Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

УСОВА Л.Б., ШАКИРОВА Д.У.

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

ЧАСТЬ II

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано Ученым советом Государственного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов инженерно - технических специальностей

Оренбург
ИПК ГОУ ОГУ
2010

УДК 512.64 + 514.12(075)
ББК 22.143 + 22.151.5я73
У 76

Рецензент - кандидат физико-математических наук, доцент Герасименко С.А.

Усова,Л.Б.
У 76 Линейная алгебра и аналитическая геометрия**:** учебно-методическое пособие /Л.Б. Усова, Д.У. Шакирова; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2010. – 181 с.
ISBN

Учебно-методическое пособие содержит основные теоретические сведения по курсу «Линейная алгебра и аналитическая геометрия».

Предназначено для студентов инженерно-технических специальностей очной и заочной форм обучения.

Пособие поможет преподавателям при проведении практических занятий, а также при организации текущего контроля знаний студентов. Окажет существенную помощь студентам при решении задач на практических занятиях, при выполнении домашних заданий, а также поможет подготовиться к коллоквиуму и зачету.

$У \frac{1602040000}{}$

УДК 512.64 + 514.12 (075)

ББК 22.143 + 22.151.5я73

ISBN

Содержание

Введение

Цель преподавания математики в вузе – научить студентов математическому аппарату, необходимому для решения теоретических и практических задач, привить студентам умение самостоятельно изучать учебную литературу по математике и ее приложениям; развить логическое мышление и повысить общий уровень математической культуры; выработать навыки математического исследования прикладных вопросов и умения перевести задачу на математический язык.

Учебно – методическое пособие имеет следующую структуру. В каждой главе приводятся соответствующие теоретические сведения (определения основных понятий, формулы, теоремы, признаки), а также содержится иллюстративный материал, полезный для студентов. Теоретическая часть заканчивается 20 вопросами для самопроверки. Каждая глава содержит разработку практического занятия, в которой разобраны задачи данной главы, а также домашнее задание с ответами. Изучение главы завершается тестами для проверки усвоения материала. В конце учебно – методического пособия представлен пакет расчетно-графических заданий, соответствующих каждой главе, содержащий по 30 вариантов заданий.

Согласно рабочим программам дисциплины содержание курса включает следующие главы:

Глава 1. Прямая на плоскости

Различные виды уравнения прямой. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от данной точки до данной прямой.

Глава 2. Плоскость в пространстве.

Различные виды уравнения плоскости. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от данной точки до данной плоскости

Глава 3. Прямая в пространстве

Различные виды уравнения прямой в пространстве. Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Условие компланарности двух прямых в пространстве

Глава 4. Взаимное расположение прямая и плоскости в пространстве

Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве.

Глава 5. Кривые второго порядка

Окружность. Эллипс. Гипербола. Парабола.

Глава 6. Поверхности второго порядка

Канонический вид уравнений поверхностей второго порядка. Геометрическое изображение.

Глава 7. Линейные операторы

Линейные операторы, действующие в произвольном линейном пространстве. Линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве.

Глава 8. Квадратичные и билинейные формы

Определение квадратичной формы. Закон инерции. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методами Лагранжа и ортогонального преобразования. Классификация квадратичных форм. Необходимое и достаточное условие положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм. Билинейная форма. Связь с квадратичной формой. Приведение симметричной билинейной формы к каноническому виду. Применение теории квадратичных форм к исследованию алгебраических уравнений второй степени.

Глава 1 Прямая на плоскости

§1 Различные виды уравнения прямой на плоскости

Каждая *прямая* на плоскости Oxy определяется линейным *уравнением первой степени с двумя неизвестными*. Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

I *Уравнение прямой с угловым коэффициентом* имеет вид: $y = kx + b$, (1)
где k - угловой коэффициент прямой ($k = tg\alpha$, где α - угол, который прямая образует с положительным направлением оси Ox), b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy (рисунок 1).

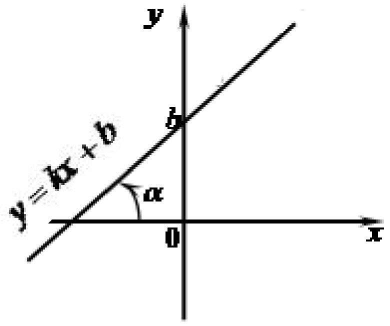


Рисунок 1

II *Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении*:
$y - y_0 = k(x - x_0)$, (2)
где $k = tg\alpha$ (α - угол, образуемый прямой с осью Ox); $(x_0;\, y_0)$ - координаты данной точки (рисунок 2).

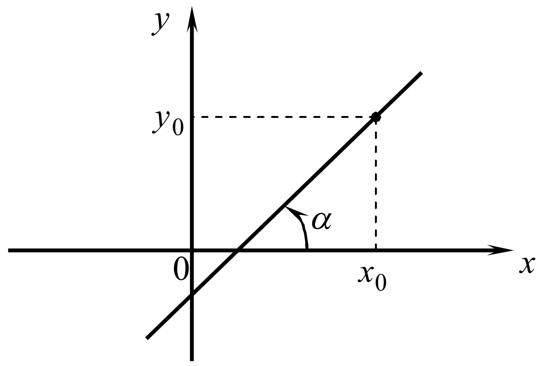


Рисунок 2

III *Уравнение прямой, проходящей через две данные точки* $M_1(x_1;\, y_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2)$, где $y_1 \neq y_2$ и $x_1 \neq x_2$ имеет вид: $\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$ (3)

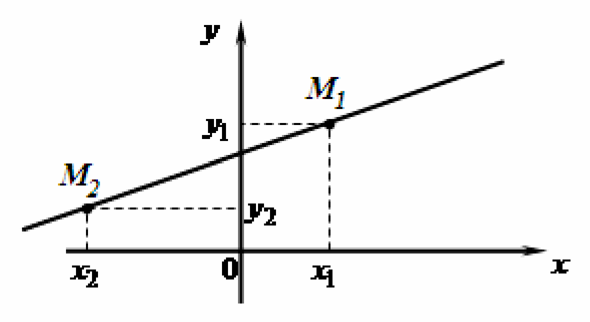


Рисунок 3

Угловой коэффициент прямой, проходящей через две данные точки, определяется по формуле

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \text{где } x_1 \neq x_2 \qquad (4)$$

Если $x_1 = x_2$, то уравнение прямой (3) имеет вид $x = x_1$;

если $y_1 = y_2$, то: $y = y_1$.

IV *Общее уравнение прямой*: $Ax + By + C = 0$, (5)

где A, B и C - постоянные коэффициенты, причем A и B одновременно не обращаются в нуль $\left(A^2 + B^2 \neq 0\right)$ (рисунок 4).

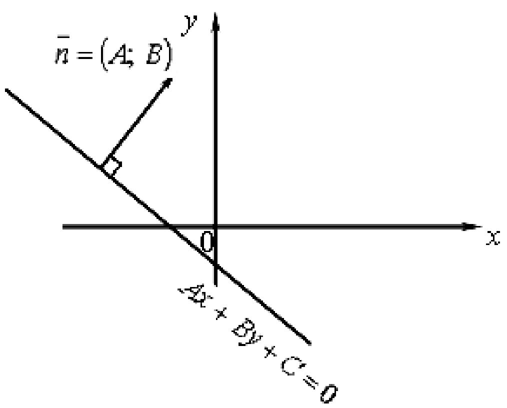


Рисунок 4

Заметим, что $\bar{n} = (A;\ B)$ - нормальный вектор прямой ($\bar{n}$ перпендикулярен прямой). Частные случаи этого уравнения:

$Ax + By = 0$ $(C = 0)$ - прямая проходит через начало координат (рисунок 5);

$Ax + C = 0$ $(B = 0)$ - прямая параллельная оси Oy (рисунок 6);

$By + C = 0$ $(A = 0)$ - прямая параллельна оси Ox (рисунок 7);

$Ax = 0$ $(B = C = 0)$ - прямая совпадает с осью Oy;

$By = 0$ $(A = C = 0)$ - прямая совпадает с осью Ox.

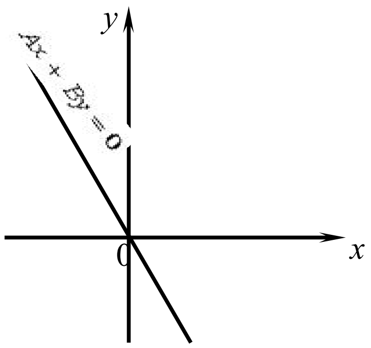


Рисунок 5

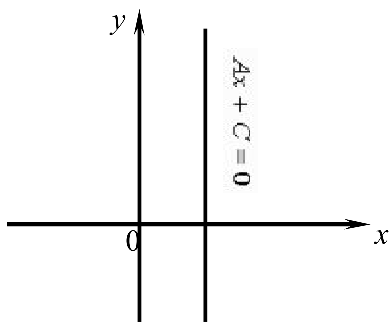


Рисунок 6

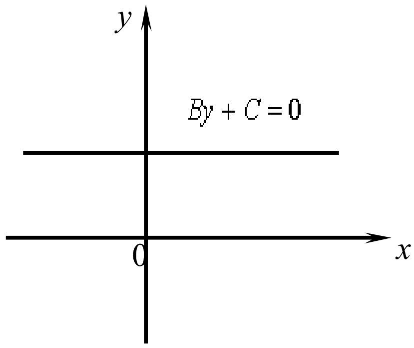


Рисунок 7

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(x_1;\, y_1)$ *и нормальный вектор* $\bar{n} = (A;\, B)$*:* $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ (5)

Уравнение прямой в отрезках: $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$, ($5^{/}$)

где a и b - длины отрезков (с учетом знаков), отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно ($a \neq 0,\, b \neq 0$) (рисунок 8).

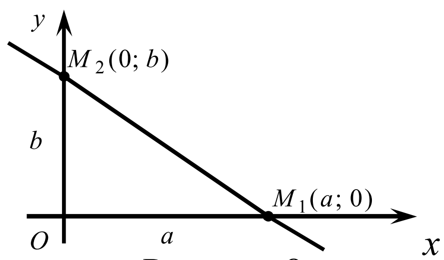


Рисунок 8

V *Каноническое уравнение прямой*: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n}$, (6)

где (x_0, y_0)- координаты точки лежащей на данной прямой и (m, n) - координаты направляющего вектора

Параметрическое уравнение прямой: $\begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$, ($6^{/}$)

где t - переменный параметр, $t \in R$.

В векторной форме уравнение ($6^{/}$) имеет вид $\bar{r} = \bar{r_0} + \bar{s}t$, где $\bar{r_0} = (x_0;\, y_0)$, $\bar{s} = (m; n)$.

VI *Нормальное уравнение прямой*: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$, (7)

где p - длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на прямую, α - угол, который этот перпендикуляр образует с положительным направлением оси Ox (рисунок 9).

Общее уравнение прямой (5) можно преобразовать в нормальное уравнение (7) путем умножения на нормирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2+B^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена C
(в общем уравнении прямой).

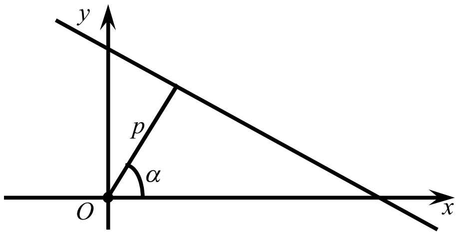


Рисунок 9

§2 Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности двух прямых. Расстояние от данной точки до данной прямой

Под ***углом между прямыми в плоскости*** понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованными этими прямыми.

Если прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями с угловыми коэффициентами $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, то угол φ между ними вычисляется по формуле

$$tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right| \qquad (8)$$

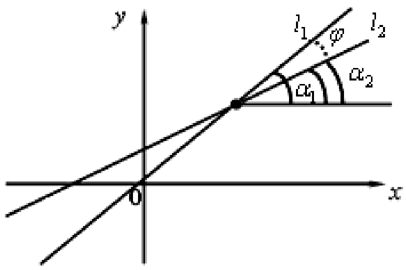


Рисунок 10

Условие параллельности двух прямых: **Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты равны**, т.е.

$$\left(l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow k_1 = k_2\right) \qquad (9)$$

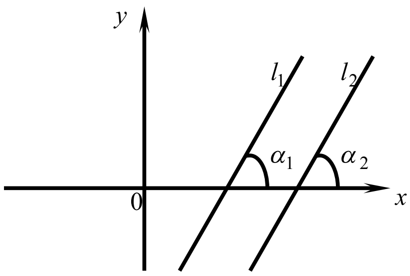


Рисунок 11

Условие перпендикулярности двух прямых: **Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их угловые коэффициенты противоположны по знаку и обратны по значению**, т.е.

$$\left(l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow k_1 = -\frac{1}{k_2} \right) \qquad (10)$$

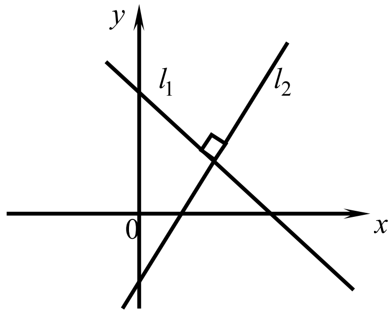


Рисунок 12

Если прямые l_1 *и* l_2 *заданы общими уравнениями* $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $\overline{n_1} = (A_1; B_1)$ *и* $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $\overline{n_2} = (A_2; B_2)$, то величина φ угла между ними вычисляется по формулам $tg\varphi = \left| \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} \right|$, $\cos\varphi = \frac{\left| \overline{n_1} \cdot \overline{n_2} \right|}{\left| \overline{n_1} \right| \cdot \left| \overline{n_2} \right|}$. (11)

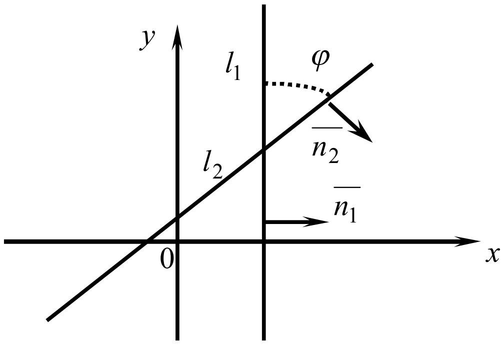


Рисунок 13

Условие параллельности двух прямых: **Две прямые параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные вектора коллинеарны**, т.е.

$$\left(l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \text{ или } A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \right) \qquad (12)$$

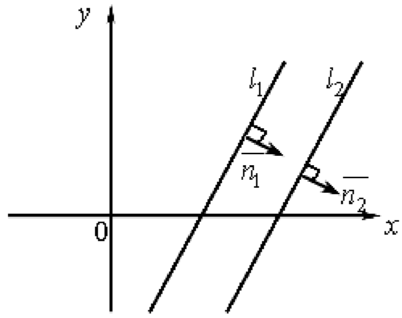


Рисунок 14

Условие перпендикулярности двух прямых: **Две прямые перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные вектора перпендикулярны, т.е.** **(**$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \overline{n_1} \perp \overline{n_2} \;\Rightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 = 0$) (13)

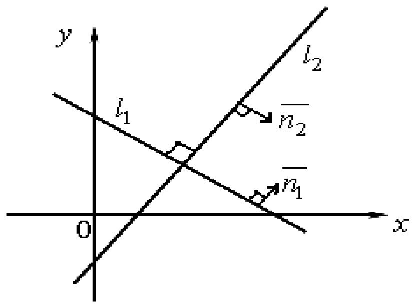


Рисунок 15

Для нахождения общих точек прямых l_1 и l_2 необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y = k_1x + b_1 \\ y = k_2x + b_2 \end{cases} \qquad (14)$$

При этом:

если $\dfrac{A_1}{A_2} \neq \dfrac{B_1}{B_2}$, то имеется единственная точка пересечения прямых;

если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \neq \dfrac{C_1}{C_2}$ - прямые l_1 и l_2 не имеют общей точки, т.е. *параллельны*;

если $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$ - прямые имеют бесконечное множество общих точек, т.е. *совпадают*.

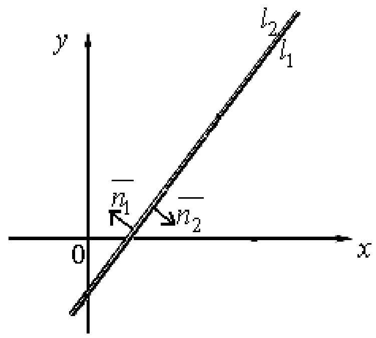


Рисунок 16

Расстоянием d от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую.

Расстояние d определяется по формуле

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right| \qquad (15)$$

Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$

вычисляется по формуле

$$d = |x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p| \qquad (16)$$

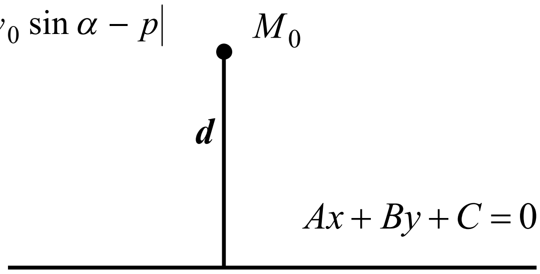


Рисунок 17

Вопросы для самоконтроля

1 Запишите уравнение прямой l, проходящей через две различные точки $M_0(x_0;\, y_0)$ и $M_1(x_1;\, y_1)$.
2 Запишите общее уравнение прямой (изобразите прямую на плоскости). Чем задается прямая заданная общим уравнение.
3 Укажите взаимное расположение двух прямых на плоскости, прямые заданы через угловые коэффициенты.
4 Запишите уравнение прямой l,проходящей через $M_0(x_0;\, y_0)$ с угловым коэффициентом k .
5 Укажите взаимное расположение двух прямых на плоскости, прямые заданы общими уравнениями.
6 Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых на плоскости.
7 Выведите формулу расстояния d от точки $M(x_0;\, y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$.
8 Запишите уравнение прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0)$ с направляющим вектором $\bar{s} = (m;n)$.
9 Выведите нормальное уравнение прямой l. Укажите связь общего уравнение прямой с нормальным уравнением.
10 Запишите параметрическое уравнение прямой на плоскости.
11 Выведите уравнение прямой l, проходящей через $M_0(x_0;\, y_0)$ с нормальным вектором $\bar{n} = (A;\, B)$.
12 Запишите уравнение прямой l с угловым коэффициентом k и расстоянием b.
13 Запишите уравнение прямой в отрезках (изобразите прямую на плоскости).
14 Дано уравнение $5x - 4y + 9 = 0$. Чем задается данная прямая?
15 Дан треугольник АВС с координатами в точках: А (2; -4), В (-2; –1), С (2;0). Найдите уравнение сторон треугольника АВС.
16 Дан треугольник АВС с координатами в точках А (2; -4), В (-2; –1), С (2;0). Найдите уравнение медианы ВМ, опущенной из вершины В на сторону АС и уравнение высоты ВК.
17 Составьте уравнение прямой l, проходящей через точку М (1; 3) и имеющей направляющий вектор $\bar{s} = (-2;5)$.

18 Составьте уравнение прямой l, проходящей через точку P (3; -2) и имеющей нормальный вектор $\bar{n} = (5;\ 4)$.

19 Найдите расстояние от точки A (2; 1) до прямой $l:\ -x + y + 4 = 0$.

20 Даны точки A(2;-1) и B(-3;4). Найдите координаты точки C, которая является серединой отрезка AB.

Практическое занятие № 1
Уравнение прямой. Способы задания прямой. Взаимное расположение прямых

Задача 1

Построить и составить уравнение прямой l:

а) $b = 6$, $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$; б) $b = -2$, $\alpha = 135°$; в) $a = 10$, $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$;

г) $b = -4$, $\alpha = 0°$; д) $b = 3$, $k = \dfrac{2}{3}$; е) т. $M(2,\ 4)$, $k = -\dfrac{1}{3}$;

ж) проходящей через 2 различные точки $P(3;-1)$ и $Q(7;11)$;

з) проходящей через точку $A(5;-4)$ перпендикулярно прямой l, проходящей через точки B и C, где $B(-1;2)$, $C(-3;-2)$;

и) проходящей точка $A(1;-2)$ параллельно прямой l, проходящей через точки B и C, где $B(-1;2)$, $C(-3;-2)$;

к) проходящей через точку $M(2;3)$ и направляющий вектор $\bar{s} = (1;-4)$;

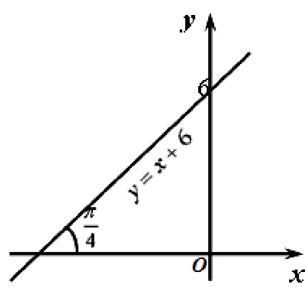
л) проходящей через точку $M(-1;5)$ с нормальным вектором $\bar{n} = (-3;2)$.

Решение.

а) Так как $b = 6$ (b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy) и $\alpha = \dfrac{\pi}{4}$ (α - угол, который прямая образует с положительным направлением оси Ox). Воспользуемся формулой уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

$$k = tg\alpha \Rightarrow k = tg\frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow y = 1 \cdot x + 6,$$

$$y = x + 6 \Rightarrow x - y + 6 = 0.$$

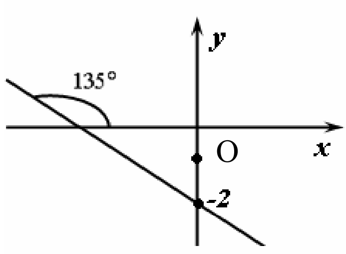


Ответ. $x - y + 6 = 0$

Рисунок 18

б) Так как $b = -2$ (b - ордината точки пересечения прямой с осью Oy) и $\alpha = 135°$ (α - угол, который прямая образует с положительным направлением оси Ox). Воспользуемся формулой уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

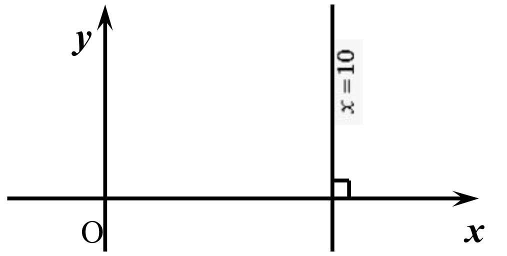
$k = tg\alpha \Rightarrow k = tg135° = -1$,
$y = -1 \cdot x - 2 \Rightarrow y = -x - 2 \Rightarrow x + y + 2 = 0$.



Ответ. $x + y + 2 = 0$

Рисунок 19

в) Так как $a = 10$ (a - расстояние, которое отсекает прямая на оси Ox) и $\alpha = 90°$, т.е. прямая перпендикулярно оси $Ox \Rightarrow x = 10$.

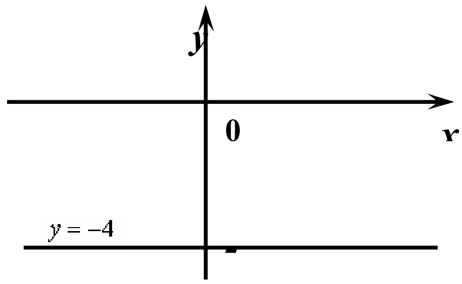


Ответ. $x - 10 = 0$

Рисунок 20

г) Так как $b = -4$, $\alpha = 0°$. Воспользуемся формулой уравнением прямой с угловым коэффициентом $y = kx + b$.

$k = tg\alpha \Rightarrow k = tg0° = 0 \Rightarrow y = 0 \cdot x - 4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow y + 4 = 0$.



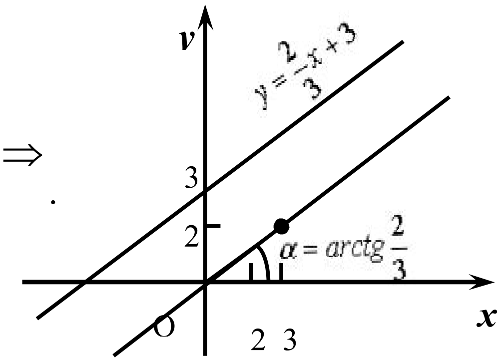
Ответ. $y + 4 = 0$

Рисунок 21

д) Так как $b = 3$, $k = \dfrac{2}{3}$ (k - угловой коэффициент прямой). Воспользуемся формулой уравнением прямой с угловым коэффициентом

$$y = kx + b \Rightarrow \; y = \frac{2}{3}x + 3 \Big| \cdot 3 \Rightarrow 3y = 2x + 9 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x - 3y + 9 = 0$$



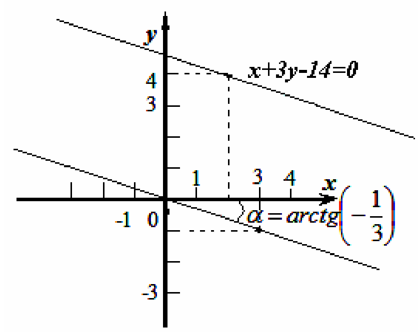
Ответ. $2x - 3y + 9 = 0$

Рисунок 22

е) Так как дана точка $M(2;4)$ лежащая на прямой и угловой коэффициент $k = -\frac{1}{3}$, воспользуемся формулой $y = y_0 + k(x - x_0)$

$$y = 4 - \frac{1}{3}(x - 2),\; y = -\frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \;|\cdot 3,$$

$$x + 3y - 14 = 0.$$



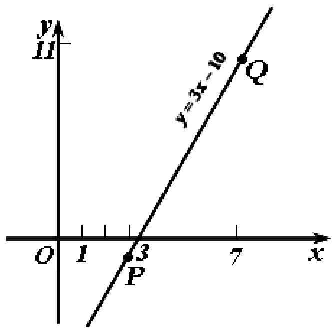
Ответ. $x + 3y - 14 = 0$

Рисунок 23

ж) Уравнение прямой, проходящей через две различные точки $P(3;-1)$ и $Q(7;11)$ выглядит следующим образом:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}.$$

$$\frac{x-3}{7-3} = \frac{y-(-1)}{11-(-1)} \Rightarrow \frac{x-3}{7-3} = \frac{y+1}{11+1} \Rightarrow \frac{x-3}{4} = \frac{y+1}{12}\Big| \cdot 4 \Rightarrow$$



$$\Rightarrow \frac{x-3}{1} = \frac{y+1}{3} \Rightarrow 3x - 9 = y + 1 \Rightarrow y = 3x - 10 \Rightarrow$$

Рисунок 24

$$\Rightarrow 3x - y - 10 = 0.$$

Ответ. $3x - y - 10 = 0$

з) Уравнение прямой, проходящей через т. $A(5;-4)$ перпендикулярно прямой l_{BC}, где $B(-1;2)$, $C(-3;-2)$ выглядит следующим образом:

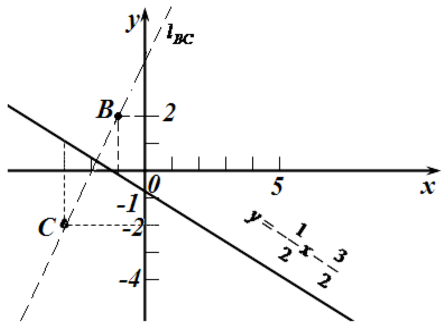
Составим уравнение прямой l_{BC}: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

$$\frac{x+1}{-3+1}=\frac{y-2}{-2-2}\Rightarrow\frac{x+1}{-2}=\frac{y-2}{-4}\,\Big|\cdot(-2)\Rightarrow\frac{x+1}{1}=\frac{y-2}{2}\Rightarrow 2x+2=y-2\Rightarrow y=2x+4.$$

Уравнение l_{BC}: $y=2x+4$. Угловой коэффициент прямой l_{BC}: $k_{BC}=2$. Так как прямые перпендикулярны, то их угловые коэффициенты противоположны по знаку и обратны по значению, т.е. $k=-\dfrac{1}{2}$. Воспользуемся формулой

$$y=y_0+k(x-x_0)\Rightarrow y=-4-\frac{1}{2}(x-5)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=-4-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\Rightarrow y=-\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\Rightarrow x+2y+3=0.$$



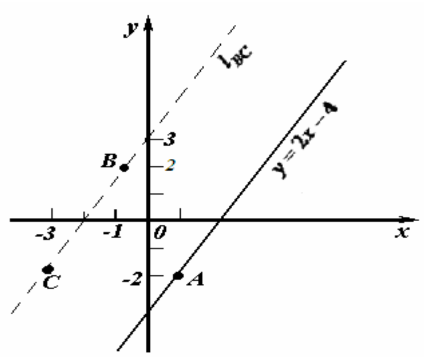
Ответ. $x+2y+3=0$

Рисунок 25

и) Уравнение прямой l_{BC} составили в предыдущем примере l_{BC}: $y=2x+4$.

Так как по условию две прямые параллельны, то их угловые коэффициенты равны, т.е. $k_{BC}=2\Rightarrow$ угловой коэффициент для нашей прямой будет тоже равен 2.

$$y=y_0+k(x-x_0),$$
$$y=-2+2(x-1)\Rightarrow y=2x-4\Rightarrow 2x-y-4=0.$$

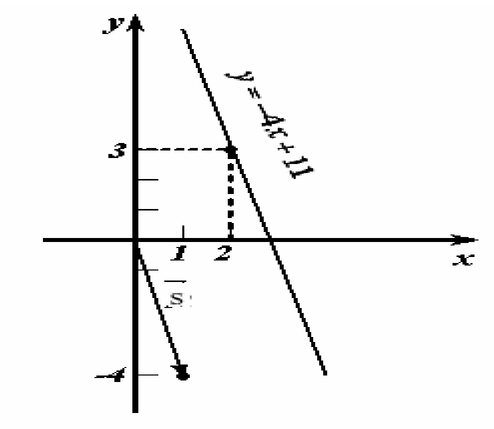


Ответ. $2x-y-4=0$

Рисунок 26

к) Уравнение прямой, проходящей через точку $M(2,3)$ и направляющий вектор $\bar{s}=(1;-4)$ задается уравнением: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$.

$$\frac{x-2}{1}=\frac{y-3}{-4}\Rightarrow -4x+8=y-3\Rightarrow$$
$$\Rightarrow y=-4x+11\Rightarrow 4x+y-11=0$$



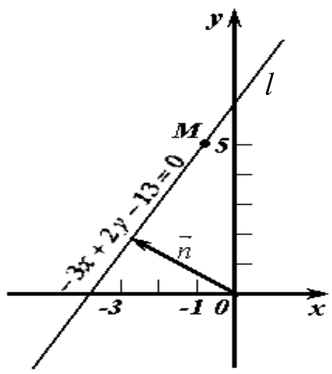
Ответ. $4x+y-11=0$

Рисунок 27

л) Общее уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$ с нормальным вектором $\bar{n}=(A;\,B)$, задается уравнением: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. Уравнение прямой, проходящей через т. $M(-1;5)$ с нормальным вектором $\bar{n}=(-3;2)$, будет следующим:

$-3(x+1)+2(y-5)=0$,

$-3x-3+2y-10=0\Rightarrow -3x+2y-13=0$.



Ответ. $3x-2y+13=0$

Рисунок 28

Задача 2

Определить взаимное расположение прямых:

а) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$; б) $3x-2y+7=0$, $2x+3y-3=0$;

в) $x-2y-4=0$, $2x-4y+3=0$, г) $3x+2y-1=0$, $6x+4y-2=0$.

Решение.

а) $5x-y+7=0$, $3x+2y=0$.

1 способ. Найдем угол между двумя прямыми, если прямые заданы через угловые коэффициенты. От общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$

перейдем к уравнению прямой через угловой коэффициент $y=kx+b$

$y=5x+7\Rightarrow k_1=5,\ y=-\frac{3}{2}x\Rightarrow k_2=-\frac{3}{2}$ и воспользуемся формулой

$$tg\alpha=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|\Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{-\frac{3}{2}-5}{1+5\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)}\right|\Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{-\frac{13}{2}}{1-\frac{15}{2}}\right|\Rightarrow tg\alpha=\left|\frac{-\frac{13}{2}}{-\frac{13}{2}}\right|\Rightarrow tg\alpha=1\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

2 способ. Найдем угол между двумя прямыми, если прямые заданы в общем виде: $Ax + By + C = 0$.

$5x - y + 7 = 0 \Rightarrow \overline{n_1} = (5;-1)$, $3x + 2y = 0 \Rightarrow \overline{n_2} = (3;2)$. Воспользуемся формулой $cos\,\varphi = \dfrac{n_1 \cdot n_2}{|\overline{n_1}| \cdot |\overline{n_2}|} \Rightarrow cos\,\varphi = \dfrac{5 \cdot 3 + (-1) \cdot 2}{\sqrt{5^2 + (-1)^2} \cdot \sqrt{3^2 + 2^2}} \Rightarrow cos\,\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

Ответ. $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$

б) $3x - 2y + 7 = 0$, $2x + 3y - 3 = 0$.

1 способ. Аналогично, от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ перейдем к уравнению прямой через угловой коэффициент $y = kx + b$

$y = \dfrac{3}{2}x + \dfrac{7}{2} \Rightarrow k_1 = \dfrac{3}{2}$: $y_2 = -\dfrac{2}{3}x + 1 \Rightarrow k_2 = -\dfrac{2}{3}$. Угловые коэффициенты противоположны по знаку и обратны по значению или $k_1 \cdot k_2 = \dfrac{3}{2} \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) = -1$.

Следовательно, прямые перпендикулярны, т.е. угол между ними $90°$.

2 способ. Прямые заданы в общем виде $Ax + By + C = 0 \Rightarrow$
$3x - 2y + 7 = 0 \Rightarrow \overline{n_1} = (3; -2)$; $2x + 3y - 3 = 0 \Rightarrow \overline{n_2} = (2; 3)$. Найдем скалярное произведение векторов $\vec{n_1}$ и $\vec{n_2}$: $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 3 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 6 - 6 = 0 \Rightarrow$ нормальные вектора $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ перпендикулярны $\Rightarrow$ прямые пересекаются под углом $90°$.

Ответ. $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$

в) $x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$.

1 способ. Прямые заданы в общем виде $Ax + By + C = 0 \Rightarrow x - 2y - 4 = 0$, $2x - 4y + 3 = 0$. Перейдем от общего уравнения прямой $Ax + By + C = 0$ к уравнению прямой через угловой коэффициент и найдем угловые коэффициенты прямых $y = \dfrac{x}{2} - 2 \Rightarrow k_1 = \dfrac{1}{2}$, $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{3}{4} \Rightarrow k_2 = \dfrac{1}{2}$. Угловые коэффициенты равны, т.е. $k_1 = k_2 = \dfrac{1}{2}$, следовательно, прямые параллельны.

2 способ. Так как прямые заданы в общем виде $Ax + By + C = 0$, то запишем координаты нормальных векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$: $x - 2y - 4 = 0 \Rightarrow \overline{n_1} = (1; -2)$; $2x - 4y + 3 = 0 \Rightarrow \overline{n_2} = (2; -4)$. Так как координаты векторов $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ пропорциональны, то вектора коллинеарны $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{-2}{-4} \Rightarrow \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2}$.

Нормальные вектора коллинеарны, следовательно, прямые параллельны.

Ответ. Прямые параллельны

г) $3x+2y-1=0$, $6x+4y-2=0$.

1 способ. Перейдем от общего уравнения прямой $Ax+By+C=0$ к уравнению прямой через угловой коэффициент и найдем угловые коэффициенты прямых

$$y=-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\Rightarrow k_1=-\frac{3}{2},\ b_1=\frac{1}{2};\ y=\frac{-6}{4}x+\frac{2}{4}\Rightarrow k_2=\frac{-3}{2},\ b_2=\frac{1}{2}.$$

Следовательно, прямые совпадают, так как $k_1=k_2=-\frac{3}{2}$ и $b_1=b_2=\frac{1}{2}$.

2 способ. Так как прямые заданы в общем виде $Ax+By+C=0$, то запишем координаты нормальных векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$: $3x+2y-1=0\Rightarrow\overline{n_1}=(3;\ 2)$ $6x+4y-2=0\Rightarrow\overline{n_2}=(6;\ 4)$. Так как координаты векторов $\overline{n}_1$ и $\overline{n}_2$ пропорциональны $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ и отношение свободных членов тоже равно $\frac{1}{2}$, т. е. $\frac{C_1}{C_2}=\frac{-1}{-2}=\frac{1}{2}$. Таким образом, справедлива формула

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\Rightarrow\frac{3}{6}=\frac{2}{4}=\frac{-1}{-2}\Rightarrow\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow$$ прямые совпадают.

Ответ. Прямые совпадают

Задача 3

При каких значениях A и C две прямые $Ax-2y-1=0$, $6x-4y-C=0$

а) параллельны;
б) совпадают;
в) имеют общую точку.

Решение.

Прямые на плоскости могут быть либо параллельными, т.е. $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$; либо совпадать $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$; либо пересекаться $\frac{A_1}{A_2}\neq\frac{B_1}{B_2}$.

а) $l_1: Ax-2y-1=0\Rightarrow\overline{n_1}=(A;\ -2)$,

$l_2: 6x-4y-C=0\Rightarrow\overline{n_2}=(6;\ -4)$. $l_1\parallel l_2\Leftrightarrow\overline{n_1}\parallel\overline{n_2}$;. $\frac{A}{6}=\frac{-2}{-4}\Rightarrow\frac{A}{6}=\frac{1}{2}\Rightarrow A=3$.

б) прямые совпадают тогда и только тогда, когда $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$, $\frac{A}{6}=\frac{-2}{-4}=\frac{-1}{-C}\overset{(A=3)}{\Rightarrow}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{C}\Rightarrow C=2$.

в) При $A\neq3$ и $b\in R$ прямые имеют общую точку.

Ответ. а) при $A=3$ и $C\neq2$ прямые параллельны;

б) при $A=3$ и $C=2$ прямые совпадают;

в) при $A\neq3$ и $C\in R$ прямые имеют общую точку

Задача 4

Привести общее уравнение прямой к нормальному виду:

а) $4x-3y-10=0$; б) $12x-5y+13=0$; в) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0$.

Решение.

а) Прямая задана в общем виде $Ax+By+C=0$, $4x-3y-10=0 \Rightarrow \bar{n}=(4;-3)$. Приведем к нормальному виду: $x\cos\alpha+y\sin\alpha-p=0$. Найдем нормирующий множитель μ: $\mu=\frac{\pm1}{|\bar{n}|} \Rightarrow \mu=\frac{\pm1}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{\pm1}{5}$. Так как $C=-10<0$, то $\mu=\frac{1}{5}$. Умножим общее уравнение на нормирующий множитель $4x-3y-10=0\,|\,\frac{1}{5} \Rightarrow \frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$.

б) $12x-5y+13=0 \Rightarrow \bar{n}=(12;-5)$, $\mu=\frac{\pm1}{\sqrt{12^2+(-5)^2}}=\frac{\pm1}{13}$

Так как $C=13>0$, то $\mu=-\frac{1}{13}$: $12x-5y+13=0\,|\left(-\frac{1}{13}\right) \Rightarrow -\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1=0$.

в) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0 \Rightarrow \bar{n}=\left(\frac{4}{5};-\frac{3}{5}\right)$, $\mu=\frac{\pm1}{|\bar{n}|}=\pm1$. Так как $C=10>0$, то $\mu=-1$:

$\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y+10=0\,|\,(-1)$, $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0$.

Ответ. а) $\frac{4}{5}x-\frac{3}{5}y-2=0$; б) $-\frac{12}{13}x+\frac{5}{13}y-1=0$; в) $-\frac{4}{5}x+\frac{3}{5}y-10=0$

Задача 5

Вычислить расстояние d между прямыми:

а) $3x-4y-10=0$, $6x-8y+5=0$; б) $4x-3y+15=0$, $8x-6y+30=0$.

Решение.

а) Исследуем данные прямые как они расположены друг относительно друга $l_1: 3x-4y-10=0$, $l_2: 6x-8y+5=0$, $\overline{n_1}=(3;-4)$, $\overline{n_2}=(6;-8)$.

Так как $\frac{3}{6}=\frac{-4}{-8} \Rightarrow \frac{1}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow$ прямые параллельны. Найдем расстояние между параллельными прямыми. На прямой l_1 найдем точку; пусть $x=-2$, тогда $-2\cdot3-4y-10=0 \Rightarrow -6-4y-10=0 \Rightarrow -4y=16 \Rightarrow y=-4$. Точка $(-2;-4)$.

По формуле $d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, найдем расстояние от точки $(x_0;\, y_0)$, т.е. $(-2;-4)$ до прямой $l_2 : Ax + By + C = 0$, т.е. $l_2 : 6x - 8y + 5 = 0$.

$$d = \frac{|6 \cdot (-2) - 8 \cdot (-4) + 5|}{\sqrt{6^2 + (-8)^2}} = \frac{|25|}{10} = \frac{25}{10} = 2{,}5.$$

б) Исследуем расположение данных прямых l_1 и l_2.

$l_1 : 4x - 3y + 15 = 0$, $\qquad l_2 : 8x - 6y + 30 = 0$,

Используя формулу $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$

получим $\frac{4}{8} = \frac{-3}{-6} = \frac{15}{30} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Следовательно, прямые совпадают и расстояние между ними равно нулю ($d = 0$).

Ответ. а) $d = 2{,}5$; $\qquad$ б) $d = 0$

Задача 6

При каких значениях A следующие пары прямых l_1 и l_2:
а) параллельны; б) перпендикулярны: $l_1 : 2x - 3y + 4 = 0$ и $l_2 : Ax - 6y + 7 = 0$;

Решение.

1 способ. а) $l_1 : 2x - 3y + 4 = 0$ и $l_2 :\ Ax - 6y + 7 = 0$.

Две прямые l_1 и l_2 параллельны ($l_1 \parallel l_2$), если нормальные вектора $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ коллинеарны. $\overline{n_1} = (2;-3)$, $\overline{n_2} = (A;\,-6) \Rightarrow \overline{n_1} \parallel \overline{n_2} \Rightarrow \frac{2}{A} = \frac{-3}{-6} \Rightarrow \frac{2}{A} = \frac{1}{2} \Rightarrow A = 4$.

б) Если две прямые l_1 и l_2 перпендикулярны ($l_1 \perp l_2$), то нормальные вектора $\overline{n_1}$ и $\overline{n_2}$ ортогональны $\Rightarrow$ $\overline{n_1} \cdot \overline{n_2} = 0$: $\overline{n_1} = (2;-3)$, $\overline{n_2} = (A;\,-6)$ $\Rightarrow 2A + (-3)\cdot(-6) = 0 \Rightarrow 2A + 18 = 0 \Rightarrow 2A = -18$, $A = -9$.

2 способ. Запишем уравнения прямых через угловые коэффициенты.

а) $l_1 : y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$, $k_1 = \frac{2}{3}$ и $l_2 :\ y = \frac{A}{6}x + \frac{7}{6}$, $k_2 = \frac{A}{6}$

Прямые $l_1 \parallel l_2$, если угловые коэффициенты прямых равны. Приравняем угловые коэффициенты прямых $k_1 = k_2 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{A}{6} \Rightarrow 3A = 12 \Rightarrow A = 4$.

б) Используем признак перпендикулярности двух прямых, если прямые заданы в общем виде. Прямые l_1, l_2 перпендикулярны, если угловые коэффициенты прямых противоположны по знаку и обратны по значению $k_1 = \frac{2}{3}$, $k_2 = \frac{A}{6} \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{-1}{\frac{A}{6}} \Rightarrow \frac{2}{3} = -\frac{6}{A} \Rightarrow A = -9.$

Ответ. а) 4; б) -9

Задача 7

Составить уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$, $x + 2y - 9 = 0$ и параллельно прямой $2x + y + 6 = 0$.

Решение.

Найдем точку пересечения прямых $3x - 2y + 5 = 0$ и $x + 2y - 9 = 0$. Решим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x - 2y + 5 = 0 \\ x + 2y - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3(9 - 2y) - 2y + 5 = 0 \\ x = 9 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 27 - 6y - 2y + 5 = 0 \\ x = 9 - 2y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 4 \\ x = 1 \end{cases}$$

Точка пересечения двух прямых $(1; 4)$. Так как прямые параллельны, то нормальные вектора коллинеарны: $\bar{n} = (2; 1)$.

$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ - уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0; y_0)$ с нормальным вектором $\bar{n} = (A; B)$.

$2(x - 1) + 1(y - 4) = 0 \Rightarrow 2x + y - 6 = 0.$

Ответ. $2x + y - 6 = 0$

Задача 8

Определить координаты точки M_2, симметричной точке $M_1(-3;4)$ относительно прямой $4x - y - 1 = 0$.

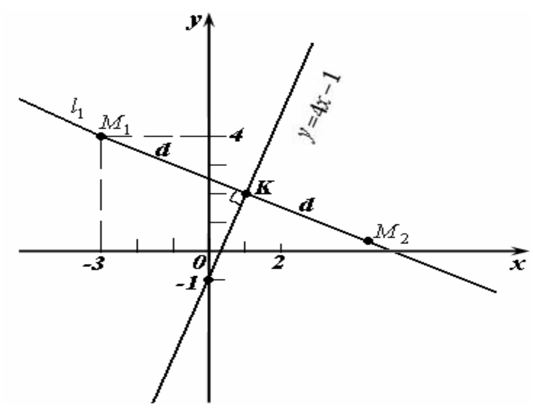


Рисунок 29

Решение.

Найдем уравнение прямой l_1, проходящей через точку $M_1(-3;4)$ и перпендикулярной данной прямой $4x-y-1=0$ по формуле $y=y_0+k(x-x_0)$:

$k=-\frac{1}{4}, y=4-\frac{1}{4}(x+3)\Rightarrow l_1: x+4y-13=0$.

Так как точка $M_2(x_2;y_2)$ лежит на l_1, то ее координаты удовлетворяют уравнению l_1, т.е. $x_2+4y_2-13=0$.

Найдем расстояние от точки M_1 до прямой $4x-y-1=0$.

$$d=\frac{|4\cdot(-3)-4-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}}=\frac{|-12-4-1|}{\sqrt{16+1}}=\frac{|-17|}{\sqrt{17}}=\frac{17}{\sqrt{17}}=\sqrt{17}.$$

Найдем точку пересечения двух прямых:

$$\begin{cases} y=4x-1 \\ y=-\frac{x}{4}+\frac{13}{4} \end{cases} \Rightarrow 4x-1=-\frac{x}{4}+\frac{13}{4}\ |\cdot 4 \Rightarrow 16x-4=-x+13 \Rightarrow x=1,\ y=3.$$

Точка $K(1;3)$.

Найдем расстояние KM_2, которое равно $\sqrt{17}$:

$$|KM_2|=\sqrt{(x_2-1)^2+(y_2-3)^2}=\sqrt{17}.$$

Решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x_2+4y_2-13=0 \\ (x_2-1)^2+(y_2-3)^2=17 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=13-4y_2 \\ (13-4y_2-1)^2+(y_2-3)^2=17 \end{cases}$$

$(12-4y_2)^2+(y_2-3)^2=17$, $y_2^2-6y_2+8=0$,

$$D=36-4\cdot 8=4\Rightarrow y=\frac{6\pm 2}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l}(y_2)_1=4 \\ (y_2)_2=2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x_2)_1=13-4\cdot 4 \\ (x_2)_2=13-4\cdot 2\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}(x_2)_1=-3 \\ (x_2)_2=5\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}M_1(-3,4) \\ M_2(5,2)\end{array}\right.$$

Ответ. $M_2(5;2)$

Задача 9

Определить при каком значении A три прямые $2x-y+3=0$, $x+y+3=0$, $Ax+y-13=0$ будут пересекаться в одной точке.

Решение.

Для того, чтобы найти при каком значении A три прямые будут пересекаться в одной точке, необходимо решить систему уравнений:

$$\begin{cases}2x-y+3=0\\ x+y+3=0\\ Ax+y-13=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2x-y=-3\\ x+y=-3\\ Ax+y=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3-y\\ 2x-y=-3\\ Ax+y=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3-y\\ 2(-3-y)-y=-3\\ A(-3-y)+y=13\end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}x=-3-y\\ -6-2y-y=-3\\ -3A-Ay+y=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-3-y\\ -3y=3\\ -3A-Ay+y=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\\ -3A+A-1=13\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\\ -2A=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=-2\\ y=-1\\ A=-7\end{cases}$$

Ответ. $A=-7$

Домашнее задание № 1

1 Даны вершины $\Delta M_1M_2M_3$: $M_1(3;-2)$, $M_2(-1;-1)$, $M_3(2;4)$

а) уравнения сторон M_1M_2, M_1M_3, M_2M_3;

б) составить уравнения прямых l_1, l_2, l_3, проходящих через вершины M_1, M_2, M_3 треугольника $\Delta M_1M_2M_3$ параллельно противоположным сторонам: M_2M_3, M_1M_3, M_1M_2 (соответственно);

в) составить уравнения высот треугольника h_1, h_2, h_3, опущенных из вершин M_1, M_2, M_3 (соответственно);

г) составить уравнения медиан треугольника m_1, m_2, m_3, проведенных из вершин M_1, M_2, M_3 (соответственно);

Ответ. а) $M_1M_2: x+4y+5=0$; $M_1M_3: 6x+y-16=0$; $M_2M_3: 5x-3y+2=0$;

б) $l_1 : 5x-3y-21=0$; $l_2 : 6x+y+7=0$; $l_3 : x+4y-18=0$;

в) $h_1 : 3x+5y+1=0$; $h_2 : x-6y-5=0$; $h_3 : 4x-y-4=0$;;

г) $m_1 : 7x+5y-11=0$; $m_2 : 4x-7y-3=0$; $m_3 : 11x-2y-14=0$;

2 Определить угол между двумя прямыми
$l_1 : 3x-2y+7=0$ и $l_1 : 2x+5y+1=0$

Ответ. $tg\varphi=\dfrac{19}{4}$ или $\cos\varphi=\dfrac{4}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{29}}$

3 Вычислить площадь треугольника, отсекаемого прямой $3x-4y-12=0$ от координатного угла.

Ответ. $S=6$

4Определить, при каком значении a прямая $(a+2)x+(a^2-9)y+3a^2-8a+5=0$:

а) параллельна оси Ox; б) параллельна оси Oy;

в) проходит через точку $(0;0)$.

Ответ. а) $a=-2$; б) $a=\pm3$; в) $a=1$ или $a=\dfrac{5}{3}$

5 Какие из следующих пар прямых перпендикулярны и параллельны:
а) $3x - y + 5 = 0$, $x + 3y - 1 = 0$; б) $3x - 4y + 1 = 0$, $4x - 3y + 7 = 0$;
в) $6x - 15y + 7 = 0$, $2x - 5y - 4 = 0$; г) $x - 2y + 1 = 0$, $2x - 4y + 2 = 0$.

Ответ. а) перпендикулярны; б) не перпендикулярны, не параллельны; в) параллельны; г) совпадают

6 Привести общее уравнение прямой к нормальному виду:
а) $2x - y - \sqrt{5} = 0$; б) $x + 2 = 0$.

Ответ. а) $\frac{2}{\sqrt{5}}x - \frac{y}{\sqrt{5}} - 1 = 0$; б) $-x - 2 = 0$

7 Найти расстояние d между прямыми l_1 и l_2, если
а) $l_1: 5x - 12y + 26 = 0$, $l_2: 5x - 12y - 13 = 0$; б) $l_1: 3x + 4y - 20 = 0$, $l_2: 6x + 8y + 5 = 0$.

Ответ. а) $d = 3$; б) $d = 4{,}5$

8 При каких значениях A следующие пары прямых:
а) параллельны; б) перпендикулярны:

1) $Ax - 4y + 1 = 0$ и $-2x + y + 2 = 0$;

2) $4x + y - 6 = 0$ и $3x + Ay - 2 = 0$;

3) $x - Ay + 5 = 0$ и $2x + 3y + 3 = 0$.

Ответ. 1) а) 8, б) -2; 2) а) $\frac{3}{4}$, б) -12; 3) а) $-\frac{3}{2}$, б) $\frac{2}{3}$

9 Точка $A(2;-5)$ является вершиной квадрата, одна из сторон которого лежит на прямой $x - 2y - 7 = 0$. Найти площадь этого квадрата.

Ответ. $S = 5$ кв.ед

10 Даны прямые: а) $2x + 3y - 6 = 0$; б) $4x - 3y + 24 = 0$.
Составить для них уравнения «в отрезках», построить эти прямые. Найти площадь треугольника, отсекаемого этими прямыми от координатного угла.

Ответ. а) $S = 3$; б) $S = 24$

11 Какой угол образует прямая $\frac{x}{\sqrt{3}} - \frac{y}{3} = 1$ с положительным направлением оси Oy, оси Ox?

Ответ. $150°$ и $60°$

12 На прямой $x - 3y + 8 = 0$ найти координаты точки, равноудаленной от двух точек $(5;4)$ и $(-3;2)$.

Ответ. $(1;\,3)$

Тест 1

1 Дан треугольник ABC.
Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Уравнение стороны AC имеет вид:

а) $y = 0$; в) $x - 2y - 3 = 0$;
б) $x - 2 = 0$; г) $2x + y = 0$.

2 Дан треугольник ABC.
Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Уравнение медианы BM, опущенной из вершины B на сторону AC имеет вид:

а) $x + 2y = 0$; в) $x - 3y - 15 = 0$;
б) $x + y - 3 = 0$; г) $x + 4y + 6 = 0$.

3 Дан треугольник ABC.
Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Уравнение высоты BK имеет вид:

а) $x + y - 3 = 0$; в) $x - y + 2 = 0$;
б) $y + 3 = 0$; г) $x + 6 = 0$.

4 Дан треугольник ABC.
Координаты точек: A (2; 0), B (6; –3), C (2; –4). Косинус угла между прямыми AB и AC равен:

а) $\cos\angle A = \frac{13}{19}$; в) $\cos\angle A = \frac{3}{5}$;
б) $\cos\angle A = \frac{1}{4}$; г) $\cos\angle A = \frac{4}{5}$.

5 Уравнение прямой l, проходящей через точку N (1; –2) и направляющий вектор $\bar{s} = (2;1)$ имеет вид:

а) $x + 2y - 4 = 0$; в) $x - 2y - 5 = 0$;
б) $2x + y = 0$; г) $3x + y + 1 = 0$.

6 Уравнение прямой l, проходящей через точку P (1; 3) и нормальный вектор $\bar{n} = (-2;4)$ имеет вид:

а) $x - 2y + 5 = 0$; в) $x - y + 2 = 0$;
б) $2x + y - 5 = 0$; г) $3x + 2y - 2 = 0$.

7 Уравнение прямой $3x+4y+5=0$ в нормальном виде имеет вид:

а) $\frac{3}{5}x+\frac{4}{5}y+1=0$; в) $\frac{1}{4}x+\frac{1}{3}y+\frac{5}{12}=0$;

б) $-\frac{3}{5}x-\frac{4}{5}y-1=0$; г) $-\frac{1}{4}x-\frac{1}{3}y-\frac{5}{12}=0$.

8 Расстояние от точки А (1; 1) до прямой l : x + y – 1 = 0 равно:

а) $d=\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) $d=2{,}5$; в) $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $d=1$.

9 Даны точки А(3;-1) и В(5;-3).
Точка С-середина отрезка АВ имеет координаты:

а) С(8;-4); б) С(4;-2); в) С(2;-2); г) С(1;-1).

10 Даны точки А(2;-3) и В(4;1), где В – середина отрезка АС. Точка С имеет координаты:

а) С(6;-2); б) С(3;-1); в) С(1;2); г) С(6;5).

11 Прямая проходит через точки $O(0;0)$ и $B(-2;1)$. Угловой коэффициент прямой равен:

а) $\frac{1}{2}$; б) 1; в) $-\frac{1}{2}$; г) 2.

12 Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;1)$ и перпендикулярно вектору $\overline{n}=(1;2)$ имеет вид:

а) $2x-y-1=0$; в) $x+2y+5=0$;

б) $2x-y+1=0$; г) $x+2y-3=0$.

13 Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(1;2)$ и $M_2(2;3)$ имеет вид:

а) $\frac{x-1}{3}=\frac{y-2}{5}$; в) $\frac{x+1}{3}=\frac{y+2}{5}$;

б) $\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{1}$; г) $\frac{x+1}{1}=\frac{y+2}{1}$.

Уравнение прямой l, проходящей через точку $M\ (3;-4)$ с угловым коэффициентом $k=-\frac{4}{5}$ имеет вид:

а) $-4x+5y-8=0$; в) $4x+5y+8=0$;

б) $3x-4y-25=0$; г) $x+y+1=0$.

14 Две прямые $l_1: 2x - 4y - 1 = 0$, $l_2: x - 2y + 3 = 0$ расположены:

а) перпендикулярно; в) совпадают;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

15 Две прямые $l_1: x + y - 1 = 0$, $l_2: x - y + 5 = 0$ расположены:

а) перпендикулярно; в) совпадают;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

16 Две прямые $l_1: 3x - 2y + 2 = 0$, $l_2: 9x - 6y + 6 = 0$ расположены:

а) перпендикулярно; в) совпадают;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

17 Две прямые $l_1: -x + 2y + 4 = 0$, $l_2: 2x + 3y - 1 = 0$ расположены:

а) перпендикулярно; в) совпадают;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

18 Прямая задана общим уравнением $3x + 4y - 5 = 0$.
Угловой коэффициент прямой равен:

а) $-\frac{3}{4}$; в) $-\frac{4}{3}$;
б) $\frac{4}{3}$; г) 4.

19 Прямая задана общим уравнением $5x - 3y - 1 = 0$.
Точка лежащая на прямой имеет координаты:

а) (5;-3); в) (-2;-3);
б) (2;3); г) (0;0).

Глава 2 Плоскость в пространстве

§1 Различные виды уравнения плоскости в пространстве

Каждая *плоскость* в пространстве $Oxyz$ определяется линейным алгебраическим *уравнением первой степени с тремя переменными*.

1 *Общее уравнение плоскости*:

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right) \tag{17}$$

2 *Уравнение плоскости, проходящей через точку* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *перпендикулярно вектору* $\overline{N} = (A; B; C)$:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{18}$$

Всякий ненулевой вектор, перпендикулярный данной плоскости, называется нормальным вектором этой плоскости. В частности, вектор $\overline{N}(A; B; C)$ - нормальный вектор плоскости.

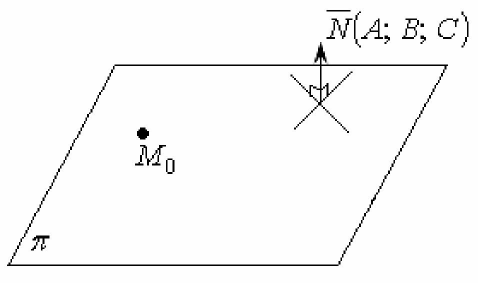


Рисунок 30

Частные случаи уравнения (17):

$Ax + By + Cz = 0$ $(D = 0)$ - плоскость проходит через начало координат;
$Ax + By + D = 0$ $(C = 0)$ - плоскость параллельна оси Oz
(аналогичный смысл имеют уравнения $Ax + Cz + D = 0$, $By + Cz + D = 0$);
$Ax + By = 0$ $(D = C = 0)$ - плоскость проходит через ось Oz
($Ax + Cz = 0$, $By + Cz = 0$ - через ось Oy и Ox соответственно);
$Ax + D = 0$ $(B = C = 0)$ – плоскость параллельна плоскости Oyz
($Cz + D = 0$, $By + D = 0$ - параллельно плоскости Oxy и Oxz соответственно);
$Ax = 0$, т.е. $x = 0$ $(B = C = D = 0)$ - плоскость совпадает с плоскостью Oyz
($y = 0$, $z = 0$ - уравнения плоскостей Oxz и Oxy соответственно).

3 *Уравнение плоскости в отрезках*: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, где a, b, c - абсцисса, ордината и аппликата точек пересечения плоскостью

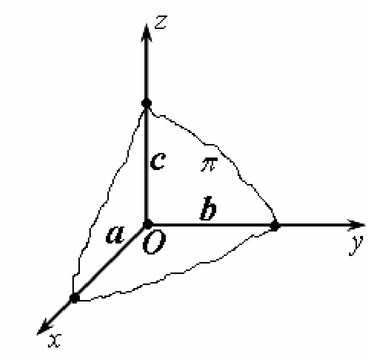


Рисунок 31

4 *Уравнение плоскости, проходящей через три различные точки* $M_1(x_1; y_1; z_1)$, $M_2(x_2; y_2; z_2)$ *и* $M_3(x_3; y_3; z_3)$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \qquad (19)$$

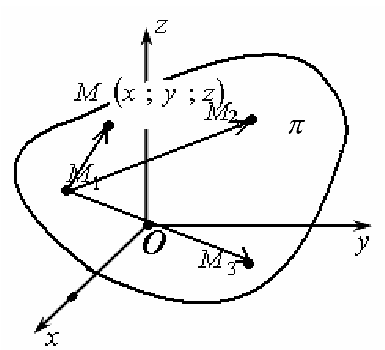


Рисунок 32

5 *Нормальное уравнение плоскости*:

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0 \qquad (20)$$

где p - длина перпендикуляра OK, опущенного из начала координат на плоскость; α, β, γ - углы, образованные единичным вектором $\bar{e}$, имеющего направление перпендикуляра OK (рисунок 33), с осями Ox, Oy и Oz
$(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1)$.

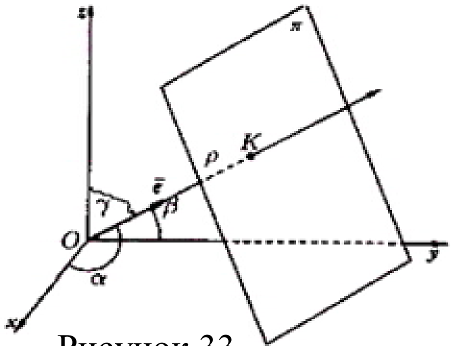


Рисунок 33

Общее уравнение плоскости (17) приводится к нормальному виду (20) путем умножения на *нормирующий множитель*

$$\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}};$$

знак перед дробью берется противоположный знаку свободного члена D
(в общем уравнении плоскости).

§2 Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от данной точки до данной плоскости

Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Две плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$, где $\overline{N_1} = (A_1; B_1; C_1)$, $\overline{N_2} = (A_2; B_2; C_2)$.

Наименьший из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле:

$$cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \qquad (21)$$

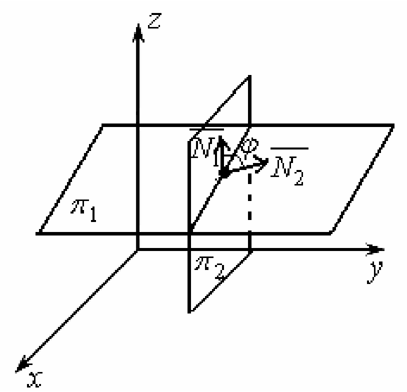


Рисунок 34

Условие параллельности плоскостей:

Две плоскости параллельны тогда и только тогда, когда их нормальные вектора коллинеарны, т.е. $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \;\Rightarrow\; \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$

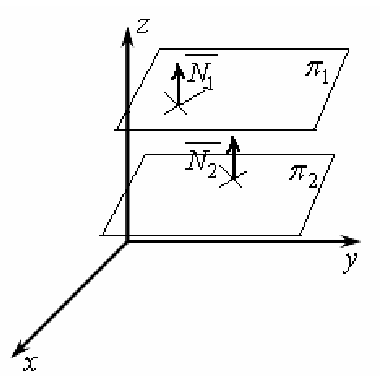


Рисунок 35

Условие перпендикулярности плоскостей:

Две плоскости перпендикулярны тогда и только тогда, когда их нормальные вектора перпендикулярны, т.е.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \;\Rightarrow\; A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0 \qquad (23)$$

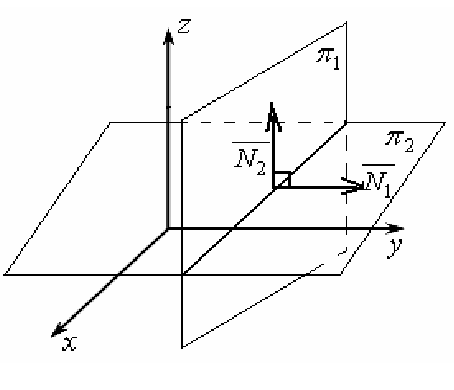


Рисунок 36

Условие совпадения двух плоскостей $\pi_1 \equiv \pi_2$: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$ (24)

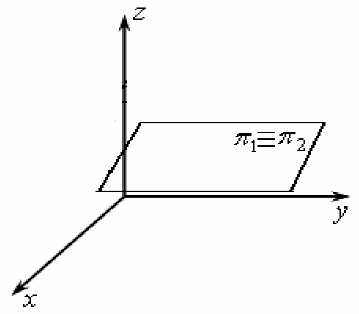


Рисунок 37

Расстояние d *от точки* $M_0(x_0; y_0; z_0)$ *до плоскости* $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \tag{25}$$

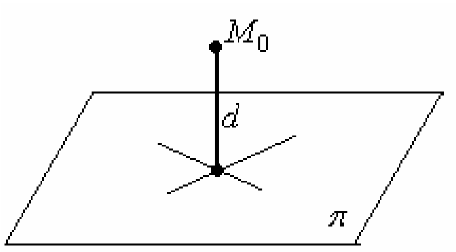


Рисунок 38

Если плоскость задана уравнением $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$, то расстояние от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости может быть найдено по формуле

$$d = |x_0\cos\alpha + y_0\cos\beta + z_0\cos\gamma - p| \tag{26}$$

Вопросы для самоконтроля

1 Выведите уравнение плоскости π, проходящую через точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ с нормальным вектором $\overline{N} = (A;B;C)$.

2 Укажите способы взаимного расположение двух плоскостей в пространстве.

3 Выведите формулу расстояния от точки $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$.

4 Запишите нормальное уравнение плоскости π. Укажите связь общего уравнения плоскости с нормальным уравнением.

5 Запишите условие перпендикулярности и параллельности плоскостей в пространстве.

6 Выведите уравнение плоскости π, проходящей через три различные точки: $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$, $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$, $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$.
7 Как расположена данная плоскость 5х–2у+3=0 в пространстве?
8 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку А(1; 0; 2) с нормальным вектором $\overline{N}=(3;4;2)$.
9 Составьте уравнение плоскости, проходящей через три различные точки M_1 (3; 0; 1), M_2 (–1; 1; 0) и M_3 (2; 3; –2).
10 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1; 2; 0) и M_2 (2; 1; 1) и параллельный плоскости вектор $\overline{s}=(2;3;0)$.
11 Составьте уравнение плоскости, проходящей через точку M_1 (3; 0; 1) и два вектора, параллельных плоскости $\overline{s}=(1;-1;0)$ и $\overline{p}=(2;0;-2)$.
12 Найдите угол между двумя плоскостями: $x+\sqrt{2}y+z-3=0$ и $-\sqrt{2}x+\sqrt{2}y+\sqrt{2}z+1=0$.
13 Как плоскость XOZ расположена относительно оси OY ?
14 Составьте уравнение плоскости, которая содержит оси OX и OY и проходит через начало координат.
15 Как расположена плоскость $z-1=0$ относительно плоскости XOY ?
16 Как расположена в пространстве данная плоскость $Ax+By+D=0$?
17 Запишите формулу для нахождения расстояния от точки M_0 до плоскости.
18 Запишите формулу нахождения угла между плоскостями.
19 Запишите уравнение плоскости проходящей через точку M_1 и параллельно двум векторам $\overline{a}_1,\overline{a}_2$, заданных своими координатами.
20 Как расположена в пространстве данная плоскость $Ax+By=0$?

Практическое занятие № 2
Плоскость. Способы задания плоскостей. Взаимное расположение плоскостей

Задача 1

Составить уравнение плоскости, заданное нормальным вектором $\overline{N}=(1;-2;3)$ и проходящей через точку $M(2;1;-1)$.

Решение.

Уравнение плоскости π проходящей через точку $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$ с нормальным вектором $\overline{N}=(A;B;C)$, который перпендикулярен плоскости находится по формуле $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

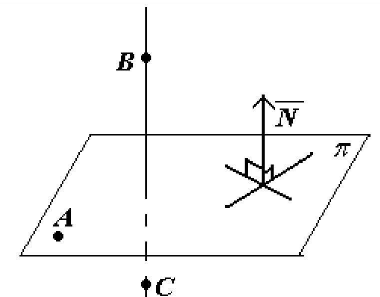
$1(x-2)-2(y-1)+3(z+1)=0$,

$x-2y+3z+3=0$.

Ответ. $x-2y+3z+3=0$

Задача 2

Составить уравнение плоскости π, проходящей через точку $A(2;\,-1;\,4)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $B(2;-1;0)$ и $C(-1;\,1;\,3)$.



Решение.

Так как вектор $\overline{BC}$ перпендикулярен плоскости, то он может являться нормальным вектором для плоскости. Уравнение плоскости π проходящей через точку $M(x_0;\,y_0;\,z_0)$ с нормальным вектором $\overline{N}=(A;B;C)$, который перпендикулярен плоскости находится по формуле

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Рисунок 39

Найдем координаты вектора $\overline{BC}$. $B(2;-1;0)$ и $C(-1;\,1;\,3)\Rightarrow \overrightarrow{BC}=(-3;2;3)$. Подставим в данную формулу

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

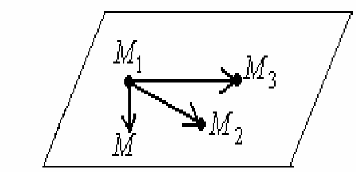
$$-3(x-2)+2(y+1)+3(z-4)=0$$

$$3x-2y-3z+4=0.$$

Ответ. $3x-2y-3z+4=0$.

Задача 3

Составить уравнение плоскости π, проходящей через точки $M_1(2;\,1;\,-1)$, $M_2(-2;\,4;\,5)$, $M_3(0;\,2;\,-3)$.



Решение.

Уравнение плоскости π, проходящей через 3 точки $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1),M_2(x_2;\,y_2;\,z_2),M_3(x_3;\,y_3;\,z_3)$

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Рисунок 40

Рассмотрим точку $M(x;\,y;\,z)$ лежащую на плоскости. Вектора $\overline{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ - компланарны $\Rightarrow$ их смешанное произведение равно нулю, т.е. ($\overline{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$)=0. Так как точки $M_1(2;\,1;\,-1),M_2(-2;\,4;\,5)$, $M_3(0;\,2;\,-3)$, получим

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -2-2 & 4-1 & 5+1 \\ 0-2 & 2-1 & -3+1 \end{vmatrix}=0\Rightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-1 & z+1 \\ -4 & 3 & 6 \\ -2 & 1 & -2 \end{vmatrix}=0$$

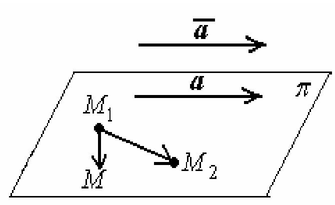
$$6(x-2)+10(y-1)-(z+1)=0,\quad 6x+10y-z-23=0.$$

Ответ. $6x+10y-z-23=0$

Задача 4

Составить уравнение плоскости π, проходящей через точки $M_1(3;\ 4;\ -5)$ и $M_2(3;\ 1;\ 2)$ параллельно вектору $\overline{a}=(3;-1;4)$.

Решение.



Рассмотрим любую точку $M(x;\ y;\ z)$ лежащую в плоскости π и рассмотрим три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{a}$. Эти три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{a}$ лежат в плоскости π, а значит они компланарны. Смешанное произведение трех векторов равно 0, т.е. ($\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{a}$)=0.

Рисунок 41

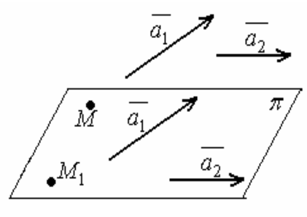
Найдем координаты векторов $\overline{M_1M}=(x-3;\ y-4;\ z+5)$, $\overline{M_1M_2}=(0;\ -3;\ 7)$.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 0 & -3 & 7 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{array}{l} -5x+21y+9z-24=0 \quad \big|\cdot(-1), \\ 5x-21y-9z+24=0. \end{array}$$

Ответ. $5x-21y-9z+24=0$

Задача 5

Составить уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_1(3;\ 4;\ -5)$, параллельно вектору $\overline{a_1}=(3;1;-1)$ и параллельно вектору $\overline{a_2}=(1;-2;1)$.



Решение.

Рассмотрим любую точку $M(x;\ y;\ z)$, лежащую в плоскости π. При помощи параллельного переноса вектора $\overline{a_1}$ и $\overline{a_2}$ перенесем в плоскость π. Рассмотрим три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$. Эти вектора лежат в плоскости π, т.е.

Рисунок 42

они компланарны. По признаку компланарности трех векторов их смешанное произведение равно 0, т.е. ($\overline{M_1M}$, $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$)=0. Так как $M_1(3;\ 4;\ -5)$, $\overline{a_1}=(3;1;-1)$, $\overline{a_2}=(1;-2;1)$, найдем координаты вектора $\overline{M_1M}(x-3;\ y-4;\ z+5)$.

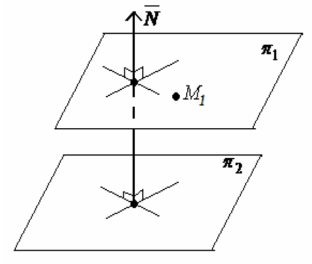
Подставим координаты векторов в формулу $\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$.

$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z+5 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{array}{l} (x-3)+4(y-4)+7(z+5)=0, \\ x+4y+7z+16=0. \end{array}$$

Ответ. $x+4y+7z+16=0$

Задача 6

Составить уравнение плоскости π_1 проходящей через точку $M_0(1;\,-3;\,-2)$ параллельно плоскости π_2 $:3x-2y+4z-3=0$.



Решение.

Так как плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны $\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \parallel \overline{N_2}$, значит для плоскости π_1 нормальный вектор может быть вектор $\overline{N_2}=(3;-2;4)$. Воспользуемся формулой

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ - уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0;z_0)$

Рисунок 43

с нормальным вектором $\overline{N}=(A;\,B;\,C)$. Подставив данные значения, получим

$$3(x-1)-2(y+3)+4(z+2)=0,$$

$$3x-3-2y-6+4z+8=0 \Rightarrow 3x-2y+4z-1=0.$$

Ответ. $3x-2y+4z-1=0$

Задача 7

Составить уравнение плоскости π проходящей через точки $M_1(-1;\,3;\,0)$ и $M_2(2;\,4;\,-1)$, перпендикулярно плоскости $\pi_1: x-2y+3z-10=0$.

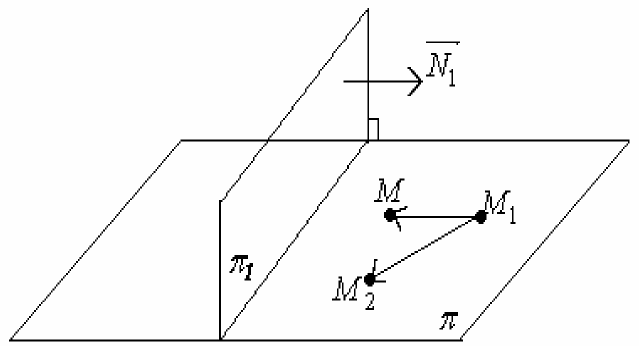


Рисунок 44

Решение.

Так как плоскости перпендикулярны то, нормальный вектор $\overline{N_1}=(1;-2;3)$ является направляющим вектором для плоскости π. Рассмотрим точку $M(x,\,y,\,z)$ лежащую в плоскости π. Три вектора $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{N_1}$ - компланарны. Смешанное произведение трех векторов равно 0, т.е.($\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$, $\overline{N_1}$)=0. Воспользуемся формулой

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$

Подставив данные значения в формулу, получим

$$\begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 2+1 & 4-3 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x+1 & y-3 & z \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x+1)-10(y-3)-7z=0 \Rightarrow x+1-10y+30-7z=0 \Rightarrow x-10y-7z+31=0.$$

Ответ. $x-10y-7z+31=0$

Задача 8

Докажите параллельность плоскостей π_1 и π_2, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 2x-3y+5z-7=0$, $\pi_2: 2x-3y+5z+3=0$.

Решение.

Так как две плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны $\pi_1 \,||\, \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \,||\, \overline{N_2}$.

$$\begin{matrix} \pi_1: 2x-3y+5z-7=0 \Rightarrow \overline{N_1}=(2;-3;5) \\ \pi_2: 2x-3y+5z+3=0 \Rightarrow \overline{N_2}=(2;-3;5) \end{matrix}, \quad \overline{N_1} \,||\, \overline{N_2} \Leftrightarrow \frac{2}{2}=\frac{-3}{-3}=\frac{5}{5} \Rightarrow 1=1=1.$$

Вектора коллинеарны, следовательно, плоскости параллельны.

Задача 9

Докажите перпендикулярность плоскостей π_1 и π_2, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 3x-y-2z-5=0$, $\pi_2: x+9y-3z+2=0$.

Решение.

Так как две плоскости перпендикулярны, то их нормальные вектора перпендикулярны, т.е. их скалярное произведение равно 0.

$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Rightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 0.$

$\pi_1: 3x-y-2z-5=0 \Rightarrow \overline{N_1}=(3;-1;-2),$

$\pi_2: x+9y-3z+2=0 \Rightarrow \overline{N_2}=(1;9;-3).$

$\overline{N_1} \cdot \overline{N_2} = 3\cdot 1+(-1)\cdot 9+(-2)\cdot(-3)=3-9+6=0 \Rightarrow$ плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны.

Задача 10

Найдите значения l и m при которых плоскость π_1 параллельна плоскости π_2, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 2x+ly+3z-5=0$ и $\pi_2: mx+3y+2z+5=0$.

Решение.

Плоскость $\pi_1: 2x+ly+3z-5=0$ с нормальным вектором $\overline{N_1}=(2;l;3)$.

Плоскость $\pi_2: mx+3y+2z+5=0$ с нормальным вектором $\overline{N_2}=(m;3;2)$.

Так как две плоскости параллельны, то их нормальные вектора коллинеарны

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \parallel \overline{N_2} \Rightarrow \frac{2}{m}=\frac{l}{3}=\frac{3}{2} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{2}{m}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{l}{3}=\dfrac{3}{2}, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m=\dfrac{4}{3}, \\ l=\dfrac{9}{2}. \end{cases}$$

Ответ. $m=\frac{4}{3},\ l=\frac{9}{2}$

Задача 11

При каком значении l плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: 3x-5y+lz-3=0$ и $\pi_2: x+3y+2z+5=0$.

Решение.

Плоскость $\pi_1: 3x-5y+lz-3=0$ с нормальным вектором $\overline{N_1}=(3;-5;l)$. Плоскость $\pi_2: x+3y+2z+5=0$ с нормальным вектором $\overline{N_2}=(1;3;2)$. Так как две плоскости перпендикулярны, то их нормальные вектора перпендикулярны и скалярное произведение этих векторов равно 0.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \overline{N_1} \perp \overline{N_2} \Rightarrow \overline{N_1} \cdot \overline{N_2}=0 \Rightarrow 3\cdot 1+(-5)\cdot 3+l\cdot 2=0 \Rightarrow l=6.$$

Ответ. $l=6$

Задача 12

Определить двугранный угол, образованный пересечением плоскостей π_1 и π_2, если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: x-y\sqrt{2}+z-1=0$ и $\pi_2: x+y\sqrt{2}-z+3=0$.

Решение.

Углом между плоскостями в пространстве называется угол между нормальными векторами этих плоскостей. Две плоскости π_1 и π_2 заданы уравнениями $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$, где $\overline{N_1}=(A_1;B_1;C_1)$, $\overline{N_2}=(A_2;B_2;C_2)$. Плоскость $\pi_1: x-y\sqrt{2}+z-1=0$ с нормальным вектором $\overline{N_1}=(1;-\sqrt{2};1)$. Плоскость $\pi_2: x+y\sqrt{2}-z+3=0$ с нормальным вектором $\overline{N_2}=(1;\sqrt{2};-1)$. Наименьший, из двух смежных углов, образованных этими плоскостями, находится по формуле:

$$\left(\pi_1 \hat{;} \pi_2\right)=\left(\overline{N_1}\hat{;}\overline{N_2}\right)=\varphi \Rightarrow \cos\varphi=\frac{\overline{N_1}\cdot\overline{N_2}}{\left|\overline{N_1}\right|\cdot\left|\overline{N_2}\right|}$$

$$cos\varphi = \frac{|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

$$cos\,\varphi = \frac{\left|1 \cdot 1 + \left(-\sqrt{2}\right) \cdot \sqrt{2} + 1(-1)\right|}{\sqrt{1^2 + \left(-\sqrt{2}\right)^2 + 1^2} \cdot \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{2}\right)^2 + (-1)^2}} = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{3}$$

Ответ. $\varphi = \frac{\pi}{3}$

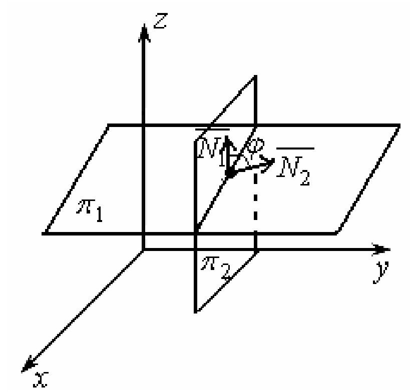


Рисунок 45

Задача 13

Записано ли следующее уравнение плоскости в нормальном виде $\pi: \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$?

Решение.

Нормальное уравнение плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ приводится к нормальному виду $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ путем умножения на *нормирующий множитель* $\mu = \frac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена D. Найдем координаты нормального вектора $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0 \Rightarrow \overline{N} = \left(\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}\right)$.

$\mu = \frac{\pm 1}{\left|\overline{N}\right|} \Rightarrow \mu = \frac{\pm 1}{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2}} = \pm 1$. Так как $C = -5 < 0$, то $\mu = 1$.

Данное уравнение записано в нормальном виде $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$

Ответ. $\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z - 5 = 0$

Задача 14

Привести уравнение плоскости $2x - 2y + z - 18 = 0$ к нормальному виду.

Решение.

Нормальное уравнение плоскости $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$.

Общее уравнение плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ приводится к нормальному виду $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$ путем умножения на *нормирующий множитель*

$\mu = \dfrac{1}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$; знак перед дробью берется противоположным знаку свободного члена D. $2x - 2y + z - 18 = 0 \Rightarrow \overline{N} = (2; -2; 1) \Rightarrow$ $\mu = \dfrac{\pm 1}{|\overline{N}|}$, $\mu = \dfrac{\pm 1}{3}$.

Так как $C = -18 < 0$, то $\mu = \dfrac{1}{3}$. Так как *нормирующий множитель* $\mu = \dfrac{1}{3}$,

$2x - 2y + z - 18 = 0 \;|\cdot\dfrac{1}{3}$, $\quad \dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z - 6 = 0$.

Ответ. $\dfrac{2}{3}x - \dfrac{2}{3}y + \dfrac{1}{3}z - 6 = 0$

Задача 15

Найти α, β, γ и p, если плоскость задана уравнением $\pi: x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$.

Решение.

Уравнение плоскости в нормальном виде: $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$. Приведем данное уравнение к нормальному виду. $\pi: x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0$ $\overline{N} = (1; \sqrt{2}; 1) \Rightarrow \mu = \dfrac{\pm 1}{|\overline{N}|} \Rightarrow \mu = \dfrac{\pm 1}{2}$.

Так как $C = -10 < 0$, то нормирующий множитель $\mu = \dfrac{1}{2}$. Умножим общее уравнение плоскости на нормирующий множитель μ: $x + y\sqrt{2} + z - 10 = 0 \;\Big|\cdot\dfrac{1}{2}$,

$\dfrac{1}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y + \dfrac{1}{2}z - 5 = 0$.

$$\begin{cases} \cos\alpha = \dfrac{1}{2}, \\ \cos\beta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}, \\ \cos\gamma = \dfrac{1}{2}, \\ p = 5, \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = 60^\circ, \\ \beta = 45^\circ, \\ \gamma = 60^\circ, \\ p = 5. \end{cases}$$

Ответ. $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 45^\circ$, $\gamma = 60^\circ$, $p = 5$

Задача 16

Найти расстояние d от точки $P(-1;\ 1;\ -2)$ до плоскости, проходящей через три данные точки $M_1(1;\ -1;\ 1)$, $M_2(-2;\ 1;\ 3)$, $M_3(4;\ -5;\ -2)$.

Решение.

Расстояние от точки $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости π: $Ax+By+Cz+D=0$ находим по формуле: $d=\dfrac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$.

Сначала найдем уравнение плоскости, проходящей через три различные точки: $M_1(1;\ -1;\ 1)$, $M_2(-2;\ 1;\ 3)$, $M_3(4;\ -5;\ -2)$.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -2-1 & 1+1 & 3-1 \\ 4-1 & -5+1 & -2-1 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow \begin{vmatrix} x-1 & y+1 & z-1 \\ -3 & 2 & 2 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix}=0$$

$2x-3y+6z-11=0$

$$d=\frac{|2\cdot(-1)-3\cdot1+6\cdot(-2)-11|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\frac{|-2-3-12-11|}{\sqrt{4+9+36}}=\frac{|-28|}{\sqrt{49}}=\frac{28}{7}=4.$$

Ответ. $d=4$

Задача 17

Найти расстояние между параллельными плоскостями π_1 и π_2 если плоскости заданы уравнениями $\pi_1: x-2y-2z-12=0$ и $\pi_2: x-2y-2z-6=0$.

Решение.

Для того чтобы найти расстояние между параллельными плоскостями, необходимо рассмотреть точку в одной из плоскостей и найти расстояние от этой точки до другой плоскости.

Найдем любую точку в плоскости $\pi_1: x-2y-2z-12=0$. Пусть $y=0$ и $x=4$, тогда $4-2\cdot0-2z-12=0 \Rightarrow -2z-8=0 \Rightarrow$ $\Rightarrow -2z=8 \Rightarrow z=-4 \Rightarrow P(4;\ 0;\ -4)$. $\pi\ : x-2y-2z-6=0$. Расстояние от точки $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$ до плоскости π: $Ax+By+Cz+D=0$ находим по формуле:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \Rightarrow d=\frac{|4-2\cdot0-2\cdot(-4)-6|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+(-2)^2}}=2.$$

Ответ. $d=2$

Домашнее задание № 2

1 Составить уравнение плоскости π, проходящей через точку $M(0;\ 3;\ -1)$ и нормальный вектор $\overline{N} = (4;2;-1)$.

Ответ. $4x + 2y - z - 7 = 0$

2 Составить уравнение плоскости π, проходящей через точку $A(-1;\ 1;\ 1)$ перпендикулярно прямой, проходящей через точки $B(-2;0;4)$ и $C(1;\ 1;\ 1)$.

Ответ. $3x + y - 3z + 5 = 0$

3 Составить уравнение плоскости π, проходящей через точки:
$M_1(2;-1;\ 0)$, $M_2(0;-1;\ 1)$, $M_3(1;\ 2;\ 1)$.

Ответ. $3x - y + 6z - 7 = 0$

4 Составить уравнение плоскости π, проходящей через точки $M_1(1;\ 2;\ -1)$ и $M_2(2;\ 3;\ -1)$ параллельно $\overline{a} = (0;-1;2)$.

Ответ. $2x - 2y - z + 1 = 0$

5 Составить уравнение плоскости π, проходящей через точку $M_1(4;\ 0;\ 1)$, параллельно $\overline{a_1} = (1;-2;-1)$ и параллельно $\overline{a_2} = (1;-1;2)$.

Ответ. $5x + 3y - z - 19 = 0$

6 Докажите параллельность плоскостей π_1 и π_2.

а) $4x + 2y + 4z + 5 = 0$, $2x + y + 2z - 1 = 0$;

б) $x - 3z + 2 = 0$, $2x - 6z - 3 = 0$.

7 Докажите перпендикулярность плоскостей π_1 и π_2.

а) $2x + 3y - z - 3 = 0$, $x - y - z + 5 = 0$;

б) $2x - 5y + z = 0$, $x - 2z - 3 = 0$.

8 При каких значениях l и m плоскости π_1 и π_2 параллельны:

а) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $mx + ly - 3z + 1 = 0$;

б) $mx + 3y - 2z - 1 = 0$, $2x - 5y - lz = 0$.

Ответ. а) $m = 5,\ l = 1$; б) $m = -\dfrac{6}{5},\ l = -\dfrac{10}{3}$.

9 При каком значении l плоскости π_1 и π_2 перпендикулярны:

а) $5x + y - 3z - 3 = 0$, $2x + ly - 3z + 1 = 0$;

б) $7x - 2y - z = 0$, $lx + y + 5z - 1 = 0$.

Ответ. а) $l = -19$; б) $l = 1$.

10 Определить двугранные углы, образованные пересечением пар плоскостей

а) $3y - z = 0$, $2y + z = 0$; б) $6x + 3y - 2z = 0$, $x + 2y + 6z - 12 = 0$.

Ответ. а) $\varphi = 45°$; б) $\varphi = 90°$.

11 Определить какие из следующих уравнений плоскостей являются нормальными:

а) $\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z - 3 = 0$; б) $\frac{6}{7}x - \frac{3}{7}y + \frac{2}{7}z + 5 = 0$;

в) $x - 1 = 0$; г) $z - 5 = 0$.

Ответ. а) нет; б) нет; в) да; г) да.

12 Привести уравнение плоскости к нормальному виду

а) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 3 = 0$; в) $-4x - 4y + 2z + 1 = 0$.

б) $4x - 6y - 12z - 11 = 0$;

Ответ. а) $-\frac{3}{7}x + \frac{6}{7}y - \frac{2}{7}z - 3 = 0$; б) $\frac{2}{7}x - \frac{3}{7}y - \frac{6}{7}z - \frac{11}{14} = 0$;

в) $\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z - \frac{1}{6} = 0$

13 Найти α, β, γ и p, если а) $x - y - z\sqrt{2} + 16 = 0$; б) $y - z + 2 = 0$.

Ответ. а) $\alpha = 120°$; $\beta = 60°$, $\gamma = 45°$, $p = 8$;

б) $\alpha = 90°$; $\beta = 135°$, $\gamma = 45°$, $p = \sqrt{2}$

14 Найти расстояние между параллельными плоскостями:

а) $2x - y + 2z + 9 = 0$ и $4x - 2y + 4z + 18 = 0$;

б) $2x - 3y + 6z - 14 = 0$ и $2x - 3y + 6z + 42 = 0$.

Ответ. а) $d = 0$; б) 8

15 Найти расстояние от точки $M_0(5;\ 4;\ -1)$ до плоскости, проходящей через точки $M_1(0;\ 4;\ 0)$, $M_2(0;\ 4;\ -3)$, $M_3(3;\ 0;\ 3)$.

Ответ. $d = 4$.

Тест 2

1 Уравнение плоскости, проходящей через точку $A(2;\ 3;\ 4)$ с нормальным вектором $\overline{N} = (1;2;-3)$ имеет вид:

а) $x + 2y - 3z + 6 = 0$; в) $x + 2y - 3z - 3 = 0$;

б) $x + 2y - 3z + 4 = 0$; г) $x + 2y - 3z + 1 = 0$.

2 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M(2;1;3)$ и два вектора, параллельных плоскости $\overline{s_1} = (1;0;2)$ и $\overline{s_2} = (0;2;-2)$ имеет вид:

а) $2x-y-z=0$;   в) $2x-y+z-6=0$;

б) $2x-y+z+3=0$;   г) $2x-y+z+4=0$.

3 Две плоскости $\pi_1: 2x+3y-z+4=0$ и $\pi_2:\ 3x-y+3z+5=0$ расположены:

а) перпендикулярно;   в) совпадают;

б) параллельно;   г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

4 Две плоскости $\pi_1: 2x+y+4z-1=0$ и $\pi_2:\ 4x+2y+8z-2=0$ расположены:

а) перпендикулярно;   в) совпадают;

б) параллельно;   г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$)

5 Две плоскости $\pi_1: -x+3y+4z+1=0$ и $\pi_2:\ -3x+9y+12z-2=0$ расположены:

а) перпендикулярно;   в) совпадают;

б) параллельно;   г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

6 Плоскость YOZ относительно оси OX расположена:

а) перпендикулярна;   в) совпадает;

б) параллельна;   г) расположена под углом в 30°.

7 Уравнение плоскости, которая содержит оси OY и OZ, и проходит через начало координат имеет вид:

а) $z=0$;   в) $y=0$;

б) $x=0$;   г) $x+y=0$.

8 Уравнение плоскости π, проходящей через точки: $A(2;1;0)$, $B(0;1;-1)$, $C(1;-1;2)$ имеет вид:

а) $2x+5y-4z+1=0$;   в) $2x+5y-4z-9=0$;

б) $2x+5y-4z+8=0$;   г) $2x+5y-4z-1=0$.

9 Угол между двумя плоскостями: $\pi_1: x-\sqrt{2}y-z=0$ и $\pi_2: -\sqrt{2}x-2y-\sqrt{2}z+5=0$ равен:

а) 60^0;   в) 30^0;

б) 90^0;   г) 45^0.

10 Уравнение плоскости, проходящей через начало координат имеет вид:

а) $2x-5y-4z=0$;   в) $2x-4z+1=0$;

б) $5y-4z+1=0$; г) $2x+5y-z+1=0$;

11 Плоскость задана общим уравнением $2x+y+2z-1=0$.
Точка лежащая на данной плоскости имеет координаты:
а) (5;-3; -3); в) (-2;-3; -4);
б) (2;3;0); г) (0; 0; 5).

12 Уравнение плоскости параллельной плоскости XOY имеет вид:
а) $z+4=0$; в) $y-1=0$;
б) $x-1=0$; г) $x+y+z=0$.

13 Расстояния, отсекаемые плоскостью $3x+4y+z-12=0$ от координатных осей OX, OY, OZ равны:
а) 4; 3; 12; в) 4; 5; 12;
б) 6; 3; 12; г) 3; 4; 12.

14 Расстояние от начала координат до плоскости $\pi: 3x+4y+5z-10\sqrt{2}=0$ равно:
а) $p=\frac{\sqrt{3}}{4}$; в) $p=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
б) $p=2{,}5$; г) $p=2$.

15 Расстояние от точки $M(4;\sqrt{2};-2)$ до плоскости $\pi: x-\sqrt{2}\cdot y-z=0$ равно:
а) $d=\frac{\sqrt{3}}{4}$; в) $d=\frac{\sqrt{2}}{2}$;
б) $d=2$; г) $d=5$.

16 Дано уравнение $-4x+5y+3z-2=0$. Нормальный вектор имеет координаты:

а) (5;-3;-2); в) (-4;5;3);
б) (4;-5;-3); г) (1;1;1).

17 Общее уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax+By+Cz+D=0$; в) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;
б) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$; г) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

18 Нормальное уравнение плоскости имеет вид:

а) $Ax+By+Cz+D=0$; в) $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$;
б) $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$; г) $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

19 Уравнение плоскости в отрезках имеет вид:

а) $Ax + By + Cz + D = 0$; в) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

б) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$; г) $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

20 Уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ перпендикулярно вектору $\overline{N} = (A;\, B;\, C)$:

а) $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$; в) $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$;

б) $x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - p = 0$; г) $\frac{x - x_0}{A} + \frac{y - y_0}{B} + \frac{z - z_0}{C} = 1$.

Глава 3 Прямая в пространстве

§1 Различные виды уравнения прямой в пространстве

1 Каноническое уравнение прямой L, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\, y_0;\, z_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=(m;n;p)$, имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p} \tag{27}$$

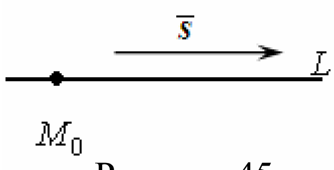


Рисунок 45

Вектор $\bar{s}=(m;\, n;\, p)$ называют направляющим вектором для прямой L. Обращение в нуль одного из знаменателей уравнения (27) означает обращение в нуль соответствующего числителя.

2 Параметрическое уравнение прямой L: $\begin{cases} x=x_0+mt, \\ y=y_0+nt,, \\ z=z_0+pt, \end{cases}$ (28)

где t - переменный параметр, $t\in R$.

В векторной форме уравнение (28) имеет вид $\bar{r}=\overline{r_0}+\bar{s}t$, где $\overline{r_0}=(x_0;\, y_0;\, z_0)$, $\bar{s}=(m;\, n;\, p)$.

3 Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, где ($x_1\neq x_2$, $y_1\neq y_2$, $z_1\neq z_2$ одновременно), имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1} \tag{29}$$

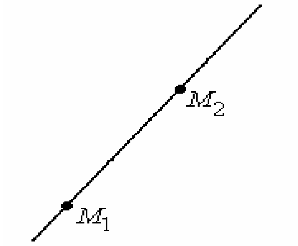


Рисунок 46

4 Общее уравнение прямой, которая задается пересечением двух плоскостей:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \overline{N_1} = (A_1;\, B_1;\, C_1) \\ \overline{N_2} = (A_2;\, B_2;\, C_2) \end{matrix}$$

(коэффициенты при переменных не пропорциональны). Направляющий вектор прямой (27) находится по формуле

$$\bar{s} = \overline{N_1} \times \overline{N_2}, \bar{s} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix} \text{или}\, \bar{s} = \left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \right) \tag{30}$$

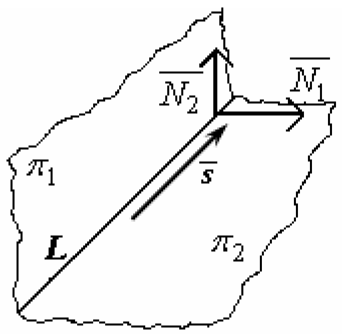


Рисунок 47

§2 Угол между двумя прямыми в пространстве. Условия параллельности и перпендикулярности прямых в пространстве. Условие компланарности двух прямых в пространстве

Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \text{ и } \qquad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Под углом между прямыми понимают угол между их направляющими векторами $\overline{s_1} = (m_1;\, n_1;\, p_1)$ и $\overline{s_2} = (m_2;\, n_2;\, p_2)$.

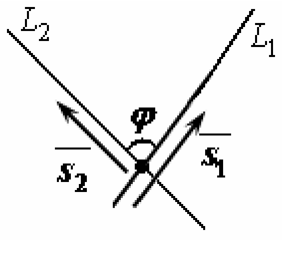


Рисунок 48

Для нахождения острого угла между прямыми L_1 и L_2 используют формулу вида:

$$\cos\varphi = \frac{|m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2|}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}} \tag{31}$$

Условие перпендикулярности двух прямых в пространстве:

Две прямые в пространстве перпендикулярны тогда и только тогда, когда их направляющие вектора перпендикулярны, т.е.

$$L_1 \perp L_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \perp \overline{s_2} \Rightarrow \ m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0 \tag{32}$$

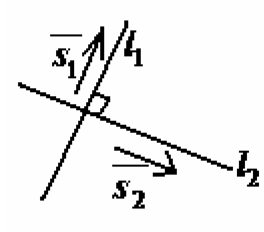


Рисунок 49

Условие параллельности двух прямых в пространстве:

Две прямые в пространстве параллельны тогда и только тогда, когда их направляющие векторы коллинеарны, т.е.

$$L_1 \parallel L_2 \Leftrightarrow \overline{s_1} \parallel \overline{s_2} \Rightarrow \ \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \tag{33}$$

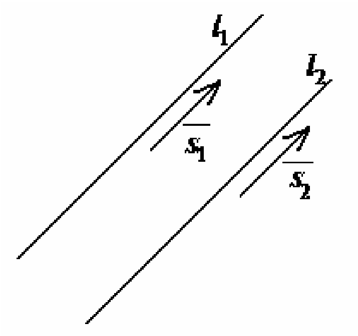


Рисунок 50

Условием, при котором две прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости, является равенство

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ m_1 & n_1 & p_1 \\ m_2 & n_2 & p_2 \end{vmatrix} = 0, \tag{34}$$

при этом, если $\overline{s_1} \nparallel \overline{s_2}$, то прямые L_1 и L_2 пересекаются.

Практическое занятие № 3

Уравнения прямой в пространстве. Способы задания прямой в пространстве. Взаимное расположение прямых в пространстве.

Задача 1

Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через

а) точку $M_0(2;\ 0;\ 3)$, параллельной вектору $\bar{s}=(4;\ -3;\ 5)$;

б) точку $M_0(4;\ -1;\ 2)$, параллельной прямой $L':\ \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$;

в) точку $M_0(1;\ -1;\ 0)$, параллельной оси OX $(OY,\ OZ)$;

г) точки $M_1(1;\ -2;\ 1)$ и $M_2(3;\ 1;\ -1)$;

д) точку $M_0(2;\ 3;\ -5)$, параллельной прямой являющейся пересечением двух плоскостей $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

Решение.

а) Канонические уравнения прямой L, проходящей через данную точку $M_0(x_0;\ y_0;\ z_0)$ параллельно вектору $\bar{s}=(m;n;p)$, имеют вид $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$. По условию задачи точка лежащая на прямой задана координатами $M_1(2;\ 0;\ 3)$ и направляющий вектор имеет координаты $\bar{s}=(4;\ -3;\ 5)$, тогда составим уравнения прямой $\dfrac{x-2}{4}=\dfrac{y-0}{-3}=\dfrac{z-3}{5}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-3}=\frac{z-3}{5}$$

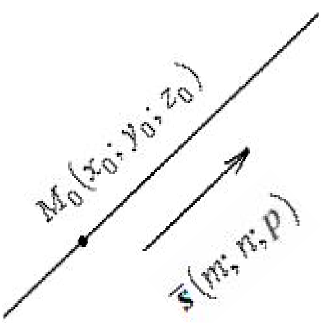


Рисунок 51

б) уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;\ -1;\ 2)$, параллельной прямой $L':\ \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z+1}{-1}$. Так как прямые, по условию задачи, L и L' параллельны, то направляющие вектора их коллинеарны. Тогда направляющим вектором для прямой L может быть вектор $\bar{s}=(5;\ 2;\ -1)$. Используя предыдущую формулу $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$, составим уравнение прямой.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(4;\ -1;\ 2)$ с направляющим вектором $\bar{s}=(5;\ 2;\ -1)$ будет иметь вид $\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+1}{2}=\dfrac{z-2}{-1}$.

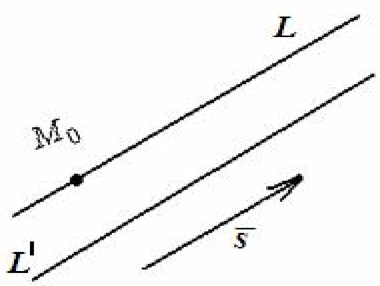


Рисунок 52

в) уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(1;-1;0)$, параллельной оси OX $(OY,\ OZ)$. Для каждого случая составим канонические уравнения проходящие через точку $M_0(1;-1;0)$ с направляющими векторами $\bar{i}=(1;0;0),\ \bar{j}=(0;1;0),\bar{k}=(0;0;1)$. $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{0}$; $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}$; $\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}$.

Перейдем от канонического уравнения к параметрическому уравнению.

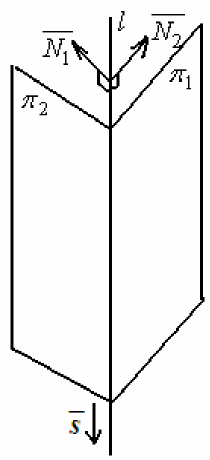
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{0}=t\Rightarrow\begin{cases}x=t+1,\\ y=-1,\\ z=0.\end{cases}\qquad \frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{1}=\frac{z}{0}=t\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=t-1,\\ z=0.\end{cases}$$

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y+1}{0}=\frac{z}{1}=t\Rightarrow\begin{cases}x=1,\\ y=-1,\\ z=t.\end{cases}$$

г) уравнение прямой, проходящей через две различные точки $M_1(x_1;y_1;z_1)$ и $M_2(x_2;y_2;z_2)$ задано формулой: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$. Точки лежащие на прямой имеют координаты $M_1(1;-2;1)$ и $M_2(3;1;-1)$, подставляя в формулу получим уравнения : $\frac{x-1}{3-1}=\frac{y+2}{1+2}=\frac{z-1}{-1-1}$, $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-1}{-2}$.

д) уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(2;3;-5)$, параллельной прямой являющейся пересечением двух плоскостей $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

Составим каноническое уравнение прямой по формуле: $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,



которая проходящей через точку $M(2;3;-5)$. По условию задачи прямая задается пересечением двух плоскостей: $\begin{cases}3x-y+2z-7=0,\\ x+3y-2z+3=0.\end{cases}$

Тогда нормальные вектора двух плоскостей будут перпендикулярны этой прямой L, следовательно, перпендикулярны и направляющему вектору этой прямой. Найдем координаты вектора $\bar{s}$

$$\begin{matrix}\overline{N_1}=(3;-1;2)\\ \overline{N_2}=(1;3;-2)\end{matrix}\Rightarrow\bar{s}=\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\ 3&-1&2\\ 1&3&-2\end{vmatrix}=-4\bar{i}+8\bar{j}+10\bar{k}\Rightarrow\quad \bar{s}=(-4;8;10)$$

Рисунок 53

Уравнение прямой проходящей через точку $M_0(2;3;-5)$ с направляющим вектором $\bar{s}=(-4;8;10)$: $\dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-3}{8}=\dfrac{z+5}{10}\ |\cdot 2 \Rightarrow \dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-3}{4}=\dfrac{z+5}{5}$.

Задача 2

Найти угол между двумя прямыми L_1 и L_2:

а) $\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$, $\qquad \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$;

б) $x=3t$, $y=0$, $z=-t+3$, $x=2t-1$, $y=0$, $z=t-3$;

в) $\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$

Решение.

В пространстве угол между двумя прямыми равен углу между их направляющими векторами.

а) $L_1: \dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y+2}{-1}=\dfrac{z}{\sqrt{2}}$, $\qquad L_2: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+5}{\sqrt{2}}$.

Выпишем направляющие вектора двух прямых L_1 и L_2: $\overline{s_1}=(1;-1;\sqrt{2})$, $\overline{s_2}=(1;1;\sqrt{2})$. Используя данную формулу найдем угол между двумя прямыми L_1 и L_2: $\cos\varphi=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$

$$(L_1\hat{;}L_2)=(\overline{s_1}\hat{;}\overline{s_2})=\alpha \Rightarrow \cos\alpha=\frac{1-1+2}{2\cdot 2}=\frac{1}{2}\Rightarrow \alpha=\frac{\pi}{3}.$$

б) прямыми L_1 и L_2 заданы в параметрическом виде, выпишем направляющие вектора двух прямых L_1 и L_2:

$$L_1: \begin{cases} x=3t, \\ y=0, \\ z=-t+3, \end{cases} \Rightarrow \bar{s}=(3;0;-1); \qquad L_2: \begin{cases} x=2t-1, \\ y=0, \\ z=t-3 \end{cases} \Rightarrow \overline{s_2}=(2;0;1).$$

По предыдущей формуле $\cos\varphi=\dfrac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$ найдем угол: $\cos\alpha=\dfrac{6+0-1}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{5}{\sqrt{50}}=\dfrac{5}{5\sqrt{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\Rightarrow \alpha=\dfrac{\pi}{4}$.

в) $L_1:\begin{cases} x-y-4z-5=0, \\ 2x+y-2z-4=0. \end{cases}$ $\qquad L_2:\begin{cases} x-6y-6z+2=0, \\ 2x+2y+9z-1=0. \end{cases}$

Для данных прямых, которые заданы пересечением двух плоскостей найдем направляющие вектора:

$$L_1: \begin{matrix} \overline{N_1}=(1;-1;-4) \\ \overline{N_2}=(2;1;-2) \end{matrix} : \vec{s_1}\left(\begin{vmatrix} -1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right) \Rightarrow \overline{s_1}=(6;-6;3).$$

$$L_2: \begin{matrix} \overline{N_1}=(1;-6;-6) \\ \overline{N_2}=(2;2;9) \end{matrix} : \vec{s_2}\left(\begin{vmatrix} -6 & -6 \\ 2 & 9 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} -6 & 1 \\ 9 & 2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & -6 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}\right), \overline{s_2}=(-42;-21;14).$$

$$\cos\alpha=\frac{|-42\cdot 6-21\cdot(-6)+14\cdot 3|}{\sqrt{6^2+(-6)^2+3^2}\sqrt{(-42)^2+(-21)^2+14^2}}=\frac{4}{21}\Rightarrow \alpha=\arccos\left(\frac{4}{21}\right).$$

Задача 3

Установить взаимное расположение прямых L_1 и L_2:

а) $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{3}=\frac{z+1}{-2}$ и $\begin{cases} x=5-8t, \\ y=4-6t, \\ z=3+4t; \end{cases}$

б) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$.

Решение.

а) Выпишем направляющие векторы первой и второй прямых: $\overline{s_1}=(4;3;-2)$, $\overline{s_2}=(-8;-6;4)$. Как видно, координаты этих векторов пропорциональны:

$$\frac{4}{-8}=\frac{3}{-6}=\frac{-2}{4}\Rightarrow -\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}.$$

Следовательно, данные прямые параллельные или совпадают. Возьмем на первой прямой какую-нибудь точку, например точку $(2;0;-1)$. Подставим ее координаты в уравнение второй прямой:

$$\begin{cases} 2=5-8t, \\ 0=4-6t, \\ -1=3+4t. \end{cases}$$

Получаем $t=\frac{3}{8}$ - из первого уравнения, $t=\frac{2}{3}$ - из второго, $t=-1$ - из третьего. Это означает, что точка $(2;0;-1)$ не принадлежит второй прямой; прямые не совпадают, значит они параллельны.

б) $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{-3}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x+4}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z-1}{4}$.

Координаты направляющих векторов $\overline{s_1}=(2;\,-3;\,1)$ и $\overline{s_2}=(3;\,2;\,4)$ данных прямых не пропорциональны. Следовательно, прямые либо пересекающиеся, либо скрещивающиеся. Проверим выполнение условия (34) принадлежности двух прямых одной плоскости, предварительно выписав координаты точек M_1 и M_2, через которые проходят данные прямые: $M_1(0;\,1;\,-2)$, $M_2(-4;\,-3;\,1)$. Имеем

$$\begin{vmatrix} -4-0 & -3-1 & 1-(-2) \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -4 & -4 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{vmatrix}=115\neq 0.$$

Следовательно, данные прямые – скрещивающиеся.

Задача 4

Уравнение прямой
$\begin{cases} x+2y-3z+2=0, \\ 2x-2y+z-5=0 \end{cases}$ преобразовать к каноническому виду.

Решение.

Для решения этой задачи надо знать какую-либо точку прямой и ее направляющий вектор $\bar{s}$. Выберем точку на прямой следующим образом: положим, например, $z=0$; тогда для определения абсциссы x и ординаты y данной точки решим следующую систему уравнений $\begin{cases} x+2y+2=0, \\ 2x-2y-5=0, \end{cases}$ из которой находим $x=1$, $y=-\frac{3}{2}$. Итак, на прямой известна точка $\left(1;\,-\frac{3}{2};\,0\right)$.

Направляющий вектор прямой находим по формуле:
$\bar{s}=\left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix}\right)$, т.е. $\bar{s}=\left(-4;\,-7;\,-6\right)$.

Тогда, согласно формуле $\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}$,

$\frac{x-1}{-4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{-7}=\frac{z-0}{-6}$ или $\frac{x-1}{4}=\frac{y+\frac{3}{2}}{7}=\frac{z}{6}$ – искомое уравнение прямой.

Задача 5

Составить параметрическое уравнение прямой перпендикулярной плоскости $3x+y-z-8=0$ и проходящей через точку $M_0(2;\,-1;\,-3)$.

Решение.

Вектор $\overline{N}=(3;\,1;\,-1)$ перпендикулярен плоскости $3x+y-z-8=0$. Следовательно, в качестве вектора $\bar{s}$ можно взять вектор $\overline{N}$, т.е. $\bar{s}=(3;\,1;\,-1)$. Тогда параметрическое уравнения прямой, перпендикулярной плоскости $3x+y-z-8=0$, примет вид

$$\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1+t, \\ z=-3-t. \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x=2+3t, \\ y=-1+t, \\ z=-3-t. \end{cases}$

Домашнее задание № 3

1 Найти величину острого угла между прямыми:

а) $\frac{x}{11}=\frac{y+1}{8}=\frac{z-1}{7}$ и $\frac{x-4}{7}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{8}$;

б) $\begin{cases} x-y+2=0, \\ 2x+y-z-6=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y+z-1=0, \\ x-y+3z+1=0. \end{cases}$

Ответ. а) $\frac{\pi}{4}$; б) $\arccos\frac{2}{\sqrt{66}}$

2 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(3;\,6;\,1)$, параллельной

а) $\vec{a}=(2;\,-1;\,4)$; б) прямой $\frac{x-1}{6}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z+1}{3}$;

в)оси OX; г) оси OY; д) оси OZ.

Ответ. а) $\frac{x-3}{2}=\frac{y-6}{-1}=\frac{z-1}{4}$; б) $\frac{x-3}{6}=\frac{y-6}{-2}=\frac{z-1}{3}$;

в) $\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{0}=\frac{z-1}{0}$; г) $\frac{x-3}{0}=\frac{y-6}{1}=\frac{z-1}{0}$;

д) $\frac{x-3}{0}=\frac{y-6}{0}=\frac{z-1}{1}$

3 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через 2 данные точки: а) $(3;\,-1;\,0)$ и $(1;\,0;-3)$; б) $(0;\,-2;\,3)$, $(3;\,-2;\,1)$.

Ответ. а) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z+3}{3}$; б) $\frac{x}{3}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-3}{-2}$

4 Составить каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M_1(0;\,4;\,-1)$, параллельной прямой $\begin{cases} x+y\ -\ z+1=0, \\ 2x-y+3z-4=0. \end{cases}$

Ответ. $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-4}{-5}=\dfrac{z+1}{-3}$

5 Найти тупой угол между прямыми $\begin{cases} x=3t-2, \\ y=0, \\ z=-t+3 \end{cases}$ и $\begin{cases} x=2t-1, \\ y=0, \\ z=t-3 \end{cases}$.

Ответ. $135°$

6 Проверить параллельность прямых L_1 и L_2

а) $\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-1}{-2}=\dfrac{z}{1}$ и $\begin{cases} x+y-z=0, \\ x-y-5z-8=0; \end{cases}$

б) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ x-y+z+3=0, \end{cases}$ и $\begin{cases} x+y-5z-1=0, \\ x-2x+3z-9=0. \end{cases}$

8 Проверить перпендикулярность прямых L_1 и L_2

а) $\begin{cases} x+y-3z+1=0, \\ 2x-y-9z-2=0, \end{cases}$ $\begin{cases} 2x+y+2z+5=0, \\ 2x-2y-z+2=0; \end{cases}$

б) $x=2t+1,\ y=3t-2,\ z=-6t+1$ и $\begin{cases} 2x+y-4z+2=0, \\ 4x-y-5z+4=0. \end{cases}$

9 Найти параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(2;\,2;\,2)$ и $M_2(6;\,2;\,1)$.

Ответ. $\begin{cases} x=2+4t, \\ y=2, \\ z=2-t. \end{cases}$

10 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M(1;\,-1;\,2)$ и перпендикулярной векторам $\bar{a}=(2;\ 2;\ 3)$ и $\bar{b}=(-2;\ 5;\ 0)$.

Ответ. $\dfrac{x-1}{-15}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z-2}{14}$

Глава 4 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

§ 1 Взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве

Угол между прямой L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}=\dfrac{z-z_0}{p}$ и плоскостью π: $Ax+By+Cz+D=0$ определяется по формуле

$$sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (35)$$

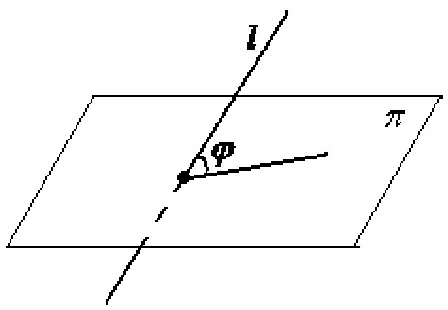


Рисунок 54

Условие параллельности прямой и плоскости в пространстве:

Прямая L параллельна плоскости π тогда и только тогда, когда направляющий вектор $\bar{s}$ для прямой L перпендикулярен нормальному вектору $\overline{N}$ для плоскости π, т.е.

$$L\parallel\pi\Leftrightarrow\bar{s}\perp\overline{N}\Rightarrow\ \bar{s}\cdot\overline{N}=0\ \Rightarrow\ Am+Bn+Cp=0; \qquad (36)$$

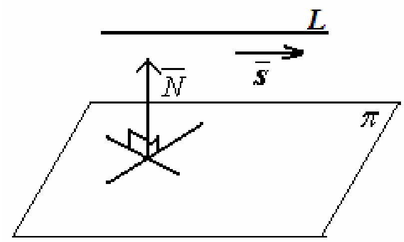


Рисунок 55

Условие перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве:

Прямая L перпендикулярна плоскости π тогда и только тогда, когда направляющий вектор $\bar{s}$ для прямой L коллинеарен нормальному вектору $\overline{N}$ для плоскости π, т.е.

$$L \perp \pi \Leftrightarrow \bar{s} \parallel \overline{N} \Rightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}. \qquad (37)$$

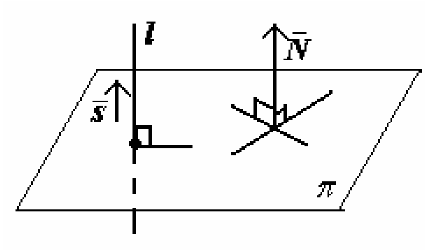


Рисунок 56

Для нахождения точки пересечения прямой и плоскости удобно воспользоваться параметрическим уравнением прямой L:

$$\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt; \end{cases}$$

координаты точки пересечения находятся из системы уравнений

$$\begin{cases} x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z + z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases} \qquad (38)$$

Условие, при котором прямая L лежит в плоскости π

$$\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases} \qquad (39)$$

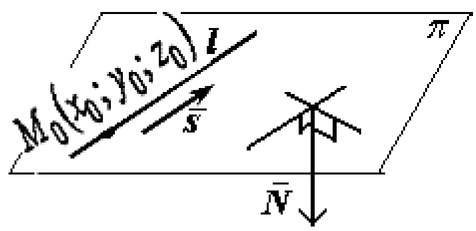


Рисунок 57

Если $Am + Bn + Cp \neq 0$, то прямая пересекает плоскость; если $Am + Bn + Cp = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$ - прямая параллельна плоскости.

Вопросы для самоконтроля

1 Запишите уравнение прямой L в пространстве, проходящей через две различные точки $M_1(x_1;\, y_1; z_1)$ и $M_2(x_2;\, y_2; z_2)$.
2 Запишите параметрическое уравнение прямой в пространстве.
3 Запишите каноническое уравнение прямой в пространстве.
4 Установите взаимное расположение прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+1}{1}$ и плоскости $x-y+z+3=0$.
5 Составьте уравнение прямой L, проходящей через точку М (1;3;0) и перпендикулярно плоскости $2x+3y+z-1=0$.
6 Составьте уравнение прямой L, которая является пересечением двух плоскостей $2x+3y+z-1=0$ и $3x-y+z-5=0$.
7 Запишите уравнение прямой L в пространстве, проходящей через две различные точки $M_1(2;\, 0;1)$ и $M_2(-3;\, 4;-5)$.
8 Как расположена прямая $\begin{cases} x=0, \\ y=-2t-3, \\ z=1; \end{cases}$ относительно плоскости OXZ?
9 Запишите уравнение прямой L, проходящей через данную точку $M_0(1;\, -1;\, 6)$ параллельно вектору $\bar{s}=(0;-2;5)$.
10 Запишите формулу нахождения угла между прямыми в пространстве.
11 Сформулируйте признаки параллельности и перпендикулярности двух прямых в пространстве.
12 Определите угол между прямой $x=5t+3,\ y=-3t-2,\ z=4t+5.$ и осью OX?
13 Сформулируйте условие, при котором две прямые L_1 и L_2 лежат в одной плоскости.
14 Сформулируйте условие, при котором две прямые L_1 и L_2 скрещиваются .
15 Сформулируйте признак параллельности и перпендикулярности прямой и плоскости.
16 Сформулируйте признак принадлежности прямой к плоскости.

17 Запишите формулу вычисление угла между прямой и плоскостью в пространстве.
18 Как расположена прямая $x=3t-1,\ y=1,\ z=-4.$ относительно оси OX?
19 Установите взаимное расположение прямой $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z}{1}$ и плоскости $x-y+z+3=0$.
20 Как расположена прямая $x=-3,\ y=3t-51,\ z=t+8.$ относительно плоскости $x+y-3z=0$?

Практическое занятие № 4
Взаимное расположение прямой и плоскости

Задача 1

Найти точку пересечения прямой и плоскости $\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}$ и $2x+3y+z-1=0$.

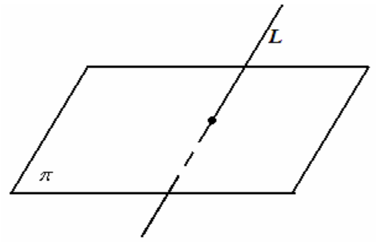


Рисунок 58

Решение.

Для того чтобы найти точку пересечения прямой и плоскости необходимо решить систему уравнений. Сначала от канонического уравнения прямой перейдем к параметрическому уравнению

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z}{6}=t \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-1}{1}=t, \\ \frac{y+1}{-2}=t, \\ \frac{z}{6}=t, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t \end{cases}$$

\- параметрическое уравнение прямой. Точка лежит на прямой и на плоскости, следовательно, ее координаты удовлетворяют и уравнению прямой и уравнению плоскости. Запишем систему линейных уравнений и решим ее и найдем параметр t.

$$\begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t, \\ 2x+3y+z-1=0, \end{cases} \begin{cases} x=t+1, \\ y=-2t-1, \\ z=6t, \\ 2(t+1)+3(-2t-1)+6t-1=0, \end{cases}$$

$$2t+2-6t-3+6t-1=0,\ 2t=2,$$

$$t=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1+1, \\ y=-2\cdot 1-1, \\ z=6\cdot 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2, \\ y=-3, \\ z=6. \end{cases}$$

Подставив вместо параметра значения в параметрическое уравнения мы получили координаты точки.

Точка пересечения прямой и плоскости имеет координаты $(2;-3;6)$.

Ответ. $(2;-3;6)$.

Задача 2

Доказать, что прямая $x = 3t - 2$, $y = -4t + 1$, $z = 4t - 5$ параллельна плоскости $4x - 3y - 6z - 5 = 0$.

Решение.

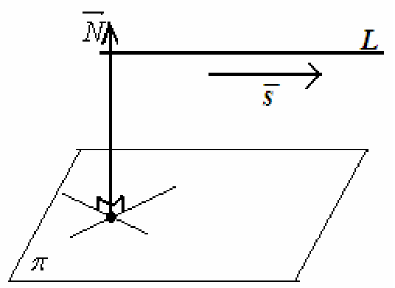


Рисунок 59

$$L:\begin{cases} x = 3t - 2, \\ y = -4t + 1, \\ z = 4t - 5 \end{cases} \Rightarrow \overline{s} = (3;\,-4;\,4).$$

$$\pi: 4x - 3y - 6z - 5 = 0 \Rightarrow \overline{N} = (4;\,-3;\,-6).$$

Прямая L параллельна плоскости π, если направляющий вектор $\overline{s}$ прямой L перпендикулярен нормальному вектору $\overline{N}$ плоскости π.

$L \parallel \pi \Leftrightarrow \overline{s} \perp \overline{N} \Rightarrow \overline{s} \cdot \overline{N} = 0$.

$\overline{s} \cdot \overline{N} = 3 \cdot 4 + (-4) \cdot (-3) + 4 \cdot (-6) = 12 + 12 - 24 = 0 \Rightarrow$ прямая параллельна плоскости.

Задача 3

Найти величину угла между прямой $x = 5 + t$, $y = -3 + t$, $z = 4 - 2t$, и плоскостью $4x - 2y - 2z + 7 = 0$.

Решение.

Угол между прямой и плоскостью – это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

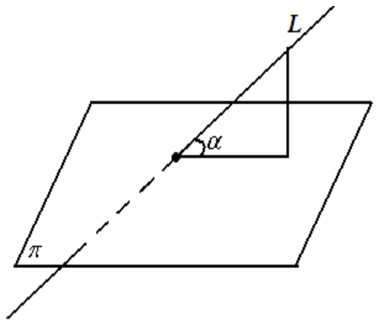


Рисунок 60

$(\pi \hat{;} L) = \alpha$.

Угол между прямой L $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ *и плоскостью* π: $Ax + By + Cz + D = 0$ определяется по формуле: $\sin\varphi = \dfrac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$.

$$L:\begin{cases} x = 5 + t, \\ y = -3 + t, \\ z = 4 - 2t \end{cases} \Rightarrow \overline{s} = (1;\,1;\,-2).$$

$\pi: 4x - 2y - 2z + 7 = 0 \Rightarrow \overline{N} = (4;\,-2;\,-2)$.

$$\sin\alpha = \frac{4 \cdot 1 + (-2) \cdot 1 + (-2) \cdot (-2)}{\sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{2},\ \alpha = \frac{\pi}{6}.$$

Ответ. $\alpha = 30°$

Задача 4

При каких значениях D и B прямая $\frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{7}$ лежит в плоскости $4x+By-2z+D=0$?

Решение.

Для прямой, которая задана каноническим уравнением

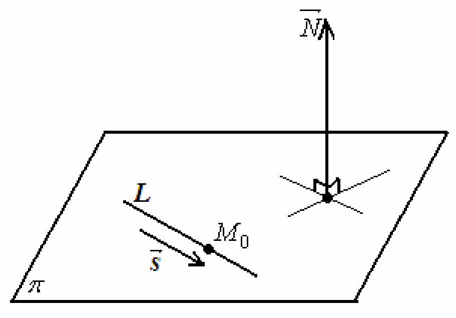


Рисунок 61

$$L: \frac{x-1}{5}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z-4}{7} \Rightarrow \bar{s}=(5;-3;7)$$

известен направляющий вектор и точка принадлежащая ей, с координатами $M_0(1;-2;4)$. Для плоскости известен нормальный вектор $\pi: 4x+By-2z+D=0 \Rightarrow \overrightarrow{N}=(4;B;-2)$.

Прямая лежит в плоскости, если выполняются два условия: 1) $\bar{s}\perp\overrightarrow{N}$ и

2) точка M_0 лежит в плоскости π, т.е.

$$\begin{cases}\bar{s}\cdot\overrightarrow{N}=0,\\ m.M_0\in\pi\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}5\cdot4-3\cdot B+7\cdot(-2)=0,\\ 4\cdot1+B\cdot(-2)-2\cdot4+D=0,\end{cases} \begin{cases}B=2,\\ D=8.\end{cases}$$

Ответ. $B=2, D=8$

Задача 5

Установить взаимное расположение прямой и плоскости:

а) $\begin{cases}x=2-4t,\\ y=t,\\ z=-3+2t\end{cases}$ и $5x-6y+2z-10=0$;

б) $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+4}{2}$ и $3x+y-4z-15=0$.

Решение.

а) Имеем, направляющий вектор прямой задан координатами $\bar{s}=(-4;1;2)$, нормальный вектор плоскости задается координатами $\overline{N}=(5;-6;2)$. Как видно координаты направляющего вектора $\bar{s}$ прямой и нормального вектора $\overline{N}$ плоскости не пропорциональны: прямая не перпендикулярна плоскости $L\perp\pi \Leftrightarrow \bar{s}\parallel\overline{N} \Rightarrow \frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{p}$. Найдем значение выражения $Am+Bn+Cp$:

$$Am+Bn+Cp=5\cdot(-4)-6\cdot1+2\cdot2=-20-6+4=-22\neq0.$$

Условие параллельности прямой и плоскости не выполняется. Значит, прямая *пересекает* плоскость.

б) Здесь, вектора направляющий и нормальный заданы координатами и точка лежащая на прямой $\bar{s}=(3;\,-1;\,2)$, $\overline{N}=(3;\,1;\,-4)$, $M_0(-1;\,2;\,-4)$, проверим равенство $Am+Bn+Cp=3\cdot 3+1\cdot(-1)-4\cdot 2=9-1-8=0$. Следовательно, данная прямая параллельна плоскости или лежит на ней. Проверим условия $\begin{cases} Am+Bn+Cp=0, \\ Ax_0+By_0+Cz_0+D=0. \end{cases}$ принадлежности прямой плоскости: $Ax_0+By_0+Cz_0+D=3\cdot(-1)+1\cdot 2-4\cdot(-4)-15=0$.

Условия выполняются, поэтому прямая *лежит в плоскости*.

Домашнее задание № 4

1 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M(4;\,-3;\,6)$ перпендикулярно прямой $\frac{x-3}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+5}{-2}$.

Ответ. $2x+y-2z+7=0$

2 Найдите координаты точки пересечения прямой $\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-2}{1}$ с плоскостью $3x-y+2z+5=0$.

Ответ. $(-3;\,-4;\,0)$

3 Найдите расстояние между прямыми $\frac{x-9}{-6}=\frac{y}{2}=\frac{z-2}{1}$ и $\frac{x+5}{3}=\frac{y+5}{2}=\frac{z-1}{-2}$.

Ответ. $\frac{\sqrt{538}}{2}$

4 а) При каком значении m прямая $\frac{x+1}{3}=\frac{y-2}{m}=\frac{z+3}{-2}$ параллельна плоскости $x-3y+6z+7=0$.

б) При каком значении C прямая $\begin{cases} 3x-2y+z+3=0, \\ 4x-3y+4z+1=0 \end{cases}$ параллельна плоскости $2x-y+Cz-2=0$.

в) При каком значении n прямая $x=2+5t$, $y=-3+2t$, $z=5+nt$ параллельна плоскости $2x+4y-6z+7=0$.

Ответ. а) $m=-3$; б) $c=-2$; в) $n=3$

5 При каких значениях A и D прямая $x=3+4t$, $y=1-4t$, $z=-3+t$ лежит в плоскости $Ax+2y-4z+D=0$.

Ответ. $A=3,\ D=-23$

6 а) При каких значениях A и B плоскость $Ax + By + 3z - 5 = 0$ перпендикулярна к прямой $\begin{cases} x = 3 + 2t, \\ y = 5 - 3t, \\ z = -2 - 2t. \end{cases}$

б) При каких значениях l и C прямая $\frac{x-2}{l} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-5}{-3}$ перпендикулярна к плоскости $3x - 2y + Cz + 1 = 0$.

в) При каких значениях m и A прямая $x = 3 + 2t$, $y = -5 + mt$, $z = 1 + 6t$ перпендикулярна плоскости $Ax - 2y + 3z - 5 = 0$.

Ответ. а) $A = -3,\ B = \frac{9}{2}$; б) $l = -6,\ C = \frac{3}{2}$; в) $A = 1, m = -4$.

7 Найти проекцию точки $P(3;\ 2;\ -1)$ на плоскость $x - 5y + 4z - 31 = 0$.
Ответ. $(4; -3; 3)$

8 Найти точку, симметричную точке $P(2;\ 7;\ 1)$ относительно плоскости $x - 4y + z + 7 = 0$.
Ответ. $(4; -1; 3)$

9 Вычислить расстояние d от точки $P(1;\ -1;\ -2)$ до прямой $\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.
Ответ. $d = 7$

Тест 3

1 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $A(1;2;2)$ перпендикулярно плоскости $2x - y + z - 1 = 0$ имеет вид:

а) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z+2}{1}$; в) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z-2}{1}$;

б) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z-1}{2}$; г) $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+1}{2}$.

2 Каноническое уравнение прямой, которая является пресечением двух плоскостей $\begin{cases} x - y + 2z - 3 = 0, \\ x + 3y - z + 1 = 0 \end{cases}$ имеет вид:

а) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{2}$; в) $\frac{x-2}{-5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$;

б) $\frac{x-2}{1} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{-1}$; г) $\frac{x-2}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z}{1}$.

3 Прямая $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-3}{1}$ и плоскость $\pi : x + 2y - bz + 4 = 0$ перпендикулярны, при a и b равном:

а) $a = 3,\ b = \frac{1}{2}$; в) $a = 6,\ b = \frac{1}{3}$;

б) $a = 6,\ b = -\frac{1}{3}$; г) $a = 6,\ b = -3$.

4 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точки $A(1;\ 2;\ 0)$ и $B(3; 4; -2)$ имеет вид:

а) $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-2}$; в) $\frac{x+1}{1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{0}$;

б) $\frac{x+1}{2} = \frac{y+2}{2} = \frac{z}{-2}$; г) $\frac{x+1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z}{-2}$.

5 Угол между двумя прямыми $L_1 : \frac{x-2}{1} = \frac{y+2}{\sqrt{2}} = \frac{z-3}{-1}$ и $L_2 : \frac{x+2}{1} = \frac{y-2}{\sqrt{2}} = \frac{z+3}{1}$ в пространстве равен:

а) 60^0; в) 90^0;

б) 30^0; г) 45^0.

6 Прямая $L: \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{a} = \frac{z-3}{1}$ и плоскость $\pi : x + 2y + z + 4 = 0$ параллельны при a равном:

а) $a = 4$; в) $a = -2$;

б) $a = 2$; г) $a = 6$.

7 Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-1;-3)$ с направляющим вектором $\bar{s} = (-1; 2; 3)$ имеет вид:

а) $\begin{cases} x = -1 + 2t, \\ y = 2 - t, \\ z = 3 - 3t. \end{cases}$ в) $\begin{cases} x = -2 - t, \\ y = 1 + 2t, \\ z = 3 + 3t. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x = 1 + 2t, \\ y = -2 - t, \\ z = -3 - 3t. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 2 - t, \\ y = -1 + 2t, \\ z = -3 + 3t. \end{cases}$

8 Прямая $L: \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p}$ и плоскость $\pi :\ Ax + By + Cz + D = 0$

перпендикулярны при выполнении условия:

а) $Am + Bn + Cp = 0$;

в) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$

б) $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$;

г) $\begin{cases} x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z + z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$

9 Прямая L: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ и плоскость π: $Ax + By + Cz + D = 0$ параллельны при выполнении условия:

а) $Am + Bn + Cp = 0$;

в) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$

б) $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$;

г) $\begin{cases} x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z + z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$

10 Условие, при котором прямая L: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ лежит в плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет вид:

а) $Am + Bn + Cp = 0$;

в) $\begin{cases} Am + Bn + Cp = 0, \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \end{cases}$

б) $\dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$;

г) $\begin{cases} x = x_0 + mt,\ y = y_0 + nt,\ z + z_0 + pt, \\ Ax + By + Cz + D = 0. \end{cases}$

11 Угол между прямой $L: \dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 2}{-\sqrt{2}} = \dfrac{z - 3}{1}$ и плоскостью $\pi: x - \sqrt{2} \cdot y - z + 3 = 0$ равен:

а) 60^0;

в) 45^0;

б) 30^0;

г) 90^0.

12 Уравнение прямой в пространстве, проходящей через точку $M_0(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярно плоскости π: $Ax + By + Cz + D = 0$ имеет вид:

а) $\dfrac{x - x_0}{A} = \dfrac{y - y_0}{B} = \dfrac{z - z_0}{C}$;

в) $\dfrac{x - A}{x - x_0} = \dfrac{y - B}{y - y_0} = \dfrac{z - C}{z - z_0}$;

б) $\dfrac{x - A}{x_0} = \dfrac{y - B}{y_0} = \dfrac{z - C}{z_0}$;

г) $\dfrac{x - x_0}{x_1 - x_2} = \dfrac{y - y_0}{y_1 - y_2} = \dfrac{z - z_0}{z_1 - z_2}$.

13 Точка пересечения прямой $L: \dfrac{x-8}{2} = \dfrac{y-1}{-1} = \dfrac{z}{4}$ и плоскости $\pi: x - 2y + z + 2 = 0$ имеет координаты:

а) $(8; 1; 0)$; в) $(6; 2; -4)$;
б) $(2; -1; 4)$; г) $(1; -2; 1)$.

14 Прямые в пространстве $L_1: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+2}{-2} = \dfrac{z-3}{3}$ и $L_2: \dfrac{x+2}{-6} = \dfrac{y-2}{12} = \dfrac{z+3}{-18}$ расположены:

а) перпендикулярно; в) совпадают;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

15 Прямые в пространстве $L_1: \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-2} = \dfrac{z+3}{2}$ и $L_2: \dfrac{x+2}{-6} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z-5}{7}$ расположены:

а) перпендикулярно; в) совпадают;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

16 Уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ и $M_2(x_2; y_2; z_2)$ имеет вид:

а) $\dfrac{x-x_1}{x_2} = \dfrac{y-y_1}{y_2} = \dfrac{z-z_1}{z_2}$; в) $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y-y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z-z_1}{z_2-z_1}$;
б) $\dfrac{x+x_1}{x_2-x_1} = \dfrac{y+y_1}{y_2-y_1} = \dfrac{z+z_1}{z_2-z_1}$; г) $\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2} = \dfrac{y-y_2}{y_1-y_2} = \dfrac{z-z_2}{z_1-z_2}$.

17 Прямая $L: \dfrac{x-2}{1} = \dfrac{y+5}{2} = \dfrac{z+8}{2}$ и плоскость $\pi: -2x + 3y - 2z + 3 = 0$ расположены:

а) перпендикулярно; в) принадлежит;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

18 Прямая $L: \dfrac{x-4}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z+3}{-4}$ и плоскость $\pi:\ 4x - 6y + 8z + 12 = 0$ расположены:

а) перпендикулярно; в) принадлежит;
б) параллельно; г) пересекаются (под углом $\alpha \neq 90^0$).

19 Прямая $L: \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y+2}{a} = \dfrac{z-3}{1}$ принадлежит плоскости $\pi: x+2y-z+b=0$. При a и b равных:

а) $a=-1,\ b=6;$

б) $a=-2,\ b=6;$

в) $a=6,\ b=6;$

г) $a=-1,\ b=-6.$

20 Параметрическое уравнение прямой, проходящей через точки $M_1(1;1;1)$ и $M_2(5;2;1)$ имеет вид:

а) $\begin{cases} x=5+4t, \\ y=2+t, \\ z=1+t. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x=1-4t, \\ y=1-t, \\ z=1. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x=5-4t, \\ y=2-t, \\ z=1+t. \end{cases}$

г) $\begin{cases} x=1+4t, \\ y=1+t, \\ z=1. \end{cases}$

Глава 5 Кривые второго порядка

Линии, определяемые алгебраическими уравнениями второй степени относительно переменных x и y, т.е. уравнениями вида

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \; \left(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0\right) \tag{40}$$

называются ***кривыми второго порядка***.

§1 Окружность

Окружностью называется *множество* всех точек плоскости, удаленных от заданной точки A на одно и тоже расстояние R. Точка A называется ***центром***, а R - ***радиусом*** окружности.

В прямоугольной системе координат уравнение окружности имеет вид

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2, \tag{41}$$

где $(a; b)$ - координаты ее центра. Уравнение (41) называется ***каноническим уравнением окружности***. В частности, если $a = 0$, $b = 0$ (т.е. центр окружности совпадает с началом координат), то уравнение (41) имеет вид

$$x^2 + y^2 = R^2 \tag{42}$$

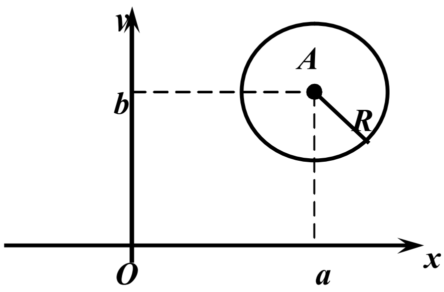


Рисунок 62

Общее уравнение второй степени (40) определяет окружность, если $A = C \neq 0$ и $B = 0$.

Уравнение второй степени (42) определяет точку при $R = 0$ с координатами $(0; 0)$.

Уравнение второй степени вида $x^2 + y^2 = -R^2$ определяет мнимую окружность.

§2 Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (равная $2a$ и большая, чем расстояние между фокусами).

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, (43)

где a - *большая полуось*, $2a$ - *большая ось*, b - *малая полуось*, $2b$ - *малая ось*, эллипса. Координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где c – половина расстояния между фокусами (рисунок 63). Числа a, b и c связаны соотношением

$$c^2=a^2-b^2 \qquad (44)$$

Точки A, B, C, D называются ***вершинами*** эллипса, точка O - ***центром*** эллипса, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M эллипса до его фокусов называются ***фокальными радиусами*** этой точки.

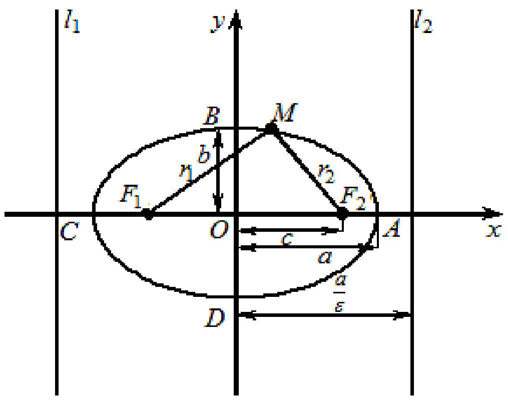


Рисунок 63

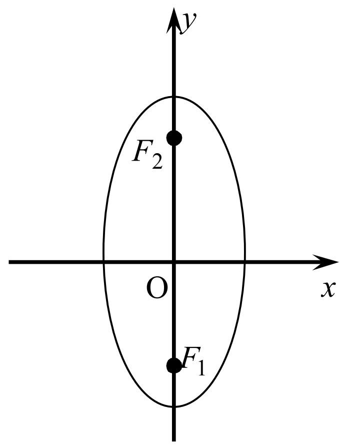


Рисунок 64

Эксцентриситетом ε эллипса называется число, равное отношению фокусного расстояния $2c$ (расстояния между фокусами) к длине большой оси $2a$: $\varepsilon=\frac{c}{a}$ ($\varepsilon<1$, т.к. $c<a$).

Фокальные радиусы определяются формулами: $r_1=a+\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$ $(r_1+r_2=2a)$.

Директрисами эллипса называются прямые l_1 и l_2, перпендикулярные большей оси эллипса симметричные относительно центра, и отстоящие от нее на расстоянии равном $\frac{a}{\varepsilon}$, уравнения директрис: $x_1=\frac{a}{\varepsilon}$ и $x_2=-\frac{a}{\varepsilon}$ (45)

Замечания: 1) Если $a=b$, то уравнение (43) определяет окружность

$x^2 + y^2 = a^2$;

2) если фокусы эллипса лежат на оси Oy, то эллипс имеет вид: (рисунок 64): В этом случае: $b > a$, $c^2 = b^2 - a^2$, $\varepsilon = \frac{c}{b}$, уравнения директрис $y_{1,2} = \pm\frac{b}{\varepsilon}$;

3) уравнение эллипса с центром в точке $(x_0; y_0)$, имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ (рисунок 65).

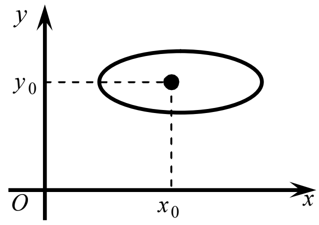


Рисунок 65

Теорема: Отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы равно эксцентриситету.

§3 Гипербола

Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек, называемых ***фокусами***, есть величина постоянная (равная $2a$, меньшая, чем расстояние между фокусами).

Каноническое уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, (46)

где a - *действительная полуось*, b - *мнимая полуось*, $2a$ и $2b$ называются соответственно ***действительной*** и ***мнимой осями*** гиперболы. Координаты фокусов: $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$, c - половина расстояния между фокусами (рисунок 66). Числа a, b и c связаны соотношением $c^2 = a^2 + b^2$ (47)

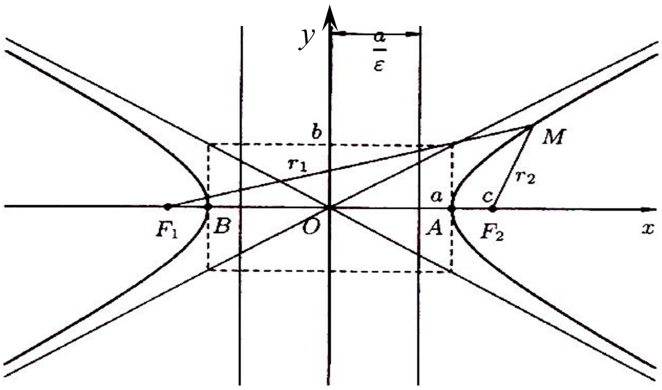


Рисунок 66

Точки A и B называются ***вершинами*** гиперболы, точка O - ***центром*** гиперболы, расстояния r_1 и r_2 от произвольной точки M гиперболы до ее фокусов называются ***фокальными радиусами*** этой точки.

Эксцентриситетом ε гиперболы называется число, равное отношению расстояния между фокусами к длине действительной оси.

Число $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ ($\varepsilon > 1$, т.к. $c > a$) (48)

называется ***эксцентриситетом*** гиперболы.

Фокальные радиусы определяются формулами: для точек правой ветви гиперболы: $r_1 = a + \varepsilon x$, $r_2 = -a + \varepsilon x$; для точек левой ветви: $r_1 = -a - \varepsilon x$, $r_2 = a - \varepsilon x$.

Прямоугольник, центр которого совпадает с точкой O, а стороны равны и параллельны осям гиперболы называется основным прямоугольником гиперболы. Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых асимптотами гиперболы; они определяются уравнениями

$$y = \pm\frac{b}{a}x \qquad (49)$$

Две прямые l_1 и l_2, перпендикулярные действительной оси гиперболы, расположенные симметрично относительно центра и отстоящие от него на расстоянии, равном $\dfrac{a}{\varepsilon}$, называются ***директрисами гиперболы***.

Их уравнения: $x_1 = \dfrac{a}{\varepsilon}$ и $x_2 = -\dfrac{a}{\varepsilon}$.

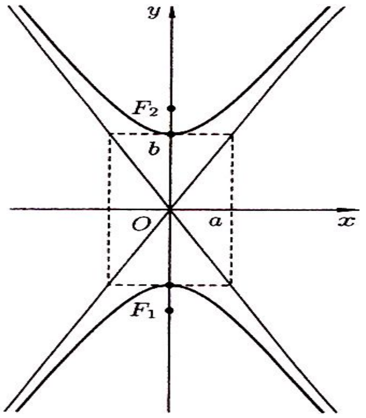
Замечания:

1) Если $a = b$, то гипербола называется ***равносторонней*** (***равнобочной***). Ее уравнение принимает вид $x^2 - y^2 = a^2$.

2) Если фокусы гиперболы лежат на оси Oy, то уравнение гиперболы имеет вид: $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (50)

Эксцентриситет этой гиперболы равен $\varepsilon = \dfrac{c}{b}$, асимптоты определяются уравнениями $y_{1,2} = \pm\dfrac{b}{a}x$, а уравнения директрис $y_{1,2} = \pm\dfrac{b}{\varepsilon}$. Гипербола (50) называется сопряженной гиперболе; если она имеет вид, изображенный на рисунке 67;

3) Уравнение гиперболы с центром в точке с координатами $(x_0; y_0)$, имеет вид $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$ (рисунок 68).



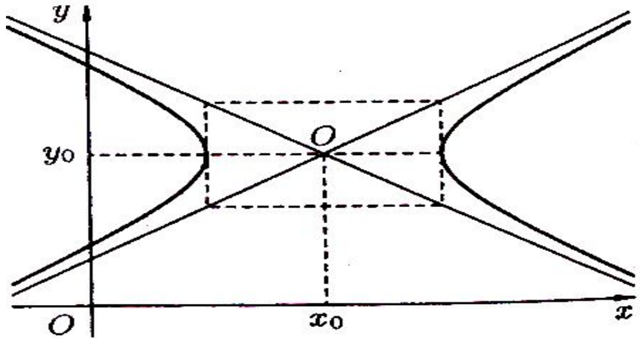


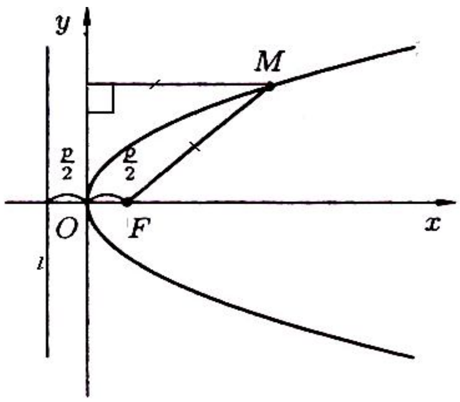
Рисунок 67 Рисунок 68

Теорема: Отношение расстояний от любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы равно эксцентриситету.

§4 Парабола

Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки, называемой ***фокусом*** и заданной прямой, называемой ***директрисой***.

Каноническое уравнение параболы имеет вид $y^2 = 2px$, (51)
где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l, называется ***параметром*** параболы. Координаты фокуса $F\left(\frac{p}{2}; 0\right)$. Точка $O(0; 0)$ называется вершиной параболы, длина отрезка FM - *фокальный радиус* точки M, ось Ox - *ось симметрии* параболы.



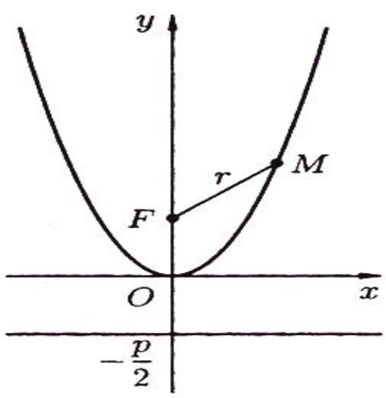


Рисунок 69 Рисунок 70

Уравнение директрисы l параболы имеет вид $x = -\frac{p}{2}$;

фокальный радиус вычисляется по формуле $r = x + \frac{p}{2}$.

В прямоугольной системе координат парабола, заданная каноническим уравнением $y^2 = 2px$, расположена так, как указано на рисунке 69.

Замечания.

1) Парабола, симметричная относительно оси Oy и проходящая через точку $(0;\ 0)$ (рисунок 70), имеет уравнение $x^2 = 2py$ (52)

Уравнение директрисы: $y = -\frac{p}{2}$, фокальный радиус точки M параболы $r = y + \frac{p}{2}$.

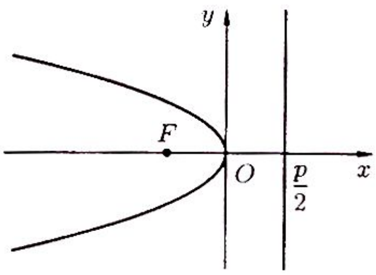


Рисунок 71

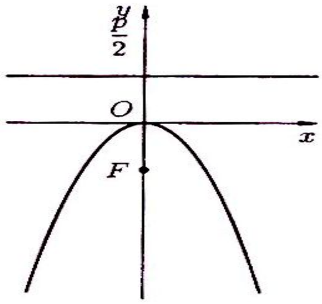


Рисунок 72

$y^2 = -2px$ (53) $x^2 = -2py$ (54)

3) На рисунках 73 – 76 приведены графики парабол с осями симметрии, параллельными координатным осям.

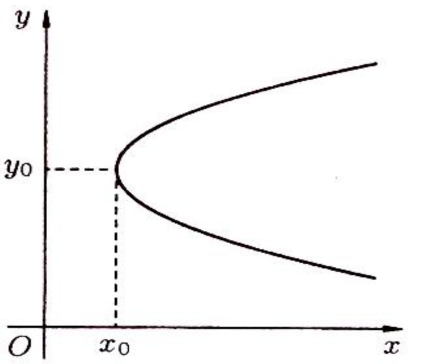


Рисунок 73

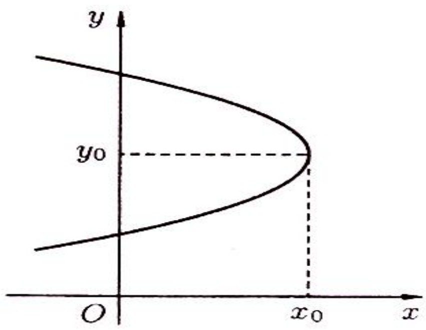


Рисунок 74

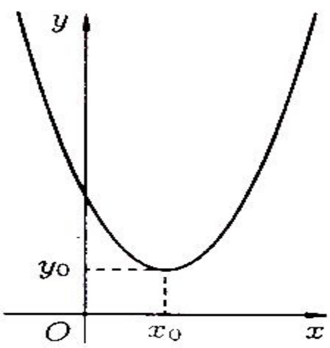


Рисунок 75

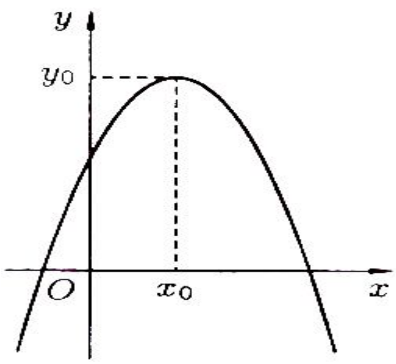


Рисунок 76

Практическое занятие № 5
Кривые второго порядка

Задача 1

Составить уравнение окружности, проходящей через три точки $M_1(-1;5)$, $M_2(-2;-2)$, $M_3(5;5)$.

Решение:

Подставим координаты точек M_1, M_2 и M_3 в данное уравнение: $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$.

$$\begin{cases}(-1-a)^2+(5-b)^2=R^2,\\(-2-a)^2+(-2-b)^2=R^2,\\(5-a)^2+(5-b)^2=R^2,\end{cases}\begin{cases}a^2+2a+1+25-10b+b^2=R^2,\\a^2+4a+4+b^2+4b+4=R^2,\\a^2-10a+25+b^2-10b+25=R^2,\end{cases}$$

$$\begin{cases}a^2+2a+b^2-10b+26=R^2,\\a^2+4a+b^2+4b+8=R^2,\\a^2-10a+b^2-10b+50=R^2,\end{cases}\begin{cases}2a+14b-18=0,\\-12a+24=0,\\a^2-10a+b^2-10b+50=R^2,\end{cases}\begin{cases}a=2,\\b=1,\\R^2=25\end{cases}\Rightarrow$$

От второго уравнения отняли первое уравнения и результат поставили на первое место. От третьего уравнения отняли первое уравнения и результат поставили на второе место. Третье уравнение оставили без изменения.

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=25$.

Ответ. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$

Задача 2

Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить кривую, которая определяется уравнением: $4x^2+4y^2-32x+20y+73=0$.

Решение: $4x^2+4y^2-32x+20y+73=0$, сгруппируем переменные.

$4x^2-32x+4y^2+20y+73=0$, вынесем за скобки.

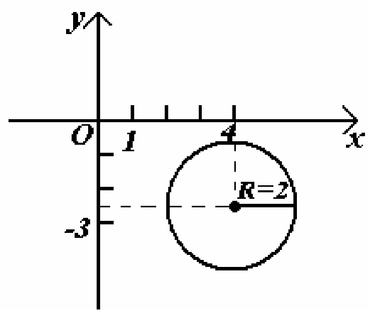
$4\left(x^2-8x\right)+4\left(y^2+5y\right)+73=0$, в скобках дополним до полного квадрата.

$$4\left(x^2-2\cdot 4x+16-16\right)+4\left(y^2+2\cdot\frac{5}{2}y+\frac{25}{4}-\frac{25}{4}\right)+73=0,$$

сгруппируем по формуле полного квадрата.

$$4(x-4)^2-64+4\left(y+\frac{5}{2}\right)^2-25+73=0,$$

$$4(x-4)^2+4\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=16\ \ |:4,\ (x-4)^2+\left(y+\frac{5}{2}\right)^2=4$$



Уравнение окружность с центром в точке $\left(4;\ -\frac{5}{2}\right)$ и $R=2$. Рисунок 77

Задача 3.

Установить вид кривой по следующим уравнениям:

а) $x = -\sqrt{4-y^2}$; б) $y = -2+\sqrt{1-x^2}$; в) $y = 3-\sqrt{21-4x-x^2}$

и сделать чертеж.

Решение.

а) $x = -\sqrt{4-y^2}$: $x \le 0$. Возведем в квадрат правую и левую часть уравнения. $x^2 = 4-y^2 \Rightarrow x^2+y^2 = 4$. Мы получили уравнения окружности с центром в точке $(0; 0)$ и радиусом $R=2$.Так как $x \le 0$, то решением данного равенства $x = -\sqrt{4-y^2}$ будет множество точек лежащих на полуокружности.

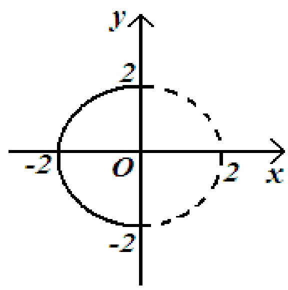


Рисунок 78

б) $y+2 = \sqrt{1-x^2}$, $y+2 \ge 0 \Rightarrow y \ge -2$. Возведем в квадрат правую и левую части уравнения $(y+2)^2 = 1-x^2 \Rightarrow x^2+(y+2)^2 = 1$. Мы получили уравнения окружности с центром в точке $(0; -2)$ и радиусом $R=1$. Так как $y \ge -2$, то решением данного равенства $y+2 = \sqrt{1-x^2}$ будет множество точек лежащих на полуокружности.

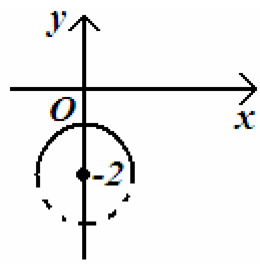


Рисунок 79

в) $y = 3-\sqrt{21-4x-x^2}$, $y-3 = -\sqrt{21-4x-x^2} \Rightarrow y-3 \le 0 \Rightarrow y \le 3$.

Возведем в квадрат правую и левую части уравнения. $(y-3)^2 = 21-4x-x^2$. Дополним до полного квадрата правую часть. $(y-3)^2+x^2+4x = 21 \Rightarrow (y-3)^2+(x+2)^2-4 = 21$.

$(y-3)^2+(x+2)^2 = 25$. Получили уравнения окружности с центром в точке $(-2; 3)$ и радиусом $R=5$.Решением данного равенства $y = 3-\sqrt{21-4x-x^2}$ являются множество точек лежащих на полуокружности.

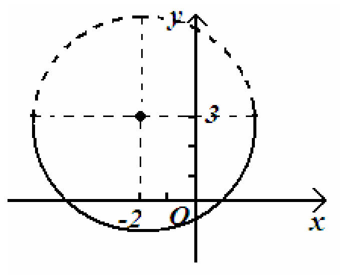


Рисунок 80

Задача 4

Дано уравнение эллипса $24x^2+49y^2 = 1176$.

Найти:

а) длины его полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет эллипса;

г) уравнения директрис и расстояние между ними;

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12.

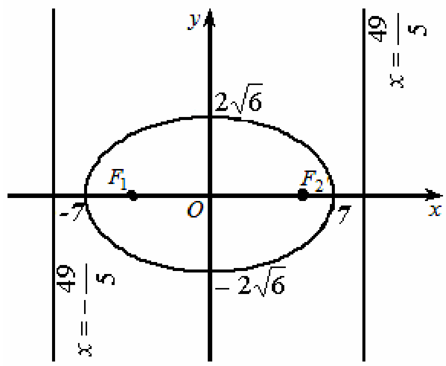


Рисунок 81

Решение.

Разделив обе части уравнения на 1176 мы получим уравнение эллипса в каноническом виде $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{24}=1$.

а) длины полуосей эллипса $a^2=49$, $b^2=24$, т.е. $a=7$, $b=2\sqrt{6}$.

б) координаты фокусов. Так как $c^2=a^2-b^2$, то $c^2=7^2-\left(2\sqrt{6}\right)^2=25$, $c=5$. Следовательно, $F_1(-5;\,0)$ и $F_2(5;\,0)$.

в) эксцентриситет эллипса. Так как $\varepsilon=\frac{c}{a}$, то $\varepsilon=\frac{5}{7}<1$.

г) уравнения директрис имеют вид $x_1=\frac{a}{\varepsilon}$ и $x_2=-\frac{a}{\varepsilon}$. Тогда $x_{1,\,2}=\pm\frac{7}{\frac{5}{7}}$, т.е. $x_1=\frac{49}{5}$ и $x_2=-\frac{49}{5}$; расстояние между ними $d=\frac{49}{5}-\left(-\frac{49}{5}\right)=\frac{98}{5}=19{,}6$.

д) точки эллипса, расстояние от которых до левого фокуса F_1 равно 12. По формуле $r_1=a+\varepsilon x$ находим абсциссу точки, расстояние от которой до точки F_1 равно 12: $12=7+\frac{5}{7}x$, т.е. $x=7$. Подставляя значение x в уравнение эллипса, найдем ординату этой точки: $24\cdot 49+49y^2=1176$, $49y^2=0$, $y=0$.
Условию задачи удовлетворяет точка $A(7;\,0)$.

Задача 5

Уравнение кривой $16x^2+9y^2-32x+36y-92=0$ привести к каноническому виду и изобразить.

Решение.

Приведем данное уравнение кривой к каноническому виду.
Сгруппируем переменные и вынесем за скобки коэффициенты при наивысших степенях. В каждой скобке выделим полный квадрат.

$16x^2-32x+9y^2+36y-92=0$

$16\left(x^2-2x\right)+9\left(y^2+4y\right)-92=0$

$16\left((x-1)^2-1\right)+9\left((y+2)^2-4\right)-92=0$. Раскроем скобки.

$16(x-1)^2+9(y+2)^2=144 \quad /:144$,

$\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1$. Получили уравнение эллипса,

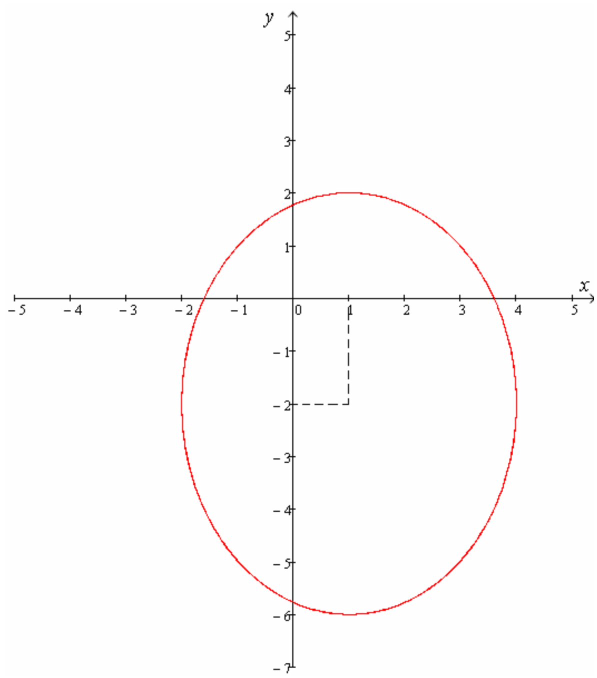


Рисунок 82

центр находится в точке $(1;\ -2)$. Из уравнения находим: $a^2=9$, $a=3$ и $b^2=16$, $b=4$ $(b>a)$. Поэтому $c=\sqrt{b^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon=\dfrac{c}{b}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}<1$.

Задача 6

Составить уравнение эллипса с центром в начале координат и фокусами, лежащими на оси Ox. Эллипс проходит через точки $M_1\left(2;\ -4\sqrt{3}\right)$ и $M_2\left(-1;\ 2\sqrt{15}\right)$.

Решение.

Уравнение эллипса имеет вид: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$. Так как эллипс проходит через точки M_1 и M_2, то их координаты удовлетворяют уравнению эллипса: $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{48}{b^2}=1$ и $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{60}{b^2}=1$. Умножая второе равенство на (-4) и складывая с первым, находим $-\dfrac{192}{b^2}=-3$, т.е. $b^2=64$. Подставляя найденное значение b^2 в первое уравнение, получаем $\dfrac{4}{a^2}+\dfrac{48}{64}=1$, откуда $a^2=16$. Таким образом, искомое уравнение эллипса: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$.

Ответ. $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{64}=1$

Задача 7

Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{1}{2}$, фокус $F(-4;1)$ и уравнение соответствующей директрисы $y+3=0$.

Решение.

По теореме: Отношение расстояний от любой точки эллипса до фокуса и соответствующей директрисы равно эксцентриситету. Рассмотрим любую точку $M(x;y)$ принадлежащую эллипсу, значит $\dfrac{r}{d}=\varepsilon$.

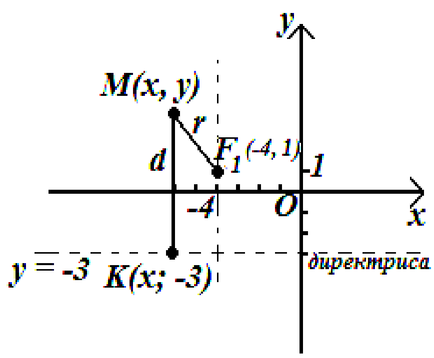


Рисунок 82

$$\frac{\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}}{\sqrt{(y+3)^2}}=\frac{1}{2};2\sqrt{(x+4)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(y+3)^2}\ ,$$

$$4\left(x^2+8x+16+y^2-2y+1\right)=y^2+6y+9,$$

$$4x^2+32x+3y^2-14y+59=0.$$

Ответ. $4x^2+32x+3y^2-14y+59=0$

Задача 8

Установить вид линии, которая определяется следующим уравнением $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$ и изобразить ее.

Решение.

$y + 7 = \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2} \Rightarrow y + 7 \geq 0 \Rightarrow y \geq -7$. Возведем в квадрат правую и левую часть уравнения. $\frac{5}{2}(y+7) = \sqrt{16 + 6x - x^2} \Rightarrow \frac{25}{4}(y+7)^2 = 16 + 6x - x^2$. Перенесем переменную x в левую часть и выделим полный квадрат.

$$\frac{25}{4}(y+7)^2 + x^2 - 6x = 16 \Rightarrow \frac{25}{4}(y+7)^2 + (x-3)^2 - 9 = 16,$$

$$\frac{25}{4}(y+7)^2 + (x-3)^2 = 25 \Rightarrow \frac{(y+7)^2}{4} + \frac{(x-3)^2}{25} = 1$$

Получили уравнения эллипса.Центр эллипса находится в точке $(3;-7)$. $\left[\begin{array}{l} y+7 = y', \\ x-3 = x' \end{array}\right.$. $\frac{(x')^2}{25} + \frac{(y')^2}{4} = 1$.

Множеством точек, удовлетворяющих уравнению $y = -7 + \frac{2}{5}\sqrt{16 + 6x - x^2}$, является полуэллипс, так как $y \geq -7$

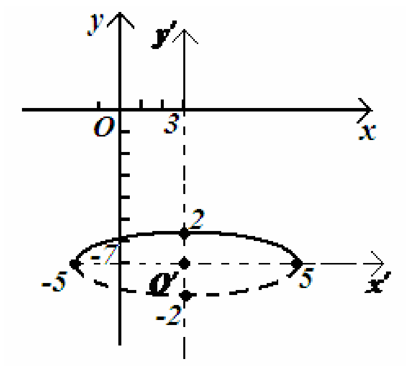


Рисунок 83

Задача 9

Составить уравнение эллипса, если известны его эксцентриситет $\varepsilon = \frac{1}{2}$, фокус $F(3;\ 0)$ и уравнение соответствующей директрисы $x + y - 1 = 0$.

Решение.

Точка $M(x;\ y)$ принадлежит эллипсу, если отношение расстояний до фокуса и соответствующей директрисы равно ε, т.е. $\frac{r}{d} = \varepsilon$.

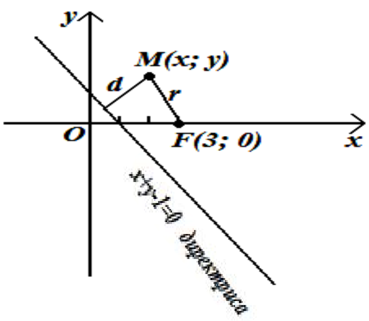


Рисунок 84

$$r = \sqrt{(x-3)^3 + y^2},$$

$$d = \frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\sqrt{(x-3)^2 + y^2}}{\frac{|x + y - 1|}{\sqrt{2}}} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2\sqrt{2}\sqrt{(x-3)^2 + y^2} = |x + y - 1|,$$

$$8\left((x-3)^2 + y^2\right) = (x + y - 1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0.$$

Ответ. $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$

Задача 10

Дано уравнение гиперболы $x^2 - 4y^2 = 16$. Найти:

а) длины его полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет гиперболы;

г) уравнения асимптот и директрис (изобразить кривую).

Решение.

Разделив обе части уравнения на 16, приведем уравнение гиперболы к каноническому виду $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$: $\quad \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

а) длины его полуосей $a^2 = 16$, $b^2 = 4$, т.е. $a = 4$, $b = 2$;

б) координаты фокусов. Используя соотношение $c^2 = a^2 + b^2$, находим $c^2 = 4 + 16$, т.е. $c = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$. Координаты фокусов: $F_1\left(-2\sqrt{5};\, 0\right)$ и $F_2\left(2\sqrt{5};\, 0\right)$;

в) эксцентриситет гиперболы. По формуле $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ находим $\varepsilon = \dfrac{2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{\sqrt{5}}{2} > 1$;

г) уравнения асимптот и директрис найдем по формулам

$y_{1,2} = \pm \dfrac{b}{a} x$ и $x_{1,2} = \pm \dfrac{a}{\varepsilon}$:

$y_{1,2} = \pm \dfrac{1}{2} x$ и $x_{1,2} = \pm \dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

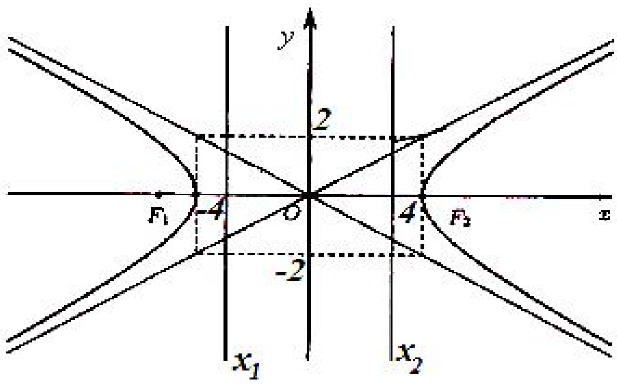


Рисунок 85

Задача 11

Составить уравнение гиперболы, если ее фокусы лежат на оси Oy и расстояние между ними равно 10, а длина действительной оси равна 8.

Решение.

Искомое уравнение гиперболы имеет вид $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$. Согласно условию $2c = 10$, $c = 5$; $2b = 8$, $b = 4$. Из соотношения $c^2 = a^2 + b^2$ найдем мнимую полуось a: $25 = a^2 + 16$, $a^2 = 9$, $a = 3$. Получаем $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$ - уравнение гиперболы.

Ответ. $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

Задача 12

Найти уравнение гиперболы, фокусы которой находятся в точках $F_1(-2;\,4)$ и $F_2(12;\,4)$, а длина мнимой оси равна 6.

Решение.

Центр гиперболы лежит на прямой $y=4$, параллельной оси Ox. Уравнение гиперболы имеет вид $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$. По условию $2b=6$, $b=3$.

Расстояние между фокусами равно 14, т.е. $2c=14$, $c=7$.

Используя соотношение $c^2=a^2+b^2$, находим a: $49=a^2+9$, $a=2\sqrt{10}$. Центр гиперболы делит расстояние между фокусами пополам. Поэтому $x_0=\frac{-2+12}{2}=5$, $y_0=\frac{4+4}{2}=4$. Записываем уравнение гиперболы: $\frac{(x-5)^2}{40}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$.

Ответ. $\frac{(x-5)^2}{40}-\frac{(y-4)^2}{9}=1$

Задача 13

Найти угол между асимптотами гиперболы, если ее эксцентриситет равен 2.

Решение.

Уравнения асимптот гиперболы имеют вид $y=\pm\frac{b}{a}x$.

Найдем отношение $\frac{b}{a}$, воспользовавшись формулами $\varepsilon=\frac{c}{a}$, $c=\sqrt{a^2+b^2}$ и условием $\varepsilon=2$: $\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a}=\sqrt{1+\left(\frac{b}{a}\right)^2}$.

Отсюда $\left(\frac{b}{a}\right)^2=\varepsilon^2-1$, т.е. $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$. Имеем: $\frac{b}{a}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$.

Следовательно, уравнения асимптот гиперболы есть $y=\sqrt{3}x$ и $y=-\sqrt{3}x$.

Угол φ между асимптотами найдем через угловые коэффициенты по формуле

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|=\left|\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{1-3}\right|=\sqrt{3},\ \varphi=60^\circ.$$

Ответ. $\varphi=60^\circ$

Задача 14

Дан эллипс $5x^2 + 8y^2 = 40$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах эллипса, а фокусы гиперболы – в вершинах данного эллипса.

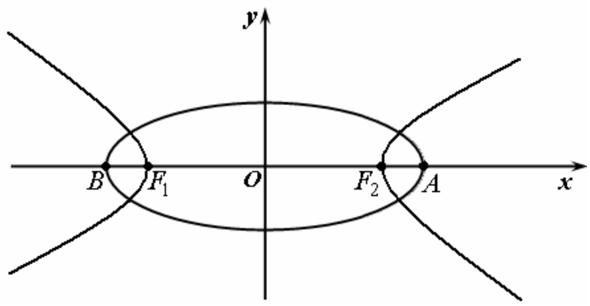


Рисунок 86

Решение.

Найдем координаты вершин A и B и фокусов эллипса, записав его уравнение в канонической форме $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{5} = 1$. Имеем $a^2 = 8$, $a = 2\sqrt{2}$; $b^2 = 5$, $b = \sqrt{5}$. Из соотношения $c^2 = a^2 - b^2$ находим c: $c^2 = 8 - 5$, $c = \sqrt{3}$. Можно записать: $A\left(2\sqrt{2};0\right)$, $B\left(-2\sqrt{2};0\right)$, $F_1\left(-\sqrt{3};\ 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{3};\ 0\right)$. Обозначим через a_r, b_r, c_r - соответственно полуоси гиперболы и половину расстояния между ее фокусами. Тогда, согласно условиям задачи, можно записать: $a_r = OF_2$, т.е. $a_r = \sqrt{3}$ и $c_r = OA$, т.е. $c_r = 2\sqrt{2}$. Из соотношения $c_r^2 = a_r^2 + b_r^2$ находим $8 = 3 + b_r^2$, поэтому $b_r^2 = 5$, $b_r = \sqrt{5}$. Подставляя найденные значения a_r и b_r в уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, находим $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$ - искомое уравнение гиперболы.

Ответ. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{5} = 1$

Задача 15

Дано уравнение гиперболы $36(x-1)^2 - 64(y+2)^2 = -2304$. Найти:

а) длины его полуосей;

б) координаты фокусов;

в) эксцентриситет гиперболы;

г) уравнения асимптот и директрис;

д) сделать чертеж.

Решение.

$$36(x-1)^2 - 64(y+2)^2 = -2304 \ / : (-2304),$$

$$-\frac{(x-1)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{36} = 1 \Rightarrow \frac{(y+2)^2}{36} - \frac{(x-1)^2}{64} = 1,$$

$x-1=x'$, $\quad y+2=y' \Rightarrow \dfrac{(y')^2}{36}-\dfrac{(x')^2}{64}=1$ - каноническое уравнение гиперболы. Центр гиперболы находится в точке $T(1;\,-2)$.

а) длины полуосей гиперболы. $a^2=64 \Rightarrow a=8$; $b^2=36 \Rightarrow b=6$.

б) координаты фокусов. Так как $c^2=a^2+b^2 \Rightarrow c^2=36+64=100 \Rightarrow c=10$. $F_1'(0;10)$ и $F_2'(0;-10)$.

в) эксцентриситет гиперболы. $\varepsilon=\dfrac{c}{b} \Rightarrow \;=\varepsilon=\dfrac{10}{6}=\dfrac{5}{3}>1$

г) уравнения асимптот и директрис.

$y_{1,\,2}=\pm\dfrac{b}{a}x$, $y_{1,2}=\pm\dfrac{3}{4}x$ - уравнения асимптот.

$y_{1,\,2}=\pm\dfrac{b}{\varepsilon}$ $\;y_{1,\,2}=\pm\dfrac{6}{\frac{5}{3}}$; $y_{1,\,2}=\pm\dfrac{18}{5}$ - уравнения директрис.

д) сделать чертеж

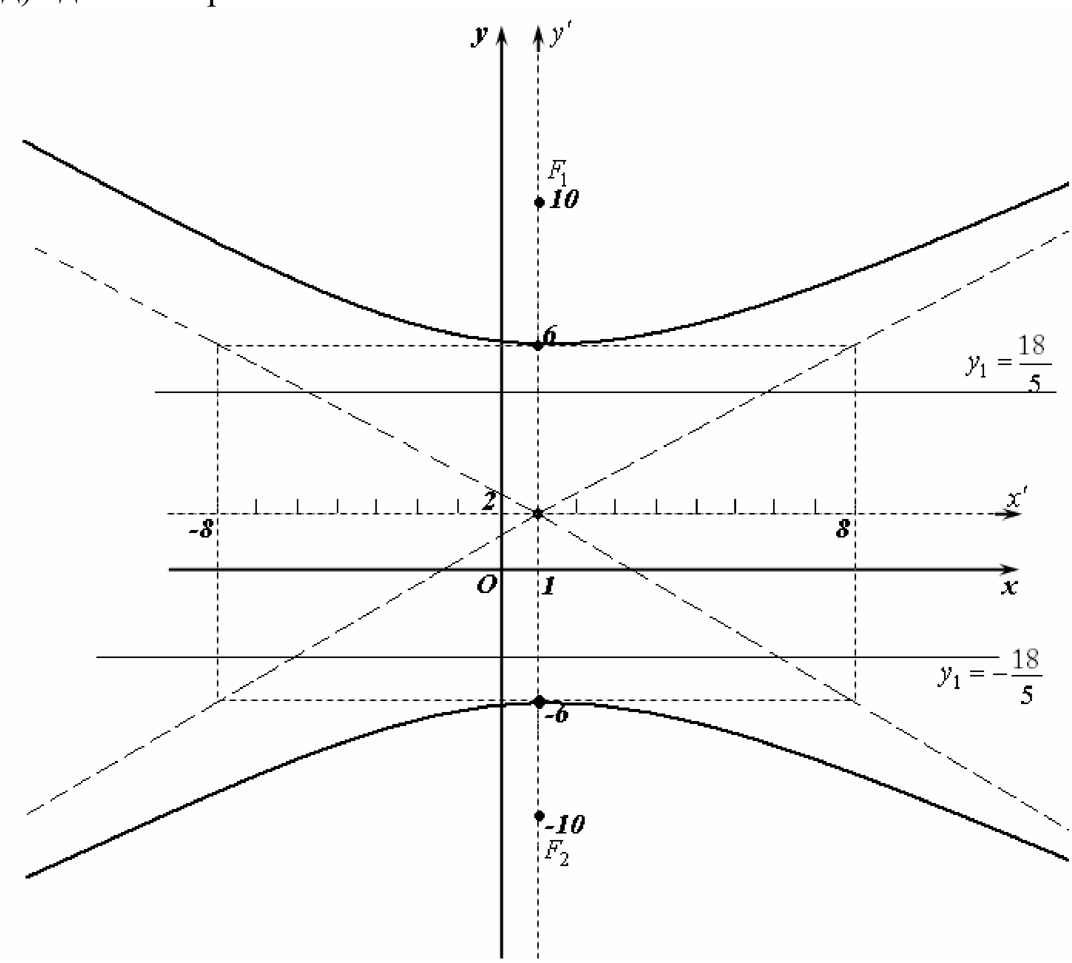


Рисунок 87

Задача 16

Составить уравнение гиперболы, если известны ее эксцентриситет $\varepsilon=\sqrt{5}$, фокус $F(2;-3)$ и уравнение соответствующей директрисы $3x-y+3=0$.

Решение.

При решении используем теорему**.** Отношение расстояний от любой точки гиперболы до фокуса и соответствующей директрисы равно эксцентриситету.

Так как точка $M(x;y)$ принадлежит гиперболе, то $\frac{r}{d}=\varepsilon$, где r - расстояние от точки $M(x;y)$ до $F(2;-3)$, d - расстояние от точки $M(x;y)$ до прямой $3x-y+3=0$. Таким образом $r=\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}$; $d=\frac{|3x-y+3|}{\sqrt{10}}$.

$$\frac{r}{d}=\varepsilon\Rightarrow\frac{\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}}{\frac{|3x-y+3|}{\sqrt{10}}}=\sqrt{5}\Rightarrow\sqrt{10}\sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=\sqrt{5}|3x-y+3|.$$

$$10\left((x-2)^2+(y+3)^2\right)=5(3x-y+3)^2\ |:5,$$
$$2\left(x^2-4x+4+y^2+6y+9\right)=9x^2+y^2+9-6xy+18x-6y,$$
$$2x^2-8x+2y^2+12y+26-9x^2-y^2+6xy-18x+6y-9=0,$$
$$-7x^2+y^2+6xy-26x+18y+17=0,\ \ 7x^2-y^2-6xy+26x-18y-17=0.$$

Ответ. $7x^2-y^2-6xy+26x-18y-17=0$

Задача 17

Установить и нарисовать линию, которая определяется уравнением $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$.

Решение.

$$x-5=-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}\Rightarrow\ x-5\le 0\Rightarrow x\le 5.$$

Возведем в квадрат обе части равенства

$$(x-5)^2=\frac{9}{16}\left(y^2+4y-12\right)\Big|\cdot\frac{16}{9},$$

$$\frac{16}{9}(x-5)^2=(y+2)^2-16\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\frac{16}{9}(x-5)^2-(y+2)^2=-16|:(-16)$$

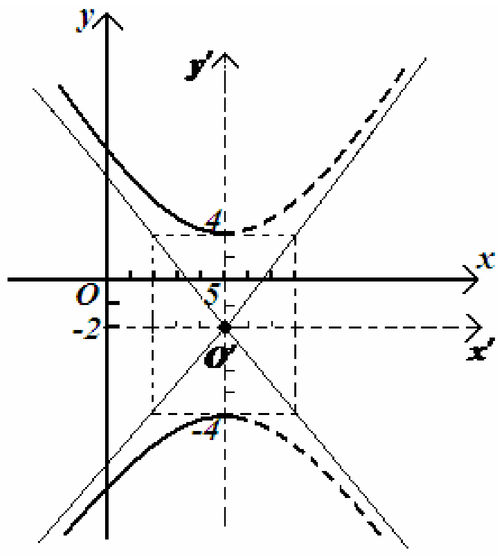


Рисунок 88

$$-\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{16}=1.$$ Уравнение гиперболы, центр в точке $(5;-2)$.

$$\begin{cases} x-5=x', \\ y+2=y' \end{cases} \Rightarrow \frac{(y')^2}{16}-\frac{(x')^2}{9}=1.$$

Множеством точек удовлетворяющих условию $x \le 5$

и уравнению $x=5-\frac{3}{4}\sqrt{y^2+4y-12}$ является часть гиперболы изображенная на рисунке 88 (сплошной линией).

Задача 18

Дана парабола $x^2=4y$. Найти координаты ее фокуса, уравнение директрисы, длину фокального радиуса точки $M(4;\,4)$.

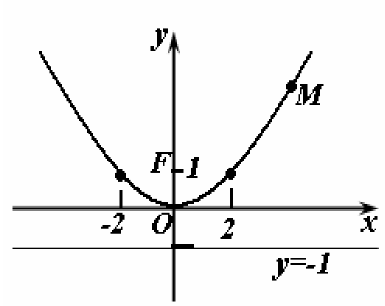


Рисунок 89

Решение.

Парабола задана каноническим уравнением: $x^2=4y$. Следовательно, $2p=4$, $p=2$.

Используя формулы: $F\left(\frac{p}{2};\,0\right)$; Уравнение директрисы l параболы имеет вид $x=-\frac{p}{2}$; фокальный радиус вычисляется по формуле $r=x+\frac{p}{2}$. Таким образом

фокус имеет координаты $F(0;\,1)$; уравнение директрисы: $y=-1$; фокальный радиус точки $M(4;\,4)$ равен $r=4+1=5$.

Ответ. $F(0;\,1)$, $y+1=0$

Задача 19

Найдите вершину, фокус и директрису параболы $y=-2x^2+8x-5$. Постройте эскиз параболы.

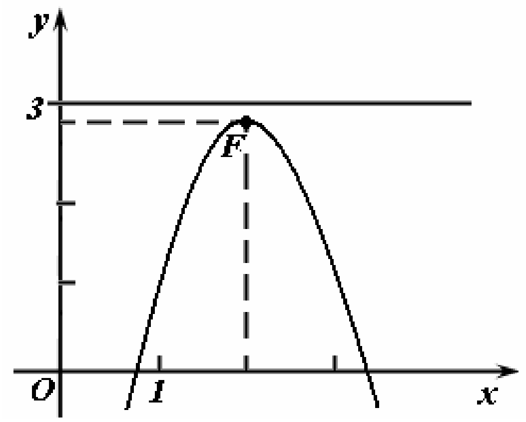


Рисунок 90

Решение.

Преобразуем уравнение $y=-2x^2+8x-5$, выделив в правой части полный квадрат:

$$y=-2\left(x^2-4x+\frac{5}{2}\right)=-2\left(x^2-4x+4-4+\frac{5}{2}\right)=$$

$$=-2\left((x-2)^2-\frac{3}{2}\right)=-2(x-2)^2+3\text{,т.е.}$$

$y=-2(x-2)^2+3$ или $(x-2)^2=-\frac{1}{2}(y-3)$ - уравнение параболы с вершиной в точке $(2;\,3)$: $2p=\frac{1}{2}$, $p=\frac{1}{4}$. Прямая $x-2=0$ является осью симметрии параболы.

Координаты фокуса $x=2$, $y=3-\frac{1}{8}=2\frac{7}{8}$, т.е. $F\left(2;\,2\frac{7}{8}\right)$. Уравнение директрисы $y=3+\frac{p}{2}=3+\frac{1}{8}$, т.е. $y=3\frac{1}{8}$. График изображен на рисунке 90.

Ответ. $(2;\,3)$, $F\left(2;\,2\frac{7}{8}\right)$, $y-\frac{25}{8}=0$

Задача 20

Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2;\,-1)$ и директриса $x-y-1=0$.

Решение.

Точка $M(x;\,y)$ лежит на параболе, если она M равноудалена от фокуса $F(2;\,-1)$ и директрисы $x-y-1=0$.

Таким образом, точка M лежит на параболе, если $r=d$: $r=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}$ и $d=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}$.

$$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\frac{|x-y-1|}{\sqrt{2}}\Rightarrow\sqrt{2}\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=|x-y-1|,$$

Возведем в квадрат правую и левую части уравнения.

$$2\left((x-2)^2+(y+1)^2\right)=(x-y-1)^2\Rightarrow2\left(x^2-4x+4+y^2+2y+1\right)=$$

$$=x^2+y^2+1-2xy-2x+2y,$$

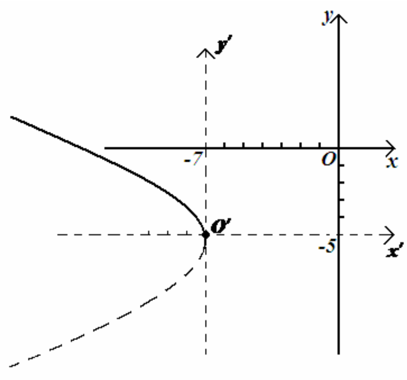
$$2x^2-8x+2y^2+4y+10=x^2+y^2-2xy-2x+2y+1,$$

$$x^2+y^2+2xy-6x+2y+9=0.$$

Ответ. $x^2+y^2+2xy-6x+2y+9=0$

Задача 21

Изобразите линию, которая определяется уравнением: $y=-5+\sqrt{-3x+21}$.



Решение.

$y+5=\sqrt{-3x+21}\Rightarrow y+5\geq0\Rightarrow y\geq-5$.

$(y+5)^2=-3x-21$,

Рисунок 91

$(y+5)^2=-3(x+7)$. Получили уравнение параболы в каноническом виде, центр которой находится в точке $(-7;\,-5)$.

$\left[\begin{array}{l} y+5=y', \\ x+7=x' \end{array}\right.\Rightarrow(y')^2=-3x'$. Так как $y\geq-5$, то множество точек удовлетворяющих уравнению: $y=-5+\sqrt{-3x+21}$ изображают часть параболы.

Домашнее задание № 5

1 Найти полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $16x^2+25y^2-400=0$.

Ответ. 5 и 4; $(3;\ 0)$ и $(-3;\ 0)$; $\varepsilon=0{,}6$; $x_{1,2}=\pm\dfrac{25}{3}$

2 Составить каноническое уравнение эллипса если:

а) его большая полуось равна 10 и фокусы есть $F_1(-6;0)$, $F_2(10;0)$;

б) $a=5$, $F_1(-3;\ 5)$, $F_2(3;5)$;

в) задана точка $M_1\left(2\sqrt{3};1\right)$ эллипса и его малая полуось равна 2;

г) заданы две точки эллипса $M_1(0;7)$ и $M_2(8;0)$;

д) эксцентриситет $\varepsilon=\dfrac{7}{25}$ и заданы фокусы $F_1(7;\ 0)$ и $F_2(-7;0)$;

е) точка $M\left(3;-2\sqrt{3}\right)$ принадлежит эллипсу, $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$;

к) расстояние между фокусами равно 4,расстояние между директрисами равно 5.

Ответ. а) $\dfrac{(x-2)^2}{100}+\dfrac{y^2}{36}=1$; б) $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{(y-5)^2}{16}=1$; в) $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{4}=1$;

г) $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{49}=1$; е) $\dfrac{x^2}{625}+\dfrac{y^2}{576}=1$, е) $\dfrac{x^2}{36}+\dfrac{y^2}{16}=1$; к) $\dfrac{x^2}{5}+y^2=1$

3 Привести уравнение кривой к каноническому виду и изобразить кривую $x^2+9y^2-8x+36y+43=0$.

Ответ. $\dfrac{(x-4)^2}{9}+\dfrac{(y+2)^2}{1}=1$

4 Установить и изобразить линию, которая определяется следующими уравнениями: а) $x=-2\sqrt{-5-6y-y^2}$; б) $y=1-\dfrac{4}{3}\sqrt{-6x-x^2}$.

5 Точка $M_1(2;-1)$ лежит на эллипсе, фокус которого $F(1;0)$, а соответствующая директриса задана уравнением $2x-y-10=0$. Составить уравнение этого эллипса.

Ответ. $17x^2+8xy+23y^2+30x-40y-175=0$

6 Найти канонической уравнение гиперболы с фокусами на оси Ox:

а) $2c=10$, $a=3$; б) $c=3$, $\varepsilon=1{,}5$;

в) $c=10$ и уравнения асимптот $y=\pm\dfrac{4}{3}x$;

г) $\varepsilon=\frac{3}{2}$ и расстояние между директрисами равно $\frac{8}{3}$;

д) проходящей через точки $M_1(6;-1)$ и $M_2\left(-8;-2\sqrt{2}\right)$.

Ответ. а) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$; б) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; в) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{64}=1$;

г) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$; д) $\frac{x^2}{32}-\frac{y^2}{8}=1$

7 Найти уравнение гиперболы, симметричной относительно осей координат, зная, что ее мнимая полуось равна 2 и гипербола проходит через точку $M\left(4;-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)$.

Найти расстояние от точки M до правого фокуса.

Ответ. $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

8 Составить уравнения асимптот гиперболы $\frac{(y+3)^2}{9}-\frac{(x-2)^2}{16}=1$, построить ее.

Ответ. $3x-4y-18=0$ и $3x+4y+6=0$

9 Приведите уравнение кривой $25x^2-4y^2-150x-8y+321=0$ к каноническому виду и изобразите данную кривую.

Ответ. $\frac{(y+1)^2}{25}-\frac{(x-3)^2}{4}=1$

10 Точка $M_1(1;-2)$ лежит на гиперболе, фокус которой $F(-2;2)$, а соответствующая директриса дана уравнением $2x-y-1=0$. Составить уравнение этой гиперболы.

Ответ. $91x^2-100xy+16y^2-136x+86y-47=0$

11 Установить и изобразить линию, которая определяется следующим уравнением:

а) $y=-1+\frac{2}{3}\sqrt{x^2-4x-5}$; б) $x=9-2\sqrt{y^2+4y+8}$.

12 Даны вершина параболы $A(6;-3)$ и уравнение ее директрисы $3x-5y+1=0$. Найти фокус F этой параболы.

Ответ. $F(9;-8)$

13 Установить и изобразить линию, которая определяется уравнением:

а) $x=-4+3\sqrt{y+5}$; б) $y=-2+4\sqrt{x-1}$.

14 Приведите уравнение кривой $x^2-8x+3y+22=0$ к каноническому виду и изобразить ее.

Ответ. $(x-4)^2=-3(y+2)$

Самостоятельная работа

I вариант

1. Изобразить кривую $y = 3 - \sqrt{21 - 4x - x^2}$.

2. Изобразить кривую $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

3. Составить уравнение гиперболы, если известны ее точка $A(-3;-5)$, принадлежащая гиперболе, фокус $F(-2;-3)$ и уравнение, соответствующей директрисы $x + 1 = 0$.

4. Даны вершина параболы $A(6;-3)$ и уравнение директрисы $3x - 5y + 1 = 0$. Найти F.

II вариант

1. Изобразить кривую $x = -5 + \sqrt{40 - 6y - y^2}$.

2. Изобразить кривую $9x^2 - 16y^2 + 90x + 32y - 367 = 0$.

3. Эксцентриситет эллипса $\varepsilon = \frac{2}{3}$, фокус которого $F(2;1)$, а соответствующая директриса дана уравнением $x - 5 = 0$. Составить уравнение эллипса.

4. Составить уравнение параболы, если даны ее фокус $F(2;-1)$ и директриса $x - y - 1 = 0$.

III вариант

1. Изобразить кривую $x = -2 - \sqrt{-y^2 - 2y}$.

2. Изобразить кривую $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

3. Составить уравнение эллипса, зная его $\varepsilon = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Точка $M_1(3;-1)$ является концом малой оси эллипса, фокусы которого лежат на прямой $y + 6 = 0$.

4. Даны вершина параболы $A(-2;-1)$ и уравнение директрисы $x + 2y - 1 = 0$. Составить уравнение параболы.

IV вариант

1. Изобразить кривую $y = 15 + \sqrt{64 - x^2}$.

2. Изобразить кривую $y - \frac{1}{6}x^2 + 2x - 7 = 0$.

3. Составить уравнение гиперболы, фокус которой $F(0;13)$, а соответствующая директриса дана уравнением $13y - 144 = 0$ и $\varepsilon = \frac{13}{12}$.

4. Точка $A(-3;-5)$ принадлежит эллипсу $F(-1;-4)$ и соответствующая директриса дана уравнением $x - 2 = 0$. Составить уравнение эллипса.

Контрольная работа

Вариант 1

1 На биссектрисе первого координатного угла лежат точки $A(3;3)$ и $B(x;y)$, расстояние между которыми равно $\sqrt{2}$. Найти координаты точки B.

2 Найти уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых $2x-y-1=0$ и $3x-y+4=0$ параллельно прямой $4x+2y-13=0$.

3 Найти угол между высотой AD и медианой AE в треугольнике с вершинами в точках $A(1;3)$, $B(4;-1)$, $C(-1;1)$.

4 Найти каноническое уравнение эллипса, если

а) расстояние между концами большой и малой оси равно 5, а сумма длин полуосей равна 7;

б) расстояние от его фокуса до концов большой оси равны 2 и 14.

5 Через фокус параболы $y^2=-x$ проведена прямая под углом $135°$ к оси Ox. Найти длину образовавшейся хорды.

Вариант 2

1 Дан треугольник ABC с вершинами $A(1;5)$, $B(4;1)$, $C(13;10)$. Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла A со стороной BC.

2 Прямая $y=kx+4$ удалена от начала координат на расстояние $d=\sqrt{3}$. Найти значение k.

3 Даны последовательные вершины параллелограмма $ABCD$: $A(-2;5)$, $B(2;7)$, $C(-4;-3)$. Найти координаты четвертой вершины D и написать уравнение диагонали BD.

4 Найти уравнение прямой, содержащей диаметр окружности $x^2+y^2-6x+4y+8=0$, перпендикулярный прямой $x-3y+2=0$.

5 Найти уравнение гиперболы, зная, что ее эксцентриситет $\varepsilon=2$, фокусы гиперболы совпадают с фокусом эллипса $\frac{x^2}{10}+y^2=1$.

Вариант 3

1 Найти координаты центра и радиус окружности, проходящей через точку $A(-10;4)$ и касающейся оси Ox в точке $B(-6;0)$.

2 Написать уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;1)$ на расстоянии 1 от начала координат.

3 При каких значениях A и C прямая $Ax+3y+C=0$:

а) параллельна прямой $3x-y+8=0$;

б) перпендикулярна прямой $y=5x$;

в) проходит через точки $(2;2)$ и $(-1;4)$;

г) пересекается с прямой $4x-2y+7=0$.

4 Найти площадь четырехугольника, две вершины которого лежат в фокусах эллипса $5x^2+9y^2-180=0$, а две другие совпадают с концами его малой оси.

5 Найти длину диаметра эллипса (хорды, проходящей через центр эллипса) $9x^2+27y^2=225$, перпендикулярного к асимптоте гиперболы $x^2-y^2=4$, проходящей через первую и третью четверти.

Вариант 4

1 Площадь треугольника ABC с вершинами $A(-2;1)$, $B(2;2)$, $C(4;y)$ равна 15. Найти ординату вершины C.

2 Через точку пересечения прямых $2x-y=0$ и $x+3y-1=0$ проведена прямая, перпендикулярная прямой $y=3-x$. Найти ее уравнение.

3 Даны две смежные вершины $A(-2;4)$, $B(2;2)$ параллелограмма $ABCD$ и точка $M(1;-1)$ пересечения его диагоналей. Найти уравнения сторон BC и CD параллелограмма.

4 Окружность проходит через точки $M_1(1;5)$ и $M_2(5;3)$, а центр ее лежит на прямой $\frac{x}{4}+\frac{y}{4}=1$. Найти уравнение окружности.

5 Дан эллипс $\frac{x^2}{15}+\frac{y^2}{6}=1$. Найти уравнение гиперболы, вершины которой находятся в фокусах, а фокусы – в вершинах данного эллипса.

§5 Полярная система координат. Переход от полярной системы координат к декартовой и обратно. Построение кривой, определяемой уравнением в полярных координатах

В полярной системе координат основными постоянными элементами, по отношению к которым определяется положение точки на плоскости, являются точка O - полюс и ось OP, которая называется полярной осью.

Если M - произвольная точка плоскости, не совпадающая с полюсом O, то ее положение на плоскости вполне определено заданием двух чисел: r - ее расстояние от полюса, выраженного в ед. масштаба, и φ - угла, на который следует повернуть полярную ось против часовой стрелки, чтобы она совпадала с лучом. Из них первой координатой считается r, а второй φ. Координата r называется полярным радиусом точки M (иногда радиусом-вектором точки M), а координата φ - ее полярным углом*.

Полярный угол φ считается положительным, если он отсчитывается от полярной оси против часовой стрелки, и отрицательным, если он отсчитывается от полярной оси по часовой стрелке.

Если полюс полярной системы координат находится в начале прямоугольной системы координат, а положительная полуось Ox совпадает с полярной осью, ось

* Полярный угол измеряется в радианах.

же Oy перпендикулярна оси Ox и направлена так, что ей соответствует полярный угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$, то по известным полярным координатам точки ее прямоугольные координаты x и y вычисляются из формул

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi.$$

Если же известны прямоугольные координаты x и y точки, ее полярные координаты определяются по формулам

$$r = \pm\sqrt{x^2 + y^2}\,;\ \sin\varphi = \frac{y}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\,;\ \cos\varphi = \frac{x}{\pm\sqrt{x^2+y^2}}\,;\ tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (55)$$

§ 6 Преобразование прямоугольных координат. Параллельный перенос координатных осей без изменения их направления

Преобразованием системы координат называется переход от одной системы координат к другой.

При такой замене надо установить формулы, позволяющие по известным координатам точки в одной системе координат определить ее координаты в другой.

Главной целью преобразования координат является определение такой координатной системы, в которой уравнение данной линии становится наиболее простым. Удачное расположение координатных осей можно добиться тогда, когда уравнение кривой приняло наиболее простой вид. Это имеет важное значение для исследования свойств кривой.

Преобразование уравнения кривой второго порядка к простейшему виду достигается в общем случае 1) параллельным переносом координатной системы без изменения направления осей и 2) поворотом осей.

Если имеются две системы прямоугольных координат с разными началами, оси которых параллельны и одинаково направлены, то между координатами одной и той же точки в этих системах координат существует зависимость

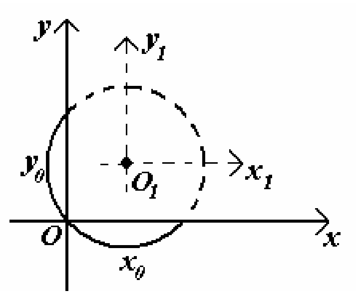


Рисунок 92

$$\begin{cases} x = x_1 + x_0, \\ y = y_1 + y_0, \end{cases} \qquad (56)$$

где x, y - координаты точки в первоначальной системе координат, x_1, y_1 - ее координаты в новой системе координат, а x_0, y_0 - координаты нового начала O_1 в первоначальной системе координат.

Преобразование координат поворотом координатных осей без изменения начала координат

Если φ - угол поворота, x и y - первоначальные координаты точки, x_1 и y_1 - координаты той же точки в новой, повернутой системе координат, то имеют место формулы

$$\begin{cases} x = x_1 \cos\varphi - y_1 \sin\varphi, \\ y = x_1 \sin\varphi + y_1 \cos\varphi \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x_1 = x\cos\varphi + y\sin\varphi, \\ y_1 = -x\sin\varphi + y\cos\varphi. \end{cases} \quad (57)$$

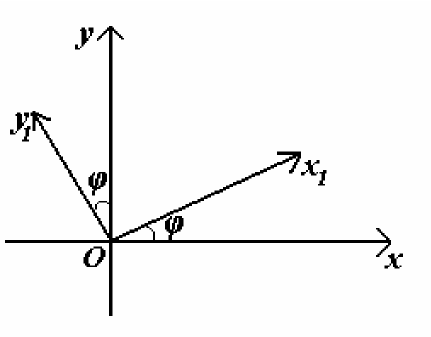


Рисунок 93

Вопросы для самоконтроля

1 Сформулируйте определение эллипса. Запишите каноническое уравнение эллипса (изобразите эллипс).
2 Сформулируйте определение параболы. Запишите каноническое уравнение параболы (изобразите параболу).
3 Сформулируйте определение эксцентриситета и директрис эллипса.
4 Сформулируйте определение эксцентриситета и директрис гиперболы.
5 Сформулируйте определение окружности. Запишите каноническое уравнение окружности (изобразите окружность).
6 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис и асимптот гиперболы $4x^2 - 25y^2 + 100 = 0$ (изобразить гиперболу, отметьте фокусы и директрисы).
7 Сформулируйте определение гиперболы. Запишите каноническое уравнение гиперболы (изобразите гиперболу).
8 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $x^2 + 9y^2 - 9 = 0$ (изобразить эллипс, отметьте фокусы и директрисы).
9 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис эллипса $25x^2 + 4y^2 - 100 = 0$ (изобразить эллипс, отметьте фокусы и директрисы).
10 Найдите полуоси, координаты фокусов, эксцентриситет и уравнения директрис

и асимптот гиперболы $x^2 - y^2 - 1 = 0$ (изобразить гиперболу, отметьте фокусы и директрисы).

11 Найдите координаты фокуса, уравнения директрисы параболы $(x+3)^2 = 3(y-5)$ (изобразить параболу, отметьте фокус и директрису).

12 Найдите координаты фокуса, уравнения директрисы параболы $(y-2)^2 = -2(x+4)$ (изобразить параболу, отметьте фокус и директрису).

13 Запишите уравнение линии $(x^2 + y^2)^2 = 4xy$ в полярных координатах ($x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$).

14 Приведите уравнение кривой к каноническому виду и изобразить кривую, которая определяется уравнением: $x^2 + y^2 = 2x$.

15 Запишите уравнение окружности с центром в точке $(-4;\ 2)$ и $R = 3$.

16 Дана точка $A(1,-1)$, найдите ее координаты в полярной системе координат.

17 Запишите формулы перехода от полярной системы координат к декартовой и обратно.

18 Дана точка $A(\frac{\pi}{4};\sqrt{2})$, найдите ее координаты в декартовой системе координат.

19 Запишите формулы преобразования координат поворотом координатных осей без изменения начала координат.

20 Запишите уравнение кривой в общем виде.

Практическое занятие № 5/

Задача 1

Построить кривую $r = \alpha\cos 2\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольной системе координат.

Решение.

Будем давать значения полярному углу φ от $\varphi = 0$ до $\varphi = 2\pi$ через промежуток $\alpha = \frac{\pi}{8}$ и вычислим соответствующие значения r. Найденные значения поместим в таблицу. Примем произвольный отрезок при построении r. По значениям r и φ из таблицы построим точки, соответствующие каждой паре чисел r и φ, и соединим их плавной линией.

φ	2φ	$r = \alpha\cos 2\varphi$
0	0	a
$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	0

φ	2φ	$r = \alpha\cos 2\varphi$
$\frac{9\pi}{8}$	$\frac{9\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{2}$	0
$\frac{11\pi}{8}$	$\frac{11\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{\pi}{2}$	π	$-a$
$\frac{5\pi}{8}$	$\frac{5\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	0
$\frac{7\pi}{8}$	$\frac{7\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
π	2π	a

$\frac{3\pi}{2}$	3π	$-a$
$\frac{13\pi}{8}$	$\frac{13\pi}{4}$	$-a\frac{\sqrt{2}}{2}$
$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{2}$	0
$\frac{15\pi}{8}$	$\frac{15\pi}{4}$	$a\frac{\sqrt{2}}{2}$
2π	4π	a

Полученная кривая называется четырехлепестковой розой.

Теперь найдем уравнение четырехлепестковой розы в прямоугольной системе координат. Причем напоминаем, что начало прямоугольной системы координат помещено в полюс полярной системы координат, а ось абсцисс направлена вдоль полярной оси.

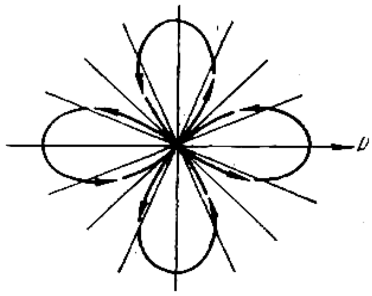


Рисунок 94

Учитывая, что $\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi$, уравнение четырехлепестковой розы $r = \alpha\cos 2\varphi$ перепишем в виде $r = a\left(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi\right)$. Подставляя сюда формулы перехода, получим

$$\pm\sqrt{x^2+y^2} = a\left(\frac{x^2}{x^2+y^2} - \frac{y^2}{x^2+y^2}\right) \text{ или } \pm\sqrt{x^2+y^2} = a\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}.$$

Отсюда $\pm\sqrt{x^2+y^2}\left(x^2+y^2\right) = a\left(x^2-y^2\right)$. Возводя обе части уравнения в квадрат, получим уравнение $\left(x^2+y^2\right)^3 = a^2\left(x^2-y^2\right)^2$.

Задача 2

Привести к каноническому виду уравнение кривой, нарисовать кривую $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$, и найти координаты центра в первоначальной системе координат.

Решение.

Дано уравнение кривой в общем виде $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Выведем формулы преобразования. Начнем с поворота осей. Целью этого преобразования, является уничтожение в преобразованном уравнении члена, содержащего произведение текущих координат.

Формулы преобразования координат поворотом осей без изменения начала координат имеют вид $\begin{cases} x = x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi, \\ y = x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi. \end{cases}$

Подставляя эти значения x и y в заданное уравнение, будем иметь

$$A(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)^2 + B(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi)\cdot(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) +$$
$$+ C(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi)^2 + D(x_1\cos\varphi - y_1\sin\varphi) + E(x_1\sin\varphi + y_1\cos\varphi) + F = 0.$$

Раскроем скобки и получим

$$Ax_1^2\cos^2\varphi - 2Ax_1y_1\sin\varphi\cdot\cos\varphi + Ay_1^2\sin^2\varphi + Bx_1^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi -$$
$$- Bx_1y_1\sin^2\varphi + Bx_1y_1\cos^2\varphi - By_1^2\sin\varphi\cdot\cos\varphi + Cx_1^2\sin^2\varphi +$$
$$+ 2Cx_1y_1\sin\varphi\cdot\cos\varphi + Cy_1^2\cos^2\varphi + Dx_1\cos\varphi - Dy_1\sin\varphi + Ex_1\sin\varphi + +Ey_1\cos\varphi + F = 0.$$

Сделаем приведение подобных членов:

$$\left(A\cos^2\varphi + B\sin\varphi\cdot\cos\varphi + C\sin^2\varphi\right)x_1^2 + \left((2C-2A)\sin\varphi\cdot\cos\varphi - B\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi\right)x_1y_1 +$$
$$+ \left(A\sin^2\varphi - B\sin\varphi\cdot\cos\varphi + C\cos^2\varphi\right)y_1^2 + (D\cos\varphi + E\sin\varphi)x_1 +$$
$$+ (E\,cos\,\varphi - D\,sin\,\varphi)y_1 + F = 0. \qquad (58)$$

Выберем теперь угол поворота φ так, чтобы коэффициент при x_1y_1 обратился в нуль. Приравнивая этот коэффициент нулю, получаем уравнение для определения значения угла φ, при котором этот коэффициент обратится в нуль:

$$(2C-2A)\sin\varphi\cdot\cos\varphi - B\sin^2\varphi + B\cos^2\varphi = 0.$$

Разделим обе части этого уравнения на $cos^2\varphi$ ($\cos\varphi \neq 0$, так как если $cos\,\varphi = 0$, то $sin\,\varphi = \pm 1$, и тогда это уравнение не имеет места, ибо получается, что $B = 0$. Это замечание следует помнить и при решении последующих задач). После деления получим

$$(2C-2A)\frac{\sin\varphi\cos\varphi}{\cos^2\varphi} - B\frac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} + B = 0 \quad (-1),$$

$$B\cdot tg^2\varphi + 2(A-C)tg\varphi - B = 0.$$

Решая квадратное уравнение получим два значения $tg_1\varphi$ и $tg_2\varphi$.

Теперь перейдем к нашему примеру, учитывая $A=5$, $B=4$, $C=8$:

$2tg^2\varphi - 3tg\varphi - 2 = 0$. Отсюда получаем для тангенса угла φ поворота координатных осей такие значения: $tg\varphi = \dfrac{3\pm\sqrt{9+16}}{4}$ или $(tg\varphi)_1 = 2$ и $(tg\varphi)_2 = -\dfrac{1}{2}$.

Эти два значения $tg\varphi$ соответствуют двум взаимно-перпендикулярным направлениям, так как произведение этих тангенсов равно -1. Из $(tg\varphi)_1 = 2$ следует, что угол поворота φ может находиться в первой или третьей четвертях, а из $(tg\varphi)_2 = -\dfrac{1}{2}$ следует, что угол поворота φ может находиться во второй или четвертой четвертях. Условимся всегда брать для $tg\varphi$ из двух возможных значений

– положительное, а угол поворота φ - в первой четверти $\left(0<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$. Таким образом, из двух возможных значений тангенса берем $(tg\varphi)_1=2$. Определим по известному $tg\varphi$ величину $sin\,\varphi$ и $cos\varphi$. Это нам нужно для того, чтобы определить коэффициенты при x_1^2, y_1^2, x_1 и y_1 в уравнении (58).

Так как у нас $tg\varphi>0$, а угол φ находится в первой четверти, то по известному $tg\varphi$ функции $sin\,\varphi$ и $cos\varphi$ могут быть определены следующим образом: $sin\,\varphi=+\dfrac{tg\varphi}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$, $cos\varphi=+\dfrac{1}{\sqrt{1+tg^2\varphi}}$. Из этого следует, что $sin\,\varphi=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$, $cos\varphi=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, $sin^2\varphi=\dfrac{4}{5}$, $cos^2\varphi=\dfrac{1}{5}$, $\sin\varphi\cdot\cos\varphi=\dfrac{2}{5}$.

При найденных значениях $sin\,\varphi$ и $cos\varphi$ коэффициент при x_1^2 равен 9, коэффициент при x_1y_1 - нулю, коэффициент при y_1^2 равен 4, коэффициент при x_1 равен $-\dfrac{144}{\sqrt{5}}$, а коэффициент при y_1 равен $\dfrac{8}{\sqrt{5}}$.

Подставляя эти значения в уравнение (1), получим $9\left(x_1^2-\dfrac{16}{\sqrt{5}}x_1\right)+4\left(y_1^2+\dfrac{2}{\sqrt{5}}y_1\right)+80=0$.

Выделяя в скобках полные квадраты, имеем

$$9\left[\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{64}{5}\right]+4\left[\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{1}{5}\right]+80=0 \text{ ,откуда}$$

$$9\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{576}{5}+4\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2-\frac{4}{5}+80=0 \text{ ,или}$$

$$9\left(x_1-\frac{8}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y_1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2=36. \tag{59}$$

Введем обозначения: $x_2=x_1-\dfrac{8}{\sqrt{5}}$; $y_2=y_1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$;

из сравнения с формулами заключаем, что

$x_0=+\dfrac{8}{\sqrt{5}}$, $y_0=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$,

а уравнение (59) перепишем $9x_2^2+4y_2^2=36$.

После деления обеих частей равенства на 36 получим данное уравнение в каноническом виде:

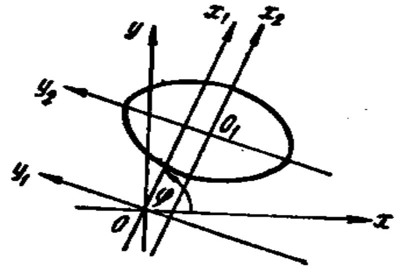


Рисунок 95

$$\frac{x_2^2}{4}+\frac{y_2^2}{9}=1.$$

Итак, данное уравнение определяет эллипс, он вытянут вдоль оси O_1y_2.

Домашнее задание № 5′

1 Привести уравнение кривой к каноническому виду и нарисовать кривую: $3x^2-4xy-2x+4y-5=0$.

Ответ. Кривая – гипербола, ее каноническое уравнение $\dfrac{y_2^2}{1}-\dfrac{x_2^2}{4}=1$

2 Привести уравнение кривой к каноническому виду $x^2-2xy+y^2-6x-2y+9=0$.

Ответ. Кривая – парабола, ее каноническое уравнение $y_2^2=2\sqrt{2}x_2$

3 Привести уравнение кривой к каноническому виду $8x^2-4xy+5y^2+4x-10y-319=0$.

Ответ. Кривая – эллипс, его каноническое уравнение $\dfrac{x_2^2}{81}+\dfrac{y_2^2}{36}=1$

4 Построить кривую $r=4\cos 3\varphi$ и найти ее уравнение в прямоугольных координатах при условии, что начало прямоугольных координат совпадает с полюсом полярной системы координат, а положительная полуось абсцисс совпадает с полярной осью.

Ответ. $\left(x^2+y^2\right)^2=4x\left(x^2-3y^2\right)$ - трехлепестковая роза

5 Построить спираль Архимеда $r=a\varphi\ (a>0)$.

6 Построить кардиоиду $r=2a(1+\cos\varphi)\ (a>0)$.

7 Построить гиперболическую спираль $r=\dfrac{k}{\varphi}\ (k>0)$.

Тест 4

1 Уравнение линии $(x^2+y^2)^2=3y$ в полярных координатах ($x=r\cos\varphi, y=r\sin\varphi$) имеет вид:

а) $r^4=3\cos\varphi$; в) $r^3=3\sin\varphi$;

б) $r^3=3\cos\varphi$; г) $r^4=3\sin\varphi$.

2 Каноническое уравнение эллипса имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$; в) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$;

б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$; г) $y^2=-2px$.

3 Каноническое уравнение гиперболы имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$ г) $y^2=-2px.$

4 Каноническое уравнение окружности имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$ г) $y^2=-2px.$

5 Каноническое уравнение параболы имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$ в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$

б) $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2;$ г) $y^2=-2px.$

5 Каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой находятся на оси Oy имеет вид:

а) $4x^2-y^2-16=0;$ в) $4x^2-y^2-1=0;$

б) $x^2-y^2-1=0;$ г) $x^2-y^2+1=0.$

6 Каноническое уравнение гиперболы, фокусы которой находятся на оси Ox имеет вид:

а) $4x^2-y^2+16=0;$ в) $4x^2-y^2+4=0;$

б) $x^2-y^2-1=0;$ г) $x^2-y^2+1=0.$

8 Каноническое уравнение эллипса, который вытянут вдоль оси Ox имеет вид:

а) $9x^2+4y^2-36=0;$ в) $4x^2+9y^2-36=0;$

б) $4x^2+y^2-16=0;$ г) $x^2+y^2-1=0.$

9 Каноническое уравнение эллипса, который вытянут вдоль оси Oy имеет вид:

а) $9x^2+4y^2-36=0;$ в) $4x^2+9y^2-36=0;$

б) $4x^2-y^2-16=0;$ г) $x^2+y^2-1=0.$

10 Каноническое уравнение окружности с центром в точке $(2;\ -3)$ и $R=4$ имеет вид:

а) $x^2-4x+y^2+6y+12=0$;
в) $x^2-4x+y^2+6y-3=0$;
б) $x^2-4x+y^2-6y-3=0$;
г) $x^2+4x+y^2+6y-3=0$.

11 Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(-1;\ 2)$, большая полуось равна $a=2$ и малая полуось равна $b=1$ имеет вид:

а) $x^2+2x+4y^2-16y+13=0$;
в) $x^2-2x+4y^2+16y+13=0$;
б) $x^2-2x+4y^2-16y+13=0$;
г) $x^2+2x+4y^2+16y+13=0$.

12 Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(5;3)$, действительная полуось равна $a=2$ и мнимая полуось равна $b=1$ имеет вид:

а) $x^2+10x-4y^2-24y-7=0$;
в) $4x^2-40x-y^2+6y+95=0$;
б) $x^2-10x-4y^2+24y-15=0$;
г) $4x^2+40x-y^2-6y+95=0$.

13 Каноническое уравнение окружности с центром в точке $(-4;2)$ и $R=3$ имеет вид:

а) $(x-4)^2+(y+2)^2=3$;
в) $(x-4)^2+(y+2)^2=9$;
б) $(x+4)^2+(y-2)^2=3$;
г) $(x+4)^2+(y-2)^2=9$.

14 Каноническое уравнение гиперболы с центром в точке $(6;5)$, действительная полуось равна $a=2$ и мнимая полуось равна $b=3$ имеет вид:

а) $\dfrac{(x+6)^2}{4}-\dfrac{(y+5)^2}{9}=1$;
в) $\dfrac{(x+6)^2}{2}-\dfrac{(y+5)^2}{3}=1$;
б) $\dfrac{(x-6)^2}{4}-\dfrac{(y-5)^2}{9}=1$;
г) $\dfrac{(x-6)^2}{2}-\dfrac{(y-5)^2}{3}=1$.

15 Каноническое уравнение эллипса с центром в точке $(3;-1)$, большая полуось равна $a=5$ и малая полуось равна $b=4$ имеет вид:

а) $\dfrac{(x-3)^2}{25}+\dfrac{(y+1)^2}{16}=1$;
в) $\dfrac{(x-3)^2}{5}+\dfrac{(y+1)^2}{4}=1$;
б) $\dfrac{(x+3)^2}{25}+\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$;
г) $\dfrac{(x+3)^2}{5}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$.

16 Каноническое уравнение параболы с вершиной в точке $(-1;\ 4)$ имеет вид:

а) $x^2+2x-y+5=0$; в) $x^2-2x-y-3=0$;

б) $-x+y^2+2y+5=0$; г) $-x+y^2-2y-3=0$.

17 Каноническое уравнение эллипса, эксцентриситет равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$ и большая полуось равна 3 (эллипс вытянут вдоль оси Oy) имеет вид:

а) $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}=1$;

б) $\frac{x^2}{6}-\frac{y^2}{9}=1$; г) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{6}=1$.

18 Координаты центра и радиус окружности $3x^2+3y^2-4x+9y+4=0$ равны:

а) $\left(-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right), R=\frac{49}{36}$; в) $\left(-\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right), R=\frac{7}{6}$;

б) $\left(\frac{2}{3},\frac{3}{2}\right), R=\frac{7}{6}$; г) $\left(\frac{2}{3},-\frac{3}{2}\right), R=\frac{7}{6}$.

19 Каноническое уравнение эллипса, расстояние между фокусами равно 8, эксцентриситет равен $\frac{1}{2}$ (эллипс вытянут вдоль оси Ox) имеет вид:

а) $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{48}=1$; в) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{48}=1$;

б) $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{16}=1$; г) $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{48}=1$.

20 Директриса параболы задана уравнением $x+15=0$. Уравнение данной параболы имеет вид:

а) $x^2=60y$; в) $y^2=60x$;

б) $y^2=15x$; г) $x^2=15y$.

Глава 6 Поверхности второго порядка

Если в пространстве R^3 ввести прямоугольную систему координат $Oxyz$, то каждая поверхность определяется некоторым уравнением $F(x, y, z) = 0$, (x, y, z) - координаты любой точки поверхности. Если $F(x, y, z)$ - многочлен не выше второй степени относительно совокупности переменных x, y, z, то уравнение $F(x, y, z) = 0$ называется уравнением второго порядка, а поверхность, изображаемая этим уравнением называется поверхностью второго порядка.

Если поверхность имеет специфическое расположение относительно системы координат (например, симметрична относительно некоторых координатных плоскостей, или имеет вершину в начале координат), то ее уравнение имеет достаточно простой вид, который называется каноническим.

§1 Канонический вид уравнений поверхностей второго порядка. Геометрическое изображение

Сферой называют множество точек пространства $Oxyz$, которые равноудалены от точки, называемой центром сферы на расстояние, называемое радиусом сферы.

Сфера радиуса R с центром в начале координат (рисунок 96)

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \tag{60}$$

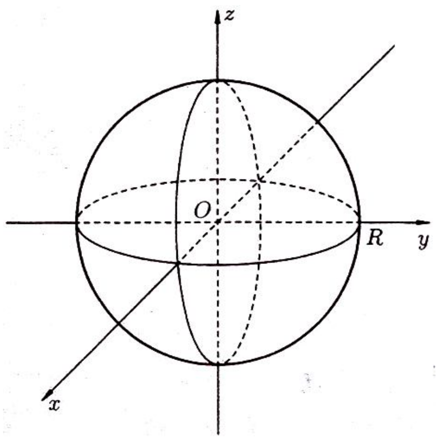


Рисунок 96

Уравнение $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2$ (61)

изображает сферу радиуса R с центром в точке $M_0(x_0; y_0; z_0)$.

Эллипсоид с полуосями a, b, c и центром в начале координат (рисунок 97)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (62)$$

При $a=b=c=R$ эллипсоид превращается в сферу радиуса R.

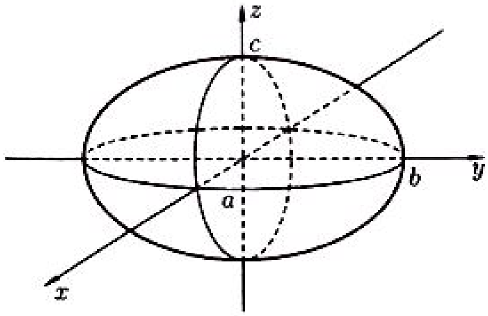


Рисунок 97

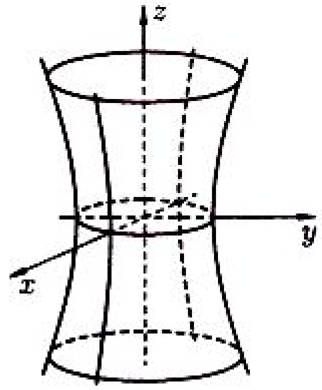


Рисунок 98

Однополостный гиперболоид с полуосями a, b, c и осью Oz (рисунок 98)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (63)$$

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z=h$ являются эллипсами: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$.

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x=h$ или $y=h$ являются гиперболами: $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{a^2}$ или $\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}$.

Двуполостный гиперболоид с полуосями a, b, c и осью Oz (рисунок 99)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (64)$$

Сечения гиперболоида горизонтальными плоскостями $z=h$, $|h|>c$ являются эллипсами: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1$.

Сечения гиперболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются гиперболами: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2} - 1$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} - 1$.

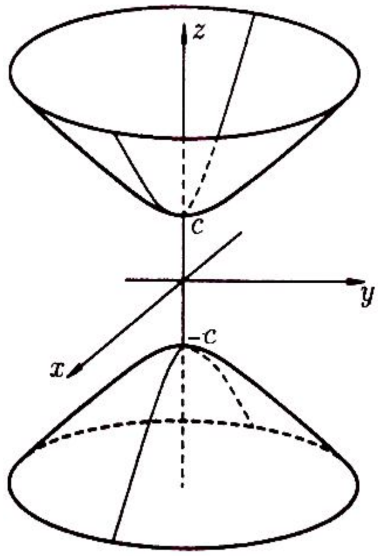


Рисунок 99

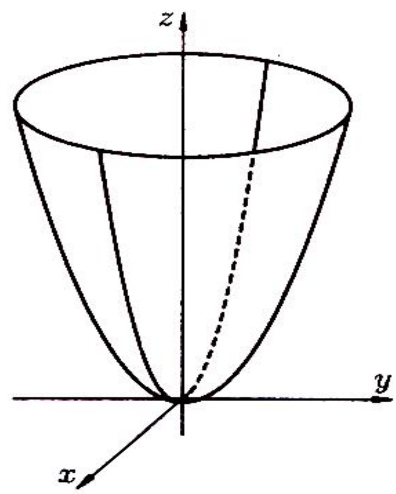


Рисунок 100

Параболоид эллиптический с параметрами a, b, p и вершиной в начале координат (рисунок 100)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2pz \tag{65}$$

Сечения параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ ($h > 0$ при $p > 0$, $h < 0$ при $p < 0$) являются эллипсы: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2ph$.

Сечения параболоида вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются параболами: $\frac{y^2}{b^2} = 2pz - \frac{h^2}{a^2}$ или $\frac{x^2}{a^2} = 2pz - \frac{h^2}{b^2}$.

Параболоид гиперболический с параметрами a, b, p и вершиной в начале координат (рисунок 101)

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2pz \tag{66}$$

Сечения параболоида горизонтальными плоскостями $z = h$ представляют собой гиперболы: $\frac{x^2}{2a^2 ph} - \frac{y^2}{2b^2 ph} = 1$.

Сечения вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются параболами: $\frac{y^2}{b^2} = -2pz + \frac{h^2}{a^2}$ или $\frac{x^2}{a^2} = 2pz + \frac{h^2}{b^2}$.

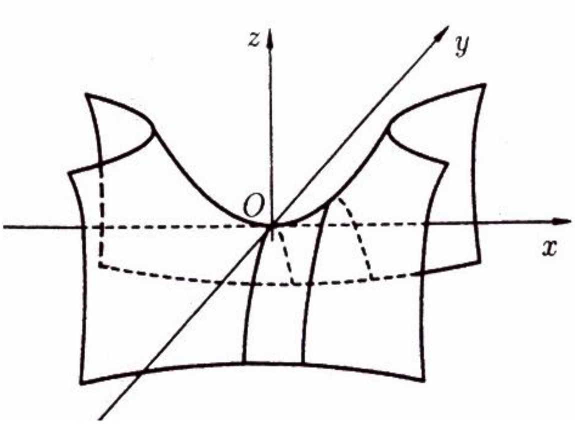


Рисунок 101

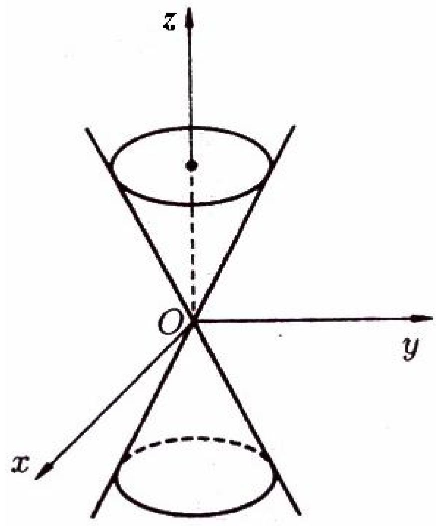


Рисунок 102

Конусом называется поверхность, составленная из прямых линий, проходящих через фиксированную точку – вершину конуса. Прямые называются образующими, а линия, которая лежит на конусе, не проходит через вершину и пересекает все образующие, называется направляющей конуса.

Конус эллиптический с вершиной в начале координат и осью Oz (рисунок 102)

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad (67)$$

Если $a = b$, то конус круглый или круговой.

Пересечение конуса горизонтальными плоскостями $z = h$ являются эллипсами: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$, (при $h = 0$ эллипс вырождается в точку).

Сечения конуса вертикальными плоскостями $x = h$ или $y = h$ являются гиперболами: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{a^2}$ или $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2}$ при $h \neq 0$;

или парой пересекающихся прямых: $\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$, $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ при $h = 0$.

К поверхностям второго порядка относятся цилиндры.

Цилиндры:

Поверхность, которая состоит из прямых линий, параллельных заданному направлению, называется цилиндрической поверхностью или цилиндром, а прямые линии – ее образующими. Линию, лежащую на поверхности и пересекающую все образующие, называют направляющей.

Мы ограничимся перечислением цилиндров, направляющие которых расположены в плоскости Oxy, а образующие – прямые, параллельные оси Oz.

Эллиптический цилиндр (рисунок 103): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (68)

Если $a=b=R$, то цилиндр круговой $x^2+y^2=R$.

Гиперболический цилиндр (рисунок 104): $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (69)

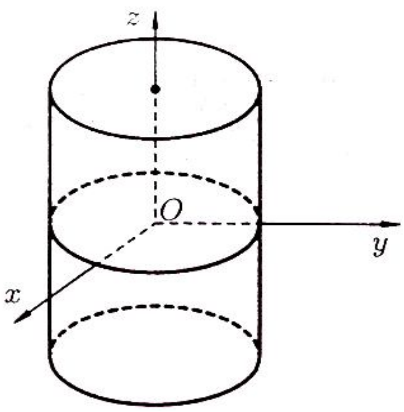


Рисунок 103

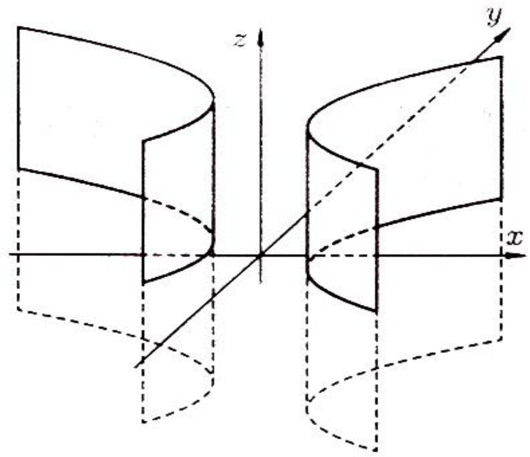


Рисунок 104

Параболический цилиндр (рисунок 105): $y^2=2px$ (70)

Примечание. Если в каждом из приведенных канонических уравнений заменить $x=x_1-x_0$, $y=y_1-y_0$, $z=z_1-z_0$, где $(x_0;y_0;z_0)$ - фиксированные числа, то новые уравнения представляют те же поверхности и они занимают в системе координат $O_1x_1y_1z_1$ такое же положение относительно плоскостей $x_1=x_0$, $y_1=y_0$, $z_1=z_0$ как поверхности, заданные канонически относительно координатных плоскостей $x=0$, $y=0$, $z=0$.

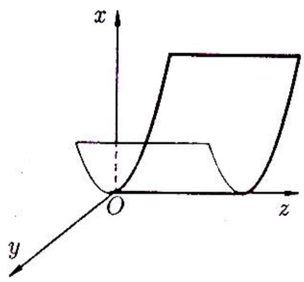


Рисунок 105

Другими словами, приведенные формулы представляют параллельный сдвиг поверхности на вектор $\overline{OM}=(x_0;y_0;z_0)$.

Вопросы для самоконтроля

1 Запишите каноническое уравнение однополостного гиперболоида и изобразите его.

2 Какую поверхность определяет уравнение $(x-6)^2+(y-3)^2+(z+1)^2=4$?

3 Запишите каноническое уравнение двуполостного гиперболоида и изобразите его.

4 Сформулируйте определение сферы, запишите каноническое уравнение сферы и изобразите ее.

5 Однополостный гиперболоид рассекаем плоскостью $x=0$.Какая кривая будет в сечении?

6 Сформулируйте определение цилиндрической поверхности.

7 Какую поверхность определяет уравнение $(x-1)^2-(y+3)^2+(z-8)^2=0$?

8 Запишите каноническое уравнение эллиптического параболоида и изобразите его.

9 Запишите каноническое уравнение гиперболического цилиндра и изобразите его.

10 Запишите каноническое уравнение параболического цилиндра и изобразите его.

11 Двуполостный гиперболоид рассекаем плоскостью $y=0$. Какая кривая будет в сечении?

12 Круговой цилиндр рассекаем плоскостью $z=0$. Какая кривая будет в сечении?

13 Запишите каноническое уравнение конуса и изобразите его.

14 Какую поверхность определяет уравнение $(x+3)^2-(y-3)^2+(z-7)^2=1$?

15 Какую поверхность определяет уравнение $(x+6)^2-(y+3)^2-(z-1)^2=16$?

16 Эллиптический параболоид рассекаем плоскостью $y=0$. Какая кривая будет в сечении?

17 Гиперболический параболоид рассекаем плоскостью $z=0$. Какая кривая будет в сечении?

18 Какую поверхность определяет уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$?

19 Какую поверхность определяет уравнение $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$?

20 Какую поверхность определяет уравнение $z^2=2py$?

Практическое занятие № 6

Задача 1

Определить координаты центра сферы и ее радиус
$x^2+y^2+z^2-6x+8y+10z+25=0$.

Решение.

Приведем данное уравнение к виду: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$,
$x^2-6x+y^2+8y+z^2+10z+25=0$. Сгруппировав переменные, выделим полные квадраты относительно переменных: $(x-3)^3-9+(y+4)^2-16+(z+5)^2-25+25=0$.

Приведем подобные слагаемые и получим уравнение
$(x-3)^3+(y+4)^2+(z+5)^2-25=0$; $(x-3)^3+(y+4)^2+(z+5)^2=25$.

Каноническое уравнение сферы, центр которой находится в точке с координатами $C(3;–4;–5)$ и радиусом $R=5$.

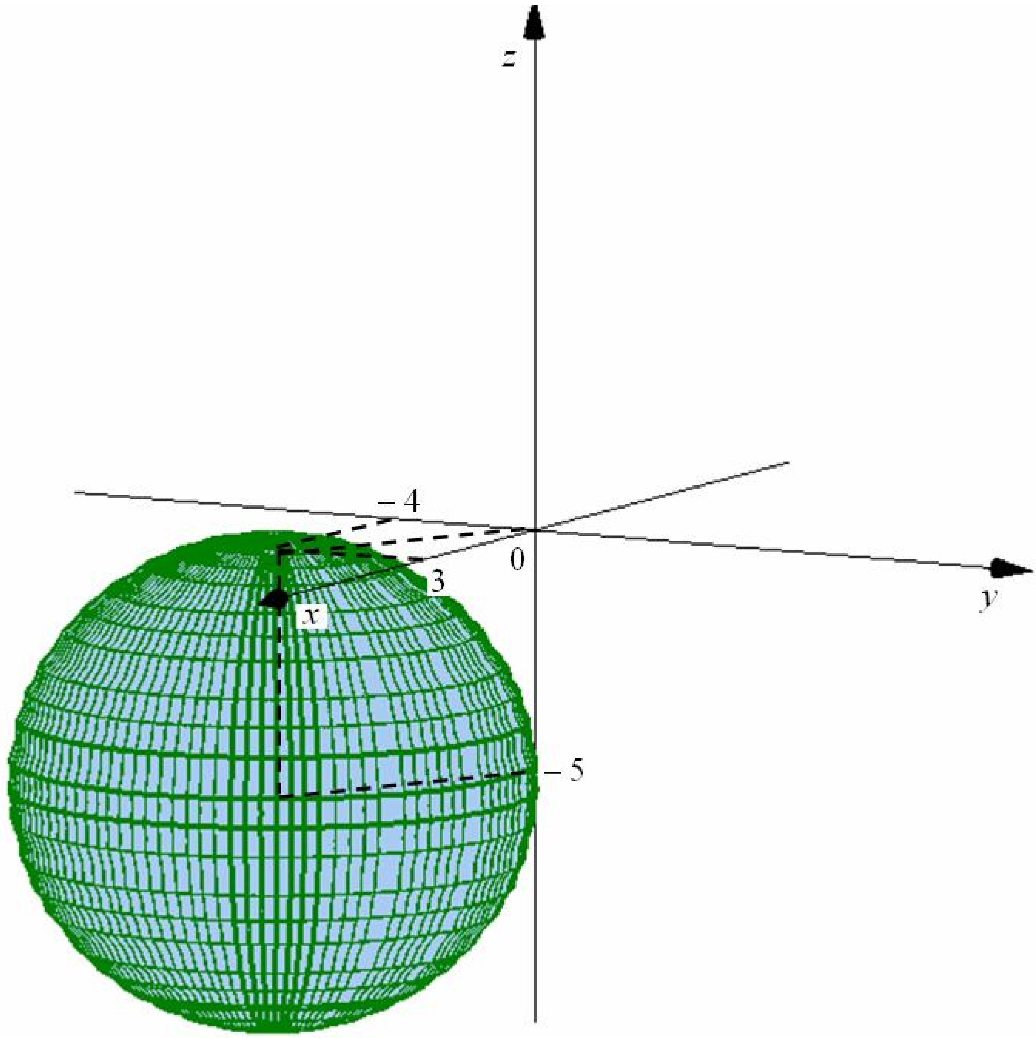


Рисунок 106

Ответ. Центр сферы в точке с координатами $(3;–4;–5)$ и $R=5$

Задача 2

Составить уравнение сферы радиуса $R=3$ с центром в точке $C(-1;2;-3)$.

Решение.

Подставляя в уравнение сферы $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$, $a=-1$, $b=2$, $c=-3$ и $R=3$, будем иметь $(x+1)^2+(y-2)^2+(z+3)^2=9$, или $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+5=0$.

Ответ. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z+5=0$

Задача 3

Изобразить поверхность $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$.

Решение. $z=\sqrt{36-x^2-y^2}$: $z\geq 0$. Возведем в квадрат правую и левую части равенства и перенесем переменные в одну сторону,

$z^2=36-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=36$.

Получили каноническое уравнение сферы с центром в точке $(0;\ 0;\ 0)$ и радиусом $R=6$.

Так как $z\geq 0$, то искомой поверхностью является полусфера.

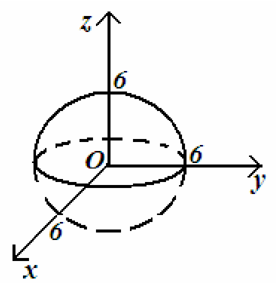


Рисунок 107

Задача 4

Изобразить поверхность $4x^2+y^2+16z^2=64$ исследовав ее методом параллельного сечения.

Решение.

Приведем данное уравнение $4x^2+y^2+16z^2=64$ к каноническому виду: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ т.е разделим правую и левую части исходного уравнения на 64 и получи: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1$.

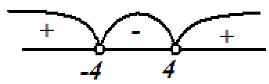
1) Рассмотрим сечение данной поверхности плоскостями $x=|h|$, параллельными плоскости zOy.

Раскроем модуль: $x=\pm h$. Тогда уравнение запишется в виде:

$$\frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=1-\frac{h^2}{16} \Rightarrow \frac{y^2}{64}+\frac{z^2}{4}=\frac{16-h^2}{16}.$$

ОДЗ:

$$1-\frac{h^2}{16}>0 \Rightarrow \frac{16-h^2}{16}>0 \Rightarrow 16-h^2>0 \Rightarrow h^2-16<0.$$



$h\in(-4;\ 4)$.

Разделим правую и левую части уравнения на $\dfrac{16-h^2}{16}$, получим: $\dfrac{y^2}{4\left(16-h^2\right)}+\dfrac{z^2}{\dfrac{16-h^2}{4}}=1$.

В сечении эллипсоида данными плоскостями, мы будем получать эллипсы разных полуосей.

Причем, при $h=0$ мы получим эллипс, который имеет максимальное значение полуосей: $\dfrac{y^2}{64}+\dfrac{z^2}{4}=1$.

При $h\in(0;\,4)$ и $h\in(-4;\,0)$ значение полуосей будет уменьшаться.

При $1-\dfrac{h^2}{16}=0$ получаем систему уравнений $\begin{cases} h=\pm 4, \\ \dfrac{y^2}{64}+\dfrac{z^2}{4}=0. \end{cases}$

Данной системе уравнений удовлетворяют точки с координатами $(4;\,0;\,0)$ и $(-4;\,0;\,0)$. В данных точках $(4;\,0;\,0)$ и $(-4;\,0;\,0)$ эллипсоид пересекает ось Ox.

2) Рассмотрим сечение поверхности плоскостями $y=|h|$, параллельными плоскости xOz.

Раскроем модуль: $y=\pm h$. Следовательно, исходное уравнение примет вид: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1-\dfrac{h^2}{64}$.

Аналогично первому случаю находим ОДЗ. ОДЗ: $h\in(-8;\,8)$.

Разделим обе части уравнения на $\dfrac{64-h^2}{64}$, получаем: $\dfrac{x^2}{16-\dfrac{h^2}{4}}+\dfrac{z^2}{4-\dfrac{h^2}{16}}=1$.

В сечении эллипсоида данными плоскостями, мы будем получать эллипсы разных полуосей. Причем, при $h=0$ мы получим эллипс, который имеет максимальное значение полуосей: $\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{z^2}{4}=1$.

При $h\in(0;\,8)$ и $h\in(-8;\,0)$ значение полуосей будет уменьшаться.

При $1-\dfrac{h^2}{64}=0$, (решая аналогично 1), получаем две точки с координатами $(0;\,-8;\,0)$ и $(0;\,8;\,0)$. В данных точках $(0;\,-8;\,0)$ и $(0;\,8;\,0)$ эллипсоид пересекает ось Oy.

3) Рассмотрим сечение поверхности плоскостями $z=|h|$, параллельными плоскости xOy.

Раскроем модуль: $z=\pm h$. Значит исходное уравнение примет вид: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1-\frac{h^2}{4}$.

ОДЗ: $h\in(-2;\,2)$. После деления данного уравнения на правую часть получим уравнение: $\frac{x^2}{4\left(4-h^2\right)}+\frac{y^2}{16\left(4-h^2\right)}=1$, при $1-\frac{h^2}{4}\rangle 0$

В сечении эллипсоида данными плоскостями, мы будем получать эллипсы разных полуосей. Причем, при $h=0$ мы получим эллипс, который имеет максимальное значение полуосей: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{64}=1$.

При $h\in(0;\,2)$ и $h\in(-2;\,0)$ значение полуосей будет уменьшаться.

При $1-\frac{h^2}{4}=0$ мы получим две точки с координатами $(0;\,0;\,-2)$ и $(0;\,0;\,2)$.

В данных точках $(0;\,0;\,-2)$ и $(0;\,0;\,2)$ эллипсоид пересекает ось Oz.

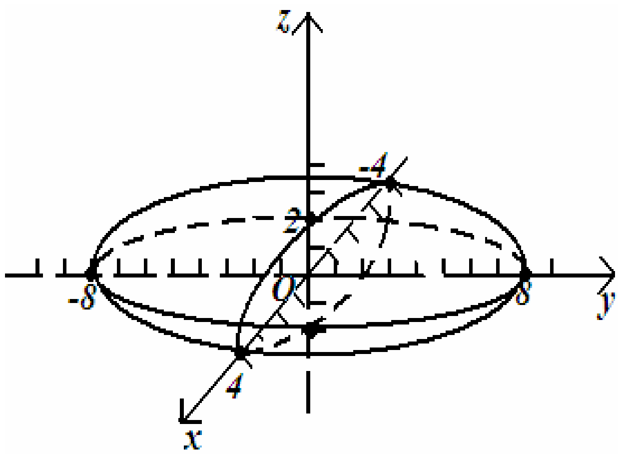


Рисунок 108

Задача 5

Вывести уравнение геометрического места точек, разность расстояний которых до двух данных точек $F_1(0;\,-5;0)$ и $F_2(0;5;0)$ есть величина постоянная равная 6.

Решение.

Возьмем произвольную точку $M(x;\,y;\,z)$ в пространстве R^3. Тогда $|MF_1|=\sqrt{x^2+(y+5)^2+z^2}$; $|MF_2|=\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2}$.

Так как разность расстояний до двух данных точек $F_1(0;\,-5;0)$ и $F_2(0;5;0)$ есть величина постоянная равная 6, то имеем следующее выражение

$$\left|\sqrt{x^2+(y+5)^2+z^2}-\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2}\right|=6.$$

Раскроем модуль и возведем в квадрат левую и правую части равенства.

$$\sqrt{x^2+(y+5)^2+z^2}=\pm 6+\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2},$$

$$x^2+(y+5)^2+z^2=36\pm 12\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2}+x^2+(y-5)^2+z^2.$$

Упростим данное равенство и корень квадратный перенесем в левую часть, а все остальное в правую часть.

$$\pm 12\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2}=36-20y \quad |:4.$$

$$\pm 3\sqrt{x^2+(y-5)^2+z^2}=9-5y.$$

Еще раз возведем в квадрат левую и правую части равенства.

$$9\left(x^2+(y-5)^2+z^2\right)=81-90y+25y^2.$$

Раскроем скобки, упростим выражение и приведем к каноническому виду. $9x^2-16y^2+9z^2=-144 \quad |:144,$

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=-1$$ - двуполостный гиперболоид.

Ответ. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}+\dfrac{z^2}{16}=-1$

Задача 6

Изобразить тело, которое определяется следующим соотношением $4\le x^2+y^2+z^2\le 36$.

Решение.

Уравнения $x^2+y^2+z^2=4$ и $x^2+y^2+z^2=36$ определяют сферы с общим центром в точке с координатами $(0;\,0;\,0)$ и радиусами $R_1=2$, $R_2=6$ соответственно.

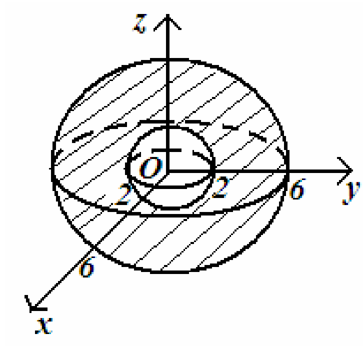


Рисунок 109

Множество точек пространства, которые равноудалены от точки $(0;\,0;\,0)$ на расстояние не менее 2 и не более 6 будут удовлетворять данному двойному неравенству.

Задача 7

Найдите уравнения линии пересечения поверхностей $z = 2 - x^2 - y^2$ и $z = x^2 + y^2$.

Решение.

Данные уравнения определяют круговой параболоид. Для нахождения линии пересечения составим систему уравнений и решим ее.

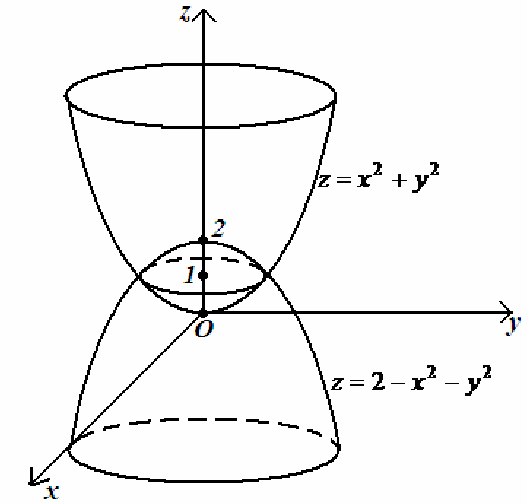


Рисунок 110

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z, \\ 2 - x^2 - y^2 = z \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2 - x^2 - y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 2y^2 = 2 \,|: 2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 + y^2 = 1.$$

Получили уравнения окружности с центром в точке $(0; 0)$ и $R = 1$, которая находится в плоскости $z - 1 = 0$. В плоскости $z - 1 = 0$ две поверхности пересекаются по окружности $x^2 + y^2 = 1$.

Задача 8

По какой линии пересекается конус $x^2 + y^2 - 2z^2 = 0$ с плоскостью $y = 2$?

Решение.

Составим систему уравнений и решим ее.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 2z^2 = 0, \\ y = 2, \end{cases} \Rightarrow x^2 + 4 - 2z^2 = 0 \Rightarrow x^2 - 2z^2 = -4 \;\; |: (-4) \Rightarrow$$

$\dfrac{z^2}{2} - \dfrac{x^2}{4} = 1$. Данное уравнение в плоскости $y - 2 = 0$ определяет гиперболу.

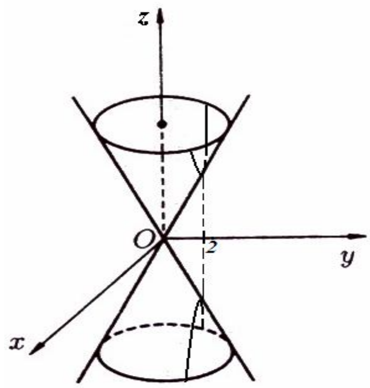


Рисунок 111

Задача 9

Какую поверхность определяет уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$?

Решение.

Перепишем данное уравнение в виде $\left(\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c}\right)\left(\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c}\right) = 0$, следовательно,

$\dfrac{x}{a} - \dfrac{z}{c} = 0$ или $\dfrac{x}{a} + \dfrac{z}{c} = 0$.

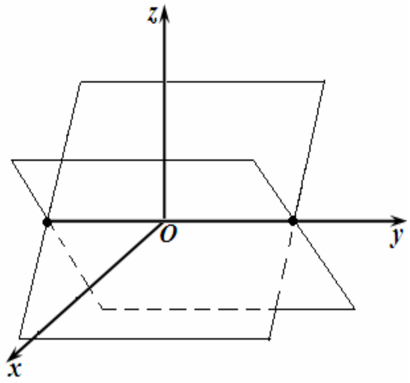


Рисунок 112

Каждое из этих уравнений определяет плоскость, проходящую через ось Oy, причем ось Oy является прямой пересечения этих плоскостей. Данное уравнение $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ является пересечением двух плоскостей.

Задача 10 Какие поверхности определяются уравнениями:

1) $x^2 - y^2 + z^2 = 0$;

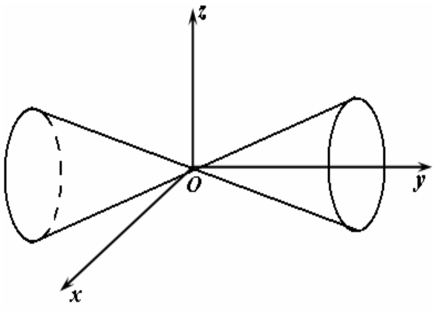


Рисунок 113

2) $x = z^2 + y^2$;

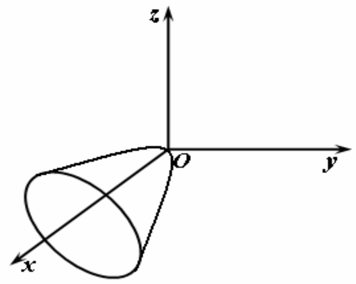


Рисунок 114

3) $y^2 + z^2 - \frac{x^2}{4} = 0$;

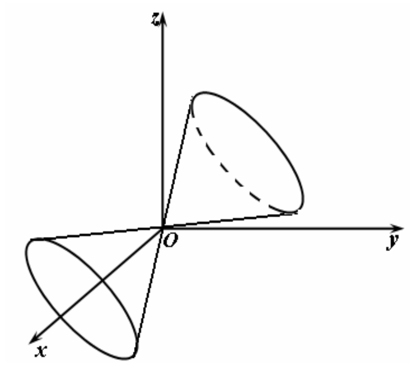


Рисунок 115

4) $\frac{x^2 + z^2}{6} - \frac{y^2}{4} = -1$;

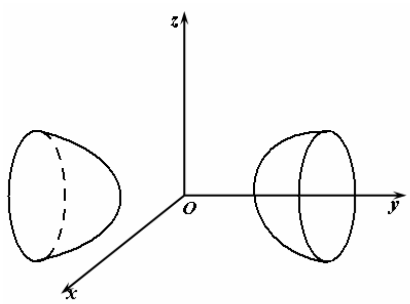


Рисунок 116

5) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{1} - 1 = 0$;

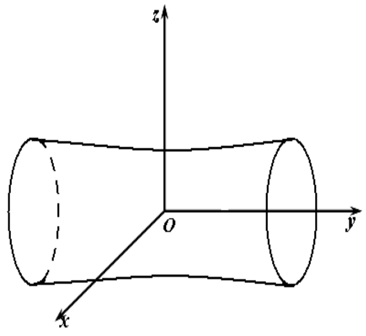


Рисунок 117

6) $-x^2 + \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{7} = 1$;

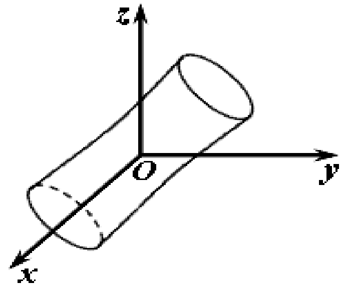


Рисунок 118

7) $z = -\left(\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{1}\right)$;   8) $z = x^2 - y^2$.

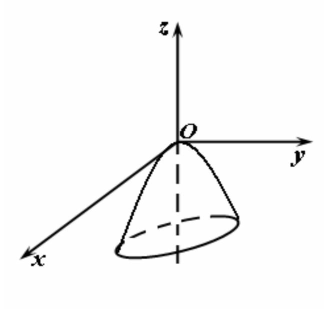


Рисунок 119

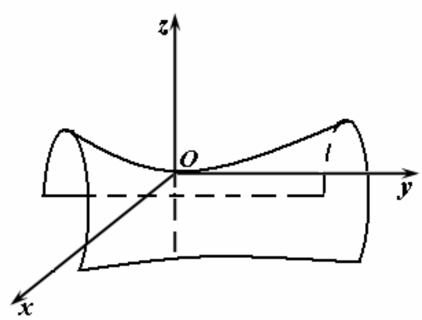


Рисунок 120

Ответ.

1 Круговой конус, осью которого является ось Oy.
2 Круговой параболоид, осью которого является ось Ox.
3 Круговой конус, осью вращения которого совпадает с осью Ox.
4 Двуполостный гиперболоид вращения, ось вращения совпадает с осью Oy.
5 Однополостной гиперболоид, ось которого совпадает с осью Oy.
6 Однополостный гиперболоид, ось которого совпадает с осью Ox.
7 Эллиптический параболоид.
8 Гиперболоид вращения.

Задача 11

Какие поверхности определяют уравнения

1) $x^2 + z^2 = 16$; 2) $\frac{x^2}{6} + \frac{z^2}{4} = 1$;   3) $x = 2z^2$; 4) $\frac{z^2}{5} - \frac{x^2}{7} = 1$?

Решение.

Каждое из этих уравнений содержит только две переменные x и z, определяет на плоскости xOz кривые: 1) окружность; 2) эллипс; 3) параболу;4) гиперболу.

В пространстве же каждое из них определяет цилиндрическую поверхность с образующими, параллельными оси Oy, так как эти уравнения не содержат переменной y. Направляющими этих цилиндрических поверхностей служат указанные кривые:

1) $x^2 + z^2 = 16$ - уравнение прямого кругового цилиндра;

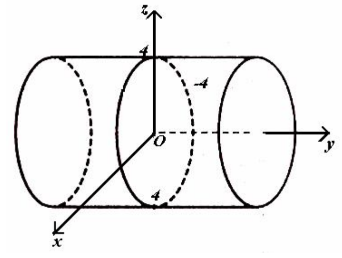


Рисунок 121

2) $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{z^2}{4}=1$ - уравнение эллиптического цилиндра;

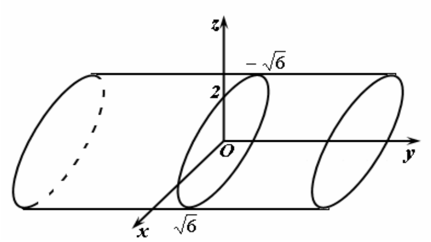


Рисунок 122

3) $x=2z^2$ - уравнение параболического цилиндра;

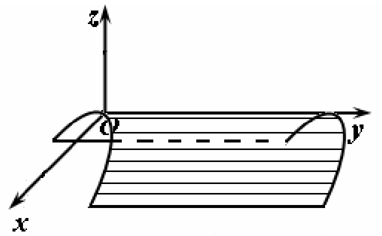


Рисунок 123

4) $\dfrac{z^2}{5}-\dfrac{x^2}{7}=1$ - уравнение гиперболического цилиндра.

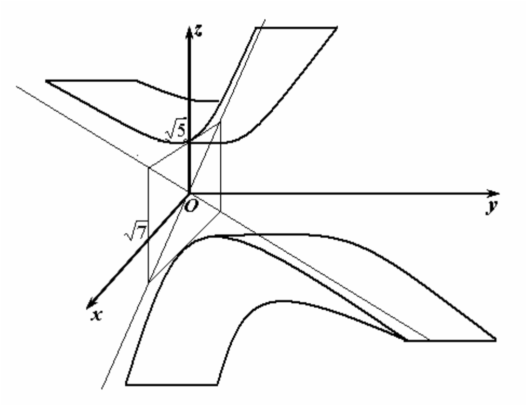


Рисунок 124

Задача 12

Установите, какие линии определяются следующими уравнениями:

1) $\begin{cases} x=0, \\ y=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x-2=0, \\ y=0; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y+2=0, \\ z-5=0; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=20, \\ z-2=0. \end{cases}$

Решение.

1) Уравнение $x=0$ определяет плоскость zOy, а уравнение $y=0$ определяет плоскость xOz. Пересечением данных двух плоскостей zOy и xOz является ось аппликат;

2) Уравнение $x-2=0$ определяет плоскость параллельную плоскости zOy и отстоящую от нее на расстояние равное 2, а уравнение $y=0$ определяет плоскость xOz. Пересечением данных двух плоскостей прямая, проходящая через точку $(2;\ 0;0)$ и параллельная оси Oy;

3)Уравнение $y+2=0$ определяет плоскость параллельную плоскости zOx и отстоящую от нее на расстояние равное 2, а уравнение $z-5=0$ определяет плоскость параллельную плоскости xOy и отстоящую от нее на расстояние равное 5. Пересечением данных двух плоскостей является прямая, проходящая через точку $(0;\ -2;\ 5)$ и параллельная оси Ox;

4) Уравнение $x^2+y^2+z^2=20$ определяет сферу с центром в точке с координатами $O(0;0;0)$ и радиусом $R=2\sqrt{5}$, а уравнение $z-2=0$ определяет плоскость параллельную плоскости xOy и отстоящую от нее на расстояние
равное 2. Пересечением данной поверхности с плоскостью является окружность, которая задается уравнением $x^2+y^2=16$.

Задача 13

Установить, при каких значениях m плоскость $my+z=2$ пересекает эллиптический параболоид $y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}$:

а) по эллипсу; б) по гиперболе; в) по параболе.

Решение. Запишем систему двух линейных уравнений и решим ее.
$\begin{cases} my+z=2 \\ y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=\dfrac{2-z}{m} \\ y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \quad \dfrac{2-z}{m}=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{2} \quad |\cdot 6m$. Приведем данное уравнение к каноническому виду. $6(2-z)=2mx^2+3mz^2 \Rightarrow 12-6z=2mx^2+3mz^2$,

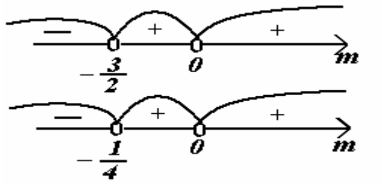
$$2mx^2+3mz^2+6z=12 \Rightarrow 2mx^2+3m\left(z^2+\frac{2z}{m}\right)=12$$

$$2mx^2+3m\left(\left(z+\frac{1}{m}\right)^2-\frac{1}{m^2}\right)=12 \Rightarrow 2mx^2+3m\left(z+\frac{1}{m}\right)^2-\frac{3}{m}=12,$$

$$2mx^2+3m\left(z+\frac{1}{m}\right)^2=12+\frac{3}{m} \Rightarrow 2mx^2+3m\left(z+\frac{1}{m}\right)^2=\frac{12m+3}{m},$$

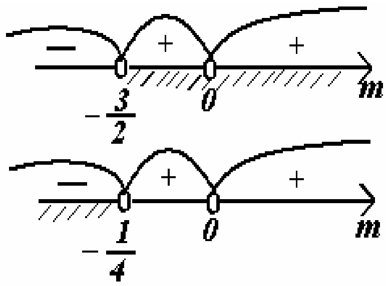
$$\frac{2mx^2}{\frac{12m+3}{m}}+\frac{3m\left(z+\frac{1}{m}\right)^2}{\frac{12m+3}{m}}=1 \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{12m+3}{2m^2}}+\frac{\left(z+\frac{1}{m}\right)^2}{\frac{12m+3}{3m^2}}=1.$$

а) по эллипсу $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ т.е $\begin{cases}\dfrac{2m+3}{2m^2}>0,\\ \dfrac{12m+3}{3m^3}>0\end{cases}$



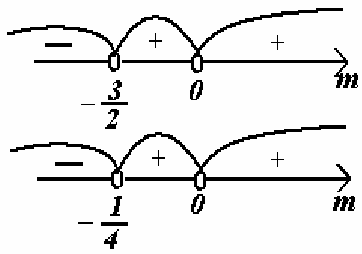
$$\Rightarrow\begin{cases}m\in\left(-\dfrac{3}{2};\,0\right)\cup(0;\,+\infty),\\ m\in\left(-\dfrac{1}{4};\,0\right)\cup(0;\,+\infty)\end{cases}\Rightarrow m\in\left(-\dfrac{1}{4};\;0\right)\cup(0;\,+\infty).$$

б) по гиперболе $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$, т.е $\begin{cases}\dfrac{2m+3}{2m^2}>0,\\ \dfrac{12m+3}{3m^3}<0\end{cases}$



$$\Rightarrow\begin{cases}m\in\left(-\dfrac{3}{2};\,0\right)\cup(0;\,+\infty),\\ m\in\left(-\infty;-\dfrac{1}{4}\right)\end{cases}\Rightarrow m\in\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right).$$

или $\begin{cases}\dfrac{2m+3}{2m^2}<0,\\ \dfrac{12m+3}{3m^3}>0\end{cases}$



$$\Rightarrow\begin{cases}m\in\left(-\infty;-\dfrac{3}{2}\right),\\ m\in\left(-\dfrac{1}{4};\,0\right)\cup(0;\,+\infty)\end{cases}\Rightarrow\varnothing$$

в) по параболе $x^2=2py$ $\begin{cases}my+z=2,\\ y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{2},\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}my-2=z,\\ y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{z^2}{2}.\end{cases}$

$y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1}{2}(my-2)^2$, $y=\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{1}{2}\left(m^2y^2-4my+4\right)\quad|\cdot 2$, $2y=\dfrac{2}{3}x^2+m^2y^2-4my+4$,

$\dfrac{2}{3}x^2+m^2y^2-4my-2y+4=0$, при $m=0$: $\dfrac{2}{3}x^2-2y+4=0$,

$\dfrac{2}{3}x^2=2y-4\Rightarrow\dfrac{2}{3}x^2=2(y-2)\quad|:2$,

$\dfrac{1}{3}x^2=y-2\quad|\cdot 3\ \Rightarrow x^2=3(y-2)$ -уравнение параболы.

Ответ. а) $m\in\left(-\dfrac{1}{4};\;0\right)\cup(0;\,+\infty)$, б) $m\in\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{1}{4}\right)$, в) $m=0$

Домашнее задание № 6

1 Привести поверхности к каноническому виду и изобразить.

1) $2x^2-5y^2-8=0$; 2) $4x^2-8y^2+16z^2=0$;

3) $8x^2-4y^2+24z^2-48=0$; 4) $y^2=6x-4$;

5) $2x^2-y^2-z^2=0$; 6) $3x^2+5y^2=12z$;

7) $x^2+4y^2-8=0$; 8) $z^2-4x=0$;

9) $2x^2-3z^2=-12y$; 10) $4x^2-12y^2-6z^2=12$.

Ответ.

1 Гиперболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

2 Конус.

3 Однополостной гиперболоид.

4 Параболический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

5 Конус, у которого ось совпадает с осью Ox: $\dfrac{y^2+z^2}{2}-x^2=0$.

6 Эллиптический параболоид: $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{\frac{12}{5}}$.

7 Эллиптический цилиндр с образующими, параллельными оси Oz.

8 Параболический цилиндр $z^2=4x$, с образующими, параллельными оси Oy.

9 Гиперболический параболоид: $y=\dfrac{z^2}{4}-\dfrac{x^2}{6}$.

10 Двуполостной гиперболоид: $\dfrac{y^2}{1}+\dfrac{z^2}{2}-\dfrac{x^2}{3}=-1$

2 Какую поверхность определяет уравнение $x^2+y^2-4y=0$?

Ответ. В пространстве уравнение определяет прямой круговой цилиндр, для которого данная окружность служит направляющей. Образующие цилиндра параллельны оси Oz, причем сама ось является одной из образующих, так как данная окружность проходит через начало координат

3 Какую поверхность определяет уравнение $y^2+z^2-2az=0$?

Ответ. Прямой круговой цилиндр, образующие которого параллельны оси Ox

4 Какая линия задана системой уравнений:

а) $\begin{cases} x^2+y^2+(z-7)^2=16 \\ z=6 \end{cases}$, б) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1, \\ z=5 \end{cases}$ в) $\begin{cases} z=x^2+y^2 \\ z=9 \end{cases}$, г) $\begin{cases} y^2=z \\ x=5 \end{cases}$?

(поверхности изобразить)

Ответ. а) Окружность: $x^2 + y^2 = 15$,

б) Эллипс: $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$,

в) Окружность: $x^2 + y^2 = 9$,

г) Парабола: $y^2 = z$

5 Какие поверхности определяют уравнения

1) $yz = 5$; 2) $y = 6z^2$; 3) $y^2 + z^2 = 9$; 4) $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$?

(поверхности изобразить).

Ответ.

1 $yz = 5$ - уравнение гиперболического цилиндра;

2 $y = 6z^2$ - уравнение параболического цилиндра;

3 $y^2 + z^2 = 9$ - уравнение прямого кругового цилиндра;

4 $\dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ - уравнение эллиптического цилиндра,

Образующие всех этих цилиндрических поверхностей параллельны оси Ox

Тест 5

1 Уравнение эллиптического цилиндра имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

б) $y^2 = 2px;$

в) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1;$

г) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0.$

2 Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ задает поверхность:

а) конус;

б) эллипсоид;

в) параболический цилиндр;

г) сфера.

3 Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ задает поверхность:

а) сфера;

б) эллипсоид;

в) конус;

г) параболический цилиндр.

4 Уравнение гиперболического цилиндра имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$

б) $y^2=2px;$ г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$

5 Уравнение $x^2=2py$ задает поверхность:

а) параболический цилиндр; в) конус;

б) гиперболический цилиндр; г) эллиптический цилиндр.

6 Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ задает поверхность:

а) конус; в) двуполостный гиперболоид;

б) эллипсоид; г) однополостный гиперболоид.

7 Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ задает поверхность:

а) конус; в) двуполостный гиперболоид;

б) эллипсоид; г) однополостный гиперболоид.

8 Уравнение параболического цилиндра имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;$ в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1;$

б) $y^2=2px;$ г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$

9 Уравнение $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ задает поверхность:

а) конус; в) двуполостный гиперболоид;

б) эллипсоид; г) однополостный гиперболоид.

10 Уравнение кругового цилиндра имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1;$ в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1;$

б) $y^2=2px;$ г) $x^2+y^2=R^2.$

11 Уравнение кругового параболоида имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz;$ в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2pz;$

б) $x^2+y^2=2pz;$ г) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0.$

12 Уравнение сферы имеет вид:

а) $(x-3)^2-(y+4)^2+(z+5)^2=25;$ в) $(x-3)^2-(y+4)^2-(z+5)^2=25;$

б) $(x-3)^3+(y+4)^2+(z+5)^2=25;$ г) $(x-3)^2+(y+4)^2-(z+5)^2=25.$

13 Уравнение эллипсоида имеет вид:

а) $4x^2-y^2+16z^2=16;$ в) $4x^2-y^2-16z^2=16;$

б) $4x^2+8y^2+16z^2=0;$ г) $4x^2+y^2+16z^2=16.$

14 Уравнение эллиптического параболоида имеет вид:

а) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=2pz;$ в) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2pz;$

б) $x^2+y^2=2pz;$ г) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0.$

15 Точки пересечения двуполостного гиперболоида $16x^2+4y^2-z^2+64=0$ с осью Oz имеет координаты:

а) $(0;\,4;0),\ (0;-4;0);$ в) $(2;\,0;0),\ (-2;\,0;0);$

б) $(0;\,0;8),\ (0;\,0;-8);$ г) $(2;\,4;8),\ (-2;\,-4;-8).$

16 Центр и радиус сферы $(x+4)^2+(y-5)^2+(z-2)^2=9$ равны:

а) $(-4\ 5,\ 2),\ R=9;$ в) $(-4\ 5,\ 2),\ R=3;$

б) $(4-5,-2),\ R=9;$ г) $(4-5,\ -2),\ R=3.$

17 Полуоси однополостного гиперболоида $x^2+25y^2-4z^2-100=0$ равны:

а) 10, 2, 5;
б) 100, 4, 25;
в) 1, 5, 2;
г) 5, 2, 10.

18 Уравнение гиперболического параболоида имеет вид:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$;
б) $x^2+y^2=2pz$;
в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$;
г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

19 Координаты вершины эллиптического параболоида $4(x-1)^2+9(y+5)^2-36(z-7)=0$ равны:

а) $(1;-5;7)$;
б) $(-1;5;-7)$;
в) $(4;9;-36)$;
г) $(2;3;-6)$.

20 Поверхность, заданная пересечением двух плоскостей задается уравнением:

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2pz$;
б) $x^2+y^2=2pz$;
в) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2pz$;
г) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$.

Глава 7 Линейные операторы

§1 Линейные операторы, действующие в произвольном линейном пространстве

Линейным оператором A, действующим в линейном пространстве R^n над числовым полем K (или линейным преобразованием линейного пространства R^n над числовым полем K), называется правило, по которому каждому элементу x из R^n ставится в соответствие определенный элемент y из R^n:

$$y = Ax \quad (71)$$

причем для любых элементов x_1, x_2 из R^n и любого числа c из поля K выполняются равенства: 1° $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$;

2° $A(cx_1) = cAx_1$.

Разложим элементы Ae_p, $p = \overline{1, n}$, линейного пространства R^n по базису $(e_k)_n$: $Ae_p = a_{kp}e_k$, $p, k = \overline{1, n}$ (72)

Матрица $A_e = \left\| a_{pk} \right\|_{nn}$ называется матрицей оператора A в базисе $(e_k)_n$. Равенство (72) можно записать в матричной форме: $Ae = eA_e$, где $e = \left\| e_p \right\|_n$ - матрица-строка, составленная из базисных элементов $e_1, e_2, ..., e_n$ и, следовательно, запись Ae означает матрицу-строку $\left\| Ae_p \right\|_n$. Соотношение (71) в координатах имеет вид $Y_e = A_e X_e$, (73)

где $Y_e = \left\| y^k \right\|^n$, $X_e = \left\| x^k \right\|^n$ - матрицы-столбцы, составленные соответственно из координат элементов y и x в базисе $(e_p)_n$, т.е. $y = eY_e$, $x = eX_e$.

При переходе от базиса $(e_p)_n$ к базису $(f_p)_n$, осуществляемом по формуле $f = eP$, (74)

где P - матрица перехода, столбцами которой являются F_{ke}, т.е. координаты элемента f_k в базисе $(e_p)_n$, матрица A_e линейного оператора A преобразуется в матрицу $A_f = P^{-1}A_e P$, (75)

причем $\det A_f = \det A_e$. (76)

Операторы A и B называются *равными*, если $\forall x \in R^n$ $Ax = Bx$.

Теорема 1 *Если операторы равны, то в любом базисе равны и матрицы этих операторов.*

Суммой $A + B$ линейных операторов A и B называется оператор C такой, что $\forall x \in R^n$ $Cx = Ax + Bx$.

Теорема 2 *Если A и B - линейные операторы, то $A+B$ - линейный оператор.*

Теорема 3 *Матрица суммы операторов A и B в любом базисе $(e_p)_n$ равна сумме матриц операторов A и B в том же базисе, т.е.* $(A+B)_e = A_e + B_e$.

Произведением bA линейного оператора A на число b из K, называется оператор C такой, что $\forall x \in R^n \;\; Cx = b(Ax)$.

Теорема 4 *Если A - линейный оператор, действующий в линейном пространстве R^n над числовым полем K, и число $b \in K$, то bA - линейный оператор.*

Теорема 5 *Матрица оператора bA в любом базисе $(e_p)_n$ равна матрице оператора A в этом же базисе, умноженной на число b, т.е.* $(bA)_e = bA_e$.

Теорема 6 *Множество U всех линейных операторов, действующих в линейном пространстве размерности n над полем K, с указанными операциями сложения и умножения на число из того же поля K образует линейное пространство, причем* $\dim U = n^2$.

Произведением AB линейных операторов A и B, действующих в линейном пространстве R, называется оператор C такой, что $\forall x \in R^n \;\; Cx = A(Bx)$.

Теорема 7 *Если A и B - линейные операторы, то AB - линейный оператор.*

Теорема 8 *Матрица оператора AB в любом базисе $(e_p)_n$ равна произведению матрицы оператора A на матрицу оператора B в том же базисе, т.е.* $(AB)_e = A_e B_e$.

Подпространство M линейного пространства R^n называется *инвариантным* относительно линейного оператора A, если для любого x из M элемент $Ax \in M$.

Пространства R^n и θ всегда являются инвариантными подпространствами для любого линейного оператора, действующего в R^n.

Если линейное пространство R^n определено над числовым полем K, то число λ из поля K называется собственным значением линейного оператора A, если существует ненулевой элемент x из R^n такой, что

$$(A - \lambda E)x = \theta \tag{77}$$

Элемент x называют собственным вектором линейного оператора A.

Уравнение $\det(A_e - \lambda E) = 0$ (78)

называется *характеристическим уравнением* линейного оператора A, действующего в линейном пространстве R^n над числовым полем K и имеющего в базисе $(e_p)_n$ матрицу A_e. При этом многочлен от λ $\det(A_e - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* оператора A в базисе $(e_p)_n$.

Теорема 9 *Характеристический многочлен оператора не зависит от выбора базиса в линейном пространстве.*

Если λ_0 - решение уравнения (78), принадлежащее полю K, то λ_0 - собственное значение линейного оператора A, а все множество решений системы линейных уравнений $(A_e - \lambda_0 E)X_e = \theta$ (79)
является множеством столбцов из координат тех элементов x из R^n, которые образуют инвариантное относительно линейного оператора A подпространство M, соответствующее данному собственному значению λ_0. Если из последнего подпространства M удалить нулевой элемент, то оставшееся множество элементов есть множество всех собственных векторов линейного оператора A, соответствующих собственному значению λ_0.

Базис в линейном пространстве R^n, в котором действует линейный оператор A, составленный из собственных векторов оператора A (если такой базис существует), называется *собственным базисом* оператора A.

Линейный оператор B называется *обратным* к оператору A, если $BA = AB = E$.

Оператор, обратный к A, обозначается символом A^{-1}.

§ 2 Линейные операторы, действующие в евклидовом пространстве

Среди линейных операторов, действующих в евклидовом пространстве, наибольший интерес представляют ортогональные и симметричные операторы.

Линейный оператор Q, действующий в евклидовом пространстве, называется *ортогональным*, если для любых x, y из этого пространства выполняется равенство $(Qx, Qy) = (x, y)$. (80)

Теорема 10 *В любом ортонормированном базисе $(e_p)_n$ матрица Q_e ортогонального оператора Q является ортогональной.*

Линейный оператор A, действующий в евклидовом пространстве, называют *симметричным* (*самосопряженным*), если для всех x, y из этого пространства выполняется равенство $(Ax, y) = (x, Ay)$. (81)

Теорема 11 *В любом ортонормированном базисе* $(e_p)_n$ *матрица* A_e *симметричного оператора является симметричной, т.е.* $A_e = A_y^T$.

Сформулируем свойства симметричного оператора.

1° Симметричный оператор, действующий в евклидовом пространстве ξ_n, остается симметричным в любом инвариантном относительно линейного оператора A подпространстве M_k $(k \le n)$ евклидова пространства ξ_n.

2° Все n корней характеристического уравнения симметричного оператора – действительные числа и, следовательно, являются его собственными значениями.

3° Симметричный оператор всегда имеет собственные векторы.

4° Для симметричного оператора, действующего в евклидовом пространстве, существует ортонормированный собственный базис этого оператора.

5° Собственные векторы симметричного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны между собой.

Практическое занятие № 7

Задача 1

Является ли линейным оператор f, переводящий вектор $x(x_1;\, x_2;\, x_3)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе что и x? В случае линейности преобразования найти матрицу преобразования в том же базисе что и x.

а) $y(2x_1 - x_2;\, x_3 - x_2;\, x_1)$; б) $y(x_1;\, x_2 + 2;\, x_3)$; в) $y\left(x_1^2;\, x_2^2;\, x_3^2\right)$.

Решение.

Оператор f называется линейным оператором, если выполняются два условия: 1) $A(\lambda x) = \lambda Ax$, если x - любой вектор пространства, λ - любое число;

2) $A(x+z) = Ax + Az$, где x и z - любые два вектора пространства $Ax = y$.

а) $y(2x_1 - x_2;\, x_3 - x_2;\, x_1)$. Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2;\, \lambda x_3 - \lambda x_2;\, \lambda x_1)$,

$\lambda Ax = (\lambda(2x_1 - x_2);\, \lambda(x_3 - x_2);\, \lambda x_1) = (2\lambda x_1 - \lambda x_2;\, \lambda x_3 - \lambda x_2;\, \lambda x_1) \Rightarrow A(\lambda x) = \lambda Ax$,

следовательно, первое условие выполнено.

2) $A(x+z) = (2(x_1 + z_1) - (x_2 + z_2);\, (x_3 + z_3) - (x_2 + z_2);\, x_1 + z_1)$.

$Ax + Az = (2x_1 - x_2;\, x_3 - x_2;\, x_1) + (2z_1 - z_2;\, z_3 - z_2;\, z_1) =$

$= (2(x_1 + z_1) - (x_2 + z_2);\, (x_3 + z_3) - (x_2 + z_2);\, x_1 + z_1) \Rightarrow A(x+z) = Ax + Az$.

Второе условие также выполняется. Таким образом, линейный оператор f, переводящий вектор x в вектор y с координатами $y(2x_1 - x_2;\, x_3 - x_2;\, x_1)$ является линейным. Следовательно, матрица данного линейного оператора имеет вид:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

б) $y(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=(\lambda x_1;\ \lambda x_2+2\lambda;\ \lambda x_3)$, $\lambda Ax=(\lambda x_1;\ \lambda(x_2+2);\ \lambda x_3)\Rightarrow A(\lambda x)=\lambda A(x)$, следовательно, первое условие выполняется.

2) $A(x+z)=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+2;\ x_3+z_3)$,

$Ax(x_1;\ x_2+2;\ x_3)$, $Az(z_1;\ z_2+2;\ z_3)$

$Ax+Az=(x_1+z_1;\ (x_2+z_2)+4;\ x_3+z_3)\Rightarrow A(x+z)\neq Ax+Az$.

Второе условие не выполняется и данный оператор f не является линейным.

в) $y(x_1^2;\ x_2^2;\ x_3^2)$

Проверим выполнимость двух условий:

1) $A(\lambda x)=((\lambda x_1)^2;\ (\lambda x_2)^2;\ (\lambda x_3)^2)$,

$\lambda(Ax)=(\lambda x_1^2;\ \lambda x_2^2;\ \lambda x_3^2)\Rightarrow A(\lambda x)\neq\lambda(Ax)$.

Первое условие не выполняется и оператор f не является линейным.

Задача 2

Рассмотрим отображение $A=V^3\to V^3$, которое каждый вектор x преобразует в его векторное произведение $Ax=x\times i$ на орт i оси Ox. В силу свойств векторного произведения это отображение – линейный оператор. Найдем матрицу A этого линейного оператора в (правом) ортонормированном базисе i, j, k.

Решение.

Найдем образы базисных векторов и разложим их по тому же базису. Так как $Ai=i\times i=0$, то первый столбец в матрице A нулевой.

Второй столбец в матрице A: $Aj=j\times i=-k=0i+0j-1\cdot k=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Третий столбец в матрице A: $Ak=k\times i=j=0i+1\cdot j+0k=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$.

Итак, матрица A имеет вид: $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}$.

$$Ax=(i\quad j\quad k)A\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=(i\quad j\quad k)\begin{pmatrix}0\\z\\-y\end{pmatrix}=zj-yk.$$

Задача 3

Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ найдите координаты образа y линейное преобразование.

Решение.

Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ определяет линейное преобразование $Ax=y$

в координатной форме следующей системой: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 0x_2 + 0x_3 = x_1, \\ y_2 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0, \\ y_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$

В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ оно соответствует нахождению для произвольного вектора $x=(x_1,x_2,x_3)$ его составляющей (т.е. ортогональной проекции) по оси Ox_1 : $y=(x_1, \quad 0, \quad 0)$

Задача 4

Для матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ найдите координаты образа y линейное преобразование.

Решение.

Матрица $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ определяет линейное преобразование $Ax=y$

в координатной форме следующей системой: $\begin{cases} y_1 = x_1 + 0x_2 + 0x_3 = x_1, \\ y_2 = 0x_1 + x_2 + 0x_3 = x_2, \\ y_3 = 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0. \end{cases}$

В прямоугольной системе координат $Ox_1x_2x_3$ оно соответствует нахождению для произвольного вектора $x=(x_1;x_2;x_3)$ его составляющей (т.е. ортогональной проекции) на плоскость Ox_1x_2 : $y=(x_1; \quad x_2; \quad 0)$.

Задача 5

Пусть $x' = Ax$ есть вращение на угол α. Найдите матрицу вращения на угол α?

Решение.

Возьмем специальный базис i, j (состоящий из единичных и взаимно перпендикулярных векторов). Тогда, если $x = (x_1; x_2)$, то $x_1 = \rho\cos\theta$, $x_2 = \rho\sin\theta$, где ρ, θ - полярные координаты конца вектора x. Так как вектор $x' = Ax = (x_1'; x_2')$ получается поворотом x вокруг точки O на угол α, то $x_1' = \rho\cos(\theta+\alpha)$, $x_2' = \rho\sin(\theta+\alpha)$. Отсюда

$$x_1' = \rho\cos(\theta+\alpha) = \rho(\cos\alpha\cos\theta - \sin\alpha\sin\theta),$$

$$x_2' = \rho\sin(\theta+\alpha) = \rho(\sin\alpha\cos\theta + \cos\alpha\sin\theta);$$

раскрывая скобки в правых частях этих равенств и полагая $\rho\cos\theta = x_1$, $\rho\sin\theta = x_2$, найдем

$$x_1' = x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha,$$

$$x_2' = x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha.$$

Это и есть координатное представление вращения в базисе i, j.

Матрица вращения имеет вид $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

Задача 6

Пусть Ax - вращение на угол α, Bx - вращение на угол β. Очевидно, ABx есть вращение на угол $\alpha+\beta$; в данном случае $ABx = BAx$. Найдите матрицу вращения на угол $\alpha+\beta$?

Решение.

Возьмем специальный базис i, j; тогда данные преобразования будут иметь соответственно матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} \cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta \end{pmatrix}.$$

Применяя правило умножения матриц, получим

$$AB = \begin{pmatrix} \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta - \sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta + \cos\alpha\cos\beta \end{pmatrix}.$$

Отсюда

$$AB = \begin{pmatrix} \cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta) \end{pmatrix}.$$

Этот результат можно было заранее предвидеть, так как AB есть матрица вращения на угол $\alpha+\beta$. В данном случае матрицы AB и BA совпадают.

Задача 7

Пусть Ax есть сжатие к оси Ox_2 (т.е. в направлении оси Ox_1) с коэффициентом k_1, Bx - сжатие к оси Ox_1 (т.е. в направлении оси Ox_2) с коэффициентом k_2. Найдите матрицу этих преобразований?

Решение.

Матрицы этих преобразований соответственно будут $A=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$; умножая A и B, получим $AB=\begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$. Матрица такого вида называется *диагональной.* Таким образом, диагональная матрица отвечает произведению двух сжатий к координатным осям.

Задача 8

Построить ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе $q_1=(1;\,1;\,0)$, $q_2=(1;1;1)$, $q_3=(1;\,3;\,-3)$. Координаты векторов заданы в естественном базисе.

Решение.

Проверим систему векторов q_1, q_2, q_3 на линейную независимость. Вектора q_1, q_2, q_3 линейно независимые, если их линейная комбинация $c_1q_1+c_2q_2+c_3q_3=0$ при коэффициентах $c_1=c_2=c_3=0$. Подставим значения q_1, q_2, q_3 в данное равенство, получим:

$$c_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}+c_3\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} c_1+c_2+\quad c_3=0, \\ c_1+c_2+3c_3=0, \\ \qquad c_2-3c_3=0, \end{cases}\begin{cases} c_2=3c_3, \\ c_1+4c_3=0, \\ c_1+6c_3=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_2=3c_3, \\ c_1=-4c_3, \\ 2c_3=0, \end{cases}\begin{cases} c_2=0, \\ c_1=0, \\ c_3=0, \end{cases}\Rightarrow q_1,\ q_2,\ q_3 - \text{линейно независимы.}$$

1) Построим вспомогательную систему p_1, p_2, p_3 - попарно ортогональные векторы:

а) $p_1=q_1=(1;\,1;\,0)$;

б) $p_2=q_2-\alpha p_1$, где $\alpha=\dfrac{(q_2p_1)}{(p_1p_1)}=\dfrac{2}{2}=1$.

$p_2=(1;\,1;\,1)-(1;\,1;\,0)=(0;\,0;\,1)$;

в) $p_3=q_3-\beta_1p_1-\beta_2p_2$, где $\beta_1=\dfrac{(q_3p_1)}{(p_1p_1)}=\dfrac{4}{2}=2$ и $\beta_2=\dfrac{(q_3p_2)}{(p_2p_2)}=\dfrac{-3}{1}=-3$.

$p_3=(1;\,3;\,-3)-2(1;\,1;\,0)+3(0;\,0;\,1)=(-1;\,1;\,0)$.

2) Построим ортонормированную систему:

$$e_1 = \frac{p_1}{|p_1|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right);\quad e_2 = \frac{p_2}{|p_2|} = (0;\ 0;\ 1);\quad e_3 = \frac{p_3}{|p_3|} = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right).$$

Ответ. $e_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$, $e_2 = (0;\ 0;\ 1)$, $e_3 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}};\ \frac{1}{\sqrt{2}};\ 0\right)$.

Домашнее задание № 7

1 Является ли линейным оператор f, переводящий вектор $x(x_1;\ x_2;\ x_3)$ в вектор y, заданный координатами в том же базисе что и x? В случае линейности преобразования, найти матрицу преобразования в том же базисе что и x.

а) $y(x_1 + 3x_2 - x_3;\ x_3 - x_2 + 2x_1;\ x_1 - x_3)$; б) $y(x_1 - 1;\ x_2;\ x_3 + 4)$; в) $y(x_3;\ x_2^2;\ x_1)$.

Ответ. Оператор f, заданный координатами:

а) $y(x_1 + 3x_2 - x_3;\ x_3 - x_2 + 2x_1;\ x_1 - x_3)$ является линейным и задается матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$;

б) $y(x_1 - 1;\ x_2;\ x_3 + 4)$ не является линейным;

в) $y(x_3;\ x_2^2;\ x_1)$ не является линейным.

2 Запишите в заданном базисе матрицу линейных операторов, действующих в линейном пространстве V^3:

а) оператор проектирования на ось Oy, базис i, j, k;

б) оператор проектирования на плоскость xOy, базис i, j, k.

3 Построить ортонормированную систему векторов по линейно независимой системе $q_1 = (1;\ -2;\ 2)$, $q_2 = (-1;\ 0;\ 1)$, $q_3 = (5; -3;\ -7)$. Координаты векторов заданы в естественном базисе.

Ответ: $p_1 = (\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{2}{3})$, $p_2 = (-\frac{10}{\sqrt{153}}; \frac{2}{\sqrt{153}}; \frac{7}{\sqrt{153}})$, $p_3 = (-\frac{26}{\sqrt{2873}}; -\frac{39}{\sqrt{2873}}; -\frac{26}{\sqrt{2873}})$

Глава 8 Квадратичные и билинейные формы

§ 1 Определение квадратичной формы. Закон инерции. Приведение квадратичной формы к каноническому виду методами Лагранжа и ортогонального преобразования

Квадратичной формой называется функция переменных $x_1, x_2, ..., x_n$ из числового поля (поля действительных чисел) K_0, имеющая вид

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{mk} x^m x^k, \qquad (82)$$

где $a_{mk} = a_{km}$, $a_{mk} \in K_0$, $m, k = \overline{1, n}$.

Матрица $A = \|a_{mk}\|_{n,\, n}$ называется *матрицей квадратичной формы* $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Как следует из определения квадратичной формы, A - симметричная матрица, т.е. $A = A^T$.

Квадратичную форму можно записать в матричном виде:

$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = X^T AX$, где $X = \left\|x^k\right\|^n$.

Линейным преобразованием переменных называется преобразование

$$x_k = p_{km} y_m,\ m, k = \overline{1, n}, \qquad (83)$$

или в матричной записи $X = PY$, где $P = \|p_{km}\|_{n,\, n}$, $Y = \left\|y^m\right\|^n$.

Матрица P называется *матрицей линейного преобразования*. Справедлив *закон преобразования матрицы* квадратичной формы: квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ с матрицей A при линейном преобразовании переменных $X = PY$ переходит в квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ с матрицей $B = P^T AP$, т.е. $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = a_{mk} x^m x^k = (y_1, y_2, ..., y_n) = b_{mk} y^m y^k$.

Линейное преобразование (83) называется *невырожденным*, если его матрица P - невырожденная.

В этой главе все результаты относительно квадратичной формы формулируются в классе линейных невырожденных преобразований.

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы.

Теорема 1 *Ранг квадратичной формы не изменяется при линейном невырожденном преобразовании.*

Теорема 2 *Для любой квадратичной формы существует линейное невырожденное преобразование переменных, приводящее ее к каноническому виду, т.е. к виду* $b_{kk}\left(y^k\right)^2$, $k = \overline{1, n}$.

Отметим, что матрица квадратичной формы канонического вида является диагональной.

Эта теорема доказывается с помощью метода выделения полного квадрата, который называется *методом Лагранжа*. Следует иметь в виду, что канонический вид квадратичной формы, так же как и линейное невырожденное преобразование, которое приводит квадратичную форму к каноническому виду, определяются неоднозначно. Однако при этом справедлив закон инерции квадратичной формы: число слагаемых с положительными каноническими коэффициентами и число слагаемых с отрицательными каноническими коэффициентами постоянно и не зависит от линейного невырожденного преобразования, приводящего квадратичную форму к каноническому виду.

Линейное преобразование называется *ортогональным*, если его матрица является ортогональной.

Теорема 3 *Для любой квадратичной формы* $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ *с матрицей* A *существует ортогональное преобразование* $X = QY$, *приводящее эту форму к каноническому виду* $\lambda_k \left(y^k\right)^2$, $k = \overline{1, n}$. *Здесь* λ_k *- собственные значения симметричного оператора* A, *имеющего в некотором ортонормированном базисе* $(e_k)_n$ *евклидова пространства* ξ_n *матрицу* A_e, *равную матрице* A, *т.е. числа* λ_k $\left(k = \overline{1, n}\right)$ *являются решениями характеристического уравнения* $\det(A - \lambda E) = 0$. *При этом если* $(f_k)_n$ *- ортонормированный собственный базис оператора* A, *то* k*-й столбец матрицы* Q *состоит из координат элемента* f_k *в базисе* $(e_k)_n$.

Канонические коэффициенты λ_k не зависят от выбора ортогонального преобразования.

§ 2 Классификация квадратичных форм. Необходимое и достаточное условие положительной (отрицательной) определенности квадратичных форм

Квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *положительно* (*отрицательно*) определенной, если для всех значений $x_1, x_2, ..., x_n$ выполняется условие $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) > 0$ (< 0), причем $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ только при $x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$.

Теорема 4 *Квадратичная форма является положительно (отрицательно) определенной тогда и только тогда, когда все ее канонические коэффициенты положительны (отрицательны)*.

Угловым минором порядка k $(k = \overline{1, n})$ матрицы $A = \left\| a_{pm} \right\|_{n,\, n}$ называется минор $M_k = \det \left\| a_{pm} \right\|_{k,\, k}$.

Теорема 5 (критерий Сильвестра положительной определенности квадратичной формы) *Для того чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все угловые миноры ее матрицы были положительны.*

Матрица A называется *положительно определенной*, если она является матрицей некоторой положительно определенной квадратичной формы (обозначение: $A > 0$).

Говорят, что $A > C$, если $A - C > 0$.

Теорема 6 (метод Якоби) *Если $M_k \neq 0$ $(k = \overline{1, n-1})$, то существует единственное невырожденное линейное преобразование с треугольной матрицей, приводящее квадратичную форму к каноническому виду с каноническими коэффициентами $b_{11} = M_1$, $b_{kk} = M_k / M_{k-1}$, $k = \overline{2, n}$.*

Квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ называется *неотрицательной* (*неположительной*), если для всех значений $x_1, x_2, ..., x_n$ выполняется условие $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$ (≤ 0).

§ 3 Билинейная форма. Связь с квадратичной формой. Приведение симметричной билинейной формы к каноническому виду

Говорят, что в линейном пространстве R^n над числовым полем K_0 определена билинейная форма $B(x, y)$, если любым x, y из R^n ставится в соответствие определенное действительное число $B(x, y)$, причем функция $B(x, y)$ является линейной по каждому аргументу.

Если в линейном пространстве R_n фиксирован базис $(e_k)_n$ и $x = x^m e_m$, $y = y^k e_k$ $(k, m = \overline{1, n})$, то билинейная форма $B(x, y)$ имеет вид $B(x, y) = b_{mk} x^m y^k$, где $b_{mk} = B(e_m, e_k)$. Матрица $B_e = \|b_{mk}\|_{n,\, n}$ называется *матрицей билинейной формы* в базисе $(e_k)_n$.

Если в линейном пространстве R^n фиксированы два базиса $(e_k)_n$, $(f_k)_n$ и $f = eP$, то закон преобразования матрицы билинейной формы записывается в виде

$$B_f = P^T B_e P \tag{84}$$

Билинейная форма $B(x, y)$ называется *симметричной*, если $B(x, y) = B(y, x)$ для любых x, y из R^n.

Теорема 6 *В линейном пространстве R^n билинейная форма симметрична тогда и только тогда, когда ее матрица симметрична.*

Пусть задана билинейная форма $B(x, y)$ в линейном пространстве R^n. Рассмотрим функцию одного векторного аргумента: $\Phi(x) = B(x, x) = b_{mk} x^m x^k$, $k = \overline{1, n}$. Если положить $a_{mk} = a_{km} = 0{,}5(b_{mk} + b_{km})$, то $\Phi(x) = a_{mk} x^m x^k$, $m, k = \overline{1, n}$. Из последней записи видно, что $\Phi(x)$ является квадратичной формой от n переменных $x_1, x_2, ..., x_n$, которые интерпретируются как координаты элемента x в базисе $(e_k)_n$, т.е. $\Phi(x) = \Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$. Каждой билинейной форме соответствует одна квадратичная форма. Каждую же квадратичную форму можно получить из бесконечного числа билинейных форм, среди которых имеется единственная симметричная билинейная форма.

Теорема 7 *Для любой симметричной билинейной формы $B(x, y)$ существует канонический базис $(f_k)_n$, в котором эта форма имеет канонический вид $b_{kk}\xi^k\eta^k$, где $x = \xi^k f_k$, $y = \eta^k f_k$, $B_f = \left\| b_{kp}\delta_{kp} \right\|_{n,\ n}$.*

Пусть симметричная билинейная форма $B(x, y)$ в базисе $(e_k)_n$ имеет матрицу B_e. Тогда соответствующая ей квадратичная форма $\Phi(x)$ имеет ту же матрицу B_e. Для квадратичной формы $\Phi(x)$ существует линейное невырожденное преобразование $X = PZ$, которое приводит эту квадратичную форму к каноническому виду $b_{kk}\left(z^k\right)^2$. Канонический базис и канонический вид билинейной формы $B(x, y)$ определяются соотношениями $f = eP$ и $B_f = P^T B_e P = \left\| b_{pk}\delta_{pk} \right\|_{n,\ n}$.

§ 4 Применение теории квадратичных форм к исследованию алгебраических уравнений второй степени

Рассмотренный выше метод ортогонального преобразования, приводящий квадратичную форму к каноническому виду, эффективно применяется при исследовании алгебраических уравнений второй степени с n переменными:

$$\Phi(x_1, x_2, ..., x_n) + 2b_k x^k + c = 0, \ k = \overline{1, n}, \tag{85}$$

где $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ - квадратичная форма.

Рассмотрим некоторое евклидово пространство ξ_n с ортонормированным базисом $\left(e_p\right)_n$. Переменные $x_1, x_2, ..., x_n$ в уравнении (85) будем интерпретировать как координаты элементов x некоторого множества P из ξ_n в ортонормированном базисе $\left(e_p\right)_n$. Пусть $\overline{P}$ - множество элементов $\overline{x} \in \xi_n$, полученное из P сдвигом на вектор $-\ x_0$, т.е. $x = \overline{x} + x_0$, где $x \in P$, $\overline{x} \in \overline{P}$, x_0 - фиксированный элемент ξ_n. Поэтому координаты элементов x и $\overline{x}$ в ортонормированном базисе $\left(e_p\right)_n$ связаны соотношениями $x^k = \overline{x}^k + x_0^k$, $k = \overline{1, n}$. Тогда уравнение (85) можно рассматривать как алгебраическое уравнение второй степени относительно координат элементов $\overline{x}$

из $\overline{P}$. В ξ_n всегда можно указать новый базис $(e'_p)_n$, в котором квадратичная форма $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ принимает канонический вид, и такое множество $\overline{P}$, что уравнение (85) , рассматриваемое относительно координат элементов $\overline{x}$ в базисе $(e'_p)_n$, имеет наиболее простой вид. Чтобы сделать это, надо, во-первых, произвести ортогональное преобразование координат, приводящее квадратичную форму $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ к каноническому виду, и, во-вторых, в преобразованном уравнении освободиться от линейных членов, выделяя полные квадраты.

Вопросы для самоконтроля

1 Какое пространство называется евклидовым пространством?
2 Какой базис в линейном пространстве называется ортонормированным?
3 Сформулируйте определение линейного оператора.
4 Какой оператор называется тождественным оператором?
5 Сформулируйте определение собственного вектора линейного оператора А.
6 Сформулируйте определение характеристического многочлена и характеристического уравнения линейного оператора А.
7 Какая матрица линейного оператора задает сдвиг двумерного и трехмерного пространства?
8 Сформулируйте определение квадратичной формы поверхности или линии второго порядка.
9 Запишите матрицу квадратичной формы $4x_1^2 - 30x_1x_2 - 7x_2^2$.
10 Запишите матрицу поворота системы координат на плоскости.
11 Сформулируйте определение нормы вектора.
12 Сформулируйте определение ортогональных векторов.
13 Какая матрица линейного оператора задает растяжение (сжатие) двумерного и трехмерного пространства?
14 Какая матрица линейного оператора задает зеркальное отражение?
15 Найти собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
16 Найти норму вектора $\|\vec{a}\|$, заданного в базисе $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ $\vec{a} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k}$.
17 Сформулируйте критерий Сильвестра.
18 Методом Лагранжа приведите квадратичную форму $x_1^2 + 4x_2^2 - x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3$ к каноническому виду.
19 Сформулируйте определение положительной (отрицательной) квадратичной формы.
20 Запишите формулы перехода от старого базиса к новому базису и наоборот.

Практическое занятие № 8

Задача 1

Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

1. Составим характеристическое уравнение данного оператора

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 & 4 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

$(5-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)-16-8(1-\lambda)+8(3-\lambda)=0$,

$(1-\lambda)((5-\lambda)(3-\lambda)-8)-16+8(3-\lambda)=0$,

$(1-\lambda)(15-5\lambda-3\lambda+\lambda^2-8)-16+8(3-\lambda)=0$,

$(1-\lambda)(\lambda^2-8\lambda+7)-16+8(3-\lambda)=0$,

$\lambda^2-8\lambda+7-\lambda^3+8\lambda^2-7\lambda-16+24-8\lambda=0$,

$-\lambda^3+9\lambda^2-23\lambda+15=0\cdot\,|(-1)$

$\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15=0$.

Найдем корни уравнения.

$$\begin{array}{r|l} \_\lambda^3-9\lambda^2+23\lambda-15 & \lambda-1 \\ \cline{2-2} \lambda^3-\lambda^2 \qquad\qquad\quad & \lambda^2-8\lambda+15 \\ \cline{1-1} \_-8\lambda^2+23\lambda-15 & \\ -8\lambda^2+8\lambda \qquad & \\ \cline{1-1} \_15\lambda-15 & \\ 15\lambda-15 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Получаем: $(\lambda-1)(\lambda^2-8\lambda+15)=0 \Rightarrow \lambda_1=1$ или $\lambda^2-8\lambda+15=0$.

Найдем корни второго уравнения.

$D=b^2-4ac$, $D=(-8)^2-4\cdot 1\cdot 15=64-60=4$.

$$\lambda_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a},\ \lambda_{2,3}=\frac{8\pm 2}{2} \Rightarrow \begin{array}{l}\lambda_2=5,\\ \lambda_3=3.\end{array}$$

Таким образом, собственные значения равны $\lambda_1=1$, $\lambda_2=5$, $\lambda_3=3$.

2. Найдем собственные векторы линейного оператора для каждого собственного значения:

При $\lambda_1 = 1$: $\begin{cases} 4x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0, & |:4 \\ 2x_1 \;\;+\;\; 2x_3 = 0, & |:2 \\ 2x_1 \;\;+\;\; 2x_3 = 0 & |:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 \;\;+\;\; x_3 = 0, \\ x_1 \;\;+\;\; x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0, \\ 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_1 = -x_3, \end{cases}$

$$\begin{cases} x_2 = 0, \\ x_3 = a, \\ x_1 = -x_3. \end{cases} \quad a \in R \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -a, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = a. \end{cases}$$

Первый собственный вектор имеет вид $X_1 = \begin{pmatrix} -a \\ 0 \\ a \end{pmatrix}$. Пусть $a = 1$, тогда $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_2 = 5$:

$$\begin{cases} \;\;\; -4x_2 + 4x_3 = 0, & |:4 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, & |:2 \\ 2x_1 \;\;-\;\; 2x_3 = 0, & |:2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\;\; x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 \;\;-\;\; x_3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 - 2x_3 + x_3 = 0, \\ x_2 = x_3. \\ x_1 = x_3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_2 = x_3. \\ x_1 = x_3, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = b, \\ x_2 = b, \;\; b \in R. \\ x_1 = b. \end{cases}$$

Второй собственный вектор имеет вид $X_2 = \begin{pmatrix} b \\ b \\ b \end{pmatrix}$. Пусть $b = 1$, тогда $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

При $\lambda_3 = 3$:

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 \qquad\qquad = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x_2 + 4x_3 = 0, & |:4 \\ -2x_2 + 2x_3 = 0, & |:2 \\ x_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ -x_2 + x_3 = 0, \\ x_1 = 0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x_2 + x_3 = 0, \\ x_2 = x_3, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \cdot x_3 = 0, \\ x_2 = x_3, \\ x_1 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_3 = c, \\ x_2 = c, \;\; c \in R \\ x_1 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = c, \\ x_3 = c. \end{cases}$$

Третий собственный вектор имеет вид $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ c \end{pmatrix}$. Пусть $c = 1$, тогда $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ответ. При $\lambda_1 = 1$ $X_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; при $\lambda_2 = 5$ $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; при $\lambda_3 = 3$ $X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Задача 2

Выяснить знакоопределенность квадратичной формы $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$ и найти ортогональную матрицу, приводящую квадратичную форму к каноническому виду.

Решение.

Запишем данное уравнение в матричном виде $(x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = 0$.

Для того чтобы найти матрицу ортогонального преобразования, сначала составим характеристическое уравнение $\det(A - \lambda E) = 0$ и найдем собственные значения, используя различные методы решения уравнений третьей степени.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1 & 1\\ 1 & 1-\lambda & 1\\ 1 & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 3\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 0,\ \lambda_3 = 3.$$

Получены собственные значения: $\lambda = 0$ с кратностью 2 и $\lambda = 3$ с кратностью 1.

Диагональная матрица имеет вид $\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$ или $\Lambda = diag(0\ 0\ 3)$.

Далее для каждого собственного значения находим собственные векторы, решая однородные системы линейных уравнений. Для каждой системы будем находить фундаментальную систему решений.

а) $\lambda = 0$, $\quad \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\ c_2\\ c_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}c_1 + c_2 + c_3 = 0,\\ c_1 + c_2 + c_3 = 0,\\ c_1 + c_2 + c_3 = 0.\end{cases}$

Решаем систему линейных уравнений матричным методом: $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \sim$

$\sim (1\quad 1\quad 1) \Rightarrow rang\Lambda = 1 \Rightarrow c_1 = -c_2 - c_3$, пусть $c_2 = a$, $c_3 = b \Rightarrow c_1 = -a - b$.

Первый собственный вектор: $l_1 = \begin{pmatrix}-a-b\\ a\\ b\end{pmatrix}$. Пусть $a = -1,\ b = 0$, тогда $l_1 = \begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$.

б) $\lambda = 0$. Рассуждая аналогично, получаем второй собственный вектор $l_2 = \begin{pmatrix}-a-b\\ a\\ b\end{pmatrix}$ со значениями $a = 0,\ b = -1,\ l_2 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}$. Векторы l_1 и l_2 не ортогональны.

Ортогонализируя l_1 и l_2 методом Грама-Шмидта, получим два ортогональных вектора $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ и $X_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1/2 \end{pmatrix}$. Теперь необходимо нормировать эти векторы (разделить каждую координату вектора на ее длину) $X_1' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, X_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\sqrt{\frac{2}{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$.

в) Для собственного значения $\lambda = 3$ собственный вектор: $X_3' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Запишем матрицу ортогонального преобразования $S = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ 0 & -\frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

С помощью матрицы S от старого базиса (x_1, x_2, x_3) выполняется переход к новому базису (y_1, y_2, y_3):

$$x_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3, \qquad x_2 = -\frac{\sqrt{6}}{3} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3, \qquad x_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} y_1 + \frac{\sqrt{6}}{6} y_2 + \frac{\sqrt{3}}{3} y_3 .$$

Задача 3

Привести алгебраическое уравнение второй степени к каноническому виду и определить тип кривой, определяемой данным уравнением $11x_1^2 - 20x_1x_2 - 4x_2^2 - 20x_1 - 8x_2 + 1 = 0$.

Решение.

Запишем данное уравнение в матричном виде

$$(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + (-20\ -8)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 1 = 0 .$$

Для того чтобы найти матрицу ортогонального оператора, приводящего квадратичную форму $(x_1\ x_2)\begin{pmatrix} 11 & -10 \\ -10 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ к каноническому виду, сначала составим характеристическое уравнение

$det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 11-\lambda & -10 \\ -10 & -4-\lambda \end{vmatrix}=(11-\lambda)(-4-\lambda)-100=0$. Для решения этой части задачи требуется владение методами решений уравнений различных степеней вида $f(\lambda)=0$.

Решая уравнение, мы получим два действительных корня $\lambda=-9,\quad \lambda=16$. Далее для каждого собственного значения находим собственные векторы, решая однородные системы линейных уравнений.

Для каждой системы будем находить фундаментальную систему решений.

а) $\lambda=-9$

$$\begin{pmatrix} 20 & -10 \\ -10 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} 20c_1-10c_2=0, \\ -10c_1+\ 5c_2=0, \end{cases}\begin{cases} 2c_1-c_2=0, \\ -2c_1+c_2=0, \end{cases}\begin{cases} c_1\in R,\ c_1\neq 0, \\ c_2=2c_1. \end{cases}$$

Первый собственный вектор имеет координаты $\begin{pmatrix} c_1 \\ 2c_1 \end{pmatrix}$.

При $c_1=1$ первый собственный вектор имеет вид $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Нормируем данный вектор и получим первый нормированный собственный вектор $Y_1=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

б) $\lambda=16$

$$\begin{pmatrix} -5 & -10 \\ -10 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} -\ 5c_1-10c_2=0, \\ -10c_1-20c_2=0, \end{cases}\begin{cases} c_1+2c_2=0, \\ c_1+2c_2=0, \end{cases}\begin{cases} c_1=-2c_2, \\ c_2\in R,\ c_2\neq 0. \end{cases}$$

Второй собственный вектор имеет координаты $\begin{pmatrix} -2c_2 \\ c_2 \end{pmatrix}$. Аналогично, получим второй нормированный собственный вектор $Y_2=\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

в) Ортогональный оператор, приводящий квадратичную форму к каноническому виду имеет вид $S=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$. Базисные векторы новой системы координат

(O_1, Y_1, Y_2). $Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$; $Y_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. Так как det S=1, то A оператор поворота двумерного линейного пространства вокруг начало координат на угол φ такой, что $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{5}}, \sin\varphi = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Замечание. Если бы мы получили матрицу такую, что det S=-1, то достаточно было бы поменять местами два собственных вектора.
Получим уравнение кривой в новой системе координат (O_1, Y_1, Y_2), применяя формулы перехода: $x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 - \frac{2}{\sqrt{5}}y_2$, $x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2$.

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 + (-20 - 8)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0,$$

$$-9y_1^2 + 16y_2^2 + \begin{pmatrix} -\frac{36}{\sqrt{5}} & \frac{32}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + 1 = 0, \quad \frac{\left(y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{5/9} - \frac{\left(y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2}{5/16} = 1,$$

пусть $y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}} = z_1$, $y_2 + \frac{1}{\sqrt{5}} = z_2$, тогда $\frac{z_1^2}{5/9} - \frac{z_2^2}{5/16} = 1$.

Уравнение определяет гиперболу, полученную параллельным переносом системы координат (O_1, Y_1, Y_2) в точку $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Изобразим кривую $\frac{z_1^2}{5/9} - \frac{z_2^2}{5/16} = 1$.

Для начала, изобразим оси координат Ox_1 и Ox_2. Далее, собственные вектора будут являться базисными векторами новой системы координат (O_1, Y_1, Y_2):
$Y_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}$; $Y_2 = -\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{j}$. В новой системе координат $O_1y_1y_2$ изображаем центр гиперболы в точке с координатами $\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}; -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.Через данную точку проведем новую систему координат (O_2, Z_1, Z_2) параллельную (O_1, Y_1, Y_2). В системе координат $O_2z_1z_2$ по оси O_2z_1 вверх и вниз отмечаем расстояние равное $\frac{\sqrt{5}}{3}$, а по оси O_2z_2 - расстояние равное $\frac{\sqrt{5}}{4}$. Через полученные точки проведем вспомогательный прямоугольник, в котором диагонали будут содержать асимптоты гиперболы. Ось O_2z_1 является действительной осью и через нее проходит гипербола.

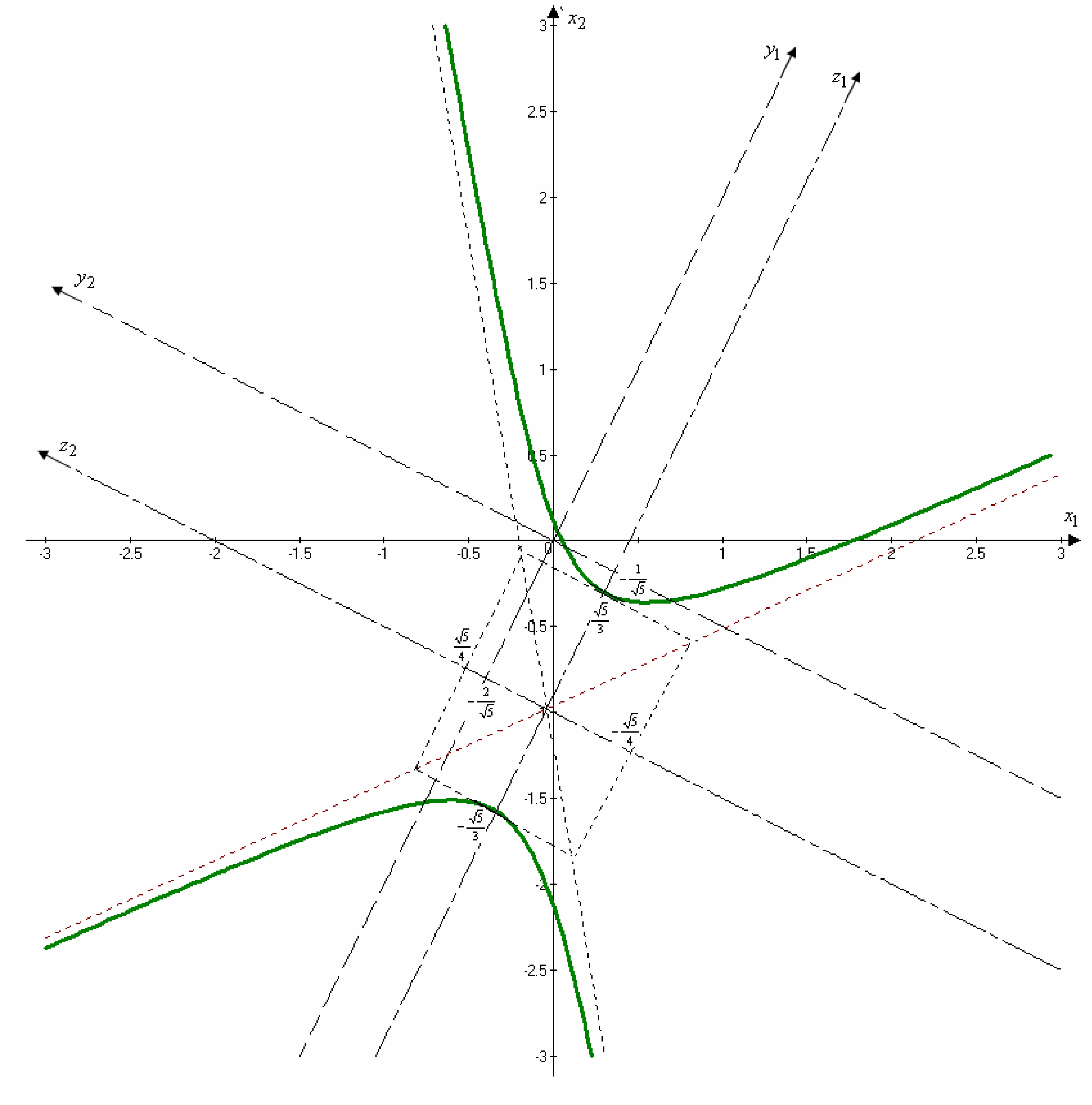


Рисунок 125

Задача 4

Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz + 6 = 0$.

Решение.

Составим характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$,

или $\lambda^3 - 27\lambda - 54 = 0$. Корни этого уравнения: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 6$.

Каноническое уравнение поверхности можем написать сразу: $-3x'^2 - 3y'^2 + 6z'^2 + 6 = 0$ или $\dfrac{x'^2}{2} + \dfrac{y'^2}{2} - \dfrac{z'^2}{1} = 1$.

Данная поверхность является однополостным гиперболоидом вращения с полуосями $a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$. Найдем теперь главные направления данной поверхности и формулы преобразования координат, приводящие данное уравнение к каноническому виду. Так как характеристическое уравнение имеет двукратный корень, то нужно действовать согласно указаниям. Составим применительно к нашей задаче систему уравнений : $\begin{cases} (1-\lambda)l + 2m - 4n = 0, \\ 2l + (-2-\lambda)m - 2n = 0, \\ -4l - 2m + (1-\lambda)n = 0. \end{cases}$

Подставим сюда двукратный корень характеристического уравнения

$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$, мы получим $\begin{cases} 4l + 2m - 4n = 0, \\ 2l + m - 2n = 0, \\ -4l - 2m + 4n = 0. \end{cases}$

Система свелась к одному существенному уравнению: $2l + m - 2n = 0$ (*) (два других ему пропорциональны). Беря, например, решение $l = 1$, $m = 2$, уравнения (*), получим вектор $(1;\ 2;\ 2)$, который определяет одно из бесчисленного множества главных направлений, соответствующих числу $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$.

С другой стороны, вектор $(2;\ 1;\ -2)$, определенный коэффициентами системы $\begin{cases} -5l + 2m - 4n = 0, \\ 2l - 8m - 2n = 0, \\ -4l - 2m - 5n = 0. \end{cases}$

дает третье главное направление (отвечающее числу $\lambda = \lambda_3 = 6$). Умножая векторно $(2;\ 1;\ -2)$ на $(1;\ 2;\ 2)$, получим вектор $(6;\ -6;\ 3)$, который также дает главное направление, отвечающее числу $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = -3$ (но отличное от ранее найденного и перпендикулярное к нему).

Вместо последнего вектора удобнее взять $(2;\ -2;\ 1)$.

Нормируя найденные векторы и располагая их в надлежащем порядке, получим:

$$i' = (l_1;\, m_1;\, n_1) = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right),\ j' = (l_2;\, m_2;\, n_2) = \left(\frac{2}{3}; -\frac{2}{3}; \frac{1}{3}\right), k' = (l_3;\, m_3;\, n_3) = \left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; -\frac{2}{3}\right).$$

Отсюда имеем формулы искомого преобразования координат

$$x = \frac{1}{3}x' + \frac{2}{3}y' + \frac{2}{3}z',\ y = \frac{2}{3}x' - \frac{2}{3}y' + \frac{1}{3}z',\ z = \frac{2}{3}x' + \frac{1}{3}y' - \frac{2}{3}z'.$$

Задача 5

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $X^T AX$ от трех переменных с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение.

Данная квадратичная форма положительно определена, так как

$$\Delta_1 = a_{11} = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1 > 0.$$

Задача 6

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $X^T AX$ от трех переменных с матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение.

Данная квадратичная форма является знакопеременной, так как

$$\Delta_1 = 1 > 0, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -8 < 0, \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = -36 \neq 0.$$

Задача 7

Исследовать на знакоопределенность квадратичную форму $2x_1x_2$ от двух переменных.

Решение.

Данная квадратичная форма является знакопеременной, так как матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\Delta_1 = 0,\ \Delta_2 = -1 \neq 0.$

Задача 8

Дана квадратичная форма

$\Phi(x_1, x_2, x_3) = 3(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3.$

1) Привести ее к каноническому виду методом Лагранжа, записав соответствующее преобразование переменных.
2) Привести ее к каноническому виду ортогональным преобразованием.
3) Проиллюстрировать закон инерции квадратичной формы на примерах преобразований, разобранных в п. 1) и 2).

Решение.

1) Коэффициент при $(x_2)^2$ равен 3, т. е. отличен от нуля. Выделим в квадратичной форме члены, содержащие x_2: $3(x_2)^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3$. Дополним это выражение до полного квадрата членами, не содержащими x_2, и сразу вычтем добавленные члены. Тогда получим

$$3(x_2)^2 + 4x_1x_2 - 2x_2x_3 = 3(x_2)^2 + 2x_2(2x_1 - x_3) = 3((x_2)^2 + 2\frac{x_2(2x_1 - x_3)}{3}) =$$

$$= 3((x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3)^2 - (\frac{(2x_1 - x_3)}{3})^2) = 3(x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3)^2 - \frac{4}{3}(x_1)^2 - \frac{1}{3}(x_3)^2 + \frac{4}{3}x_1x_3.$$

Введем обозначение $y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_3$, исходя из принципа: x_2 в квадратичной форме пропадает, y_2 в квадратичной появляется. Приведя подобные слагаемые, перепишем квадратичную форму:

$$3(y_2)^2 + \frac{8}{3}(x_3)^2 - \frac{4}{3}(x_1)^2 + \frac{16}{3}x_1x_3 = 3(y_2)^2 + W(x_1, x_3).$$

К квадратичной форме $W(x_1, x_3)$ снова применим метод выделения полного квадрата. Выделим все члены, содержащие x_1: $-\frac{4}{3}(x_1)^2 + \frac{16}{3}x_1x_3$.

Дополним это выражение до полного квадрата членами, не содержащими x_1, т. е. приведем его к виду:

$$-\frac{4}{3}(x_1)^2 + \frac{16}{3}x_1x_3 = -\frac{4}{3}((x_1)^2 - 4x_1x_3) = -\frac{4}{3}((x_1 - 2x_3)^2 - 4x_3^2) =$$

$= -\frac{4}{3}(x_1 - 2x_3)^2 + \frac{16}{3}(x_3)^2$. Обозначим $(x_1 - 2x_3)$ через y_1. Приведя подобные члены, перепишем исходную квадратичную форму: $3(y_2)^2 - \frac{4}{3}(y_1)^2 + 8(x_3)^2$.

Выделять снова полный квадрат уже не надо, так как имеется только квадрат переменной x_3. Поэтому, введя обозначение $x_3 = y_3$, получаем следующий канонический вид квадратичной формы: $-\frac{4}{3}(y_1)^2 + 3(y_2)^2 + 8(y_3)^2$, где

$$y_1 = x_1 - 2x_3,\ y_2 = \frac{2}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3,\ y_3 = x_3$$

Запишем преобразование переменных в матричной форме:

$$Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X.$$

Замечание 1. В результате применения метода Лагранжа всегда получается невырожденное линейное преобразование, приводящее квадратичную форму к каноническому виду.

Замечание 2. Если в записи квадратичной формы $\Phi(x_1, x_2, ..., x_n)$ отсутствует переменная $x_k \quad (k\langle n)$, т. е. $a_{mk} = 0 \quad (m = \overline{1, n})$, то, записывая преобразование переменных, надо положить $y_k = x_k$.

2) Запишем матрицу квадратичной формы: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

В некотором евклидовом пространстве ξ_3 с ортонормированным базисом $(e_k)_3$ рассмотрим симметричный оператор A, для которого $A_e = A$. Построим для него ортонормированный собственный базис $(f_k)_3$.

Так как $A - \lambda E = \begin{pmatrix} -\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 3-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix}$, то характеристическое уравнение запишется в виде $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 32 = 0$. Оно имеет решения: $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = 4$. Таким образом, получаем канонический вид квадратичной формы: $-2(y_1)^2 + 4(y_2)^2 + 4(y_3)^2$.

Построим теперь ортонормированный базис $(f_k)_3$.

Возьмем $\lambda_1 = -2$. Тогда: $A - \lambda_1 E = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Поэтому координаты x_1, x_2, x_3 собственных векторов, соответствующих собственному значению λ_1, должны удовлетворять системе линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0, \end{cases}$$

у которой $r = 2$, $n - r = 1$. Следовательно ФСР этой системы состоит из одного решения, т. е. имеет, например, вид $X_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Если $\lambda_{2,3} = 4$, то $A - \lambda_{2,3}E = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, т. е. координаты x_1, x_2, x_3 собственных векторов, соответствующих собственному значению 4, удовлетворяют системе линейных уравнений $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, у которой $r = 1$, $n - r = 2$.

Поэтому, данная система эквивалентна уравнению: $-4x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0$.

Значит, ФСР данной системы состоит из двух решений. Найдем их.

Полагая сначала $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, из последнего уравнения получим $x_1 = 0{,}5$; полагая затем $x_2 = 0$, $x_3 = 1$, из того же уравнения имеем $x_1 = 0{,}5$.

Таким образом, ФСР состоит из решений $X_2 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 0{,}5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Отметим, что $X_1, X_2, X_3 -$ столбцы из координат собственных векторов x_1, x_2, x_3, которые образуют базис в ξ_3. При этом x_1 ортогонален x_2 и x_3, так как X_1 - собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1 = -2$, отличному от $\lambda_{2,3} = 4$. Следовательно, чтобы построить ортогональный базис из собственных векторов линейного оператора A, надо ортогонализировать систему X_2, X_3.

Для этого положим $Y_2 = X_2$, $Y_3 = -aY_2 + X_3$, где $a = (Y_2, X_3) : (Y_2, Y_2) = \frac{1}{4} : \frac{5}{4} = \frac{1}{5}$. Отсюда получим, $Y_3 = \begin{pmatrix} 0{,}4 \\ -0{,}2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Теперь собственные векторы X_1, Y_2, Y_3 линейного оператора A взаимно ортогональны. Нормируя эти векторы, получим ортонормированный базис $(f_k)_3$:

$$F_{1e} = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, \quad F_{2e} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad F_{3e} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix}.$$

Итак, ортогональное преобразование $X = \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \sqrt{\frac{2}{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & \sqrt{\frac{5}{6}} \end{pmatrix} Y$

Приводит исходную квадратичную форму к каноническому виду:

$$-2(y_1)^2 + 4(y_2)^2 + 4(y_3)^2.$$

3**)** В пунктах 1) и 2) одна и та же квадратичная форма двумя различными невырожденными преобразованиями приведена к двум различным каноническим видам. В каждом из них число положительных канонических коэффициентов равно 2, число отрицательных канонических коэффициентов равно 1.

Домашнее задание № 8

1 Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Ответ. $\begin{cases} \lambda_1 = 7; \\ \lambda_2 = 4; \\ \lambda_3 = 2. \end{cases} \begin{cases} x_1 = (2, \quad 1, \quad 0) \\ x_2 = (0, \quad 0, \quad 1) \\ x_3 = (1, \quad -2, \quad 0). \end{cases}$

2 Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответ. $\begin{cases} \lambda_1 = 4; \\ \lambda_2 = -2; \\ \lambda_3 = -2. \end{cases} \begin{cases} x_1 = (1, \quad 1, \quad 1) \\ x_2 = (1, \quad -1, \quad 0) \\ x_3 = (1, \quad 1, \quad -2). \end{cases}$

3 Привести алгебраическое уравнение второй степени к каноническому виду и определить тип кривой, определяемой данным уравнением $29x_1^2 - 24x_1x_2 + 36x_2^2 - 34x_1 - 48x_2 - 139 = 0$.

Ответ. Эллипс**:** $\frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{4} = 1$.

4 Привести алгебраическое уравнение второй степени к каноническому виду и определить тип кривой, определяемой данным уравнением $5x_1^2+26x_1x_2+5x_2^2+16x_1-16x_2-16=0$.

Ответ. Две пересекающиеся прямые: $\frac{z_1^2}{4}-\frac{z_2^2}{9}=0$.

5 Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $2x^2+3y^2+12z^2-4xy+4yz-8\text{z}+1=0$.
Ответ. Эллипсоид.

6 Привести к каноническому виду уравнение поверхности второго порядка: $x^2-2y^2+z^2+4xy-10xz+4yz+2x+4y-10z-1=0$.

Ответ. Гиперболический цилиндр

Тест 6

1 Собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ равны:

а) $\lambda_1=1,\ \lambda_2=-4$;
б) $\lambda_1=2,\ \lambda_2=3$;
в) $\lambda_1=2,\ \lambda_2=-3$;
г) $\lambda_1=3,\ \lambda_2=-1$.

2 Норма вектора $\left\|\vec{a}\right\|$, заданного в базисе $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ $\vec{a}=2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}$ равна:

а) 10;
б) 2;
в) 6;
г) 4.

3 Собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ имеют вид:

а) $\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;
б) $\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$;
в) $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$;
г) $\begin{pmatrix}-4\\2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

4 Матрица линейного оператора, задающая растяжение плоскости в два раза вдоль первой оси имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

5 Матрица линейного оператора, задающая растяжение плоскости в пять раз вдоль второй оси имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}$.

6 Матрица линейного оператора, задающая тождественное преобразование плоскости имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

7 Матрица линейного оператора, задающая зеркальное отражение плоскости имеет вид:

а) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; в) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; г) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

8 Вектора ортогональны:

а) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -4 \\ 2 \end{pmatrix},\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9 Вектора нормированны:

а) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

10 Вектора ортонормированные:

а) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{4}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} -\frac{5}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

11 Матрица линейного оператора, задающая сдвиг плоскости относительно первой координатной оси имеет вид:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

12 Оператор А линейный:

а) $A(x) = (2x_1 + 3x_2;\ x_3 - 4x_2;\ x_1)$;

в) $A(x) = (2x_1 + 3x_2;\ x_3 - 4x_2;\ 0)$;

б) $A(x) = (2x_1 + 3x_2;\ x_3 - 4;\ x_1)$;

г) $A(x) = (2x_1 + 3x_2;\ x_3 - 4x_2;\ {x_1}^2)$.

13 Матрица квадратичной формы от двух переменных $3x_1^2 - 10x_1x_2 + 2x_2^2$ имеет вид:

а) $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & -5 \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} 3 & -10 \\ -10 & 2 \end{pmatrix}$.

14 Матрица квадратичной формы от трех переменных $x_1^2 + 7x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 \\ 6 & 7 & 8 \\ -4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 7 & 4 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & -5 \\ 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$.

15 Матрица ортогонального преобразования имеет вид:

а) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$;

б) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$;

в) $A = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} & -\frac{4}{5} \end{pmatrix}$;

г) $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$.

16 Собственные значения линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ равны:

а) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 4$;

в) $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 4$;

б) $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 7, \lambda_3 = 4$;

г) $\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -4, \lambda_3 = 4$.

17 Собственные векторы линейного оператора, заданного матрицей $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ имеют вид:

а) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

18 Квадратичная форма матрицы $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$ линейного оператора имеет вид:

а) $3x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$;

в) $3x_1^2 + 4x_1x_2 - 5x_2^2$;

б) $3x_1^2 + 2x_1x_2 - 5x_2^2$;

г) $-5x_1^2 + 8x_1x_2 - 5x_2^2$.

19 Квадратичная форма матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -3 \\ 0 & -3 & 9 \end{pmatrix}$ линейного оператора имеет вид:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 9x_2x_3$;

в) $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_2x_3$;

б) $x_1^2 + 4x_2^2 + 9x_3^2 + x_1x_2 - 3x_2x_3$;

г) $x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_3^2 - 3x_1x_2 + 9x_2x_3$.

20 Матрица ортогонального преобразования имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Расчетно-графическое задание

РГЗ к главе I

Вариант 1

1.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4; 8)$, $B(-3; 1)$, $C(-5; -6)$, $D(2; 1)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в) уравнение медианы и высоты в Δ ABC проведенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в ΔABC опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

1.2 При каких значениях A и B прямые $2x - 3y + 4 = 0$; $Ax + 6y + B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 2

2.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4; 8)$, $B(-3; 1)$, $C(-5; -6)$, $D(2; 1)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;

в) уравнение медианы и высоты в Δ BCD проведенной из вершины C на сторону DB;

г) длину высоты в Δ BCD опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD

2.2 При каких значениях A и B прямые $Ax - 4y + 1 = 0$, $-2x + y - B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 3

3.1 Дан параллелограмм $ABCD$: A(4; 8), B(-3; 1), C(-5; -6), D(2; 1). Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину D;

в) уравнение высоты и медианы в Δ ADC проведенной из вершины D на сторону AC;

г) длину высоты в Δ ADC опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

3.2 При каких значениях A и B прямые $4x + y - 6 = 0$, $3x + Ay + 2B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 4

4.1 Дан параллелограмм $ABCD$: A(4; 8), B(-3; 1), C(-5; -6), D(2; 1). Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину A;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BAD$ проведенной из вершины A на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
д) угол между прямыми DA и AB.
4.2 При каких значениях A и B прямые $x - Ay + 5 = 0$, $2x + 3y - B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 5
5.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(-4;1)$, $D(5;-2)$. Найти:
а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ABC$ опущенной из вершины B на сторону AC;
д) длину высоты в Δ ABC опущенной из вершины B на сторону AC;
е) угол между прямыми AB и BC.

5.2 При каких значениях A и B прямые $x + 4y - 1 = 0$; $Ax - 2y - B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 6
6.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(6;3)$, $B(-3;6)$, $C(-4;1)$, $D(5;-2)$. Найти:
а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
д) угол между прямыми BC и CD.

6.2 При каких значениях A и B прямые $2x - Ay - 3 = 0$, $2x - 2y + B = 0$
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 7
7.1 Дан параллелограмм *ABCD*: *A*(6; 3), *B*(-3; 6), *C*(-4; 1), $D(5;-2)$. Найти:
а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину D;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
г) длину высоты в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
д) угол между прямыми CD и DA.
7.2 При каких значениях A и B прямые $2x - y + 3 = 0$, $2x - Ay + B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.
Вариант 8

8.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(6; 3)$, $B(-3; 6)$, $C(-4; 1)$, $D(5; -2)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину A;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;

г) длину высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

8.2 При каких значениях A и B прямые $x+2y-B=0$, $Ax-y+3=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 9

9.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0; -3)$, $B(2; 4)$, $C(-2; 3)$, $D(-4; -4)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ABC$ опущенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в ΔABC опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

9.2 При каких значениях A и B прямые $x-3y+2=0$; $x+Ay+2B=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 10

10.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0; -3)$, $B(2; 4)$, $C(-2; 3)$, $D(-4; -4)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;

г) длину высоты в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD

10.2 При каких значениях A и B прямые $3x+2y-B=0$, $6x-Ay+1=0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 11

11.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0; -3)$, $B(2; 4)$, $C(-2; 3)$, $D(-4; -4)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину D;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

11.2 При каких значениях A и B прямые $3x+2y-B=0$, $Ax+2y-4=0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 12

12.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(0; -3)$, $B(2; 4)$, $C(-2; 3)$, $D(-4; -4)$. Найти:

а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину A;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;

г) Вычислить длину высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;

д) угол между прямыми DA и AB.

12.2 При каких значениях A и B прямые $Ax + y - 3 = 0$, $4x - 8y - B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 13

13.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5; 3)$, $B(3; 9)$, $C(-5; -1)$, $D(-3; -7)$. Найти:

а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ABC$ опущенной из вершины B на сторону AC;

г) длину высоты в ΔABC опущенной из вершины B на сторону AC;

д) угол между прямыми AB и BC.

13.2 При каких значениях A и B прямые $2x - Ay - 4 = 0$; $6x + 2y + 3B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 14

14.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5; 3)$, $B(3; 9)$, $C(-5; -1)$, $D(-3; -7)$. Найти:

а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;

г) длину высоты в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;

д) угол между прямыми BC и CD.

14.2 При каких значениях A и B прямые $2x - 5y + 1 = 0$, $Ax - 4y - 2B = 0$

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 15

15.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5; 3)$, $B(3; 9)$, $C(-5; -1)$, $D(-3; -7)$. Найти:

а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину D;

в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;

г) длину высоты в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;

д) угол между прямыми CD и DA.

15.2 При каких значениях A и B прямые $-x + Ay - 1 = 0$, $2x + 3y + B = 0$.

а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 16

16.1 Дан параллелограмм *ABCD*: *A*(5; 3), *B*(3; 9), *C*(-5; -1), *D*(-3; -7). Найти:
а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину A;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
д) угол между прямыми DA и AB.
16.2 При каких значениях A и B прямые $x - Ay + 1 = 0$, $2x - y + 2B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 17

17.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5;\,4)$, $B(-3;\,7)$, $C(-1;\,-2)$, $D(7;\,-5)$. Найти:
а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ABC$ опущенной из вершины B на сторону AC;
г) длину высоты в ΔABC опущенной из вершины B на сторону AC;
д) угол между прямыми AB и BC.
17.2 При каких значениях A и B прямые $Ax + y - B = 0$; $3x - 6y + 2 = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 18

18.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(5;\,4)$, $B(-3;\,7)$, $C(-1;\,-2)$, $D(7;\,-5)$. Найти:
а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
д) угол между прямыми BC и CD.
18.2 При каких значениях A и B прямые $-x + Ay - 3 = 0$, $4x + 6y + B = 0$
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 19

19.1 Дан параллелограмм *ABCD*: *A*(5; 4), *B*(-3; 7), *C*(-1; -2), *D*(7; -5). Найти:
а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину D;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
г) длину высоты в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
д) угол между прямыми CD и DA.

19.2 При каких значениях A и B прямые $x - Ay + 4 = 0$, $3x + y + 4B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 20
20.1 Дан параллелограмм *ABCD*: *A*(5; 4), *B*(-3; 7), *C*(-1; -2), *D*(7; -5). Найти:
а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину A;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
д) угол между прямыми DA и AB.

20.2 При каких значениях A и B прямые $Ax + 2y - 3 = 0$, $-x + 4y + B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 21
21.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;\ 4)$, $B(-4;\ 8)$, $C(-6;\ 2)$, $D(2;\ -2)$. Найти:
а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ABC$ опущенной из вершины B на сторону AC;
г) длину высоты в Δ ABC опущенной из вершины B на сторону AC;
д) угол между прямыми AB и BC.

21.2 При каких значениях A и B прямые $3x - Ay - 6 = 0$; $x + 2y + 2B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 22
22.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;\ 4)$, $B(-4;\ 8)$, $C(-6;\ 2)$, $D(2;\ -2)$. Найти:
а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
д) угол между прямыми BC и CD.

22.2 При каких значениях A и B прямые $5x - Ay + 7 = 0$, $x + 10y - B = 0$
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.
Вариант 23
23.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;\ 4)$, $B(-4;\ 8)$, $C(-6;\ 2)$, $D(2;\ -2)$. Найти:
а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину

D;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
г) длину высоты в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
д) угол между прямыми CD и DA.
23.2 При каких значениях A и B прямые $5x - Ay - 3 = 0$, $4x - 4y + B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 24
24.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(4;\ 4)$, $B(-4;\ 8)$, $C(-6;\ 2)$, $D(2;\ -2)$. Найти:
а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину A;
в) уравнение высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
д) угол между прямыми DA и AB.
24.2 При каких значениях A и B прямые $x + 5y - 3B = 0$, $Ax - 2y - 9 = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 25
25.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(-6;\ 5)$, $B(-9;\ -3)$, $C(0;\ -9)$, $D(3;\ -1)$. Найти:
а) уравнение стороны AB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину B;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ABC$ опущенной из вершины B на сторону AC;
г) длину высоты в ΔABC опущенной из вершины B на сторону AC;
д) угол между прямыми AB и BC.
25.2 При каких значениях A и B прямые $x + 2Ay - 6 = 0$; $6x - y - B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 26
26.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(-6;\ 5)$, $B(-9;\ -3)$, $C(0;\ -9)$, $D(3;\ -1)$. Найти:
а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
д) угол между прямыми BC и CD.
26.2 При каких значениях A и B прямые $Ax + 2y - 4 = 0$, $3x - 4y - B = 0$
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.
Вариант 27
27.1 Дан параллелограмм $ABCD$: A(-6; 5), B(-9; -3), C(0; -9), D(3; -1). Найти:
а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;

б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину D;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
г) длину высоты в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
д) угол между прямыми CD и DA.
27.2 При каких значениях A и B прямые $Ax - y + 2 = 0$, $3x - 4y - 3B = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 28
28.1 Дан параллелограмм *ABCD*: *A*(-6; 5), *B*(-9; -3), *C*(0; -9), *D*(3; -1). Найти:
а) уравнение стороны DC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину A;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BAD$ опущенной из вершины A на сторону DB;
д) угол между прямыми DA и AB.
28.2 При каких значениях A и B прямые $4x + 3y - 2B = 0$, $Ax - 8y + 4 = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

Вариант 29
29.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(11; -3)$, $B(5; 2)$, $C(-5; -3)$, $D(1; -8)$. Найти:
а) уравнение стороны BC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали BD и проходящей через вершину C;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
г) длину высоты в $\Delta\ BCD$ опущенной из вершины C на сторону DB;
д) угол между прямыми BC и CD.
29.2 При каких значениях A и B прямые $-x + Ay + B = 0$, $3x - y - 3 = 0$
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.
Вариант 30
30.1 Дан параллелограмм $ABCD$: $A(11; -3)$, $B(5; 2)$, $C(-5; -3)$, $D(1; -8)$. Найти:
а) уравнение стороны AD и привести его к нормальному виду;
б) уравнение прямой L параллельной диагонали AC и проходящей через вершину D;
в) уравнение высоты и медианы в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
г) длину высоты в $\Delta\ ADC$ опущенной из вершины D на сторону AC;
д) угол между прямыми CD и DA.
30.2 При каких значениях A и B прямые $-2x - y + B = 0$, $4x - Ay + 5 = 0$.
а) перпендикулярны; б) параллельны; в) совпадают.

РГЗ к главе II, III**,** IV
Вариант 1

1.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку D параллельна плоскости ABC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины D на плоскость ABC;
г) уравнение высоты DO;
д) координату точки O, DO-высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;
ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

2.1 При каких значениях m прямая $\dfrac{x+10}{m}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z+2}{-6}$ параллельна плоскости $5x-3y+4z-1=0$.

Вариант 2

2.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

2.2 При каких значениях C и D прямая $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-3}{-3}=\dfrac{z}{7}$ принадлежит плоскости $2x-y+Cz+D=0$.

Вариант 3

3.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

3.2 При каких значениях p и B прямая $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y+2}{-4}=\dfrac{z-3}{p}$ перпендикулярна плоскости $6x+by-3z+1=0$.

Вариант 4

4.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$, $D(8; 4; -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку A параллельна плоскости BDC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины A на плоскость BDC;
г) уравнение высоты AO;
д) координату точки O, AO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;
ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

4.2 Лежит ли прямая $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-7}$ в плоскостях Π_1: $3x+2y+z=0$ и Π_2: $3x+2y+z-1=0$.

Вариант 5

5.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$, $D(8; 4; -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку D параллельна плоскости ABC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины D на плоскость ABC;
г) уравнение высоты DO;
д) координату точки O, DO-высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;
ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

5.2 При каких значениях m прямая $\frac{x-3}{2}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{m}$ параллельна плоскости $3x-4y+z-5=0$.

Вариант 6

6.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1; 2; 0)$, $B(3; 0; -3)$, $C(5; 2; 6)$, $D(8; 4; -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

6.2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$ принадлежит плоскости $3x-Cy+z-D=0$.

Вариант 7

7.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

7.2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x+1}{5}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z}{-p}$ перпендикулярна плоскости $Bx-y+2z-4=0$.

Вариант 8

8.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку A параллельна плоскости BDC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины A на плоскость BDC;
г) уравнение высоты AO;
д) координату точки O, AO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;
ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

8.2 Лежит ли прямая $\frac{x}{3}=\frac{y+1}{5}=\frac{z}{-1}$ в плоскостях Π_1: $x-y-2z-4=0$ и Π_2: $x-y-2z-1=0$.

Вариант 9

9.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку D параллельна плоскости ABC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины D на плоскость ABC;
г) уравнение высоты DO;
д) координату точки O, DO-высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;
ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

9.2 При каких значениях m прямая $\frac{x}{4}=\frac{y+2}{2}=\frac{z}{m}$ параллельна плоскости $x+2y-3z+1=0$.

Вариант 10

10.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

10.2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z+2}{8}$ принадлежит плоскости $x-2y-Cz-D=0$.

Вариант 11

11.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

11.2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{4}=\frac{y+2}{p}=\frac{z-1}{-1}$ перпендикулярна плоскости $2x-4y+Bz-3=0$.

Вариант 12

12.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку A параллельна плоскости BDC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины A на плоскость BDC;
г) уравнение высоты AO;
д) координату точки O, AO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;
ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

12.2 Лежит ли прямая $\frac{x+3}{6}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{4}$ в плоскостях Π_1: $2x-3z+5=0$ и Π_2: $2x-3z+9=0$.

Вариант 13

13.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку D параллельна плоскости ABC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины D на плоскость ABC;
г) уравнение высоты DO;
д) координату точки O, DO-высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;
ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

13.2 При каких значениях m прямая $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+5}{-2}=\dfrac{z-6}{-3}$ параллельна плоскости $3x-my+4z+5=0$.

Вариант 14

14.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

14.2 При каких значениях C и D прямая $\dfrac{x+1}{5}=\dfrac{y-3}{-1}=\dfrac{z+2}{8}$ принадлежит плоскости $x-2y-Cz-D=0$.

Вариант 15

15.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

15.2 При каких значениях p и B прямая $\dfrac{x+2}{p}=\dfrac{y-3}{-2}=\dfrac{z}{2}$ перпендикулярна плоскости $x+4y-Bz+1=0$.

Вариант 16

16.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку A параллельна плоскости BDC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины A на плоскость BDC;
г) уравнение высоты AO;
д) координату точки O, AO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;
ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

16.2 Лежит ли прямая $\frac{x+1}{4}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-1}{4}$ в плоскостях Π_1: $2x-3y+z-3=0$ и Π_2: $2x-3y+z+1=0$.

Вариант 17

17.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку D параллельна плоскости ABC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины D на плоскость ABC;
г) уравнение высоты DO;
д) координату точки O, DO-высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;
ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

17.2 При каких значениях m прямая $\frac{x+3}{5}=\frac{y}{m}=\frac{z+3}{4}$ параллельна плоскости $2x-y+4z-3=0$.

Вариант 18

18.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$.

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) Найти угол между прямой DC и плоскостью ADB.

18.2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-2}{4}=\frac{y}{-2}=\frac{z+1}{3}$ принадлежит плоскости $3x-Cy+z-D=0$.

Вариант 19

19.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$.

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

19.2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x-5}{6}=\frac{y-8}{-2}=\frac{z}{-p}$ перпендикулярна плоскости $Bx-y+z-3=0$.

Вариант 20

20.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку A параллельно плоскости BDC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины A на плоскость BDC;
г) уравнение высоты AO;
д) координату точки O, AO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;
ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

20.2 Лежит ли прямая $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+1}{5}$ в плоскостях Π_1: $3x-4y+5z=0$ и Π_2: $3x-4y+5z-1=0$.

Вариант 21

21.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку D параллельно плоскости ABC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины D на плоскость ABC;
г) уравнение высоты DO;
д) координату точки O, DO-высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;
ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

21.2 При каких значениях m прямая $\frac{x}{m}=\frac{y}{-3}=\frac{z-1}{5}$ параллельна плоскости $-x+2y+z-2=0$.

Вариант 22

22.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

22.2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x}{5}=\frac{y-4}{C}=\frac{z+1}{-2}$ принадлежит плоскости $2x-y+4z-D=0$.

Вариант 23

23.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

23.2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x-1}{8}=\frac{y}{-p}=\frac{z+2}{3}$ перпендикулярна плоскости $2x+4y-Bz+1=0$.

Вариант 24

24.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку A параллельна плоскости BDC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины A на плоскость BDC;
г) уравнение высоты AO;
д) координату точки O, AO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;
ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

24.2 Лежит ли прямая $\frac{x+3}{6}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{4}$ в плоскостях Π_1: $2x-3z+5=0$ и Π_2: $2x-3z+9=0$.

Вариант 25

25.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$, $C(5;\ 2;\ 6)$, $D(8;\ 4;\ -9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;

в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

25.2 При каких значениях m прямая $\frac{x-6}{4}=\frac{y-4}{-5}=\frac{z}{6}$ параллельна плоскости $mx-2y-3z+5=0$.

Вариант 26

26.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

26.2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-2}{C}=\frac{y-3}{4}=\frac{z+5}{-1}$ принадлежит плоскости $5x-5y-5z+2D=0$.

Вариант 27

27.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости BDC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку A параллельна плоскости BDC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины A на плоскость BDC;
г) уравнение высоты AO;
д) координату точки O, AO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями BDC и ABC;
ж) угол между прямой DA и плоскостью BDC.

27.2 При каких значениях p и B прямая $\frac{x+2}{9}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z}{p}$ перпендикулярна плоскости $-x+By-z=0$.

Вариант 28

28.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ABC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости Π проходящей через точку D параллельна плоскости ABC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины D на плоскость ABC;
г) уравнение высоты DO;

д) координату точки O, DO-высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ABC и ACD;
ж) угол между прямой AD и плоскостью ABC.

28.2 Лежит ли прямая $\frac{x}{-4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z}{5}$ в плоскостях $\Pi_1: 3x+y+2z+1=0$ и $\Pi_2: 3x+y+2z-1=0$.

Вариант 29

29.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADB и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку C параллельна плоскости ADB;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины C на плоскость ABD;
г) уравнение высоты CO;
д) координату точки O, CO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADB и ABC;
ж) угол между прямой DC и плоскостью ADB.

29.2 При каких значениях m прямая $\frac{x+7}{-3}=\frac{y+2}{m}=\frac{z-1}{9}$ параллельна плоскости $-x+2y+z-2=0$.

Вариант 30

30.1 Даны координаты вершин тетраэдра $ABCD$: $A(1;\,2;\,0)$, $B(3;\,0;\,-3)$, $C(5;\,2;\,6)$, $D(8;\,4;\,-9)$. Найти:

а) уравнение плоскости ADC и привести его к нормальному виду;
б) уравнение плоскости П проходящей через точку B параллельна плоскости ADC;
в) длину высоты тетраэдра $ABCD$ опущенную из вершины B на плоскость ADC;
г) уравнение высоты BO;
д) координату точки O, BO высота тетраэдра $ABCD$;
е) угол между двумя плоскостями ADC и ADB;
ж) угол между прямой DB и плоскостью ADC.

30.2 При каких значениях C и D прямая $\frac{x-4}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{6}$ принадлежит плоскости $3x-Cy-4z-3D=0$.

РГЗ к главе V (по вариантам)

Задача 1

Приведите уравнение кривой к каноническому виду. Изобразите кривую. Отметьте на рисунке фокусы и директрисы.

1) $x^2+4y-8=0$;	11) $y^2+25x^2=100$;	21) $16y^2-x^2=64$;
2) $x^2-6y+12=0$;	12) $9x^2+4y^2=36$;	22) $y^2+25x^2=25$;
3) $y^2+8x-4=0$;	13) $9x^2+y^2=36$;	23) $4y^2-9x^2=36$;

4) $y^2 - 2x + 5 = 0$;
5) $4x^2 - 16y^2 = 64$;
6) $25y^2 - 4x^2 = 100$;
7) $25x^2 - y^2 = 25$;
8) $9y^2 - 4x^2 = 36$;
9) $16y^2 - 4x^2 = 16$;
10) $x^2 + 4y^2 = 16$;
14) $4x^2 + 16y^2 = 16$;
15) $y^2 - 16x^2 = 16$;
16) $y^2 + 3x - 6 = 0$;
17) $y^2 - 5x + 15 = 0$;
18) $x^2 - y + 4 = 0$;
19) $x^2 + 4y - 10 = 0$;
20) $x^2 + 16y^2 = 64$;
24) $4y^2 - 4x^2 = 16$;
25) $9x^2 - 9y^2 = 36$;
26) $4x^2 + 25y^2 = 100$;
27) $4x^2 - 4y^2 = 36$;
28) $4x^2 - 16y^2 = 64$;
29) $x^2 - y^2 = 4$;
30) $y^2 + 4x^2 = 16$.

Задача 2

Приведите к каноническому виду и изобразите кривую:

1) $x^2 + y^2 + 4x - 6y + 12 = 0$;
2) $x^2 - y^2 - 8x - 2y + 11 = 0$;
3) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$;
4) $x^2 - 4y^2 + 2x + 16y - 19 = 0$;
5) $4y^2 - x^2 + 24y + 2x + 19 = 0$;
6) $4x^2 + y^2 + 40x - 4y + 100 = 0$;
7) $x^2 - 6x + 2y + 19 = 0$;
8) $25x^2 + 4y^2 + 250x - 24y + 561 = 0$;
9) $4y^2 - x^2 - 16y - 2x - 1 = 0$;
10) $y^2 - 4x + 4y + 24 = 0$;
11) $x^2 + 10x + 3y + 19 = 0$;
12) $x^2 + 8x + 4y^2 - 16y + 16 = 0$;
13) $4x^2 - 9y^2 - 32x - 36y - 8 = 0$;
14) $4y^2 - 25x^2 + 8y + 50x - 121 = 0$;
15) $x^2 + 12x + 4y + 24 = 0$;
16) $x^2 - 9y^2 + 10x + 18y + 7 = 0$;
17) $4x^2 + y^2 - 40x - 6y + 93 = 0$;
18) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 16y - 11 = 0$;
19) $y^2 - 8y - 3x + 22 = 0$;
20) $4x^2 + y^2 + 16x - 6y + 9 = 0$;
21) $y^2 - x^2 - 2y - 4x - 7 = 0$;
22) $y^2 + 6y + 3x - 3 = 0$;
23) $4x^2 - 36y^2 + 8x + 144y - 284 = 0$;
24) $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 3 = 0$;
25) $y^2 - x^2 + 10y + 8x - 16 = 0$;
26) $y^2 - 8y + x + 21 = 0$;
27) $x^2 + 6x - 4y + 17 = 0$;
28) $x^2 - 4y^2 - 2x - 8y - 67 = 0$;
29) $y^2 - 4x^2 + 6y - 32x - 71 = 0$.

Задача 3

Приведите уравнение кривой к каноническому виду и изобразите кривую (исследовать кривую двумя способами: через $tg\alpha$ и через собственные значения и собственные векторы):

1) $-x^2 - y^2 + 4xy + 2x - 4y + 1 = 0$;
2) $2x^2 + 2y^2 - 2xy - 2x - 2y + 1 = 0$;
3) $-2x^2 - 2y^2 + 2xy - 6x + 6y + 3 = 0$;
4) $-3x^2 - 3y^2 + 4xy - 6x + 4y + 2 = 0$;
5) $3x^2 - 8xy - 3y^2 + 12x - 15 = 0$;
6) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$;

7) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$;

8) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$;

9) $19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$;

10) $5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$;

11) $14x^2 + 24xy + 21y^2 - 4x + 18y - 139 = 0$;

12) $7x^2 + 60xy + 32y^2 - 14x - 60y + 7 = 0$;

13) $50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0$;

14) $41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0$;

15) $29x^2 - 24xy + 36y^2 + 82x - 96y - 91 = 0$;

16) $4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$;

17) $41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$;

18) $16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$;

19) $34x^2 - 12xy + 18y^2 + 24x - 72y - 504 = 0$;

20) $7x^2 - 48xy - 7y^2 + 34x + 62y - 98 = 0$;

21) $-4x^2 + 2xy - 4y^2 + 10x - 10y + 1 = 0$;

22) $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 18x + 226y + 209 = 0$;

23); $6xy + 8y^2 - 12x - 26y + 11 = 0$

24) $x^2 + 4xy + y^2 + 4x + 2y - 5 = 0$;

25) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$;

26) $9x^2 + 24xy + 16y^2 + 50x - 100y + 25 = 0$;

27) $2x^2 + 4xy + 2y^2 + 8x + 8y + 1 = 0$;

28) $4x^2 + 2xy + 4y^2 + 12x + 12y + 1 = 0$;

29); $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$

30) $x^2 - 4xy + 4y^2 - 2x - 6y + 2 = 0$.

РГЗ к главе VI (по вариантам)

Задача 1

Приведите уравнение поверхности к каноническому виду. Определите вид поверхности и изобразите ее.

1) $x^2 + 4y^2 = 4$;	11) $4x^2 + 16y^2 = 32$;	21) $25x^2 + 4y^2 = 100$;
2) $4x^2 + 16z = 64$;	12) $4x^2 + z^2 = 16$;	22) $9x^2 + 4z^2 = 36$;
3) $4z^2 + 25y^2 = 100$;	13) $9y^2 + 4z^2 = 36$;	23) $16y^2 + 4z^2 = 64$;
4) $4x^2 - 16y^2 = 16$;	14) $16y^2 - 4x^2 = 16$;	24) $16x^2 - 4y^2 = 64$;
5) $25y^2 - 4x^2 = 100$;	15) $9x^2 - 4y^2 = 36$;	25) $25y^2 - 4x^2 = 100$;
6) $16x^2 - 64z^2 = 64$;	16) $25x^2 - 4z^2 = 100$;	26) $4x^2 - z^2 = 16$;

7) $4z^2 - 25x^2 = 100$; 17) $z^2 - 9x^2 = 36$; 27) $z^2 - 16x^2 = 16$;
8) $9y^2 - z^2 = 9$; 18) $9y^2 - 36z^2 = 36$; 28) $25y^2 - 4z^2 = 100$;
9) $16z^2 - y^2 = 16$; 19) $4z^2 - 16y^2 = 16$; 29) $z^2 - 4y^2 = 16$;
10) $y^2 = 4z$; 20) $z^2 = -8y$; 30) $x^2 = 2z$.

Задача 2

Приведите уравнения поверхности к каноническому виду. Определите вид поверхности и изобразите поверхность.

1) $4x^2 + y^2 + 16z^2 = 64$; 16) $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 36$;
2) $4x^2 + 4y^2 - 36z^2 = 36$; 17) $x^2 - 4y^2 - 9z^2 = 36$;
3) $4x^2 + 16z^2 - 4y^2 = 64$; 18) $y^2 - 9z^2 - x^2 = 36$;
4) $9z^2 + 4y^2 - x^2 = 36$; 19) $x^2 - 9y^2 + 9z^2 = 81$;
5) $16y^2 + z^2 - 64x^2 = -64$; 20) $4x^2 - 25y^2 + z^2 = 100$;
6) $16x^2 + 4y^2 + z^2 = 64$; 21) $16x^2 + 16y^2 + 4z^2 = 16$;
7) $4x^2 - 9y^2 + z^2 = -36$; 22) $4x^2 + 9y^2 - z^2 = 36$;
8) $4x^2 - 25y^2 - z^2 = 100$; 23) $y^2 + 16x^2 - 16z^2 = 64$;
9) $16x^2 + y^2 - 16z^2 = -64$; 24) $25x^2 - 4y^2 - z^2 = -100$;
10) $16z^2 - 4y^2 + 4x^2 = -64$; 25) $16x^2 - 4y^2 + z^2 = 16$;
11) $25x^2 + 4y^2 + z^2 = 100$; 26) $16x^2 + 16y^2 + 4z^2 = 64$;
12) $4x^2 + y^2 - 4z^2 = 64$; 27) $4x^2 + 4z^2 - y^2 = -16$;
13) $x^2 + 4y^2 - 16z^2 = -16$; 28) $16x^2 + 4y^2 - 4z^2 = -64$;
14) $9y^2 - 4x^2 + z^2 = 36$; 29) $25x^2 - 4x^2 + 4y^2 = -100$;
15) $z^2 - 4y^2 + 25x^2 = 100$; 30) $x^2 - y^2 + 4z^2 = 36$.

Задача 3

Приведите уравнения поверхности к каноническому виду. Определите вид поверхности. Изобразите поверхность.

1) $x^2 + y^2 = 2z$; 11) $x^2 + z^2 = -2y$; 21) $z^2 + x^2 - 4y^2 = 0$;
2) $x^2 - y^2 = -z$; 12) $4x^2 + z^2 = 4y$; 22) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$;
3) $y^2 + z^2 = x$; 13) $z^2 - x^2 + 4y^2 = 0$; 23) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$;
4) $z^2 - y^2 = x$; 14) $x^2 - y^2 = 0$; 24) $4x^2 + y^2 = 4z$;
5) $x^2 + 4y^2 - z^2 = 0$; 15) $y^2 - 4x^2 = 0$; 25) $4z^2 + x^2 = 4y$;
6) $y^2 + z^2 = -x$; 16) $z^2 - x^2 = 0$; 26) $x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$;

7) $x^2 - y^2 + 4z^2 = 0$;	17) $x^2 - 4z^2 = 0$;	27) $y^2 - x^2 + z^2 = 0$;
8) $y^2 + x^2 = -4z$;	18) $x^2 - 4y^2 - 4z^2 = 0$;	28) $x^2 - 4z^2 = 0$;
9) $x^2 - 4y^2 = 4z$;	19) $y^2 - z^2 = 0$;	29) $y^2 - z^2 = 0$;
10) $z^2 - 2y^2 = -2x$;	20) $z^2 - 4y^2 = 0$;	30) $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

Список использованных источников

1 **Апатенок, Р.Ф.** Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии: учеб. пособие для вузов / Р.Ф. Апатенок [и др.].- 2-е изд., перераб. и доп. - Минск : Высш. шк., 1986. - 272 с.

2 **Беклемишев, Д.В.** Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учеб. для вузов / Д.В. Беклемишев.- М. : Физматлит, 2004. - 304с.-Библиогр.: с.302-303.-ISBN 5-9221-0304-0.

3 **Беклемишева, Л.А.** Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре: учеб. пособие для вузов / Л.А. Беклемишева, А.Ю. Петрович, И.А. Чубаров; под ред. Д.В. Беклемишева. - М. : Наука, 1987. - 496 с.

4 **Гусак, А.А**. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М.Гусак, Е. А. Бричикова. – 6-е изд.– Минск: ТетраСистемс, 2005. – 640с.- Биограф. слов.: 601-614.Пред. указ.: с. 615-626.-ISBN 985-470-284-7.

5 **Гусак, А.А.** Высшая математика: в 2-т.: учеб. для вузов / А.А. Гусак – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – ISBN 985-470-220-0. Т. 1: - 544с.- Библиогр.: с.529.- Предм.- имен. указ.: с. 530-537.- ISBN 985-470-219-7.

6 **Гусак, А.А.** Высшая математика: в 2-т.: учеб. для вузов / А.А. Гусак – 5-е изд. – Минск: ТетраСистемс, 2004. – ISBN 985-470-220-0. Т. 2: - 448с.- Библиогр.: с.433.- Предм.- имен. указ.: с. 435-439.- ISBN 985-470-218-9.

7 **Данко, П.Е.** Высшая математика в упражнениях и задачах: в 2-ч / / П.Е. Данко [и др.]. –7-е изд., исп. – Москва: Оникс 21 век, 2008. – ISBN 978-5-488-01681-1. - ISBN 978-5-94666-468-4. 2008. Ч. 1. - 368с.: ил. - ISBN 978-5-488-01682-8. - ISBN 978-5-94666-469-1.

8 **Ильин, В.А.** Аналитическая геометрия: учеб. для студентов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк.- 6-е изд., стер. - М. : Физматлит, 2003,- 240с. – (Курс высшей математики и математической физики., вып.3).- ISBN 5-9221-0134-X. - ISBN 5-9221-0128-5.

9 **Канатников, А.Н.** Аналитическая геометрия: учеб. для втузов / А. Н. Канатников, А. П. Крищенко., ред. В.С. Зарубин, А.П. Крищенко.- 4-е изд.,

испр. - М. : МГТУ им. Н.Э.Баумана, 2005.- 392с.- (Математика в техническом университете., вып. III). - Библиогр.: с.375-376.- Предм.- указ.: с. 377-383.- ISBN 5-7038-2732-9. - ISBN 5-7038-2484-2.

10**Кострикин, А.И.** Линейная алгебра и геометрия: учеб. пособие / А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. 3-изд., стер.- Спб.-: Лань, 2005.-304с.-(Лучшие классические учебники). - Предм.- указ.: с. 297-303.- ISBN 5-8114-0612-6.