** - 2,7; **B4)** - 3; **B5)** - 1,5; **B6)** 2; **B7)** - 0,15; **B8)** 3; **B9)** 28; **B10)** 4,2; **B11)** 112; **C1)** - 2; **C2)** $3\pi n,\ n \in Z$; **C3)** $(-\infty; -6] \cup (0{,}4; +\infty)$; **C4)** 9; **C5)** верно.

Текст данного варианта и ответы к нему приводятся по [132] (стр.61 – 64, 123 -124). Там же можно ознакомиться с другими вариантами 2007 года.

Так как к моменту подготовки пособия к изданию тексты вариантов 2008 года и 2009 года еще не были открыты для широкого круга читателей, мы не смогли включить соответствующие примеры в данное пособие.

Ознакомиться с ними можно будет по пособиям, которые Федеральный институт педагогических измерений или другие официальные организации выпустят для подготовки к ЕГЭ 2010 и последующих годов.

Приложение Д
(справочное)

Примеры вариантов вступительных экзаменов в Оренбургский государственный университет (в форме тестирования)

Данное приложение содержит примеры вариантов заданий по математике, предлагавшихся на вступительных экзаменах в Оренбургский государственный университет (в форме тестов).

Вариант 1

1. Укажите функцию, график которой наиболее соответствует рисунку (см. рисунок 152)

А) $y = |x-1| + x$;
В) $y = |x-1| + x - 2$;
С) $y = |x-2| + x - 2$;
Д) $y = -|x+2| + x + 2$;
Е) $y = |x+1| + x - 2$.

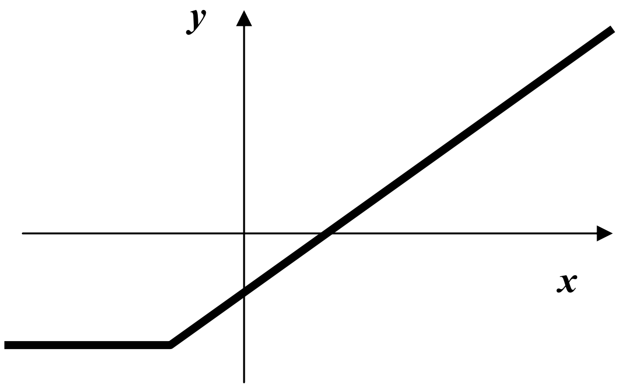


Рисунок 152

2. Из четырех бегунов А, Б, В, Г второе место занял самый старший. При этом А пробежал дистанцию быстрее, чем В; Г - быстрее, чем Б и В. Известно, что Б старше А; В старше Г. Кто на втором месте?

А) определить нельзя; В) А; С) Б; Д) В; Е) Г.

3. Что больше $a = 2^{sin 2}$ или $b = 3^{cos 2}$?

А) $a > b$; В) $a < b$; С) $a = b$; Д) нельзя установить; Е) ответ не указан.

4. Две окружности радиусов $R = 3$ см и $r = 1$ см касаются внешним образом. Найдите расстояние от точки касания окружностей до их общих касательных.

А) 1,4; В) 1,7; С) 1,5; Д) 1,6; Е) ответ не указан.

5. Упростите выражение $\dfrac{3 - 4cos 2x + cos 4x}{8}$.

А) $cos^4 x$; В) $sin^4 x$; С) $cos^2 x$; Д) $2sin^4 x$; Е) ответ не указан.

6. В равнобедренном треугольнике угол при вершине α. Тогда отношение площади треугольника к площади круга, описанного около треугольника, равно:

А) $\frac{sin\alpha}{\pi}$; В) $\frac{2}{\pi}cos\frac{\alpha}{2}$; С) $\frac{2}{\pi}sin\alpha\cdot cos^2\frac{\alpha}{2}$; Д) $\frac{2}{\pi}sin\alpha\cdot cos\frac{\alpha}{2}$;
Е) ответ не указан.

7. Найдите сумму решений уравнения $\left(x^2-x-1\right)^{x^2-1}=1$.
А) 1; В) 2; С) -1; Д) -2; Е) ответ не указан.

8. Решите неравенство $arccos\frac{x}{2}\cdot tgx>0$.
А) $\left(-2;\frac{\pi}{2}\right)$; В) $\left[-2;-\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$; С) $\left(-1;-\frac{\pi}{4}\right)\cup\left(0;\frac{\pi}{4}\right)$; Д) $\left(-1;\frac{\pi}{4}\right)$;
Е) ответ не указан.

9. В двух ящиках 108 кг яблок. Если из первого ящика переложить во второй 10 % яблок, имеющихся в первом ящике, то в обоих ящиках станет яблок поровну. Во втором ящике первоначально было:
А) 40 кг; В) 30 кг; С) 44 кг; Д) 48 кг; Е) ответ не указан.

10. Решите неравенство $\frac{lg(x^2-6x+9)}{lg\sqrt{x-3}}>1$.
А) $(4; +\infty)$; В) $(3; 4)\cup(4; +\infty)$; С) $(3; 4)$; Д) $(0; +\infty)$; Е) ответ не указан.

11. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}=\{3;5;-1\}$ и $\vec{b}=\{1;1;4\}$.
А) $\frac{2\sqrt{210}}{105}$; В) $\frac{2\sqrt{70}}{105}$; С) $\frac{2\sqrt{210}}{35}$; Д) $\frac{2\sqrt{70}}{35}$; Е) $\frac{4\sqrt{70}}{35}$.

12. В уравнении $x^2-x+c=0$ определите c, если его корни удовлетворяют уравнению $2x_1+x_2=0$.
А) $c = 2$; В) $c = -2$; С) $c = 1$; Д) $c = -1$; Е) ответ не указан.

13. Укажите наименьшее целое, положительное значение p, при котором корни квадратного трехчлена $y=x^2+2(p-1)x-(3p+2)$ разных знаков.
А) $p = 3$; В) $p = 1$; С) $p = 2$; Д) $p = 5$; Е) ответ не указан.

14. В геометрической прогрессии третий член больше первого на 9, а второй больше четвертого на 18. Первый член этой прогрессии равен:
А) 2; В) 3; С) - 2; Д) - 3; Е) ответ не указан.

15. Найдите наибольший корень уравнения $\sqrt{x}\cdot\sqrt{2-x}=2x$.
А) 1; В) 0,4; С) 0; Д) 0,2; Е) ответ не указан.

16. Четыре школьника сделали в магазине канцелярских товаров следующие покупки: первый купил пенал и ластик, заплатив 40 копеек, второй купил ластик и карандаш, заплатив 12 копеек, третий купил пенал, карандаш и две тетради, заплатив 50 копеек, четвертый купил пенал и тетрадь. Сколько заплатил четвертый школьник?

А) 40 коп.; В) 70 коп.; С) 50 коп.; Д) 39 коп.; Е) ответ не указан.

17. Найдите сумму корней уравнения $5\cos^2 x - 5\cos x = 1 - 3\sin^2 x$, принадлежащих интервалу $(270°; 450°)$.

А) 900°; В) 720°; С) 630°; Д) 750°; Е) 540°.

18. Упростите выражение $\left(ab^{-3} + a^{-3}b\right)^{-1} \cdot \left(a^{-4} + b^{-4}\right) \cdot \left(\sqrt{(0{,}5)^{-\frac{2}{3}}}\right)^{-9}$.

А) $\frac{1}{8ab}$; В) $8ab$; С) $\sqrt{ab}$; Д) $\frac{a}{8b}$; Е) ответ не указан.

19. Боковые грани правильной треугольной призмы - квадраты. Площадь боковой поверхности призмы равна 144. Найдите объем многогранника, вершинами которого служат центры всех граней призмы.

А) 6; В) 12; С) 24; Д) $6\sqrt{3}$; Е) ответ не указан.

20. Вычислите значение производной функции $f(x) = x^2 \cdot \cos 3x + 2x + 1$ в точке $x = \frac{\pi}{6}$.

А) $2 + \frac{\pi^2}{12}$; В) 2; С) $3 - \frac{\pi^2}{36}$; Д) $2 - \frac{\pi^2}{12}$; Е) $2 + \frac{\pi}{3}$.

Вариант 2

1. Что больше $\alpha = \log_2 21$ или $\beta = \log_3 76$?

А) $\alpha > \beta$; В) $\alpha = \beta$; С) $\alpha < \beta$; D) сравнить нельзя; Е) ответ не указан.

2. Имеется два сосуда. В первом содержится 4 кг, а втором - 6 кг раствора кислоты разных концентраций. Если их слить вместе, то получится раствор, содержащий 35 % кислоты. Если же слить равные веса этих растворов, то получится раствор, содержащий 36 % кислоты. Сколько килограммов кислоты содержится во втором сосуде?

А) 1,64; В) 1,86; С) 1,52; D) 1,78; Е) ответ не указан.

3. Разность длин оснований равнобедренной трапеции равна 8, тангенс угла при основании этой равнобедренной трапеции равен 5/4. Найдите длину высоты трапеции.

A) 1; B) 2; C) 5; D) 4; E) ответ не указан.

4. Выражение $\left(\frac{\sqrt{a}+1}{\sqrt{a}-1}-\frac{\sqrt{a}-1}{\sqrt{a}+1}+4\sqrt{a}\right)\cdot\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$ в результате упрощения имеет вид:

A) $2\sqrt{a}$; B) $4a$; C) $-4a$; D) $-2\sqrt{a}$; E) ответ не указан.

5. В геометрической прогрессии с отрицательными членами первый и третий члены равны соответственно -16 и -4, а n-ый член равен -1. Найдите n.

A) 7; B) 5; C) 6; D) 8; E) ответ не указан.

6. В правильной четырехугольной пирамиде площадь боковой поверхности равна 240, а площадь полной поверхности 384. Найдите длину высоты пирамиды.

A) 8; B) 10; C) 12; D) 6; E) ответ не указан.

7. Какая из указанных функций наиболее соответствует рисунку (см. рисунок 153)?

A) $y=\frac{1}{x}+2$;

B) $y=x^{-3}$;

C) $y=x^{-3}+4$;

D) $y=-x^{-3}$;

E) ответ не указан.

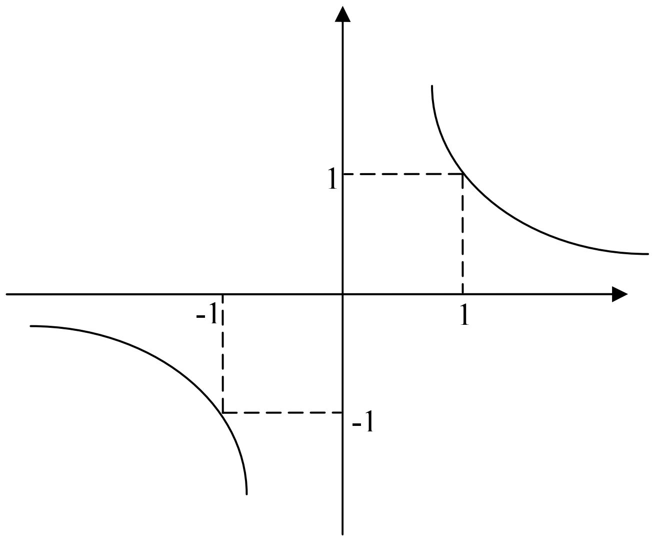


Рисунок 153

8. Определите, под каким углом график функции $y=\frac{1}{\sqrt{3}}\sin x$ пересекает ось OX в начале координат.

A) 15°; B) 30°; C) 45°; D) 60°; E) ответ не указан.

9. Даны вершины треугольника $A(2;3;-2)$; $B(1;5;-4)$; C) $C(1;7;-4)$. Найдите длину медианы AE.

A) $\sqrt{14}$ B) $\sqrt{126}$; C) $\frac{\sqrt{14}}{2}$; D) $\frac{\sqrt{126}}{2}$ E) ответ не указан.

10. Найдите (в градусах) корни уравнения $3tg^2 2x - \sqrt{3}ctg(270° + 2x) = 0$, принадлежащие интервалу (0°; 90°).

A) 60°; B) 75°; C) 30°; D) 15°; E) ответ не указан.

11. Решите уравнение $2log_2 \dfrac{x-7}{x-1} + log_2 \dfrac{x-1}{x+1} = 1$.

A) 3; B) – 17; C) $\left[\begin{array}{l} x = 3, \\ x = -17 \end{array}\right.$; D) 17; E) ответ не указан.

12. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты $\{5;3;9\}$. От какой точки надо отложить $\vec{a}$, чтобы его конец находился в точке $M(1;\, 2;\, -1)$?

A) (4; 1; 10) B) (6; 5; 10) C) (- 4; - 1; - 10) D) (- 6; - 5; - 10)
E) ответ не указан.

13. Если точка (0; - 1) принадлежит параболе с вершиной в точке (1; 4), то уравнение параболы имеет вид:

A) $y = -5x^2 - 10x - 1;$ B) $y = 3x^2 - 2x - 1;$ C) $y = -5x^2 + 10x - 1;$
D) $y = -x^2 - 6x - 1;$ E) ответ не указан.

14. Решите уравнение $5^{x^2+5x} = 0{,}2^4$. В ответ запишите наибольший из корней уравнения.

A) - 1; B) - 4; C) 4; D) 1; E) ответ не указан.

15. Найдите сумму всех целых решений неравенства $\dfrac{\sqrt{x+5}}{-x^2 - 4x - 3} \geq 0$.

A) - 11; B) - 9; C) - 7; D) - 2; E) ответ не указан.

16. Решите неравенство $3^{log_5 x+2} < 3^{log_5 x^2+1} - 12$.

A) $\left(5^{log_3 4}; +\infty\right)$; B) $\left(5^{log_4 3}; +\infty\right)$; C) $\left(0;\, 5^{log_3 4}\right)$; D) $\left(0; 5^{log_4 3}\right)$;
E) ответ не указан.

17. Если $tg\,\alpha = \dfrac{2}{3}$, то значение $cos\left(2\alpha + \dfrac{7\pi}{4}\right)$ равно:

A) $-\dfrac{17\sqrt{2}}{26};$ B) $\dfrac{7\sqrt{2}}{26};$ C) $-\dfrac{7\sqrt{2}}{26};$ D) $\dfrac{17\sqrt{2}}{26};$ E) ответ не указан.

18. Два лыжника стартовали на дистанции 10 км друг за другом с интервалом 6 мин. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от точки старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого лыжника на расстоянии 1 км от точки поворота. Найти скорость первого лыжника.

A) 5 км/ч; B) 12 км/ч; C) 15 км/ч; D) 10 км/ч; E) ответ не указан.

19. Площадь поверхности шара 360 кв.ед., а площадь поверхности цилиндра, описанного около него, равна:

A) 450 кв.ед; B) 540 кв.ед; C) 390 кв.ед; D) 720 кв.ед; E) ответ не указан.

20. Помощник прокурора Сильвия Конти выкуривает за день 5 сигарет. Комиссар Коррадо Каттани выкуривает за день на треть больше сигарет, чем Сильвия за 3 дня. За какое время они вместе выкурят 5 пачек (по 20 сигарет в каждой)?

A) 3 дня; B) 4,5 дня; C) 4 дня; D) более 5 дней; E) ответ не указан.

Вариант 3

1. Даны функции $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ и $g(x)=\sqrt{x}$. Задайте с помощью формулы функцию $g(f(x))$.

A) $\dfrac{1}{1-\sqrt{x}}$; B) $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$; C) $\dfrac{x}{1-\sqrt{x}}$; Д) $\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$; E) ответ не указан.

2. Укажите четность или нечетность функции $f(x)=x+\dfrac{sin\,x}{cos^2 x}$.

A) четная; B) нечетная; C) не является четной и не является нечетной;
Д) невозможно установить; E) ответ не указан.

3. Вычислите $\dfrac{tg37^\circ+tg23^\circ}{1-tg37^\circ\cdot tg23^\circ}$.

A) 1; B) $\dfrac{1}{2}$; C) $\sqrt{3}$; Д) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; E) ответ не указан.

4. Найдите критические точки функции $y=2x-\sqrt{x}$.

A) $x=0$; B) $x=\dfrac{1}{16}$; C) $\left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=\dfrac{1}{16} \end{array}\right.$; Д) нет критических точек;

E) ответ не указан.

5. Решите неравенство $(x^2-9)\sqrt{x+2}<0$.

A) [-3; 3]; B) (-3; 3); C) (-2; 3); Д) [-2; 3]; E) ответ не указан.

6. Найдите наибольший корень уравнения $x+1+x^{-1}+x^{-2}+...=\frac{16}{3}$.

А) 5; В) $\frac{4}{3}$; С) 3; Д) 4; Е) ответ не указан.

7. Решите уравнение $\frac{log_2^2 x - log_2 x - 2}{log_2 x + 1} = 1$.

А) $x = 0{,}125$; В) $x \in \{0{,}5;\ 8\}$; С) $x = 8$; Д) корней нет; Е) ответ не указан.

8. Вычислите $cos\left(\pi - arctg\frac{3}{4}\right)$.

А) $\frac{3}{5}$; В) $-\frac{3}{5}$; С) $-\frac{4}{5}$; Д) $\frac{4}{5}$; Е) ответ не указан.

9. В какой точке кривой, заданной уравнением $y = 2x(1-x)$, тангенс угла наклона касательной к графику данной функции к оси OX равен - 1?

А) $\left(\frac{3}{4};\frac{3}{8}\right)$; В) $\left(-\frac{3}{4};-\frac{21}{8}\right)$; С) (1; 0); Д) (2; - 4); Е) ответ не указан.

10. Сколько корней уравнения $(tgx+1)\cdot sin2x = 0$ принадлежит отрезку $[0;\pi]$?

А) 6; В) 4; С) 3; Д) 5; Е) ответ не указан.

11. На сколько процентов увеличится поверхность шара, если его радиус увеличить на 20 % ?

А) 20%; В) 40%; С) 44%; Д) 56%; Е) ответ не указан.

12. Через одну сторону ромба проведена плоскость на расстоянии 4 м от противоположной стороны. Проекции диагонали на эту плоскость равны 8 м и 2 м. Найдите проекции сторон.

А) 4 и 2; В) 5 и 3; С) 4 и 3; Д) 5 и 2; Е) ответ не указан.

13. Дано: $sin\ \alpha = 0{,}8$ и $90° < \alpha < 180°$. Найти $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

А) 0,5; В) - 0,5; С) 2; Д) -2; Е) ответ не указан.

14. Решите уравнение $\sqrt{1+ctg^2x} = \frac{1}{sin\,x}$.

А) $x \in R$; В) $x \in (2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\ n \in Z$; С) $x \in [2\pi n;\ \pi + 2\pi n),\ n \in Z$;

Д) $x \in (2\pi n;\ \frac{\pi}{2} + 2\pi n),\ n \in Z$; Е) ответ не указан.

15. Решите неравенство $log_4^2\, x + log_4 \sqrt{x} > 1{,}5$.

А) $\left(0; \frac{1}{8}\right) \cup (4; +\infty)$; В) (4; + ∞); С) $\left(-\infty; \frac{1}{8}\right) \cup (4; +\infty)$; Д) $\left(\frac{1}{8}; 4\right)$;

Е) ответ не указан.

16. Высота цилиндра равна 6 см, радиус основания равен 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от неё.

А) 36 см ^{2}; В) 64 см ^{2}; С) 40 см ^{2}; Д) 30 см ^{2}; Е) ответ не указан.

17. Плоскость правильного треугольника KZM и квадрата KMNP взаимно перпендикулярны, KM = a. Расстояние между точками Z и N равно:

А) $\frac{a\sqrt{6}}{2}$; В) $2a$; С) $a\sqrt{2}$; Д) $2a\sqrt{2}$; Е) ответ не указан.

18. Косинус двугранного угла при основании правильного тетраэдра равен:

А) $\frac{1}{2}$; В) $-\frac{1}{2}$; С) $\frac{1}{3}$; Д) $\frac{1}{4}$; Е) ответ не указан.

19. Диагонали параллелограмма 10 м и 12 м. Найдите периметр четырехугольника, стороны которого соединяют середины сторон данного параллелограмма.

А) 20 м; В) 25 м ; С) 22 м; Д) 40 м; Е) ответ не указан.

20. Сколько граней в пирамиде, у которой 20 ребер?

А) 10; В) 11; С) 15; Д) 12; Е) ответ не указан.

21. Количество отрицательных корней уравнения $x^5 + 4x^4 + 4x^3 - x^2 - 4x - 4 = 0$ равно:

А) 3; В) 2; С) 1; Д) нет таких корней; Е) ответ не указан.

22. Число, квадрат которого равен неотрицательному числу, принадлежит множеству:

А) N; В) Z; С) Q; Д) R; Е) ответ не указан.

23. Остаток от деления многочлена $P_n(x)$ на $x^3 + 5x + 6$ равен $x^2 + x - 2$. Определить остаток от деления $P_n(x)$ на $x + 1$.

А) - 2; В) - 1; С) 1; Д) 2; Е) ответ не указан.

24. Парабола, симметричная параболе $y = x^2 - 2x + 1$ относительно оси OX, имеет уравнение:

А) $y = x^2 + 2x + 1$; В) $y = -x^2 + 2x - 1$; С) $y = x^2 - 2x - 1$;
Д) $y = -x^2 - 2x - 1$; Е) ответ не указан.

25. При каких отрицательных значениях a уравнение $\sqrt{x+9} - ax + 1 = 0$ не имеет решения?

А) $\left(-\infty; -\frac{1}{9}\right)$; В) (- ∞; 0); С) $\left(-\frac{1}{9}; 0\right)$; Д) $\varnothing$; Е) ответ не указан.

26. Сколько экстремумов имеет функция $y = 2x^2 - 6|x+1| + 5$?
А) 1; В) 2; С) 3; Д) нет; Е) ответ не указан.

27. Укажите функцию, график которой наиболее соответствует рисунку (см. рисунок 154) $(0 < a < 1)$:

А) $y = a^x + 1$;
В) $y = a^{x+1}$;
С) $y = a^{x-1}$;
Д) $y = a^{-x} + 1$;
Е) ответ не указан.

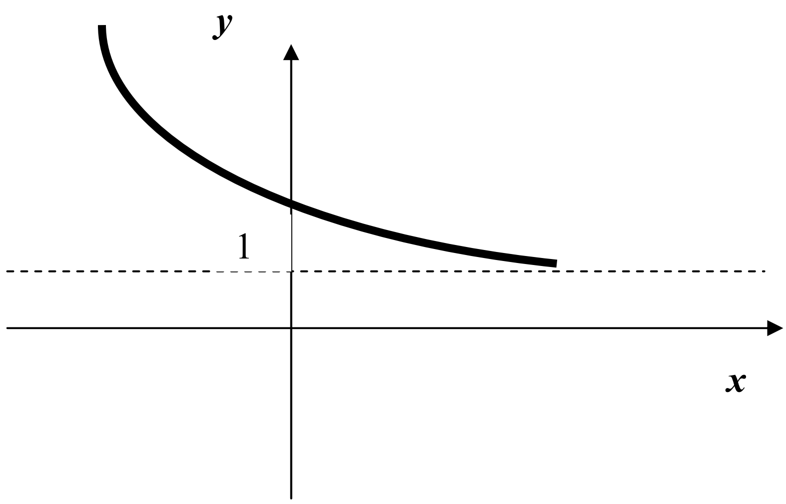


Рисунок 154

28. Числители трех дробей пропорциональны числам 1, 2, 5, а знаменатели пропорциональны числам 1, 3, 7. Сумма первой и третьей дроби равна $\frac{48}{49}$. Найти вторую дробь.

А) $\frac{7}{8}$; В) $\frac{8}{15}$; С) $\frac{8}{21}$; Д) $\frac{20}{49}$; Е) ответ не указан.

29. Операция логарифмирования некоторого числа x при основании 2 дает в результате 6. Какую обратную операцию надо применить к основанию 2, чтобы получить x ?
А) извлечение корня; В) деление; С) возведение в степень;
Д) умножение; Е) ответ не указан.

30. Если $\vec{a} + \vec{b} = \lambda(\vec{a} + \vec{b})$, где λ - число, то

А) $\vec{a} \perp \vec{b}$; В) $\vec{a} \parallel \vec{b}$; С) нет таких векторов; Д) $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 60°$;
Е) ответ не указан.

31. Вектор $\vec{a} \perp \vec{b}$. Тогда $\left(\vec{a} - \lambda \vec{b}\right) \perp \left(\vec{b} - \vec{a}\right)$, если λ равно:

А) $-\dfrac{|\vec{a}|^2}{|\vec{b}|^2}$; В) $\dfrac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2}$; С) $-\dfrac{|\vec{b}|^2}{|\vec{a}|^2}$; Д) 0; Е) ответ не указан.

32. В банк положен вклад из расчета 4% годовых. Какой доход (в %) принесет вклад через 3 года?

А) 12; В) 12,49; С) 12,52; Д) 13,06; Е) ответ не указан.

33. В январе завод выполнил 110% месячного плана, а в феврале дал продукции на 5% меньше, чем в январе. На сколько % завод перевыполнил месячный план в феврале?

А) 5 %; В) 5,5 %; С) 4,5 %; Д) 4 %; Е) ответ не указан.

34. Собака погналась за лисой, находящейся от неё на расстоянии 120 м. Через сколько времени собака догонит лисицу, если лисица пробегает в минуту 320 м, а собака 350 м?

А) 2 мин.; В) 3 мин.; С) 4 мин.; Д) 5 мин.; Е) ответ не указан.

35. Где равносильны данные уравнения: $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-5}}$ и $x^2 + x + 6 = 0$?

А) R; В) (- 1; + ∞); С) [5; + ∞); Д) (5; + ∞); Е) ответ не указан.

36. Если *a, b, c* - целые положительные числа, то $a \cdot b + b \cdot c + a \cdot c = 3abc$, если:

А) $a > b > c$; В) $a < b < c$; С) $a = b = c$;
Д) нет таких значений; Е) ответ не указан.

37. Сравните наибольшие значения функций $g(x) = (log_2 3)^{sin\, x}$ и $h(x) = (log_3 2)^{cos\, x}$.

А) $g_{наиб} > h_{наиб}$; В) $g_{наиб} < h_{наиб}$; С) $g_{наиб} = h_{наиб}$;
Д) невозможно сравнить; Е) ответ не указан.

38. Пересечение областей значения функций $f(x) = arcsin\, x$ и $g(x) = 2cos\, x$ есть множество:

А) [-2; 2]; В) [-1; 1]; С) $\left[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right]$; Д) $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$; Е) ответ не указан.

39. Что больше $\alpha = arctg\, \pi$ или $\beta = arcctg\ 1$?

А) $\alpha < \beta$; В) $\alpha > \beta$; С) $\alpha = \beta$; Д) сравнить нельзя; Е) ответ не указан.

40. Какой отрезок отсекает плоскость $5x+3y+4z-5=0$ на оси OX ?

A) 2; B) 1; C) $\frac{5}{3}$; Д) $\frac{5}{4}$; E) ответ не указан.

Ответы:

1 вариант: **1)** E; **2)** C; **3)** A**; 4)** C; **5)** A; **6)** C; **7)** B; **8)** C; **9)** Д; **10)** B; **11)** B; **12)** B; **13)** B; **14)** B; **15)** B; **16)** Д**; 17)** B**; 18)** A**; 19)** B**; 20)** Д**.**

2 вариант: **1)** A; **2)** B; **3)** C**; 4)** B; **5)** B; **6)** A; **7)** B; **8)** B; **9)** A; **10)** B; **11)** B; **12)** C; **13)** C; **14)** A; **15)** C; **16)** A**; 17)** Д**; 18)** Д**; 19)** B**; 20)** C.

3 вариант: **1)** B; **2)** B; **3)** C; **4)** C; **5)** C; **6)** Д; **7)** C; **8)** C; **9)** A; **10)** Д; **11)**C; **12)** B; **13)** C; **14)** B; **15)** A; **16)** A; **17)** C; **18)** C; **19)** C; **20)** B; **21)** C; **22)** Д; **23)** A; **24)** B; **25**) C; **26)** C; **27)** A; **28)** C; **29)** C; **30)** B; **31)** A; **32)** B; **33)** C; **34)** C; **35)** Д; **36)** E; **37)** C; **38)** C; **39)** A; **40)** B.

Приложение Е
(справочное)

Демонстрационный вариант ЕГЭ 2010 года

Данное приложение содержит пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2010 года по математике, инструкцию по выполнению работы, задания и ответы к ним. Информация взята с сайта http://www.ege.edu.ru/. Там же можно ознакомиться со спецификацией и кодификатором требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2010 года.

Пояснения к демонстрационному варианту контрольных измерительных материалов для ЕГЭ 2010 года по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант ЕГЭ по математике 2010 разработан по заданию Федеральной службы по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации.

Демонстрационный вариант предназначен для того, чтобы дать представление о структуре будущих контрольных измерительных материалах, количестве заданий, их форме, уровне сложности. Задания Демонстрационного варианта не отражают всех вопросов содержания, которые могут быть включены в контрольно-измерительные материалы в 2010 году. Структура работы приведена в спецификации, а полный перечень вопросов – в кодификаторах требований и элементов содержания по математике для составления контрольных измерительных материалов ЕГЭ 2010 г.

Правильное решение каждого из заданий В1-В12 части 1 экзаменационной работы оценивается 1 баллом. Полное правильное решение каждого из заданий С1 и С2 оценивается 2 баллами, С3 и С4 – 3 баллами, С5 и С6 – 4 баллами. Максимальный балл за выполнение всей работы – 30.

Предполагается, что верное выполнение не менее **пяти** заданий экзаменационной работы отвечает минимальному уровню подготовки, подтверждающему освоение выпускником основных общеобразовательных программ общего (полного) среднего образования. Конкретное значение минимального тестового балла, подтверждающего освоение выпускником основных образовательных программ общего (полного) среднего образования, определяется Федеральной службой по надзору в сфере образования и науки Российской Федерации в установленном порядке.

К каждому заданию с развернутым ответом, включенному в демонстрационный вариант, дается одно – два возможных решения. Приведенные критерии оценивания позволяют составить представление о требованиях к полноте и правильности решений. Демонстрационный вариант контрольных измерительных материалов и система оценивания, спецификация и кодификаторы помогут выработать стратегию подготовки к ЕГЭ по математике.

Единый государственный экзамен по МАТЕМАТИКЕ

Демонстрационный вариант
контрольных измерительных материалов 2010 года

Инструкция по выполнению работы

На выполнение экзаменационной работы по математике дается 4 часа (240 мин.) Работа состоит из двух частей и содержит 18 заданий.

Часть 1 содержит 12 заданий с кратким ответом (B1–B12) базового уровня по материалу курса математики. Задания части 1 считаются выполненными, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Часть 2 содержит 6 более сложных заданий (C1-C6) по материалу курса математики. При их выполнении надо записать полное решение и ответ.

Советуем для экономии времени пропускать задание, которое не удается выполнить сразу, и переходить к следующему. К выполнению пропущенных заданий можно вернуться, если у вас останется время.

Желаем успеха!

Часть 1

Ответом на задания B1–B12 должно быть целое число или конечная десятичная дробь. Ответ следует записать в бланк ответов № 1 справа от номера выполняемого задания, начиная с первой клеточки. Каждую цифру, знак минус и запятую пишите в отдельной клеточке в соответствии с приведенными в бланке образцами. Единицы измерений писать не нужно.

B1. Билет на автобус стоит 15 рублей. Какое максимальное число билетов можно купить на 100 рублей после повышения цены билета на 20%?

B2. На графике (смотрите рисунок 155) показано изменение температуры воздуха на протяжении трех суток. На оси абсцисс отмечается время суток в часах, на оси ординат – значение температуры в градусах. определите по графику наибольшую температуру воздуха 15 августа.

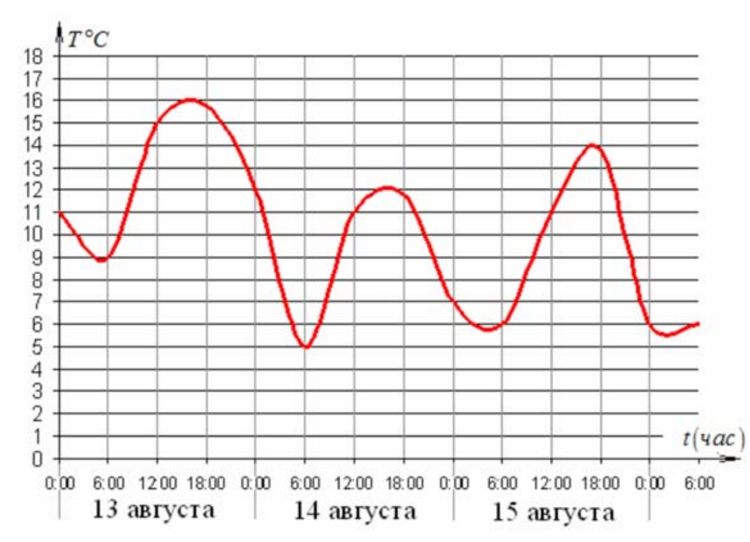


Рисунок 155

B3. Найдите корень уравнения $3^{x-2} = 27$.

B4. В треугольнике ABC (смотрите рисунок 156) угол C равен 90°, $AB = 5$, $cos\, A = 0{,}8$. Найдите BC.

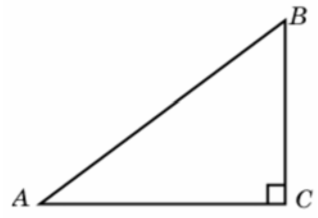


Рисунок 156

B5. Строительная фирма планирует купить 70 $м^3$ пеноблоков у одного из трех поставщиков. Цены и условия доставки приведены в таблице. Сколько рублей нужно заплатить за самую дешевую покупку с доставкой?

Поставщик	Стоимость пеноблоков (руб. за 1 $м^3$)	Стоимость доставки (руб.)	Дополнительные условия доставки
1	2600	10000	
2	2800	8000	При заказе товара на сумму свыше 150000 рублей доставка бесплатная.
3	2700	8000	При заказе товара на сумму свыше 200000 рублей доставка бесплатная.

B6. Найдите площадь четырехугольника, изображенного на клетчатой бумаге с размером клетки 1 см× 1 см (смотрите рисунок 157). Ответ дайте в квадратных сантиметрах.

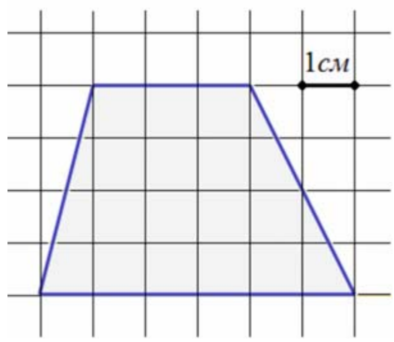


Рисунок 157

B7. Найдите значение выражения $log_2 200 + log_2 \frac{1}{25}$.

B8. На рисунке (смотрите рисунок 158) изображен график функции $y = f(x)$ и касательная к этому графику в точке с абсциссой, равной 3. Найдите значение производной этой функции в точке $x = 3$.

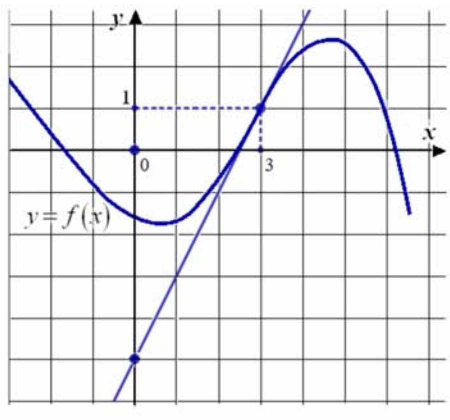


Рисунок 158

B9. Объем первого цилиндра равен 12 $м^3$. У второго цилиндра высота в три раза больше, а радиус основания – в два раза меньше, чем у первого. Найдите объем второго цилиндра. Ответ дайте в кубических метрах.

B10. Камень брошен вертикально вверх. Пока камень не упал, высота, на которой он находится, описывается формулой $h(t) = -5t^2 + 18t$ (h – высота в метрах, t – время в секундах, прошедшее с момента броска). Найдите, сколько секунд камень находился на высоте не менее 9 метров.

B11. Найдите наибольшее значение функции $y = 2\cos x + \sqrt{3}x - \frac{\sqrt{3}\pi}{3}$ на отрезке $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

B12. Двое рабочих, работая вместе, могут выполнить работу за 12 дней. За сколько дней, работая отдельно, выполнит эту работу первый рабочий, если он за два дня выполняет такую же часть работы, какую второй – за три дня?

Часть 2

Для записи решений и ответов на задания С1-С6 используйте бланк ответов №2. Запишите сначала номер выполняемого задания, а затем полное обоснованное решение и ответ.

C1. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2 + 3x - \sqrt{x^2 + 3x - 1} = 7, \\ 2\sqrt{2}\sin y = x. \end{cases}$

C2. Сторона основания правильной треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ равна 2, а диагональ боковой грани равна $\sqrt{5}$. Найдите угол между плоскостью A_1BC и плоскостью основания призмы.

C3. Решите неравенство $\log_{x+3}\left(9 - x^2\right) - \frac{1}{16}\log^2_{x+3}(x-3)^2 \geq 2$.

C4. На стороне BA угла ABC, равного 30°, взята такая точка D, что $AD = 2$ и $BD = 1$. Найдите радиус окружности, проходящей через точки A, D и касающейся прямой BC.

C5. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $4x - |3x - |x + a|| = 9|x - 1|$ имеет хотя бы один корень.

С6. Найдите все такие пары взаимно простых натуральных чисел (то есть чисел, наибольший общий делитель которых равен 1) a и b, что если к десятичной записи числа a приписать справа через запятую десятинную запись числа b, то получится десятичная запись числа, равного $\dfrac{a}{b}$.

Из раздела **«Система оценивания демонстрационного варианта контрольных измерительных материалов по МАТЕМАТИКЕ»** мы сочли целесообразным включить в данное приложение только *ответы* к заданиям демонстрационного варианта и *общие комментарии* по системе оценивания контрольно-измерительных материалов по математике. С решениями заданий С1-С6 и подробными комментариями (критериями) по их оцениванию можно ознакомиться на сайте http://www.ege.edu.ru/.

Ответы: **В1)** 5; **В2)** 14; **В3)** 5; **В4)** 3; **В5)** 192000; **В6)** 18; **В7)** 3; **В8)** 2; **В9)** 9; **В10)** 2,4; **В11)** 1; **В12)** 20; **С1)** $x=2,\ y=(-1)^n\dfrac{\pi}{4}+\pi n, n\in Z$; **С2)** 30°; **С3)** -1; **С4)** 1 или 7; **С5)** $-8\le a\le 6$; **С6)** $a=2,\ b=5$.

Каждое правильно выполненное задание части 1 оценивается 1 баллом. Задания части 1 считаются выполненными верно, если экзаменуемый дал верный ответ в виде целого числа или конечной десятичной дроби.

Оценки заданий части 2 зависят от полноты решения и правильности ответа. ***Общие требования к выполнению заданий с развернутым ответом:*** решение должно быть математически грамотным, полным, все возможные случаи должны быть рассмотрены, из него должен быть понятен ход рассуждений учащегося. Методы решения, формы его записи и формы записи ответов могут быть разными. За решение, в котором обоснованно получен правильный ответ, выставляется максимальное число баллов.

Эксперты проверяют математическое содержание представленного решения, а особенности записи не учитывают.

В критериях оценивания конкретных заданий содержатся общие требования к выставлению баллов. Однако они не исчерпывают всех возможных ситуаций (*Комментарии автора*: каждому эксперту во время проверки выдаются критерии оценивания заданий, которые он проверяет).

Правильный ответ при отсутствии текста решения оценивается в 0 баллов.

При выполнении задания экзаменуемый может использовать без доказательства и ссылок любые математические факты, содержащиеся в учебниках и учебных пособиях, входящих в Федеральный перечень учебников, рекомендованных (допущенных) Министерством образования и науки Российской Федерации.

Обозначения и сокращения

$\Rightarrow$ – знак логического следования:

$\boldsymbol{A} \Rightarrow \boldsymbol{B}$ – *«из A следует B».*

$\Leftrightarrow$ – знак равносильности (эквивалентности):

$\boldsymbol{A} \Leftrightarrow \boldsymbol{B}$ – *«из A следует B и обратно – из B следует A».*

$\in$ – знак принадлежности:

$\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{M}$ – *«элемент a принадлежит множеству M»,*

$\boldsymbol{a} \notin \boldsymbol{M}$ – *«элемент a не принадлежит множеству M».*

$\{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \ldots\}$ – множество, состоящее из элементов $a, b, c, \ldots$.

$\{\boldsymbol{x} | \boldsymbol{P}\}$ – множество элементов x, удовлетворяющих условию P.

$\varnothing$ – пустое множество.

N – множество натуральных чисел: $N = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Z – множество целых чисел: $Z = \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$.

Q – множество рациональных чисел: $Q = \left\{ \frac{m}{n} \middle| m \in Z, \quad n \in N \right\}$.

R – множество действительных чисел.

$\mathbf{R}_+$ – множество действительных положительных чисел.

$\mathbf{R}_-$ – множество действительных отрицательных чисел.

$\forall$ – квантор общности:

$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{M}$ – *«для любого элемента a, принадлежащего множеству M».*

$\exists$ – квантор существования:

$\exists\ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{M}$ – *«существует элемент a, принадлежащий множеству M».*

$\exists!$ – квантор существования и единственности:

$\exists!\ \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{M}$ – *«существует, притом единственный, элемент a, принадлежащий множеству M».*

$|\boldsymbol{a}|$ – абсолютная величина числа a: $|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0; \\ -a, & a < 0. \end{cases}$

$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} |\ \boldsymbol{a} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ – замкнутый промежуток (отрезок; сегмент; числовой отрезок) с началом a и концом b, $a < b$.

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{a} < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$ – открытый промежуток (интервал; открытый числовой отрезок) с началом a и концом b, $a < b$.

$[\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{a} \le \boldsymbol{x} < \boldsymbol{b}\}$ – полуоткрытый промежуток (полуинтервал; числовой отрезок, открытый справа) с началом a и концом b, $a < b$.

$(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{b}] = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid a < \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{b}\}$ – полуоткрытый промежуток (полуинтервал; числовой отрезок, открытый слева) с началом a и концом b, $a < b$.

$[\boldsymbol{a}; +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \mathrm{R} \mid \mathrm{x} \ge \boldsymbol{a}\}$, $(-\infty; \boldsymbol{a}] = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} |\ \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{a}\}$ – бесконечные промежутки (числовые лучи).

$(\boldsymbol{a}; +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid \boldsymbol{x} > \boldsymbol{a}\}$, $(-\infty; \boldsymbol{a}) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} |\ \boldsymbol{x} < \boldsymbol{a}\}$ – бесконечные промежутки (открытые числовые лучи).

$(-\infty; +\infty) = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R} \mid -\infty < \boldsymbol{x} < +\infty\}$

$\cup$ – знак объединения:

$\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}$ – *«объединение множеств A и B –* $A \cup B = \{c |\ c \in A$ *или* $c \in B\}$*».*

$\cap$ – знак пересечения:

$\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}$ – *«пересечение множеств A и B –* $A \cap B = \{c |\ c \in A$ *и* $c \in B\}$*».*

$\setminus$ – знак разности:

$\boldsymbol{A} \setminus \boldsymbol{B}$ – *«разность множеств A и B –* $A \setminus B = \{c |\ c \in A$ *и* $c \notin B\}$*»*

$\subset$ – знак включения:

$\boldsymbol{A} \subset \boldsymbol{B}$ – *«множество A является собственным подмножеством множества B»;*

$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B}$ – *«множество A является подмножеством множества B».*

$\rightarrow$ – знак соответствия:

$\boldsymbol{f} : \boldsymbol{X} \rightarrow \boldsymbol{Y}$ – функция f, отображающая множество X в (на) множество Y.

$\boldsymbol{f}^{-1} : \boldsymbol{Y} \rightarrow \boldsymbol{X}$ – функция, обратная к функции f, отображающая множество Y в (на) множество X.

$\boldsymbol{D(f)}$ – область определения функции f.

$\boldsymbol{E(f)}$ – множество значений функции f.

$\boldsymbol{f(x) \in C(a)}$ – функция $f(x)$ непрерывна в точке a.

$\boldsymbol{f(x) \in C((a;\, b))}$ – функция $f(x)$ непрерывна на интервале $(a;\, b)$.

$\boldsymbol{f(x) \in C([a;\, b])}$ – функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\, b]$.

$\boldsymbol{f(x) \in C(M)}$ – функция $f(x)$ непрерывна на множестве M.

$\boldsymbol{f(x) \in D(a)}$ – функция $f(x)$ дифференцируема в точке a.

$\boldsymbol{f(x) \in D((a;\, b))}$ – функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a;\, b)$.

$\boldsymbol{f(x) \in D([a;\, b])}$ – функция $f(x)$ дифференцируема на отрезке $[a;\, b]$.

$\boldsymbol{f(x) \in D(M)}$ – функция $f(x)$ дифференцируема на множестве M.

$\boldsymbol{f'(x)}$ – значение производной функции f в точке x.

$\boldsymbol{f'(x) \in C^{(1)}((a;b))}$ – функция непрерывно дифференцируема на $(a;\, b)$:

$$f(x) \in C^{(1)}((a;b)) \Leftrightarrow f'(x) \in C((a;b)).$$

$\boldsymbol{f'(x) \in C^{(1)}([a;b])}$ – функция непрерывно дифференцируема на $[a;\, b]$.

$\boldsymbol{f'(x) \in C^{(1)}(M)}$ – функция непрерывно дифференцируема на M.