МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

И.А. БОЧАРОВ
Ю.Л. ВЛАСОВ
Н.А. МОРОЗОВ

СЛОЖНОЕ ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ. ОБЩИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
к практическим занятиям
по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 531.18
ББК 22.21я73
Б86

Рецензент
доцент, кандидат технических наук Л.И. Кудина

Бочаров, И.А.
Б86 Сложное движение точки. Общие рекомендации по решению задач: методические указания к практическим занятиям по дисциплине «Теоретическая механика» / И.А. Бочаров, Ю.Л. Власов, Н.А. Морозов. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. -27 с.

Методические указания включают теоретическое изложение материала, вопросы для самоконтроля и примеры решения задач.

Методические указания предназначены для самостоятельной подготовки студентов технических специальностей всех форм обучения к практическим занятиям и выполнению расчетно-графической работы по дисциплине «Теоретическая механика» по теме «Сложное движение точки».

ББК 22.21я73

Содержание

Введение

В ряде случаев при решении задач кинематики оказывается целесообразным рассматривать движение точки по отношению к двум системам отсчета, одна из которых считается условно неподвижной, а другая определенным образом движется по отношению к первой. Таким образом, если материальная точка движется относительно твердого тела, с которым связывают (условно) подвижную систему отсчета, и одновременно с этим твердое тело определенным образом движется относительно земли, с которой связывают (условно) неподвижную систему отсчета, то такое движение точки называется сложным.

Например, пассажира, перемещающегося по палубе движущегося корабля, можно считать совершающим сложное движение по отношению к берегу. Это движение состоит из перемещения по отношению к палубе корабля, связанной с подвижной системой отсчета, и движения вместе с палубой по отношению к берегу, связанного с неподвижной системой отсчета. Таким образом, сложное движение пассажира раскладывается на два более простых и более легко исследуемых. Возможность разложить, путем введения дополнительной (подвижной) системы отсчета, сложное движение точки на более простые движения широко используется при кинематических расчетах.

Инструментом изучения сложного движения точки является математический анализ, в особенности его разделы: алгебра, геометрия, тригонометрия, геометрия и векторная алгебра.

Для изучения темы «Сложное движение точки» нужно в первую очередь глубоко изучить теоретический материал и получить твердые навыки в решении задач. При освоении теоретического материала особое внимание следует обратить на формулировки определений и теорем; важно понять их смысл. Закончив изучение темы, необходимо обратится к вопросам для самопроверки.

Большое значение имеет приобретение навыков решения задач. Для этого, сначала необходимо разобраться в примерах, приведенных в данных методических указаниях, а затем следует самостоятельно решить несколько аналогичных задач из сборника задач [2].

Основные положения сложного движения используются в динамике при изучении относительного равновесия и относительного движения точки и тела под действием сил, а также в специальных дисциплинах, связанных с расчетом машин, механизмов и технологического оборудования.

1 Общие сведения

1.1 Основные определения

Движение точки M относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$ (рисунок 1.1), называют ***абсолютным движением***. Скорость и ускорение точки в этом движении называют ***абсолютной скоростью*** ($\bar{V}_a$) и ***абсолютным ускорением*** ($\bar{a}_a$).

Движение точки M относительно подвижной системы координат $Oxyz$, называется ***относительным***. Скорость и ускорение точки в этом движении называют ***относительной скоростью*** ($\bar{V}_r$) и ***относительным ускорением*** ($\bar{a}_r$).

Движение подвижной системы координат $Oxyz$ и связанных с ней точек пространства относительно неподвижной системы отсчета $O_1x_1y_1z_1$, называется ***переносным движением***. Скорость и ускорение той точки подвижной системы координат, с которой в данный момент времени совпадает движущаяся точка M, называется ***переносной скоростью*** ($\bar{V}_e$) и ***переносным ускорением*** ($\bar{a}_e$).

Для решения основных задач кинематики необходимо установить зависимости между характеристиками относительного, переносного и абсолютного движений. Эти зависимости устанавливаются с помощью теорем.

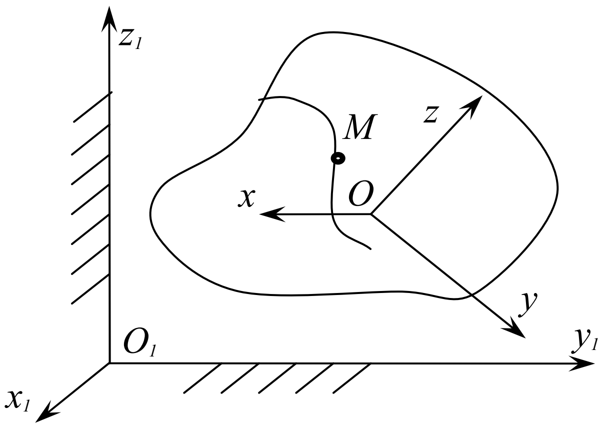


Рисунок 1.1 − Сложное движение точки

1.2 Теорема о сложении скоростей при сложном движении точки

Абсолютная скорость точки равна геометрической сумме относительной и переносной скоростей:

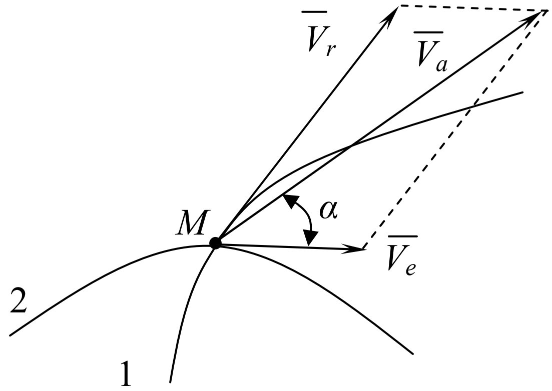
$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e, \tag{1.1}$$

где $\overline{V}_a$ - абсолютная скорость;

$\overline{V}_r$ - относительная скорость;

$\overline{V}_e$ - переносная скорость.

Это соотношение изображено на рисунке 1.2 в виде параллелограмма скоростей.



1 – траектория относительного движения; 2 – траектория переносного движения.

Рисунок 1.2 – Параллелограмм скоростей

Модуль абсолютной скорости точки определяется в общем случае по формуле:

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2 + 2V_r \cdot V_e \cos\alpha}\,. \qquad (1.2)$$

В случае если:

$$\angle\alpha = 90^0, \text{ то } V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2}\,; \qquad (1.3)$$

$$\angle\alpha = 0, \text{ то } V_a = V_r + V_e; \qquad (1.4)$$

$$\angle\alpha = 180^0, \text{ то } V_a = |V_r - V_e|. \qquad (1.5)$$

1.3 Теорема о сложении ускорений при сложном движении

Абсолютное ускорение точки равно геометрической сумме относительного ускорения, переносного ускорения и ускорения Кориолиса:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r + \overline{a}_e + \overline{a}_c\,, \qquad (1.6)$$

где $\overline{a}_a$ - вектор абсолютного ускорения;

$\overline{a}_r$ - вектор относительного ускорения;

$\overline{a}_e$ - вектор переносного ускорения.

$\overline{a}_c$ - вектор ускорения Кориолиса.

Кориолисовым ускорением называется составляющая абсолютного ускорения точки в сложном движении, равная удвоенному векторному произведению угловой скорости переносного вращения на относительную скорость точки:

$$\bar{a}_c = 2\bar{\omega}_e \times \bar{V}_r\,, \tag{1.7}$$

где ω_e - угловая скорость переносного движения.

Кориолисово ускорение характеризует изменение относительной скорости в переносном движении и изменение направления переносной скорости в относительном движении.

Направление вектора $\bar{a}_c$ можно определить, воспользовавшись одним из двух правил:

Правило векторного произведения: вектор ускорения Кориолиса $\bar{a}_c$ направлен перпендикулярно плоскости, образованной векторами угловой скорости переносного движения $\bar{\omega}_e$ и относительной скорости $\bar{V}_r$, в ту сторону, откуда кратчайший поворот от вектора угловой скорости переносного движения $\bar{\omega}_e$ к вектору относительной скорости $\bar{V}_r$ виден против хода часовой стрелки (рисунок 1.3).

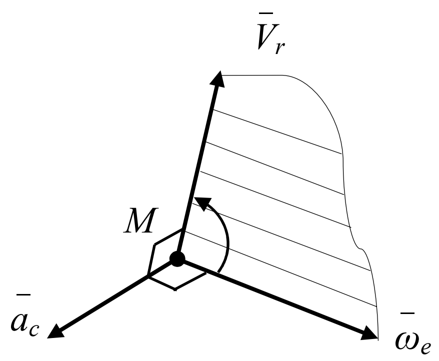


Рисунок 1.3 – Правило векторного произведения для определения ускорения Кориолиса

Правило Жуковского: направление вектора ускорения Кориолиса $\bar{a}_c$ получим, если вектор линейной относительной скорости $\bar{V}_r$ спроецировать на плоскость, перпендикулярную оси переносного вращения, и полученную проекцию повернуть, в той же плоскости, на 90° по направлению переносного вращения (рисунок 1.4).

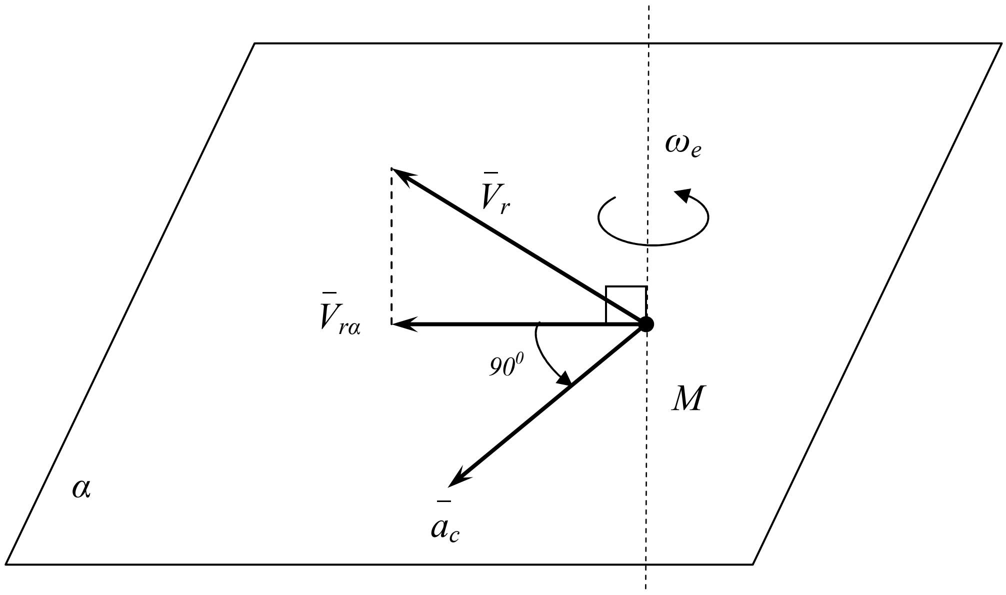


Рисунок 1.4 – Правило Жуковского

Модуль ускорения Кориолиса определяется по формуле:

$$a_c = 2|\bar{\omega}_e| \cdot |\bar{V}_r| \cdot \sin(\angle \bar{\omega}_e, \bar{V}_r)\,. \tag{1.8}$$

Ускорение Кориолиса равно нулю, если:

- $\omega_e = 0,$ то есть переносное движение поступательное;
- $V_r = 0,$ т.е. в тот момент времени, когда относительная скорость равна нулю;
- $\sin(\angle \bar{\omega}_e, \bar{v}_r) = 0,$ то есть векторы $\bar{\omega}_e$ и $\bar{V}_r$ параллельны.

Модуль и направление абсолютного ускорения определяется способом проекций, для чего необходимо спроецировать равенство (1.6) на оси координат. Вектор абсолютного ускорения будет являться диагональю параллелепипеда, построенного на этих проекциях, модуль абсолютного ускорения точки определится по формуле:

$$a_a = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2}\,. \tag{1.9}$$

2 Вопросы для самоконтроля

1 Какое движение точки называется сложным?
2 Какое движение называется относительным?
3 Какое движение называется переносным?
4 Какое движение называется абсолютным?
5 Как определяется абсолютная скорость точки?
6 Как определяется модуль абсолютной скорости точки?
7 Как определяется абсолютное ускорение точки?
8 Как определяется модуль ускорения Кориолиса?
9 Как определить направление вектора ускорения Кориолиса с помощью правила векторного произведения?
10 Как определить направление вектора ускорения Кориолиса с помощью правила Жуковского?
11 В каких случаях ускорение Кориолиса равно нулю?
12 Как определить модуль и направление абсолютного ускорения?

3 Алгоритм решения задач на сложное движение точки

При решении задач на сложное движение точки следует придерживаться следующего алгоритма:

- выбрать неподвижную и подвижную системы отсчета;
- установить вид траектории в относительном движении точки и вид переносного движения (поступательное, вращательное и т.д.)
- показать траектории относительного движения точки и переносного движения точки вместе с подвижной системой отсчета;
- мысленно остановив переносное движение, определить относительную скорость точки;
- мысленно остановив относительное движение, определить скорость точки в переносном движении;
- определить абсолютную скорость точки по формуле (1.2) и показать ее направление, сложив векторы относительной и переносной скорости по формуле (1.1);
- мысленно остановив переносное движение, определить модуль и направление относительного ускорения;
- мысленно остановив относительное движение, определить переносное ускорение точки;
- определить модуль ускорения Кориолиса по формуле (1.8) и показать его направление, используя правило векторного произведения (1.7) или правило Жуковского;
- спроецировав равенство (1.6) на оси координат, определить проекции абсолютного ускорения на оси x, y и z;
- определить модуль абсолютного ускорения точки по формуле (1.9).

4 Примеры решения задач

4.1 Задачи на поступательное переносное движение

Задача №1

Наклонная плоскость *AB*, составляющая угол *45°* с горизонтом, движется прямолинейно вдоль оси *Ox* с постоянным ускорением 0,1 м/с^2. По этой плоскости спускается точка *P* с постоянным относительным ускорением $0{,}1\sqrt{2}$ м/с^2; начальные скорости плоскости и тела равны нулю, начальное положение определяется координатами $x = 0$, $y = h$. Определить траекторию, скорость и ускорение абсолютного движения тела *P*, считая его материальной точкой.

Решение:

Точка *P* совершает сложное движение, т.к. она одновременно участвует в двух движениях: в прямолинейном движении вдоль наклонной плоскости *AB* и в поступательном движении вместе с наклонной плоскостью относительно неподвижной горизонтальной плоскости.

С наклонной плоскостью можно связать подвижную систему отсчета Ax_1y_1, тогда движение точки *P* вдоль наклонной плоскости, т.е. относительно подвижной системы отсчета, будет относительным. Неподвижную систему отсчета *Oxy* свяжем с землей, тогда движение наклонной плоскости *AB* по горизонтальной поверхности, будет являться переносным движением. Движение точки *P* относительно неподвижной системы отсчета *Oxy*, будет абсолютным движением (рисунок 4.1).

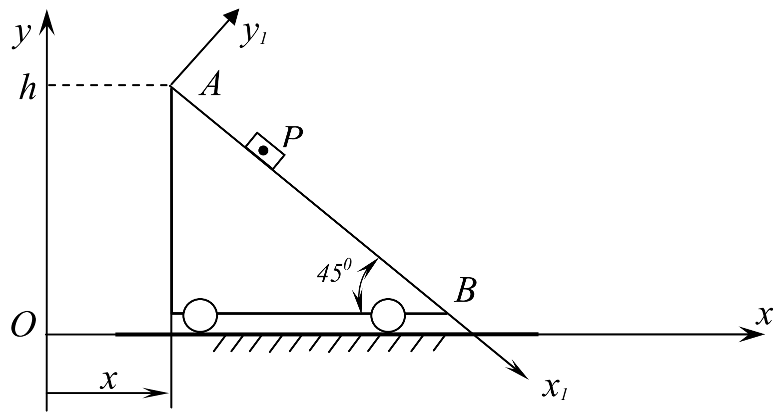


Рисунок 4.1 – Поступательное переносное движение тела

Закон равнопеременного движения имеет вид: $s = s_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}$, поэтому можно определить законы относительного и переносного движения зная, что их начальные скорости и перемещения равны нулю:

$$x_1 = 0{,}1\sqrt{2}\frac{t^2}{2}$$ – закон относительного движения,

$$x = 0{,}1\frac{t^2}{2}$$ – закон переносного движения.

Абсолютные координаты точки P представлены в виде:

$$x_p = x_1 \cdot \cos 45^0 + x\,;\; y_p = h - x_1 \cdot \cos 45^0$$

Или

$$x_p = 0{,}1\sqrt{2}\frac{t^2}{2} \cdot \cos 45^0 + 0{,}1\frac{t^2}{2}, \quad y_p = h - 0{,}1\sqrt{2}\frac{t^2}{2} \cdot \cos 45^0 .$$

Для определения уравнения абсолютной траектории движения точки P необходимо исключить время t из уравнений движения:

$$t^2 = \frac{2 \cdot x_p}{0{,}1\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 0{,}1} = 10x_p\,,$$

тогда

$$y_p = h - \frac{x_p}{2}\,.$$

Траекторией абсолютного движения точки P является луч.

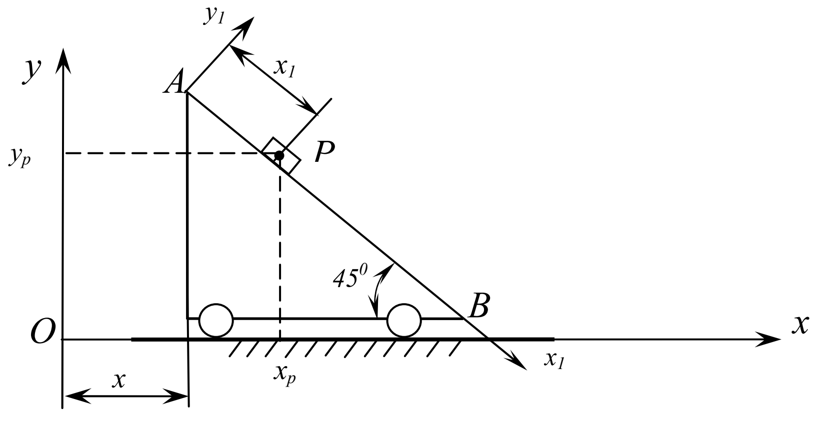


Рисунок 4.2 – Определение положения тела в системе Oxy

Абсолютную скорость определим с помощью теоремы о сложении скоростей при сложном движении:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e .$$

Для определения относительной скорости мысленно останавливаем переносное движение и рассматриваем только относительное движение точки P вдоль оси Ax_1. Относительная скорость определяется как первая производная по времени от закона относительного движения:

$$V_r = \frac{dx_1}{dt} = 0,1\sqrt{2}t .$$

Вектор относительной скорости будет направлен вдоль оси x_1.

Для определения переносной скорости мысленно останавливаем относительное движение и рассматриваем только поступательное движение наклонной плоскости с точкой P. Переносная скорость определяется как первая производная по времени от закона переносного движения:

$$V_e = \frac{dx}{dt} = 0,1t .$$

Векторы относительной и переносной скорости расположены в плоскости Oxy как показано на рисунке 4.3.

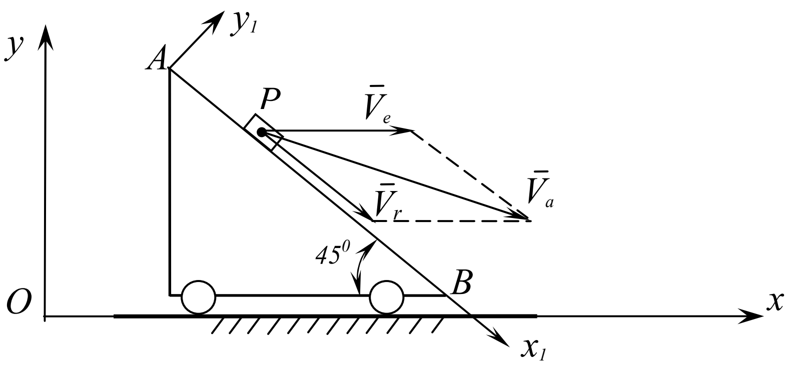


Рисунок 4.3 – Определение вектора абсолютной скорости.

Зная величину и направление относительной и переносной скоростей, определим абсолютную скорость точки по правилу параллелограмма. Направление вектора абсолютной скорости показано на рисунке 4.3. Модуль абсолютной скорости определим с помощью теоремы косинусов:

$$V_a=\sqrt{V_r^{\,2}+V_e^{\,2}+2V_r\cdot V_e\cdot\cos 45^0}=\sqrt{0,02t^2+0,01t^2+2\cdot 0,1\sqrt{2}\cdot 0,1t^2\,\frac{\sqrt{2}}{2}}=0,1t\sqrt{5}\ \ см/с\,.$$

Абсолютное ускорение определим с помощью теоремы о сложении ускорений при сложном движении, которая в нашем случае имеет вид:

$$\bar{a}_a=\bar{a}_r+\bar{a}_e\,,$$

где относительное ускорение $\bar{a}_r$ и переносное ускорение $\bar{a}_e$ включают в себя только тангенциальные составляющие, т.к. относительное движение точки P – прямолинейное и переносное движение плоскости AB – поступательное прямолинейное.

Ускорение Кориолиса равно нулю, т.к. переносное движение поступательное.

Для определения относительного ускорения мысленно остановим переносное движение и рассмотрим только относительное движение. Относительное ускорение равно:

$$a_r=a_r^{\tau}=\frac{d^2x_1}{dt^2}=0,1\sqrt{2}\ \ см/с^2\,.$$

Относительное движение – прямолинейное, величина тангенциального ускорения положительна, поэтому вектор относительного ускорения направлен в сторону увеличения координаты x_1 (рисунок 4.4).

Для определения переносного ускорения мысленно остановим относительное движение тела и рассмотрим только переносное движение наклонной плоскости AB с точкой P. Переносное движение - прямолинейное, потому переносное ускорение равно:

$$a_e=a_e^{\tau}=\frac{d^2x}{dt^2}=0,1\ \ см/с^2\,.$$

Вектор переносного ускорения совпадает по направлению с вектором переносной скорости (рисунке 4.4).

Зная величину и направление относительного и переносного ускорений, определяем абсолютное ускорение по правилу параллелограмма. Направление вектора абсолютного ускорения показано на рисунке 4.4, а модуль определяется с помощью теоремы косинусов:

$$a_a=\sqrt{a_r^{\,2}+a_e^{\,2}+2a_r\cdot a_e\cdot\cos 45^0}=\sqrt{0,02+0,01+2\cdot 0,1\sqrt{2}\cdot 0,1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}}=0,1\sqrt{5}см/с^2\,.$$

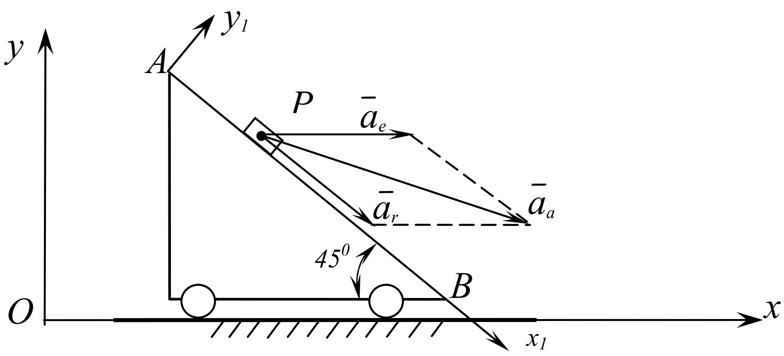


Рисунок 4.4 – Определение вектора абсолютного ускорения

Задача №2

Клин, движущийся по закону $S=8t-2t^2$, перемещает вдоль вертикальных направляющих стержень *AB* (рисунок 4.5). Определить скорость и ускорение стержня *AB*, при $t=1c$.

Решение:

Точка *A* стержня *AB* совершает сложное движение, т.к. она одновременно участвует в двух движениях: в поступательном движении клина по неподвижной горизонтальной плоскости и в прямолинейном движении по наклонной плоскости клина.

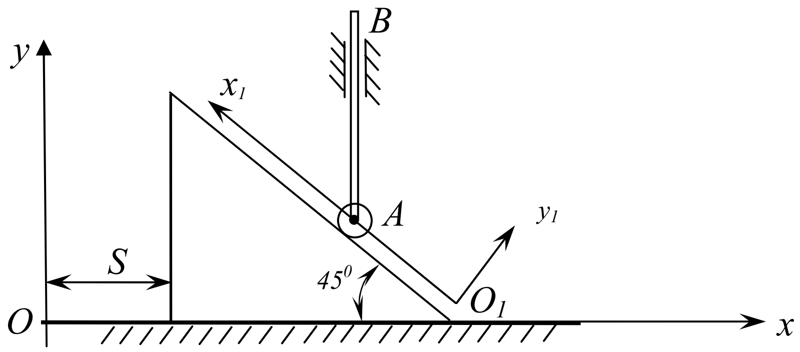


Рисунок 4.5 – Разложение сложного движения на относительное и переносное

Разложим сложное движение точки *A* стержня на относительное и переносное. Подвижную систему отсчета $O_1x_1y_1$ свяжем с клином, тогда движение точки *A* вдоль наклонной плоскости будет относительным. С землей свяжем неподвижную систему отсчета *Oxy*, тогда движение клина по горизонтальной поверхности, будет переносным движением. Движение точки *A* со стержнем *AB* будет абсолютным движением.

Абсолютную скорость точки A определим с помощью теоремы о сложении скоростей при сложном движении:

$$\overline{V}_a = \overline{V}_r + \overline{V}_e . \tag{4.1}$$

Вектор относительной скорости направлен вдоль оси x_1, вектор переносной скорости – вдоль оси x, а вектор абсолютной скорости – вдоль стержня AB (рисунок 4,6). Согласно равенству (4.1), векторы относительной и переносной скоростей являются сторонами параллелограмма, а вектор абсолютной скорости его диагональю.

Переносная скорость определяется как первая производная по времени от закона переносного движения:

$$V_e = \frac{dS}{dt} = 8 - 4t .$$

При t = 1 с

$$V_e = 8 - 4 \cdot 1 = 4 \ \ см/с .$$

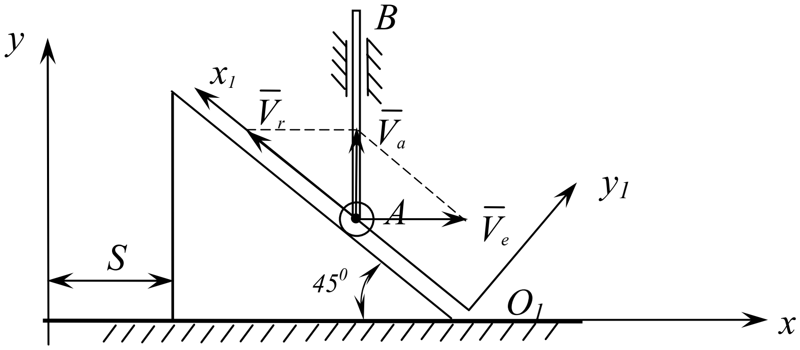


Рисунок 4.6 – Относительная, переносная и абсолютная скорости т. A

Абсолютная скорость точки A равна (рисунок 4.7)

$$V_a = V_e \cdot tg 45^0 = 4 \cdot 1 = 4 \ \ см/с .$$

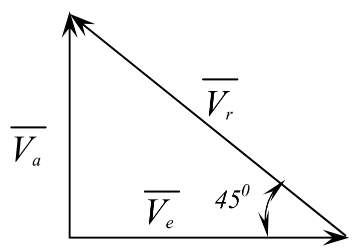


Рисунок 4.7 – Определение абсолютной скорости т. A

Абсолютное ускорение определим с помощью теоремы о сложении ускорений при сложном движении:

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r + \bar{a}_e \,. \tag{4.2}$$

Ускорение Кориолиса в данном примере отсутствует, т.к. переносное движение – поступательное.

Вектор относительного ускорения направлен вдоль оси x_1, вектор переносного ускорения – вдоль оси x, а вектор абсолютного ускорения – вдоль стержня *AB* (рисунок 4.8).

Переносное ускорение определяется как вторая производная по времени от закона переносного движения:

$$a_e = \frac{d^2 S}{dt^2} = -4 \ \text{см}/\text{с}^2 \,.$$

Отрицательный знак показывает, что вектор переносного ускорения направлен в сторону отрицательного отсчета координаты *S*.

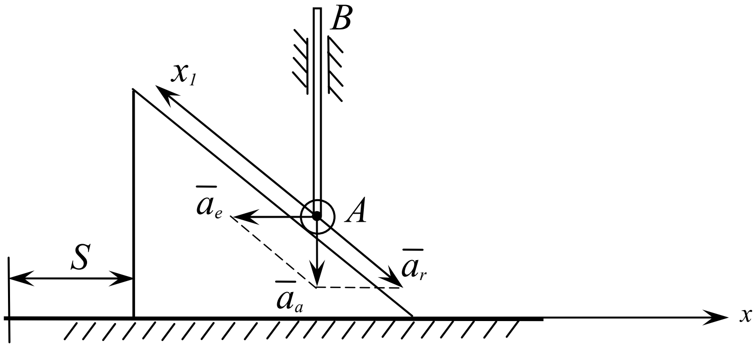


Рисунок 4.8 – Относительное, переносное и абсолютное ускорения т. *A*

Согласно равенству (4.2), векторы относительного и переносного ускорений являются сторонами параллелограмма, а вектор абсолютного ускорения его диагональю (рисунок 4.9).

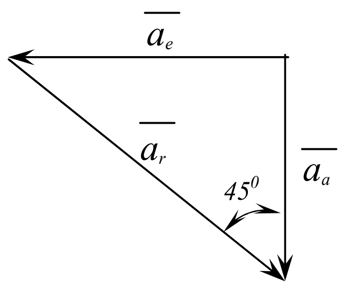


Рисунок 4.9 – Определение абсолютного ускорения точки т. *A*

Абсолютное ускорение т. *A*:

$$a_a = a_e \cdot tg45^0 = 4 \cdot 1 = 4 см / c^2 .$$

4.2 Задачи на вращательное переносное движение

Задача №1

Шайба М движется вдоль стержня *OA* по закону $S(t)=6t^2-t$ (см), одновременно с этим стержень *OA* вращается относительно неподвижной оси z (рисунок 4.10) по закону $\varphi(t) = 4t^2 + 2t$ (рад). Определить абсолютную скорость и абсолютное ускорение шайбы М в момент времени t_1 =2 с.

Решение:

Шайба совершает сложное движение, т.к. она одновременно участвует в двух движениях: в прямолинейном движении шайбы вдоль стержня ОА и во вращательном движении стержня *OA* с шайбой относительно оси z (в плоскости *Oxy*).

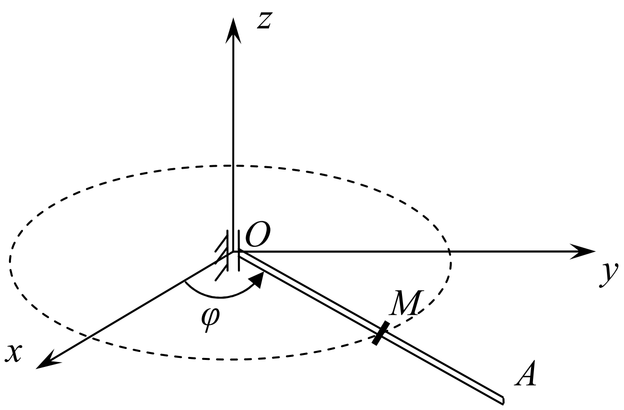


Рисунок 4.10 – Сложное движение шайбы *M*

Свяжем со стержнем *OA* подвижную систему отсчета, тогда прямолинейное движение шайбы *M* вдоль стержня *OA* будет относительным. Система отсчета *Oxyz* будет неподвижна, тогда вращение стержня *OA* относительно оси *z* является переносным движением. Движение шайбы *M* относительно неподвижной системы отсчета *Oxyz* будет абсолютным движением.

Определим положение точки *M* при t_1 =2 с:

$$S = OM = 6 \cdot 2^2 - 2 = 22 \ см.$$

Абсолютную скорость определим с помощью теоремы о сложении скоростей при сложном движении (1.1):

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e .$$

Для определения относительной скорости мысленно останавливаем переносное движение и рассматриваем только относительное движение шайбы M вдоль оси Ox_1. Относительная скорость определяется как первая производная по времени от закона движения:

$$V_r = \frac{dS}{dt} = 12t - 1 \ (см/с) .$$

При t_1 =2 с

$$V_r = 23 \ см/с .$$

Вектор относительной скорости будет направлен вдоль стержня OA в сторону увеличения координаты S (рисунок 4.11).

Для определения переносной скорости мысленно останавливаем относительное движение и рассматриваем только вращение шайбы M со стержнем OA относительно оси z. Переносная скорость определяется как скорость точки вращающегося тела:

$$V_e = \omega_e \cdot OM . \tag{4.3}$$

Значение угловой скорости переносного движения:

$$\omega_e = \frac{d\varphi}{dt} = 8t + 2 \ (рад/с) .$$

При t_1 =2 с

$$\omega_e = 8 \cdot 2 + 2 = 18 \ рад/с .$$

Направление переносной угловой скорости совпадает с положительным направлением угла поворота φ_e, т.к. значение ω_e положительное.

Тогда переносная скорость, определяемая по формуле (4.3), равна:

$$V_e = 18 \cdot 22 = 396 \ см/с$$

Вектор переносной скорости будет лежать в плоскости Oxy перпендикулярно стержню ОА и направлен по направлению ω_e (рисунок 4.11).

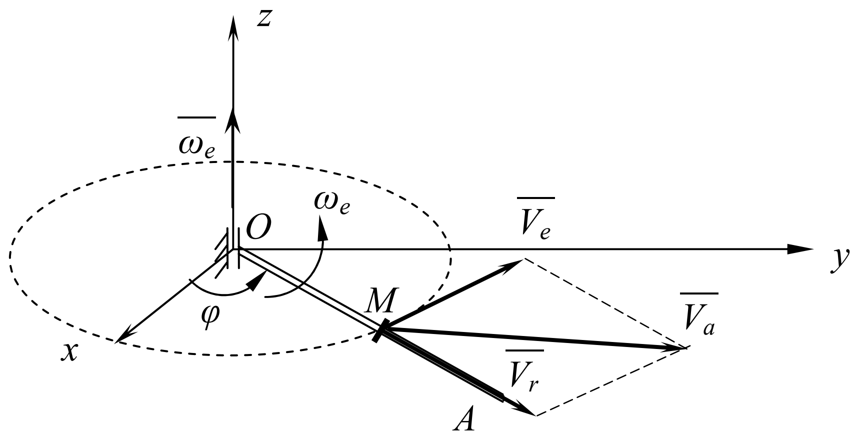


Рисунок 4.11 – Определение вектора абсолютной скорости

Зная величину и направление относительной и переносной скоростей, определим направление и абсолютную скорость по правилу параллелограмма (1.2).

Т.к. векторы относительной и переносной скорости перпендикулярны, то модуль абсолютной скорости определяем по формуле (1.3):

$$V_a = \sqrt{V_r^2 + V_e^2} = \sqrt{23^2 + 396^2} = 396{,}7\ см/с$$

Абсолютное ускорение определим с помощью теоремы о сложении ускорений при сложном движении (1.6), которая, в развернутом виде, имеет вид:

$$\overline{a}_a = \overline{a}_r^\tau + \overline{a}_r^n + \overline{a}_e^\tau + \overline{a}_e^n + \overline{a}_c\,. \tag{4.4}$$

Для определения относительного тангенциального ускорения мысленно остановим переносное движение и рассмотрим только относительное движение, тогда относительное тангенциальное ускорение определится как вторая производная по времени от закона движения S:

$$a_r^\tau = \frac{d^2 S}{dt^2} = 12\ см/с^2\,.$$

Так как значение тангенциального ускорения положительно, как и значение относительной скорости, то направление ускорения совпадает по направлению с положительным направлением отсчета координаты S (рисунок 4.12).

Относительное нормальное ускорение точки M определим как:

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{\rho}\,,$$

где ρ – радиус кривизны траектории относительного движения точки M.

Учитывая, что траектория относительного движения точки – прямая ($\rho=\infty$), то $a_r^n = 0$.

Для определения переносного ускорения мысленно остановим относительное движение шайбы и рассмотрим только переносное движение стержня с шайбой. В данном случае переносное движение – вращательное, потому значение переносного тангенциального ускорения определяется по формуле:

$$a_e^\tau = \varepsilon_e \cdot OM$$

Значение углового ускорения переносного движения равно:

$$\varepsilon_e = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 8 рад/с^2 .$$

Угловое ускорение переносного движения направлено в сторону угловой скорости, т.к. знаки у ω_e и ε_e совпадают.

Тогда

$$a_e^\tau = 8 \cdot 22 = 176 \text{ см/с}^2 .$$

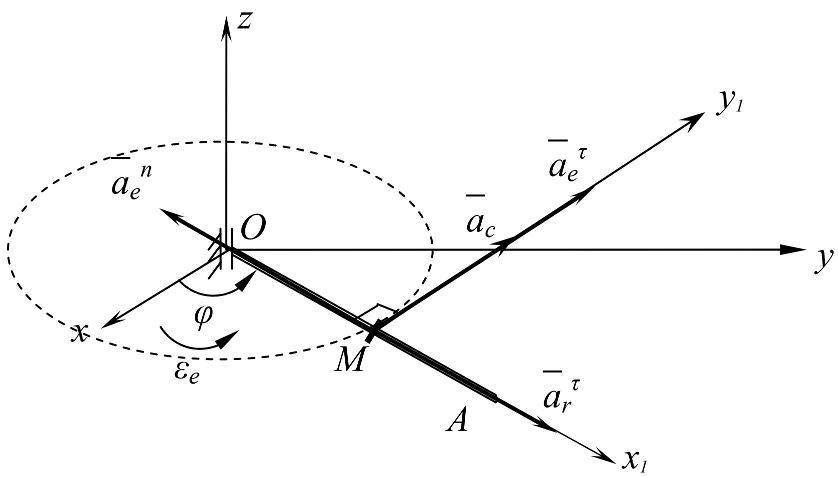


Рисунок 4.12 – Векторы ускорений.

Вектор переносного тангенциального ускорения направлен перпендикулярно OM в сторону ε_e, т.е. совпадает по направлению с вектором переносной скорости.

Значение нормального переносного ускорения равно:

$$a_e^n = \omega_e^2 \cdot OM = 18^2 \cdot 22 = 7128\ см/c^2.$$

Вектор переносного нормального ускорения направлен перпендикулярно вектору переносного тангенциального ускорения к центру кривизны траектории переносного движения, т.е. от точки M к оси вращения (рисунок 4.12).

Значение ускорения Кориолиса определяется по формуле (1.8):

$$a_c = 2|\omega_e| \cdot |v_r| \cdot \sin(\bar{\omega}_e, \hat{} \bar{V}_r) = 2 \cdot 18 \cdot 23 \cdot 1 = 828\ см/с^2.$$

Направление ускорения Кориолиса показано на рисунке 4.12, его можно определить по одному из известных правил (правило Жуковского, правило векторного произведения).

Модуль и направление абсолютного ускорения находим с помощью метода проекций. Т.к. все ускорения лежат в одной плоскости, то спроецируем теорему о сложении ускорений (4.4) на оси x_1 и y_1 (рисунок 4.13):

$$a_{ax_1} = a_r^\tau - a_e^n = 12 - 7128 = -7116\ см/c^2;$$

$$a_{ay_1} = a_e^\tau + a_c = 176 + 828 = 1004\ см/c^2,$$

тогда

$$a_a = \sqrt{a_{ax_1}^2 + a_{ay_1}^2} = 7186{,}4\ см/c^2.$$

Направление вектора абсолютного ускорения показано на рисунке 4.13.

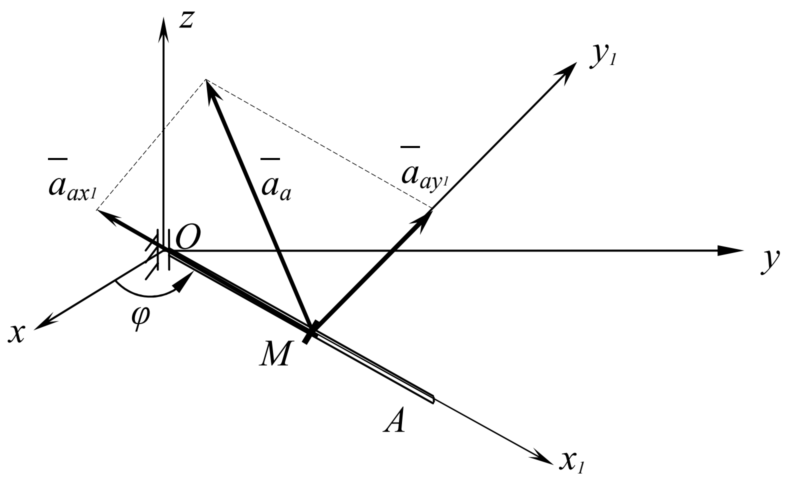


Рисунок 4.13 – Определение вектора абсолютного ускорения т. M

Задача №2

Полое кольцо радиуса r жестко соединено с валом AB, и притом так, что ось вала расположена в плоскости оси кольца. Кольцо заполнено жидкостью, движущейся в направлении стрелки с постоянной относительной скоростью u. Угловая скорость вала ω постоянна. Определить абсолютные скорости и ускорения точек M_1 и M_2 жидкости (рисунок 4.14).

Решение:

Точки M_1 и M_2 жидкости совершают сложное движение, т.к. они одновременно участвуют в двух движениях: в криволинейном движении жидкости внутри кольца и во вращательном движении кольца с жидкостью относительно вала AB.

С кольцом свяжем подвижную систему отсчета, тогда движение частиц жидкости внутри кольца, т.е. относительно подвижной системы отсчета, будет относительным. С валом AB свяжем неподвижную систему отсчета (xyz), тогда вращение кольца относительно оси Ay, т.е. движение подвижной системы отсчета относительно неподвижной, будет являться переносным движением. Очевидно, что движение частицы жидкости относительно AB, т.е. движение точки относительно неподвижной системы отсчета будет абсолютным движением.

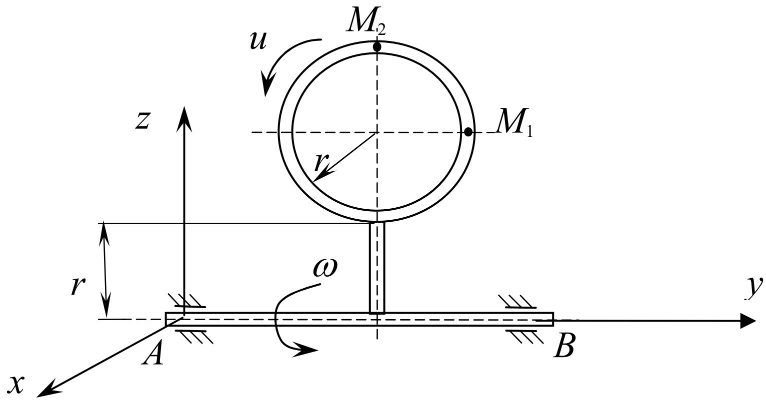


Рисунок 4.14 – Сложное движение точек M_1 и M_2

Абсолютную скорость определим с помощью теоремы о сложении скоростей при сложном движении:

$$\bar{V}_a = \bar{V}_r + \bar{V}_e .$$

В данной задаче значения модулей относительной скорости для всех точек жидкости известны из условия задачи:

$$V_{1r} = V_{2r} = u$$

Вектор относительной скорости для каждой точки будет направлен по касательной к кольцу (рисунок 4.15).

Для определения переносной скорости мысленно останавливаем относительное движение и рассматриваем только вращение точек с кольцом относительно оси y. Модуль переносной скорости определяем как скорость точки вращающегося тела:

$$V_{1e} = \omega \cdot 2r;$$
$$V_{2e} = \omega \cdot 3r,$$

где $2r$ и $3r$ – расстояния от точек M_1 и M_2 до оси y, соответственно;

ω – значение угловой скорости переносного движения.

Векторы переносной скорости перпендикулярны плоскости чертежа, т.е. плоскости кольца и направлены по направлению вращения (рисунок 4.15).

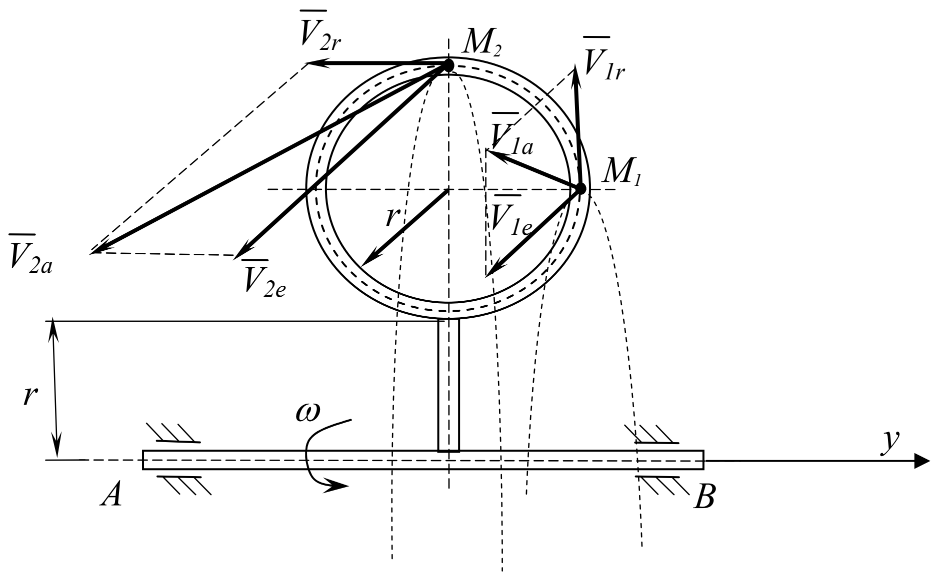


Рисунок 4.15 – Сложение скоростей при сложном движении

Зная направления и модули относительной и переносной скоростей, определим направление и модуль абсолютной скорости по правилу сложения векторов (правило параллелограмма).

Значение абсолютной скорости определим с помощью теоремы Пифагора, т.к. векторы относительной и переносной скорости перпендикулярны:

$$v_{1a} = \sqrt{{v_{1r}}^2 + {v_{1e}}^2} = \sqrt{u^2 + \omega^2 4r^2},$$
$$v_{2a} = \sqrt{{v_{2r}}^2 + {v_{2e}}^2} = \sqrt{u^2 + \omega^2 9r^2}.$$

Абсолютное ускорение определим с помощью теоремы о сложении ускорений при сложном движении, которая в развернутом виде, имеет вид:

(4.3)

$$\bar{a}_a = \bar{a}_r^{\tau} + \bar{a}_r^{n} + \bar{a}_e^{\tau} + \bar{a}_e^{n} + \bar{a}_c .$$

По условию в данном примере относительное тангенциальное ускорение $a_r^{\tau}=0$, т.к. относительная скорость $u=const$; переносное тангенциальное ускорение $a_e^{\tau}=0$, т.к. переносная угловая скорость $\omega_e=const$.

Для определения относительного ускорения мысленно остановим переносное движение и рассмотрим только относительное движение. Относительное ускорение равно:

$$a_{1r}^{n} = a_{2r}^{n} = \frac{u^2}{r} .$$

Векторы относительных нормальных ускорений направлены к центру кривизны траектории (рисунок 4.16).

Для определения переносного ускорения мысленно остановим относительное движение точек жидкости и рассмотрим только переносное движение точек относительно системы отсчета xyz. В данном случае переносное движение – вращательное, потому переносные нормальные ускорения соотвественно равны:

$$a_{1e}^{n} = \omega_e^2 \cdot 2r ,$$
$$a_{2e}^{n} = \omega_e^2 \cdot 3r .$$

Векторы переносных нормальных ускорений направлены к оси вращения y. Направления векторов показаны на рисунке 4.16.

Модули ускорений Кориолиса для точек M_1 и M_2 равны

$$a_{1c} = 2|\omega_e|\cdot|V_{1r}|\cdot\sin(\angle\bar{\omega}_e;\bar{V}_{1r}) = 2\cdot\omega_e\cdot u\cdot 1 = 2\omega_e\cdot u ,$$
$$a_{2c} = 2|\omega_e|\cdot|V_{2r}|\cdot\sin(\angle\bar{\omega}_e;\bar{V}_{2r}) = 2\cdot\omega_e\cdot u\cdot 0 = 0 .$$

Направление ускорения Кориолиса показано на рисунке 4.16, его можно определить по одному из известных правил (правило Жуковского, правило векторного произведения).

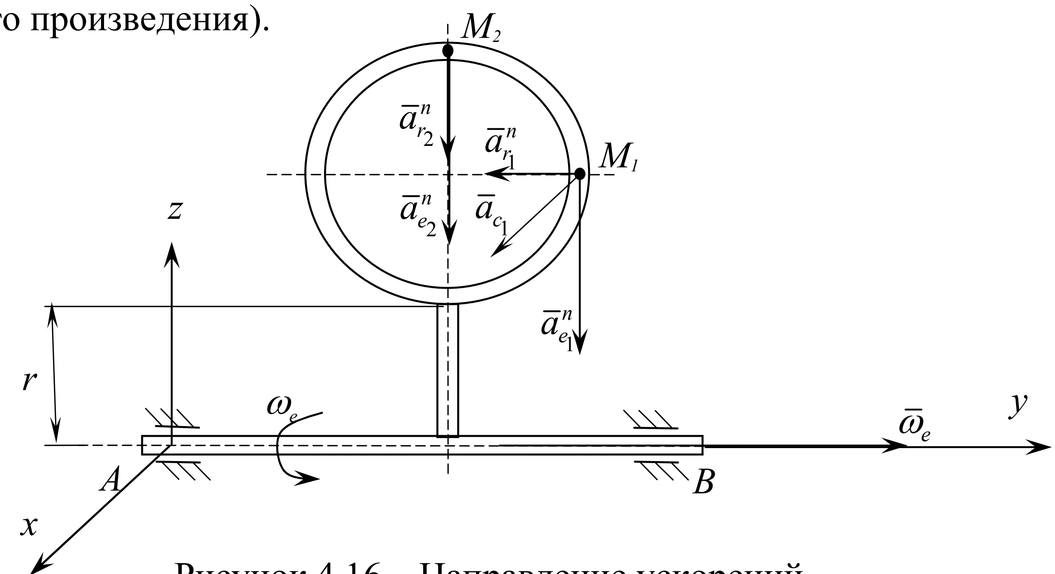


Рисунок 4.16 – Направление ускорений

Модуль абсолютного ускорения определим способом проекций. Для этого спроецируем векторное равенство (4.3) на оси координат *x*, *y* и *z* и найдем проекции вектора абсолютного ускорения на соответствующие оси:

- для точки M_1

$$a_{a_{1x}} = a_{1c} = 2\omega \cdot u\,,$$

$$a_{a_{1y}} = -a_{1r}^n = -\frac{u^2}{r}\,,$$

$$a_{a_{1z}} = -a_{1e}^n = -\omega^2 \cdot 2r\,;$$

- для точки M_2

$$a_{a_{2x}} = 0\,,$$

$$a_{a_{2y}} = -a_{2r}^n - a_{2e}^n = -\frac{u^2}{r} - \omega^2 \cdot 3r\,,$$

$$a_{a_{2z}} = 0\,.$$

Модули абсолютных скоростей точек M_1 и M_2 равны:

$$a_{a_1} = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \sqrt{4\omega^2 \cdot u^2 + \frac{u^4}{r^2} + 4\omega^4 r^2} = \frac{u^2}{r} + 2\omega^2 r \quad см/с^2\,,$$

$$a_{a_2} = \sqrt{a_{ax}^2 + a_{ay}^2 + a_{az}^2} = \frac{u^2}{r} + 3\omega^2 \cdot r \quad см/с^2\,.$$

5 Рекомендуемая литература

1 **Бутенин**, Н.В. Курс теоретической механики: учебник для втузов: в 3 т. Т.1. Статика и кинематика / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. -2-е изд., исправл. -М.: Наука, 2000. - 271 с.

2 **Мещерский,** И.В. Задачи по теоретической механике: учеб. пособие / И.В. Мещерский**;** под ред. Пальмова В.А. , Меркина Д.Р. - 40-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2004. - 448 с.

3 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов / А.А. Яблонский, С.С. Норейко, С.А. Вольфсон; под ред. А.А. Яблонского. - 15-е изд., перераб. и доп. - М.: Интеграл-Пресс, 2006. - 384 с.

4 **Тарг**, С.М. Краткий курс теоретической механики / С.М. Тарг. -8-е изд., исправл. –М.: Наука, 2002. - 480с.