

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное агентство по образованию

Орский гуманитарно-технологический институт (филиал)
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

О. В. Шабашова

ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ТИПОВЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

Часть I

*Утверждено редакционно-издательским советом ОГТИ
в качестве учебно-методического пособия*



Орск 2010

УДК 371.31:51

ББК 74.262.21

Ш12

Научный редактор

*Уткина Т. И., доктор педагогических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры, геометрии,
теории и методики обучения математике
Орского гуманитарно-технологического института*

Рецензенты:

*Макарова Л. Н., доктор педагогических наук, профессор
Тамбовского государственного университета им. Г. Р. Державина;*

*Важенина Т. А., кандидат педагогических наук,
доцент Орского филиала Оренбургского государственного
института менеджмента*

Ш 12 Шабашова, О. В. Теория и методика обучения математике: типовые профессиональные задания : в 2 ч. : учебно-методическое пособие / О. В. Шабашова. – Орск : Издательство ОГТИ, 2010. – Часть 1. – 123 с. – ISBN 978-58424-0535-0.

В части I учебно-методического пособия представлен краткий курс лекций по общим вопросам методики обучения математике, приведено содержание программы самостоятельной работы студентов по дисциплине «Теория и методика обучения математике», предложены типовые профессиональные задания, даны рекомендации по их выполнению. Пособие адресовано студентам физико-математического факультета и учителям математики общеобразовательных учреждений.

ISBN 978-5-8424-0535-0

© Шабашова О. В., 2010

© Издательство ОГТИ, 2010

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	5
1. Общие вопросы методики обучения математике	6
1.1. Краткий курс лекций по общей методике	6
1.1.1. Методика изучения математических понятий. Образование математических понятий	6
1.1.2. Методика изучения математических суждений. Понятие математического суждения	24
1.1.3. Методика обучения доказательствам математических суждений. Состав, цели и свойства доказательства	39
1.1.4. Задачи в обучении математике. Роль задач в обучении математике	56
1.2. Типовые профессиональные задания к практическим занятиям и лабораторным работам для студентов специальности «Математика»	66
1.2.1. Формирование математических понятий	66
1.2.2. Логико-математический анализ суждений, основные этапы работы над теоремой	69
1.2.3. Методика работы с теоремой. Обучение доказательствам	71
1.2.4. Методика обучения решению математических задач	74
1.2.5. Основы разработки урока математики	75
1.2.6. Разработка урока математики по теме «Теорема о вписанном угле»	76
1.2.7. Методика обучения решению математических задач	78
1.2.8. Организация обучения математике	80
1.2.9. Оценка знаний и умений учащихся по математике	83
1.2.10. Непосредственная разработка урока математики	85
1.3. Типовые профессиональные задания к практическим занятиям и лабораторным работам для студентов специальности «Информатика» с дополнительной специальностью «Математика»	88
1.3.1. Формирование математических понятий	88
1.3.2. Логико-математический анализ суждений. Основные этапы работы над теоремой	91
1.3.3. Методика работы с теоремой. Обучение доказательствам	94

1.3.4. Методика обучения решению математических задач.....	96
1.3.5. Организация обучения математике. Оценка знаний и умений учащихся по математике	99
1.3.6. Непосредственная разработка урока математики	103
2. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА	107
2.1. Задания индивидуальной домашней контрольной работы по теме «Методика изучения математических понятий и суждений».....	107
2.2. Указания к выполнению индивидуальной домашней контрольной работы	109
3. ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ	113
ПРИЛОЖЕНИЯ	117
Приложение 1	117
Приложение 2.....	118
Приложение 3.....	119
Приложение 4.....	120
Приложение 5.....	121
Приложение 6.....	122

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно подготовка студентов по дисциплине «Теория и методика обучения математике» осуществляется через систему лекций, практических и лабораторных занятий. При этом основной проблемой остается проблема организации и управления учебной деятельностью студентов. Одним из средств решения этой проблемы выступает предлагаемый в данном учебно-методическом пособии комплекс типовых профессиональных заданий. Его основу составляют типовые задания для самостоятельной работы студентов, направленные на усвоение содержания лекционного курса и овладение различными видами профессиональной деятельности учителя математики в ходе практических и лабораторных занятий.

Часть 1 учебно-методического пособия охватывает первый раздел программы дисциплины «Теория и методика обучения математике» – «Общая методика».

В пособии приведено содержание программы самостоятельной работы студентов по данному разделу, изучение которого предусмотрено в V и VI семестрах. Представлен краткий курс лекций по общим вопросам методики обучения математике, к каждой лекции прилагается перечень контрольных вопросов, заданий для самопроверки и список литературы, позволяющий углубить учебный материал. Предложены разработки практических и лабораторных занятий. В их основу положены задания для самостоятельной работы студентов, соответствующие типовым заданиям профессиональной деятельности учителя математики, даны рекомендации по их выполнению. Предлагаемая итоговая домашняя контрольная работа направлена на диагностику качества методической подготовки учителя математики по разделу общей методики.

1. Общие вопросы методики обучения математике

1.1. Краткий курс лекций по общей методике

1.1.1. Методика изучения математических понятий. Образование математических понятий

Одной из основных задач обучения является развитие целенаправленного мышления. Развитие мышления в свою очередь предполагает формирование различных понятий, так как они выступают в качестве основной формы мышления. Формирование понятийного аппарата – основная задача учителя математики при изучении любой темы.

Понятие – форма мышления, в которой отражены существенные признаки объектов изучения.

Процесс формирования понятий чаще всего протекает по схеме: ощущения – восприятие – представление – понятие. В этом процессе можно выделить две ступени: *чувственную* и *логическую*.

Чувственная ступень соответствует первому этапу познания «живому созерцанию» и основывается на восприятии и представлении.

Восприятие существует в сознании человека в то время, когда какие-либо предметы или явления воздействуют на органы его чувств.

Представление – это запечатленный в нашем сознании образ предмета или явления, в данный момент нами не воспринимаемого.

Логическая ступень предполагает переход от восприятий и представлений большого числа однородных явлений и предметов к понятию с помощью обобщения и абстрагирования.

Образование понятий происходит посредством таких логических приемов, как анализ и синтез, абстракция и обобщение. Понятия возникают, существуют и выражаются в слове, в речи. Слова сами по себе не образуют понятий, а являются орудием их образования, средством их фиксации и передачи другим людям.

Математические понятия обладают множеством признаков, но не все они являются существенными.

Существенными признаками понятия называются такие признаки, каждый из которых необходим, а все вместе достаточны для выделения данного объекта среди множества других.

Пример 1. Понятие параллельных прямых предполагает наличие следующих признаков:

- 1) принадлежность одной плоскости;
- 2) отсутствие общих точек.

Покажем, что каждый признак необходим.

Отбросим 1-ый признак, сохранив 2-ой: рассматриваемое множество пополнится скрещивающимися прямыми.

Сохраним 1-ый признак, отбросив 2-ой: в рассматриваемое множество войдут все прямые плоскости.

Вывод: данные признаки являются существенными для понятия параллельных прямых.

Одно понятие может иметь множество наборов существенных признаков.

Пример 2. Понятие «ромб» обладает существенными признаками:

- 1) четырехугольник;
- 2) параллелограмм;
- 3) взаимно перпендикулярные диагонали;
- 4) две смежные стороны равны между собой;
- 5) четыре стороны равны между собой;
- 6) диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

Но для определения понятия ромба нет надобности перечислять все эти признаки, можно ограничиться указанием некоторых из них.

В рассмотренном примере это могут быть следующие наборы существенных признаков, определяющих понятие ромба:

$$\text{ромб} = 1 + 3 + 6 = 2 + 3 = 2 + 4 = 1 + 5.$$

Вывод: выбор существенных признаков для характеристики понятия не является однозначным.

Наряду с существенными выделяют и *несущественные* признаки понятия.

Пример 3. Несущественные признаки:

1) понятия «трапеция»:

- горизонтальность параллельных сторон;
- наличие острых углов при большем основании;

2) понятия «квадратное уравнение»:

- использование буквы x в качестве неизвестного;
- целочисленные значения коэффициентов.

Вывод: при введении нового понятия следует учитывать как существенные, так и несущественные признаки.

Содержание и объем понятия. Классификация понятий

В каждом понятии выделяют содержание и объем.

Содержание понятия – совокупность существенных признаков объектов, охватываемых понятием.

Объем понятия – совокупность объектов, на которые распространяется данное понятие.

Пример 4. Понятие «координатная прямая».

Содержание данного понятия представляет собой совокупность признаков:

- 1) прямая линия;
- 2) на ней выбрано начало отсчета;
- 3) выбрана единица измерения;
- 4) указано направление.

Объем понятия: множество мыслимых координатных прямых.

Вывод: содержание понятия жестко определяет его объем и, наоборот, объем понятия вполне определяет его содержание.

Между содержанием и объемом понятия существует *обратная зависимость*: изменение в сторону увеличения одной из характеристик понятия приводит к изменению в сторону уменьшения другой. Так, например, увеличение содержания понятия ведет к уменьшению его объема.

Пример 5. Понятие «тупоугольный треугольник» имеет большее содержание, чем понятие «треугольник», так как включает не только признаки всех треугольников, но и новый признак – наличие тупого угла. В то же время, понятие «тупоугольный треугольник» имеет меньший объем, чем понятие «треугольник», поскольку включает не все треугольники.

Процесс увеличения содержания понятия и уменьшения его объема называется *классификацией* понятия. Обратный процесс называется *обобщением*.

По отношению объемов различают следующие виды понятий:

- *равнозначные* (квадрат и ромб с прямым углом);
- *пересекающиеся* (равнобедренные треугольники и тупоугольные треугольники);
- *противоречащие* (простые и составные числа);
- *понятия, находящиеся в отношении включения или соподчинения* (функции, линейные функции).

В последнем случае понятие, объем которого содержит объем другого понятия, называют родовым (функции), а второе понятие – видовым (линейные функции). Это отношение между понятиями обусловило способ определения понятия *через ближайший род и видовые отличия*.

Конструирование определения в этом случае состоит в следующем:

- 1) в указании ближайшего рода, в который определяемое понятие входит как вид;
- 2) в указании видовых отличий и связи между ними (конъюнкция или дизъюнкция).

Под классификацией понимается разделение множества объектов, составляющих объем родового понятия, на виды. Это разделение основано на сходстве объектов одного вида и отличии их от объектов других видов в существенных признаках.

Классификация должна удовлетворять ряду *требований*.

1. Классификация должна проводиться по определенному признаку, остающемуся неизменным в процессе классификации. Этот признак называют основанием классификации.

2. Понятия, образующиеся в процессе классификации, должны быть независимыми.

3. Сумма объемов понятий, получающихся в процессе классификации, должна равняться объему исходного понятия.

Различают *два* основных вида классификации:

- членами классификации являются противоречащие понятия (дихотомическая классификация);
- членами классификации являются соподчиненные понятия.

Пример 6. Дихотомическая классификация.

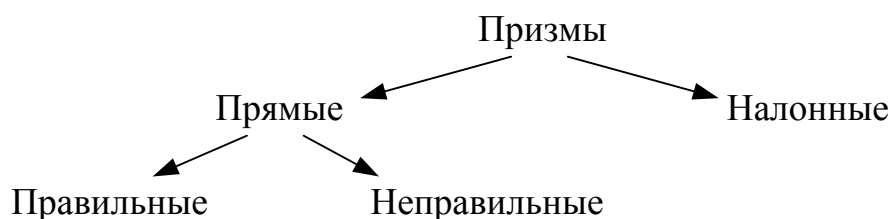


Рис. 1

Пример 7. Классификация на основе соподчиненных понятий.

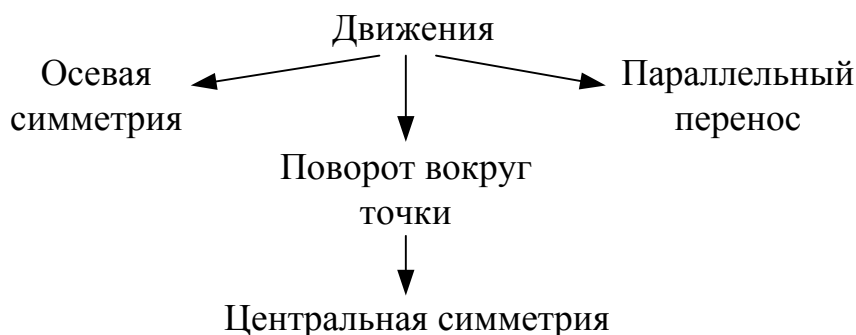


Рис. 2

Иногда построить полную классификацию математических понятий удастся через диаграммы Эйлера-Венна (рис. 3) или через таблицу «в два входа» (таблица 3).

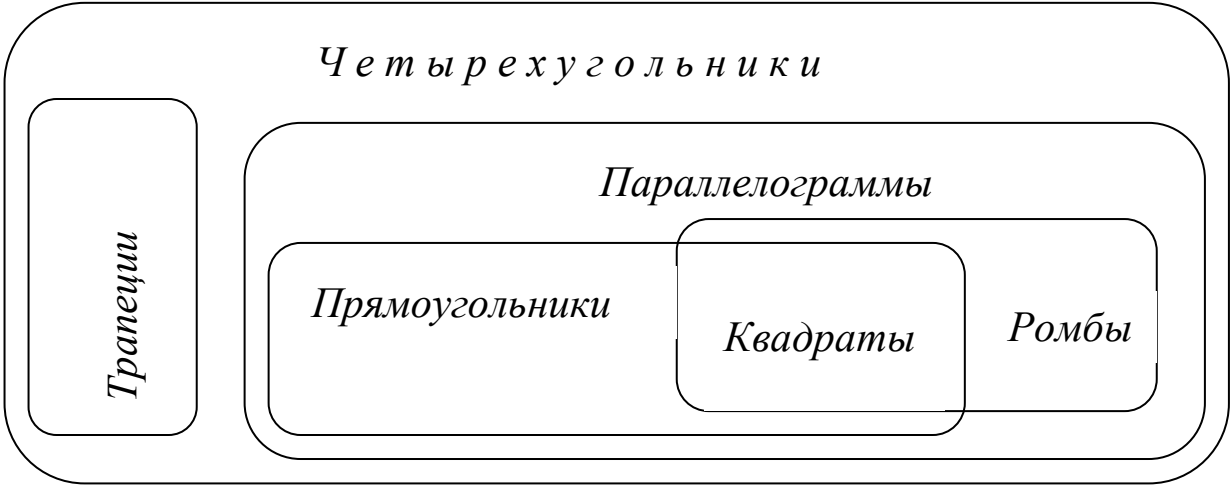
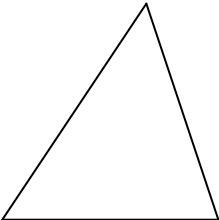
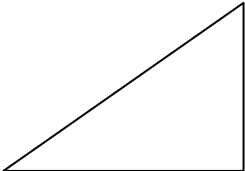
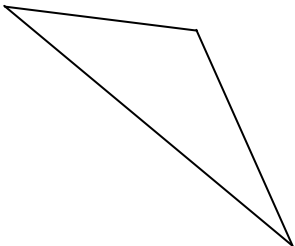
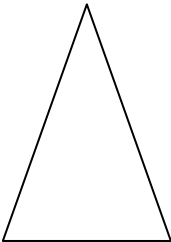
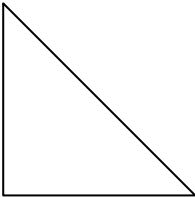
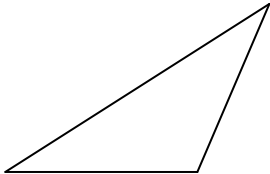
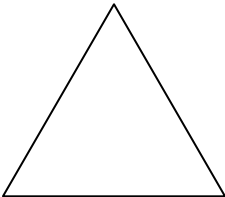


Рис. 3

Таблица 3

	Остроугольные	Прямоугольные	Тупоугольные
Разносторонние			
Равнобедренные неравносторонние			
Равносторонние		-	-

Классификация помогает осознать сущность понятий через разграничение объемов понятий, через выяснение соотношений между объемами понятий, образующихся в процессе классификации.

Определение понятий. Виды определений понятий.

Ошибки в определениях

Определением понятия называется логическая операция по выделению содержания вводимого понятия через перечисление его существенных признаков.

Определением понятия служит такая формулировка, которая сводит определяемое понятие к уже известным понятиям конкретной научной области. Определение является основным средством введения в математические разделы новых понятий.

Чтобы определение было пригодным для науки, необходимо, чтобы определяемый объект существовал. Поэтому принятие определения всегда предполагает, что может быть доказано существование определяемого объекта. Виды определений иллюстрирует схема 1.

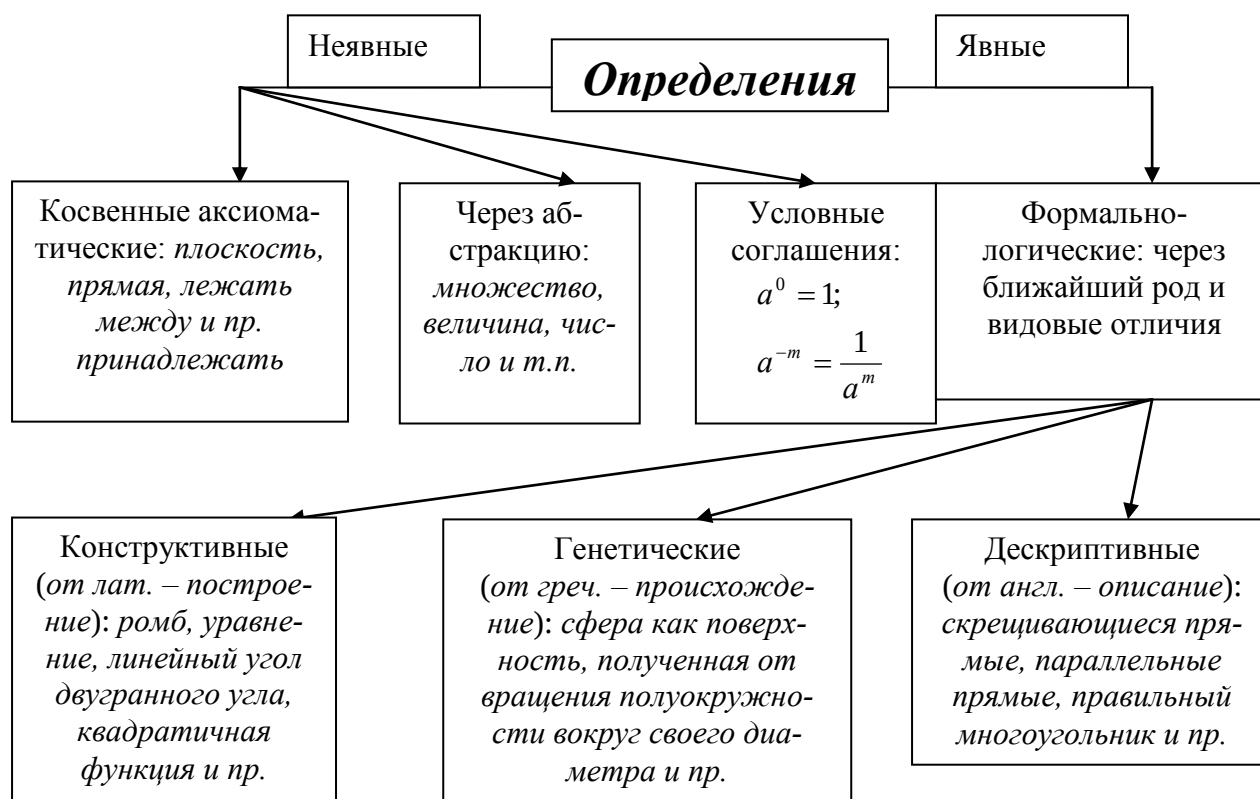


Схема 1

Явные и неявные определения различаются в зависимости от своей структуры. Явные определения содержат прямое указание на существенные признаки определяемого понятия. Чаще всего эти определения содержат слово «называется». Таких определений большинство. Но существуют определения, которые нельзя построить через слово «называется». Это так называемые неявные определения. К ним относятся определения понятий, составляющих основу той или иной теории, построенной на системе аксиом. Говорят, что эти понятия определяются косвенно, аксиоматически.

В алгебре ряд понятий вводится через определения условного соглашения. В связи с этими определениями возникает задача – показать целесообразность того или иного соглашения. Чаще всего определения такого вида выражаются символическим языком в виде равенств.

Когда определяющие понятия сами уже имеют достаточно высокий уровень абстракции, то говорят об определении через абстракцию. Такие определения, как правило, встречаются в курсе высшей математики.

Формально-логические определения делятся на три группы.

В *конструктивных* определениях видовые отличия заданы в виде действий, а потому позволяют построить или получить определяемый объект. Достоинство таких определений, применяемых в геометрии, состоит в том, что их анализ легко приводит к доказательству существования определяемого объекта.

Определения, в которых указывается способ образования определяемых объектов, являются *генетическими*. Их преимущество в том, что отпадает необходимость в доказательствах существования определяемых понятий.

В *дескриптивных* (описательных) определениях определяемый объект характеризуется с помощью взаимоотношений, связывающих его с другими объектами. Из таких определений прямо не следует,

как можно проверить существование объекта, обладающего описанными свойствами. В этом случае необходимо доказывать теорему существования или решать задачу на построение определяемого объекта. Среди таких определений выделяются отрицательные определения, выполняющие классификационную функцию.

В определении математического понятия следует различать логическую структуру. Под *логической структурой определения*, построенного по схеме:

$$A(x) \quad \Leftrightarrow \quad B(x),$$

по определению

понимают структуру его правой части, то есть $B(x)$. В школьном курсе математики наиболее распространены конъюнктивная и дизъюнктивная структуры определений.

Конъюнктивная структура может быть проиллюстрирована схемой:

$$x \in A \Leftrightarrow B_1(x) \text{ и } B_2(x) \text{ и } \dots \text{ и } B_n(x).$$

Логическая структура определения задает методику работы с этим определением на уроке. В случае конъюнктивной структуры вводимого определения учитель должен акцентировать внимание учащихся на том, что некоторый объект x будет принадлежать к классу A , если он обладает всеми свойствами $B_1(x)$ и $B_2(x)$ и ... и $B_n(x)$, и не будет принадлежать к этому классу, если не обладает хотя бы одним из этих свойств.

Определения *дизъюнктивной структуры* имеют вид: $x \in A \Leftrightarrow B_1(x) \text{ или } B_2(x) \text{ или } \dots \text{ или } B_n(x)$. При работе с такими определениями на уроке важно подчеркнуть, что данный объект принадлежит классу A , если он обладает хотя бы одним из свойств $B_1(x)$, $B_2(x)$, ... $B_n(x)$, и не принадлежит этому классу, если не обладает ни одним из этих свойств.

Осознать логическую структуру определения помогают упражнения на распознавание понятий.

При работе с определениями понятий зачастую возникают типичные ошибки, которые можно классифицировать следующим образом.

I. Ошибки, связанные с неправильным указанием родового понятия:

1. Отсутствует указание на родовое понятие: *«Ромб – это когда стороны равны»*.

2. Указывается не то родовое понятие, к которому данное понятие относится: *«Хорда – это прямая, соединяющая две точки окружности»*.

3. Указывается не ближайшее родовое понятие: *«Квадрат – равносторонний и равноугольный четырехугольник»*.

II. Ошибки, связанные с неправильным указанием видовых отличий:

1. Указываются не все видовые отличия: *«Угол, образованный двумя хордами, называется вписанным в окружность»* (пропущен признак – вершина угла лежит на окружности).

2. Указываются лишние видовые отличия (избыточное определение): *«Параллелограммом называется четырехугольник, у которого противоположные стороны попарно равны и параллельны»*.

III. Ошибки, связанные с «порочным кругом» и тавтологией:

1. «Порочный круг»: *«Прямым углом называется угол в 90° , а градусом называется $1/90$ часть прямого угла»*.

2. Тавтология: *«Равными треугольниками называются треугольники, равные между собой»*.

IV. Ошибки, связанные с пропуском слов, не относящихся ни к роду, ни к видовым отличиям:

«Четырехугольник, у которого стороны параллельны, называется параллелограммом» (пропуск слова – «попарно»).

Исправлять ошибки школьников в определениях помогают контрпримеры, цель которых – продемонстрировать такие объекты, которые удовлетворяют приведенному «определению», но не входят

в объем данного понятия. Так, например, если ученик определил среднюю линию трапеции как «линию, которая соединяет середины ее противоположных сторон», целесообразно привести контрпримеры (рис. 4). Они помогают убедить школьника в ошибочности его «определения» и позволяют осознать важность каждого слова в определении понятия.

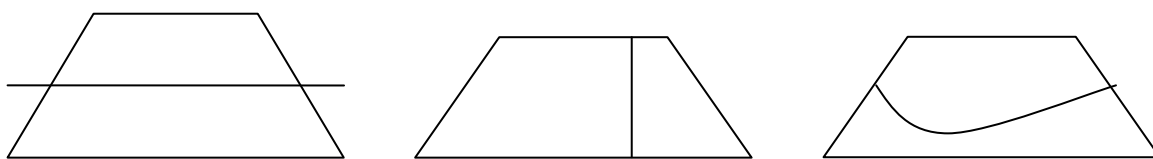


Рис. 4

Введение понятий в процессе обучения математике

В математике понятия вводятся с помощью определений. В процессе обучения математике введение понятий может осуществляться двумя путями: конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным.

При *конкретно-индуктивном* методе введения понятия определение понятия появляется в конце рассуждений. Учитель, подключая учащихся к рассмотрению конкретных примеров, подводит их к образованию нового понятия. При умелой организации этого процесса школьники сами способны сформулировать определение нового понятия. При введении понятия конкретно-индуктивным методом обычно придерживаются следующей схемы:

Восприятие $\Rightarrow$ Представление $\Rightarrow$ Понятие $\Rightarrow$ Определение.

Конкретизируя приведенную схему, можно выделить следующие этапы реализации конкретно-индуктивного метода:

- 1) рассмотрение примеров, позволяющих выделить существенные и несущественные признаки вводимого понятия;
- 2) введение термина, обозначающего это понятие, справка о его происхождении;
- 3) первичная формулировка определения нового понятия;

4) коррекция определения, его четкая формулировка.

Абстрактно-дедуктивный метод предполагает, что определение вводится сразу, в готовом виде, без предварительного разъяснения на конкретных примерах и образцах. Схема введения понятия при этом такова:

Понятие $\Rightarrow$ Определение $\Rightarrow$ Примеры $\Rightarrow$ Контрпримеры.

Этот метод введения понятия применяется тогда, когда новое понятие связано с уже известными учащимся понятиями или в случае, когда сложно организовать процесс выявления существенных признаков нового понятия.

Пример 8. Конкретно-индуктивный способ введения понятия «смежные углы».

<i>Восприятие и представление</i>	<i>Учитель:</i> Постройте угол. Продлите его сторону за вершину.
<i>Понятие</i>	<i>Учитель:</i> Вы получили два угла, которые называются смежными.
<i>Определение</i>	<i>Учитель:</i> Попробуйте сформулировать определение смежных углов.

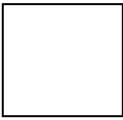
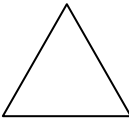
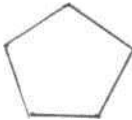
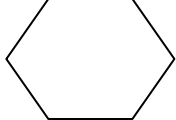
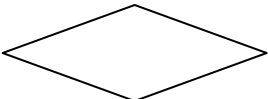
Пример 9. Конкретно-индуктивный способ введения понятия «медиана».

<i>Восприятие и представление</i>	<i>Учитель:</i> Постройте произвольный треугольник. Соедините отрезком его вершину с серединой противоположной стороны.
<i>Понятие</i>	<i>Учитель:</i> Такой отрезок называется медианой. Термин «медиана» от латинского <i>medianus</i> – <i>средний</i> .
<i>Определение</i>	<i>Учитель:</i> Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Пример 10. Конкретно-индуктивный способ введения понятия «геометрическая прогрессия».

<i>Восприятие и представление</i>	На доске записаны последовательности: 4; 12; 36; 108; ... -10; 20; -40; 80; ... $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{4}{3}$; $\frac{8}{3}$;... <i>Учитель:</i> Все последовательности похожи между собой. В чем их сходство?
<i>Понятие</i>	<i>Учитель:</i> Такие последовательности называются геометрическими прогрессиями.
<i>Определение</i>	<i>Учитель:</i> Какие последовательности называются геометрическими прогрессиями?

Пример 11. Абстрактно-дедуктивный способ введения понятия «правильный многоугольник».

<i>Понятие</i>	<i>Учитель:</i> С древних времен символами многочисленных мистических школ и магических обществ всех рас являлись фигуры, построенные на основе правильных многоугольников.
<i>Определение</i>	<i>Учитель:</i> Правильным многоугольником называется выпуклый многоугольник, все стороны и все углы которого равны.
<i>Примеры</i>	На доске приводятся изображения правильных многоугольников:    
<i>Контрпримеры</i>	Рассматриваются примеры многоугольников, которые не являются правильными, несмотря на наличие некоторых необходимых свойств:  

Выбор учителем математики метода введения нового понятия на уроке обусловлен степенью абстракции самого понятия, возрастными

ми особенностями школьников, а также уровнем их математической подготовки.

Таблица 4

Особенности введения нового понятия	
Конкретно-индуктивным методом	Абстрактно-дедуктивным методом
1. Требуется от учителя подбора специально подготовленных заданий для выявления существенных признаков вводимого понятия. 2. Способствует самостоятельному «открытию» учащимися новых знаний. 3. Требуется дополнительных затрат учебного времени. 4. Может «распылять» внимание учащихся на второстепенные детали, отвлекая их от основного материала	1. Требуется от учителя подбора примеров с учетом варьирования несущественных признаков понятия и контрпримеров. 2. Экономит учебное время, сосредотачивая усилия учащихся на усвоении и закреплении нового материала

Этапы формирования понятия

Формирование понятия более длительный процесс, чем его образование. Образование понятия связано с изучением и овладением его содержанием, а формирование понятия характеризуется еще и овладением его объемом.

Этапами формирования понятия являются:

- 1) мотивация введения понятия;
- 2) определение понятия;
- 3) усвоение логической структуры определения понятия;
- 4) классификация понятия, позволяющая раскрыть его объем.

Сущность мотивации заключается в подчеркивании важности изучаемого понятия, в возбуждении познавательного интереса к вводимому понятию. Одним из средств мотивации служит выполнение упражнений практического характера. Но следует помнить, что мотивация введения понятия может быть обусловлена и чисто теоретическими потребностями самой математики.

Основными этапом в процессе формирования понятия является его определение. Важно, чтобы учащиеся понимали, что определения не доказываются.

Усвоение логической структуры определения понятия полезно осуществлять через систему упражнений на распознавание понятия. Выполнение подобных упражнений помогает устранить плохую привычку учащихся: делать выводы исходя не из данных задачи, а из чертежа, если речь идет о геометрических понятиях.

Пример 12. Упражнение на распознавание понятия «параллелограмм».

Задание: Какие фигуры на рисунке являются параллелограммом?

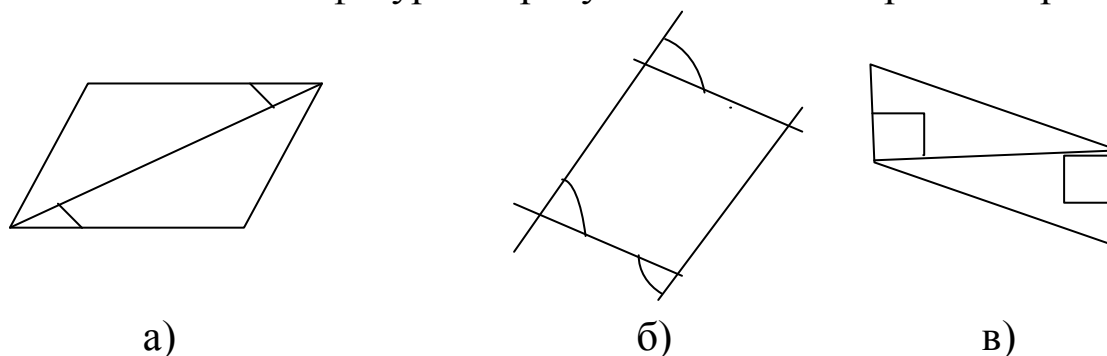


Рис. 5

Пример 13. Упражнение на распознавание понятия «арифметическая прогрессия».

Задание: Какие из данных последовательностей являются арифметическими прогрессиями?

$$(a_n): 2; 12; 22; 32; \dots$$

$$(b_n): -4; 1; 6; 11; \dots$$

$$(c_n): \sqrt{3}+1; 2\sqrt{3}; 3\sqrt{3}-1; \dots$$

$$(x_n): 1; 1; 1; \dots$$

$$(y_n): -\frac{1}{7}; 1; -7; 49; \dots$$

Классификация систематизирует знания учащихся и содействует развитию логического мышления, помогая уточнить зависимость между содержанием и объемом понятия. Если возможно, следует давать классификацию объектов, приступая к изучению новой темы:

это сразу приводит дальнейшее изложение в определенную систему. Для лучшего усвоения классификации полезно чертить разнообразные схемы в тетрадях, а также иметь наглядный материал в кабинете математики.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под понятием?
2. Какие формы психологической деятельности являются источниками возникновения математических понятий?
3. Перечислите логические приемы, лежащие в основе образования понятия.
4. Какие признаки понятия называются существенными?
5. Дайте определение содержания и объема понятия.
6. Какова связь между содержанием и объемом понятия?
7. Охарактеризуйте процесс классификации и обобщения понятия с точки зрения изменения содержания и объема. Приведите пример.
8. На какие две группы и по какому признаку делятся определения математических понятий?
9. В чем суть логической операции по определению понятия?
10. Какие виды формально-логических определений Вам известны?
11. Какие виды неявных определений Вам известны?
12. Какова специфика введения определения – условного соглашения?
13. В чем особенность дескриптивных определений?
14. Перечислите виды ошибок в определениях математических понятий.
15. Укажите основные виды логической структуры определений.
16. Какие виды классификации понятий Вам известны? Приведите примеры.

18. Какова схема введения понятия конкретно-индуктивным методом?
19. Какова схема введения понятия абстрактно-дедуктивным методом?
20. Каковы достоинства и недостатки введения понятия конкретно-индуктивным методом?
21. Каковы достоинства и недостатки введения понятия абстрактно-дедуктивным методом?
22. Перечислите этапы формирования понятия.

Задания для самопроверки

1. Правильно ли обобщены понятия:
 - ромб $\Rightarrow$ параллелограмм $\Rightarrow$ четырёхугольник $\Rightarrow$ многоугольник;
 - параллельные прямые $\Rightarrow$ скрещивающиеся прямые;
 - усечённая пирамида $\Rightarrow$ пирамида;
 - линейное уравнение $\Rightarrow$ квадратное уравнение;
 - уравнение $\Rightarrow$ неравенство.
2. Какие из ниже перечисленных определений являются правильными? К каждому неправильному определению подберите, если можно, контрпример, иллюстрирующий его ошибочность:
 - прямоугольником называется четырёхугольник, диагонали которого равны;
 - параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого параллельны;
 - ромбом называется параллелограмм, две смежные стороны которого равны между собой;
 - квадратом называется ромб, у которого диагонали равны;
 - медианой треугольника называется отрезок, делящий его сторону пополам;

– касательной к окружности называется прямая, которая касается окружности.

3. Дополните определения:

– квадрат – прямоугольник, у которого ...

– прямоугольник – это ..., у которого противоположные углы прямые;

– треугольник – это ... с наименьшим числом сторон.

Список литературы

1. Виленкин, Н. Я. Определения в школьном курсе математики, методика работы с ними / Н. Я. Виленкин, С. К. Абайдулин, Р. К. Товаркиладзе // Математика в школе. – 1984. – № 4. – С. 43.

2. Войшвилло, Е. К. Понятия как форма мышления / Е. К. Войшвилло. – М., 1989.

3. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: книга для учителя / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990.

4. Дразнин, И. Е. О работе над определениями / И. Е. Дразнин // Математика в школе. – 1995. – № 5. – С. 9.

5. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. инт-ов / А. Я. Блох, Е. С. Канин и др. ; сост. Р. С Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.

6. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – М. : Просвещение, 1980.

7. Никитин, В. В. Определения математических понятий в курсе средней школы / В. В. Никитин, К. А. Рупасов. – М. : Просвещение, 1963.

8. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005.

9. Столяр, А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. – Минск : Высшая школа, 1974.

10. Тарасенко, Н. А. Найти ошибку / Н. А. Тарасенко // Математика в школе. – 1997. – № 2. – С. 19.

11. Финкельштейн, В. М. О подготовке учеников к изучению нового понятия, новой теоремы / В. М. Финкельштейн // Математика в школе. – 1996. – № 6. – С. 21.

1.1.2. Методика изучения математических суждений. Понятие математического суждения

В мышлении понятия не выступают разрозненно, они определенным образом связываются между собой. Формой связи понятий друг с другом является суждение.

Суждение – это такая форма мышления, в которой отображается наличие или отсутствие самого объекта, его признаков и связей.

Пример 1

Суждение А: {любое четное число делится на 2}.

Суждение В: {во всяком треугольнике три медианы пересекаются в одной точке}.

Суждение С: {всякий параллелограмм является ромбом}.

Всякое суждение является предложением, но не каждое предложение является суждением в математическом смысле. Предложение, о котором невозможно однозначно решить вопрос, истинно оно или ложно, суждением не является. Вопросительное и побудительное предложения также не являются суждениями.

Во всяком суждении различают субъект и предикат.

Субъект – те объекты, о которых идет речь в суждении (числа, точки, фигуры и т. п.).

Предикат – то, что утверждается или отрицается об описанных в субъекте объектах.

Пример 2

а) Суждение А: {диагонали прямоугольника равны}.

Субъект: параллелограмм.

Предикат: параллелограмм, являющийся прямоугольником, имеет равные диагонали.

б) Суждение В: {сумма углов треугольника равна 180° }.

Субъект: многоугольник.

Предикат: если многоугольник является треугольником, сумма его углов равна 180° .

В школьном курсе математики суждения выступают под различными названиями: правило, аксиома, свойство, признак, теорема, лемма, следствие. Важнейшими видами суждений являются аксиомы и теоремы.

Аксиомы

В каждой математической науке аксиомы возникают в процессе ее долгого и сложного исторического развития.

Первоначальные факты накапливаются в результате практической деятельности человека. Их уточняют и систематизируют, затем исключают из них те, которые могут быть выведены из других первоначальных фактов. В результате получается набор некоторых предложений, истинность которых необходимо принять без доказательства.

Итак, *аксиома* (греч. «предложение, достойное уважения») – положение, принимаемое без доказательства.

Некоторое время существовал взгляд, что аксиома – это очевидная, установленная на практике «истина», не требующая доказательств. Но аксиомы принимают без доказательств не потому, что они очевидны, а потому, что для их доказательств еще нет никакого исходного материала.

Ряд строго отобранных аксиом определенной теории составляет систему аксиом.

Со времен Аристотеля (IV в. до н.э.) к системе аксиом предъявлялись требования быть достаточно простыми и очевидными. С точки

зрения методики эти требования не потеряли своей силы и в настоящее время. Но с точки зрения науки математики к системе аксиом предъявляются более высокие требования: независимость, непротиворечивость, полнота.

Важнейшим требованием к системе аксиом является ее непротиворечивость, которую можно понимать так: сколько бы мы ни выводили теорем из этих аксиом, среди них не будет двух теорем, противоречащих друг другу. Системы аксиом школьного курса математики обязательно удовлетворяют только этому требованию.

Учебная литература обычно подходит к изложению аксиом формально: дается формулировка аксиомы, а ее конкретное содержание не вскрывается, не приводится никаких пояснений. В этом случае задача учителя – организовать введение аксиом через рассмотрение частных случаев, чертежей, моделей. Такой подход к изучению аксиом позволяет обеспечить сознательность их усвоения, помогает легче запомнить формулировки.

Пример 3. Пусть требуется ввести аксиому: «Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку».

Составляется *модель*: треугольная пластинка прикрепляется вершиной к плоскости, покрытой пластилином (рис. 6). Задается вопрос: «Могут ли две различные плоскости иметь только одну общую точку?». Некоторые учащиеся дают поспешный ответ «Да». Тогда учитель совмещает с треугольной пластиной прямоугольную, опуская её на плоскость, покрытую пластилином. После такой иллюстрации аксиома усваивается осознанно.

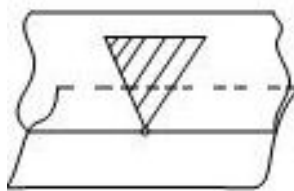


Рис. 6

Теоремы и их логическая структура

Перед школьным курсом математики ставится задача – научить учащихся сознательно пользоваться определенной системой теорем, применяя их для обоснования истинности других теорем и решения задач.

Теорема (греч. «представление, зрелище») – суждение, истинность которого установлена при помощи рассуждения, доказательства.

В силу этого определения выражения типа «неверная теорема», «недоказуемая теорема», «обратная теорема неверна» следует считать недопустимыми. В данных словосочетаниях возможно употребление терминов «утверждение» или «предложение».

Структура теоремы

Существуют различные по составу и форме теоремы, но в каждой из них различают три составные части:

- 1) разъяснительную, описывающую те объекты или отношения, о которых будет идти речь в теореме;
- 2) условие, содержащее те свойства объекта или отношения, которые считаются известными;
- 3) заключение, содержащее те свойства объекта или отношения, истинность которых подлежит обоснованию.

Пример 4

1. Теорема Пифагора

Разъяснительная часть:

($\forall T$, T – треугольник со сторонами a , b , c , где c – наибольшая).

Условие: (T – прямоугольный) $\Rightarrow$

Заключение:

(квадрат большей стороны равен сумме квадратов двух других сторон: $c^2 = a^2 + b^2$).

2. Признак делимости на 3

Разъяснительная часть: ($\forall n$, $n \in \mathbb{N}$).

Условие: (сумма цифр числа делится на 3) $\Rightarrow$

Заключение: $(n:3)$.

3. Теорема о сумме углов в треугольнике

Разъяснительная часть: $(\forall F, F\text{-многоугольник})$.

Условие: $(F\text{-треугольник}) \Rightarrow$

Заключение: (сумма внутренних углов равна 180°).

В школьной практике разъяснительная часть и условие теоремы пишутся после слова «дано», а заключение – после слова «доказать». Между тем, умение выделять три составные части в теореме необходимо для дальнейшей работы над теоремой, в частности, для правильного построения обратного утверждения.

По числу условий и заключений теоремы делятся на два класса: простые и сложные.

Теорема называется *простой*, если она содержит только одно условие и одно заключение.

Теорема называется *сложной*, если она содержит или несколько условий, или несколько заключений, или несколько условий и заключений.

Пример 5

Простые теоремы

Диагонали ромба пересекаются под прямым углом.

Вертикальные углы равны.

Сложные теоремы

Средняя линия треугольника параллельна третьей стороне и равна ее половине (два заключения).

Признак делимости на 6. Если число делится на 2 и на 3, то оно делится на 6 (два условия).

Сложная теорема, имеющая несколько заключений, может быть разложена на столько теорем, сколько заключений.

Одной из отличительных особенностей учебника геометрии А. В. Погорелова является наличие большого количества сложных теорем, что вызывает определенные методические трудности. При

изучении таких теорем целесообразно разбивать их на несколько простых теорем.

Теоремы классифицируют не только по составу, но и по форме. Почти все теоремы можно построить или *в условной форме* – «если А, то В», или *в категорической* – «А суть В».

Пример 6

1. Теорема о свойстве вертикальных углов

Категорическая форма: Вертикальные углы равны.

Условная форма: Если углы вертикальные, они равны.

2. Свойство диагоналей прямоугольника

Категорическая форма: В прямоугольнике диагонали равны.

Условная форма: Если параллелограмм является прямоугольником, то его диагонали равны (параллелограмм – ближайший род, хотя и не обязательно).

С методической точки зрения более доступной для восприятия является теорема, построенная в условной форме, поскольку в ней четко разграничиваются условие и заключение теоремы. Это следует учитывать учителю при знакомстве школьников с новыми теоремами. Категорическая форма применяется для лаконичного выражения теоремы.

Таким образом, под логико-математическим анализом структуры теоремы будем понимать:

- 1) определение формы теоремы (в случае категорической формы перестраивание в условную);
- 2) выделение разъяснительной части, условия и заключения;
- 3) классификацию теоремы по составу;
- 4) запись теоремы в условиях школьного обучения.

Образование трех новых утверждений на основе данной теоремы

Обозначим в общем виде условие *простой* теоремы через А, а заключение – через В. Тогда теорему можно выразить в условной форме: «Если А, то В» или в виде импликации: $A \Rightarrow B$.

Для такой теоремы можно указать еще три вида утверждений, которые могут являться как истинными, так и ложными.

1. *Обратное* утверждение ($B \Rightarrow A$) получится, если, оставив без изменения разъяснительную часть, поменять местами условие и заключение данной (прямой) теоремы. Данное утверждение не всегда является теоремой.

2. Утверждение, *противоположное* данному ($\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$), получится, если оставить без изменения разъяснительную часть, а условие и заключение данной теоремы заменить их отрицаниями. Данное утверждение является теоремой только в том случае, когда обратное утверждение – теорема.

3. Утверждение, *противоположное обратному* ($\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$), получится, если оставить без изменения разъяснительную часть и поменять местами условие и заключение утверждения, противоположного данному. Это утверждение всегда является теоремой одновременно с данным утверждением.

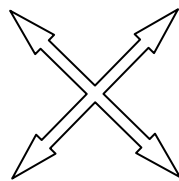
Зависимость между этими утверждениями можно изобразить в виде схемы.

Прямая теорема

$$A \Rightarrow B$$

Противоположное
утверждение

$$\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$$



Обратное утверждение

$$B \Rightarrow A$$

Утверждение,
противоположное
обратному $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$

Схема 2

При решении задач и доказательствах различных теорем можно пользоваться любой теоремой из пары, если один ее представитель доказан.

В случае сложной теоремы существует несколько обратных утверждений, из которых только некоторые могут оказаться истин-

ными. Эти утверждения образуются различным сочетанием условия и заключения прямой теоремы.

Понятие о необходимом и достаточном условии

Пусть справедлива теорема вида: $A \Rightarrow B$, то есть «Если А, то В».

Существуют другие, часто используемые способы выражения этой теоремы:

- А является достаточным условием для В;
- В является необходимым условием для А;
- свойство объекта или отношения из А;
- признак объекта или отношения из В.

Пример 7. Если углы вертикальные, они равны.

1. *Достаточное условие равенства углов.* Для того чтобы углы были равны, достаточно, чтобы они были вертикальными.

2. *Необходимое условие вертикальности углов.* Для того чтобы углы были вертикальными, необходимо, чтобы они были равны.

3. *Свойство вертикальных углов.*

4. *Признак равенства двух углов (нерабочая формулировка).*

Пример 8. Если каждое слагаемое делится на 3, то и сумма делится на 3.

1. *Достаточное условие делимости суммы.* Для делимости суммы $(a+b)$ на 3 достаточно, чтобы каждое из слагаемых а, в делилось на 3.

2. *Необходимое условие делимости слагаемых.* Для того чтобы каждое из слагаемых делилось на 3, необходимо, чтобы сумма делилась на 3.

3. *Свойство делимости слагаемых на 3 (нерабочая формулировка).*

4. *Признак делимости суммы на 3.*

Итак, если имеет место теорема $A \Rightarrow B$, то необходимое условие В представляет собой то требование, которое непременно должно быть выполнено для справедливости А. Однако в общем случае условие В не гарантирует справедливости А, то есть не является доста-

точным для А. В примерах 7 и 8 утверждение $B \Rightarrow A$ было неверным, то есть условие В было лишь необходимым, но не являлось достаточным для А.

Если справедливы оба утверждения $A \Rightarrow B$ и $B \Rightarrow A$, то каждое из А и В является необходимым и достаточным условием для другого. В таких случаях обе теоремы (прямую и обратную) объединяют в одну, используя формулировки:

- для справедливости А необходимо и достаточно, чтобы имело место В;
- А имеет место в том и только в том случае, если выполняется В;
- А справедливо тогда и только тогда, когда справедливо В.

Пример 9

$A \Rightarrow B$: Если в параллелограмме диагонали равны, он является прямоугольником.

$B \Rightarrow A$: Если параллелограмм является прямоугольником, у него равны диагонали.

$A \Leftrightarrow B$: В параллелограмме диагонали равны в том и только в том случае, если он является прямоугольником.

Такие утверждения называются характеристическими свойствами. Их можно принимать в качестве определений. Тогда для рассмотренного *примера* получим: «Прямоугольником называется параллелограмм, у которого равны диагонали.

Пример 10. Характеристические свойства

1. Последовательность является *арифметической прогрессией* тогда и только тогда, когда каждый ее член, начиная со второго, равен среднему арифметическому соседних с ним членов.

2. Треугольник является *равнобедренным* в том и только в том случае, если в нем есть два равных угла.

Введение теоремы в процессе обучения

В методической литературе выделяют два метода ознакомления с теоремой.

Дедуктивный: формулировка дается в готовом виде.

Индуктивный: в готовом виде дается только условие теоремы, заключение предлагается обнаружить самим учащимся. Для этого используются целесообразно подобранные задания, которые могут предполагать:

- 1) наблюдение наглядного материала (подвижных и статичных моделей, готовых чертежей);
- 2) выполнение построений;
- 3) решение задач на вычисление и доказательство;
- 4) выполнение практических или лабораторных работ;
- 5) решение задач на отыскание зависимостей.

Пример 11. Свойство катета, лежащего против угла в 30° (наблюдение наглядного материала).

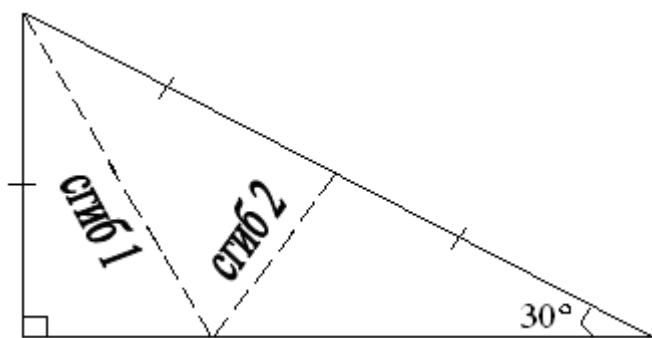


Рис. 7

Изготавливается картонная модель прямоугольного треугольника с углом 30° , которая сгибается по линиям, обозначенным на рисунке 7. Задается вопрос: «Как связана длина катета, лежащего против угла в 30° , с длиной гипотенузы?»

Пример 12. Теорема о внешнем угле треугольника (выполнение практической работы).

Вырезается несколько треугольников из бумаги.

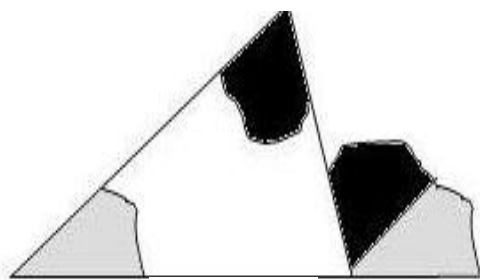


Рис. 8

Отрывая от каждого из них по два «уголка» и прикладывая их к третьему углу с внешней стороны, ученики могут выдвинуть предположение о том, что внешний угол треугольника равен сумме двух других углов треугольника, не смежных с ним.

Пример 13. Теорема Фалеса (выполнение построений).

Задания:

- а) начертите произвольный угол (ученики в тетрадах, учитель на доске);
- б) отложите на одной стороне угла последовательно несколько равных отрезков;
- в) через концы отрезков проведите параллельные прямые до пересечения со второй стороной угла;
- г) измерьте отрезки, получившиеся на второй стороне угла, и сравните между собой;
- д) выскажите предположение.

Пример 14. Свойство вписанного угла (решение задачи на отыскание зависимости).

Задача. Найти градусную меру угла ABC , вписанного в окружность с центром O , если $O \in BC$ и $\angle AOC = 50^\circ$.

Дидактическая ценность задачи: зависимость между $\angle ABC$ и $\angle AOC$ устанавливается посредством введения $\angle AOC$, отношения которого с углом ABC и дугой AC известно.

Пример 15. Теорема об объеме пирамиды (наблюдение наглядного материала).

Используя полые модели призмы и пирамиды, у которых равные высоты и площади оснований, можно продемонстрировать с помощью песка, что объем призмы вмещает объем трех пирамид (рис. 9).

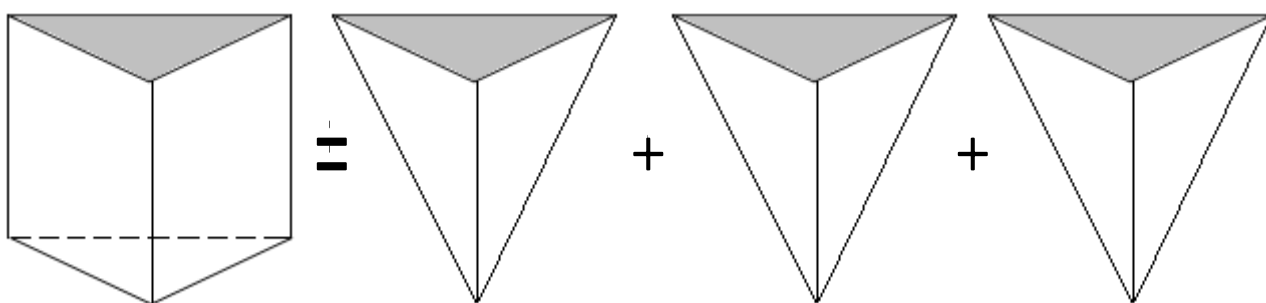


Рис. 9

Пример 16. Теорема косинусов (решение задачи на отыскание зависимости).

Задача. Даны две стороны треугольника и угол между ними. Найти третью сторону.

Дидактическая ценность задачи: решение задачи основывается на рассмотрении последовательности прямоугольных треугольников, то есть на знакомом материале, и позволяет выявить нужную закономерность.

Этапы изучения теоремы

При индуктивном введении теоремы можно выделить следующие этапы ее изучения.

1. Мотивация изучения теоремы.
2. Ознакомление с фактом, отраженным в теореме.
3. Формулировка теоремы.
4. Выяснение понимания смысла каждого слова в формулировке теоремы.
5. Усвоение содержания теоремы: выделение условия и заключения, выполнение чертежа, работа с моделью.
6. Составление плана доказательства, доказательство теоремы.
7. Применение теоремы.
8. Закрепление теоремы.
9. Установление связей данной теоремы с другими теоремами.

В зависимости от конкретного содержания теоремы, опыта школьников отдельные этапы могут опускаться или меняться местами.

При дедуктивном введении теоремы ее изучение начинается с третьего этапа.

Главным в изучении теорем является не заучивание их и их доказательств, а открытие школьниками теоремы, способа её доказательства, самостоятельное конструирование доказательства, применение теоремы в различных ситуациях.

Контрольные вопросы

1. Что понимают под суждением?
2. Любое ли предложение является суждением? Приведите примеры предложений, являющихся суждениями в математическом смысле и не являющихся таковыми.
3. Под какими названиями выступают суждения в школьном курсе математики? Какие из них представляют трудность в методическом плане и почему?
4. Какие две группы суждений выделяют в школьном курсе математики?
5. Какой прием позволяет организовать сознательное усвоение аксиом?
6. Что понимают под теоремой?
7. Какие составные части выделяют в каждой теореме?
8. Почему важно выделять в теореме разъяснительную часть?
9. На какие группы делятся теоремы по числу условий и заключений? Приведите примеры.
10. На какие группы делятся теоремы в зависимости от конструкции их формулировок? Приведите примеры.
11. Какая из формулировок теорем предпочтительнее с методической точки зрения и почему?
12. Как получается из данной теоремы обратное утверждение? Всегда ли оно является теоремой? Приведите пример.
13. Как получается из данной теоремы противоположное утверждение? Всегда ли оно является теоремой? Приведите пример.
14. Как получается из данной теоремы противоположное обратному утверждение? Всегда ли оно является теоремой? Приведите пример.
15. Какова связь между теоремой и тремя утверждениями, построенными на её основе?
16. Для теоремы вида «Если A , то B » укажите четыре различных конструкции для чтения. Приведите пример.

17. Какие методы ознакомления с теоремой Вам известны? Каковы достоинства и недостатки каждого из них?

Задания для самопроверки

1. Заполните пропуски, вставив «необходимо», «достаточно» или «необходимо и достаточно»:

а) Для того, чтобы число делилось на 5, ... , чтобы оно делилось на 10;

б) Для того, чтобы число делилось на 10, ... , чтобы оно делилось на 5;

в) Для того, чтобы сумма двух чисел была чётной, ... , чтобы каждое слагаемое было нечётным числом;

г) Для того, чтобы произведение двух чисел было равно нулю, ..., чтобы хотя бы один из множителей был равен нулю;

д) Для того чтобы $3(x-2)(x-5)=0$, ... , чтобы $x=5$;

е) Для равенства двух чисел, ... , чтобы их абсолютные величины были равны;

ж) Чтобы произведение двух чисел было больше нуля, ... , чтобы оба этих числа были положительны;

з) Для того, чтобы a^3 было отрицательным, ... , чтобы a было отрицательным;

и) Чтобы хорды одной и той же окружности были равны, ... , чтобы они отстояли на равном расстоянии от центра этой окружности;

к) Для того, чтобы треугольники были равновелики, ... , чтобы треугольники были равны;

л) Для того, чтобы один из корней квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$ был равен 0, ... , чтобы свободный член уравнения был равен нулю;

м) Для того, чтобы четырёхугольник был прямоугольником, ... , чтобы его диагонали были равны;

н) Для того, чтобы треугольник был равнобедренным, ... , чтобы углы при основании были равны.

2. Выделите условие и заключение в каждой теореме.

а) Для того чтобы разность двух чисел делилась на 2, достаточно, чтобы на 2 делились уменьшаемое и вычитаемое.

б) Для того чтобы четырёхугольник был квадратом, необходимо, чтобы хотя бы один из углов был прямым.

в) Если сумма цифр делится на 9, то число делится на 9.

г) В окружности центральные углы равны, если равны дуги, на которые они опираются.

д) Если каждое из двух слагаемых делится на какое-нибудь число, то сумма делится на то же число.

3. Укажите среди следующих предложений суждения:

а) «Луна – спутник Земли».

б) «Все учащиеся любят математику».

в) «Принеси мне, пожалуйста, книгу».

г) «Некоторые люди имеют голубые глаза».

д) «Окружностью называется множество точек плоскости, расстояние от которых до данной точки этой плоскости имеет заданную величину».

е) «Вы были в театре?»

ж) « $x^2 - 4x + 3 = 0$ ».

з) «Он сероглаз».

и) «Все треугольники равнобедренные».

4. Сформулируйте предложения в виде условных теорем:

а) Сумма двух нечётных слагаемых есть чётное число.

б) Сумма двух смежных углов равна 180° .

в) Число, оканчивающееся на 0, делится на 10.

Список литературы

1. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: книга для учителя / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990.
2. Метельский, Н. В. Дидактика математики / Н. В. Метельский. – Минск : Издательство БГУ, 1982.
3. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – М. : Просвещение, 1980.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. инт-ов / А. Я. Блох, Е. С. Канин и др. ; сост. Р. С Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.
5. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005.
6. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005.
7. Финкельштейн, В. М. О подготовке учеников к изучению нового понятия, новой теоремы / В. М. Финкельштейн // Математика в школе. – 1996. – № 6. – С. 21.

1.1.3. Методика обучения доказательствам математических суждений. Состав, цели и свойства доказательства

Доказательство служит обоснованию истинности или ложности математических суждений.

Под *доказательством* понимают такие рассуждения, которые:

- 1) совершаются по определенным правилам логического вывода;
- 2) устанавливают, из *каких* суждений (аксиом, теорем) и *как* вытекает рассматриваемое суждение.

Процесс доказательства представляет собой цепочку умозаключений.

Умозаключением называют мыслительную операцию, в результате которой из одного или нескольких суждений получается новое суждение. Исходные суждения называют *посылками*, а полученное суждение – *заключением* (выводом).

Если вывод делается из одного суждения, то умозаключение называют *простым*; если из двух суждений, то утверждение называют *силлогизмом*.

При доказательстве теорем в школьном курсе математики наиболее употребим силлогизм, имеющий следующую структуру:

<i>Большая посылка.</i>	Все М суть Р
<i>Меньшая посылка.</i>	Т суть М
<i>Заключение.</i>	Т суть Р

Посылка, содержащая общее правило, называется *большой посылкой*. Посылка, в которой рассматривается частный случай, называется *меньшей посылкой*.

Математическое доказательство преследует две *цели*:

1. Установить истинность или ложность суждения путем установления логических связей между отдельными умозаключениями.
2. Определить место данного суждения среди других суждений данной теории, то есть показать, из каких суждений следует данное суждение и какие суждения следуют из него.

Математическое доказательство обладает тремя свойствами: точностью, общностью и объективностью.

Общность доказательства состоит в том, что доказанная теорема истинна всегда, и заключение теоремы будет справедливо для всех частных случаев, допускаемых условием.

Если бы мы хотели опытным путем убедиться в справедливости теоремы о сумме углов в треугольнике, и нам удалось бы, измеряя углы транспортиром, получить одинаковые результаты, скажем по 180^0 , то следует ли отсюда, что сумма углов в треугольнике точно

равна 180^0 . Анализ процесса измерения показывает, что для такого вывода мы не имеем достаточных оснований.

Возникает вопрос: почему же доказательство дает точное знание действительности? Во-первых, потому, что доказательство не связано непосредственно с опытом и измерениями и, следовательно, свободно от их недостатков. Во-вторых, доказательство является объективным (строгим), так как строится в соответствии с законами логического мышления. Логические формы, используемые в доказательстве, не зависят от психики человека, от его настроений, переживаний, характера, они являются общечеловеческими формами мышления и имеют характер объективных законов. В процессе доказательства мы не можем делать произвольные выводы, поскольку ощущаем необходимость следования вывода из посылок. В итоге мы оказываемся вынужденными сделать этот вывод либо признать его истинность, если он нам предъявлен. Поскольку доказательство подчинено объективной закономерности форм логического мышления, оно является *объективным* и, следовательно, *точным*.

Состав доказательства иллюстрирует схема 3.

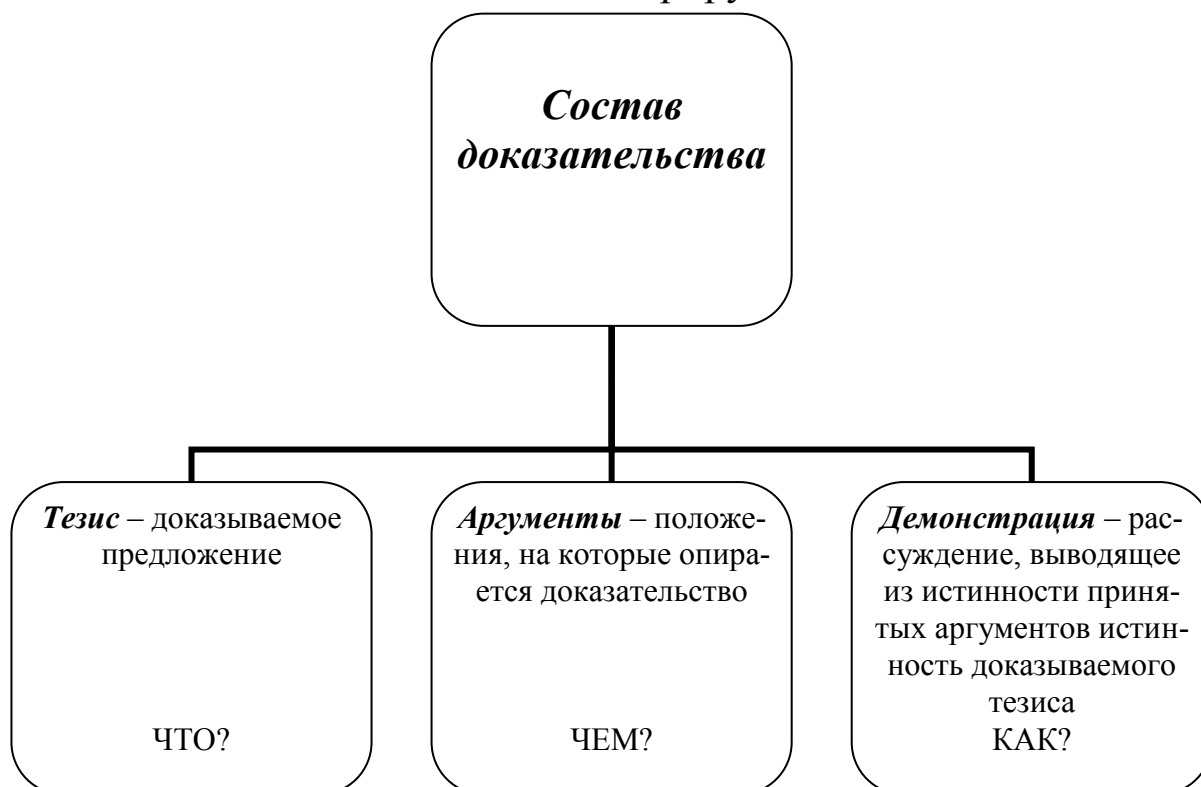


Схема 3

Необходимыми условиями перехода к демонстрации являются:

- четкое понимание всех терминов, входящих в тезис;
- знание того, какими аргументами имеем право пользоваться.

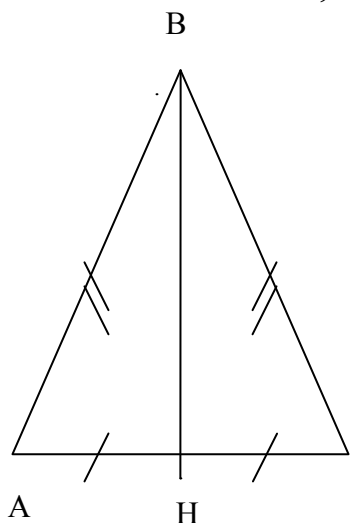


Рис. 10

Пример 1. Теорема: В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой.

Т Дано: $\triangle ABC$ – равнобедренный,

Е AC – основание, BH – медиана

З

И Доказать: BH – биссектриса

С

Поиск доказательства обычно начинается с анализа того утверждения, которое нужно доказать.

Учитель: Так как требуется доказать, что BH является биссектрисой, то требование теоремы можно изменить в соответствии с определением биссектрисы, то есть доказать, что угол ABH равен углу CBH . Равенство углов часто устанавливают через равенство треугольников. В нашем случае, по-видимому, это треугольники BAH и BCH , в которых имеются пары равных сторон.

Доказательство (демонстрация):

1. *Большая посылка.* Определение медианы треугольника.

Меньшая посылка. BH – медиана $\triangle ABC$.

Заключение: $AN=NC$.

2. *Большая посылка.* Определение равнобедренного треугольника.

Меньшая посылка. $\triangle ABC$ – равнобедренный, AC – основание.

Заключение: $AB=CB$.

3. *Большая посылка.* Рефлексивность равенства отрезков.

Меньшая посылка. Отрезок BH .

Заключение: $BH=BH$.

4. *Большая посылка.* Признак равенства треугольников по трем сторонам.

Меньшая посылка. $\triangle BAH$ и $\triangle BCH$: $AN=NC$, $AB=CB$, BH – общая.

Заключение: $\triangle BAH=\triangle BCH$.

5. *Большая посылка.* Определение равных треугольников.

Меньшая посылка. $\triangle BAH = \triangle BCH$, $\angle ABH$ и $\angle CBH$ – углы, лежащие против равных сторон.

Заключение: $\angle ABH = \angle CBH$.

6. *Большая посылка.* Определение биссектрисы угла треугольника.

Меньшая посылка. $\angle ABC$, $\angle ABH = \angle CBH$.

Заключение: BH – биссектриса.

Выводы:

1) В процессе доказательства в качестве *аргументов* были использованы: а) данные, содержащиеся в условии теоремы; б) ранее доказанные теоремы; в) аксиомы; г) определения.

2) *Демонстрация* состоит из составления силлогизмов и расположения их в определенном порядке, причем порядок силлогизмов не менее важен, чем сами силлогизмы.

Рассмотренное в примере 1 разложение доказательства по схеме полных силлогизмов необходимо учителю при подготовке к уроку. Оно позволяет вычленить те факты (большие посылки), которые необходимо актуализировать прежде, чем приступить к доказательству теоремы.

В доказательствах, рассматриваемых на уроках, цепочка силлогизмов не выделяется, а некоторые силлогизмы (те, которые основаны на очевидных фактах) и вовсе опускаются. В примере 1 это силлогизм 3. Поэтому школьные доказательства с точки зрения логики часто бывают неполными.

Следует различать полную и краткую запись доказательства. Образец полной записи доказательства теоремы, рассмотренной в примере 1, приведен в таблице 5.

Таблица 5

1	2
1) $AH = HC$	По определению медианы
2) $AB = CB$	По определению равнобедренного треугольника

Окончание таблицы 5

1	2
3) $\triangle BAN = \triangle BCN$, т.к. $AN = NC$, $AB = CB$, BN – общая	По признаку равенства треугольников по трем сторонам (ССС)
4) $\angle ABN = \angle CBN$	По определению равных треугольников
5) BN – биссектриса	По определению биссектрисы

Возможна и краткая запись доказательства:

$\triangle BAN$ и $\triangle BCN$:

$AB = CB$ ($\triangle ABC$ равнобедренный)

$AN = NC$ (BN – медиана)

BN – общая

↓

$\triangle BAN = \triangle BCN$ (по трем сторонам)

↓

$\angle ABN = \angle CBN$ (определение равных треугольников)

↓

BN – биссектриса.

Виды доказательств

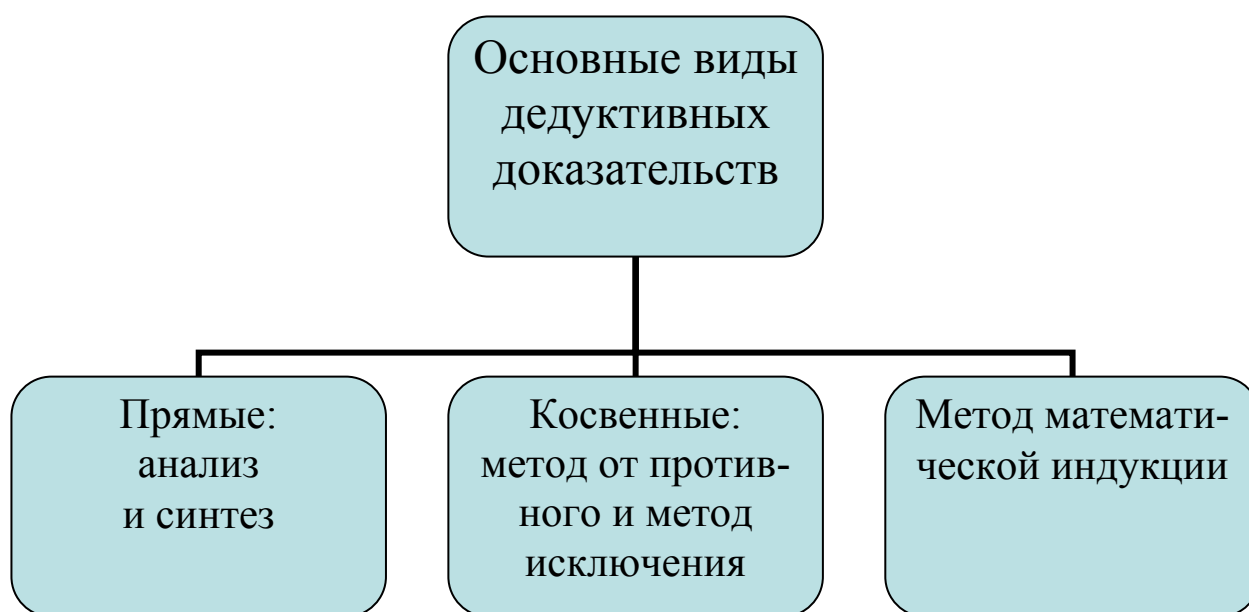


Схема 4

Прямые доказательства

Прямым называется доказательство, в котором аргументы непосредственно обосновывают тезис. Прямые доказательства могут быть синтетическими или аналитическими.

Если отправляемся от условия A и, пользуясь известными утверждениями, получаем заключение B как логическое следствие, то это *синтез* (от греч. «движение вперед», «соединение»).

Схематично этот вид рассуждения можно изобразить так:

$A \Rightarrow X_1 \Rightarrow X_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_n \Rightarrow B$, где A – условие, $X_1, X_2, \dots, X_n$ – конечная последовательность предложений, составляющих рассуждение, B – заключение.

Синтез начинается с выделения некоторого следствия X_1 из условия A с использованием определенных, связанных с условием предложений, истинность которых уже установлена. Затем аналогично из X_1 получают предложение-следствие X_2 и так далее, до тех пор, пока не получат в качестве следствия заключение B .

Основным достоинством синтетического метода доказательства является его лаконичность, поэтому этот метод преобладает в учебниках при изложении готовых доказательств.

Будучи по своей природе искусственным, синтез не может научить умению доказывать, так как при нем остается непонятным, как догадаться, с каких определений, аксиом или ранее доказанных теорем нужно начинать доказательство. Этой догадке способствует анализ (от греч. – «движение назад», «разложение»).

Если отправляемся от заключения B и, опираясь на известные утверждения, показываем, что заключение является логическим следствием условия A , то это *анализ*.

Греческие математики по-разному определяли аналитический путь доказательства.

Анализ Паппа Александрийского (III в.) можно изобразить схемой: $B \Leftarrow X_1 \Leftarrow X_2 \Leftarrow \dots \Leftarrow X_n \Leftarrow A$. Суть такого анализа в последовательном отыскании условий, достаточных для заключения. Этот вид

анализа называется *восходящим*, так как в нем «восходят» от заключения В к условию А.

Такое доказательство является строгим, всегда дает достоверный результат, поэтому восходящий анализ еще называют *совершенным анализом*. Доказательство по методу восходящего анализа можно перестроить в синтетическое доказательство.

Восходящий анализ превосходит синтез в дидактическом плане, поскольку определенно указывает, с чего следует начинать и в каком направлении вести поиск доказательства. Этот вид анализа сочетается с эвристической беседой и проблемным методом обучения.

Анализ Евклида (III в. до н.э.) или *нисходящий анализ* проводится исходя из предположения, что заключение В истинно:

$B \Rightarrow X_1 \Rightarrow X_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow X_n \Rightarrow A$. Таким путем находят условие, необходимое для заключения В. В отличие от восходящего анализа этот вид анализа не является доказательным, так как требует проверки обратимости рассуждений, то есть синтеза. Из-за этого нисходящий анализ иногда называют *несовершенным анализом*.

Следует заметить, что термин «*анализ Евклида*» употребляется по сложившейся традиции. Установлено, что еще Платону был известен этот вид анализа, а Аристотель отмечал его недостаток – возможность вывести истинное положение из ложного. Естественно, позже это было известно и Евклиду.

Пример 2. Дано: a, b, c – числа, $a > b$.

Доказать: $a + c > b + c$.

Доказательство синтетическим методом:

$$a > b \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow a + c - c + b > 0 \Rightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Rightarrow a + c > b + c.$$

Вывод: Остается неясным, как догадаться ввести сумму противоположных чисел: $+c - c$.

Отыскание доказательства на основе анализа Евклида:

$$a + c > b + c \Rightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Rightarrow a + c - b - c > 0 \Rightarrow a - b > 0 \Rightarrow a > b.$$

Вывод: Нисходящий анализ позволил найти идею для синтеза.

Пример 3

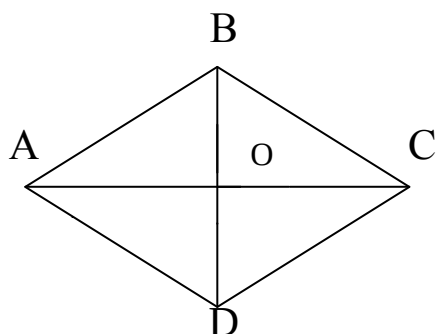


Рис. 11

Дано: $ABCD$ – ромб, $AC \cap BD = O$

Доказать: $AC \perp BD$

Доказательство анализом Паппа:

$AC \perp BD \Leftrightarrow AC \perp BO \Leftrightarrow BO$ – высота $\triangle ABC \Leftrightarrow \triangle ABC$ – равнобедренный и BO – медиана $\Leftrightarrow ABCD$ – параллелограмм и $AB = BC \Leftrightarrow ABCD$ – ромб.

Вывод: Общая схема анализа Паппа на практике реализуется в форме словесных рассуждений: «Чтобы доказать..., достаточно доказать...». Доказательство анализом Паппа можно легко перестроить в синтетическое.

Реальный процесс доказательства некоторого суждения редко осуществляется только по одному пути: аналитическому или синтетическому. Чаще он основывается на последовательном преобразовании то условия, то заключения. Поэтому говорят об аналитико-синтетическом виде доказательства.

Косвенные доказательства

Косвенным называется доказательство, в котором истинность тезиса обосновывается посредством опровержения истинности других положений.

К косвенным доказательствам относятся метод от противного и метод исключения (разделительный метод).

Принцип доказательства «от противного» состоит в следующем. Пусть Π – множество посылок, включающее определения, аксиомы, ранее доказанные теоремы, и нужно обосновать истинность утверждения $A \Rightarrow B$. Допускается, что истинно противоречащее суждение $\bar{B}$. Исходя из условия A , множества посылок Π и предположения $\bar{B}$ выводится некоторое утверждение C , которое противоречит ранее установленному в данной теории некоторому предложению $\bar{C}$. На

основании логического закона противоречия суждения C и $\bar{C}$ не могут быть одновременно истинными. Из полученного противоречия и ложности C следует, что исходное суждение $\bar{B}$ – ложно, а потому истинно суждение B по закону исключенного третьего.

Пример 4. Дано: a, b, c – прямые, $a \parallel b$, $c \parallel b$.

Доказать: $a \parallel c$.

Доказательство методом «от противного»:

Допустим, что $a \nparallel c$. Тогда $a \cap c$ в некоторой точке X .

По условию: $a \parallel b$ и $X \in a$ (по предположению)

$c \parallel b$ и $X \in c$ (по предположению).

Отсюда следует, что на плоскости через точку X вне прямой b проходят две прямые a и c , каждая из которых параллельна прямой b . Получили противоречие с аксиомой параллельных. Следовательно, $a \nparallel c$ неверно, а значит, $a \parallel c$.

Другой формой косвенного доказательства является доказательство *методом исключения*. Суть его в следующем. Пусть требуется доказать $A \Rightarrow B$, причем B – одно из возможных и взаимоисключающих предложений $B_1, B_2, \dots, B_n$, B для некоторого разделительного суждения R . Если, предположив, что R есть B_1 , придем к ложному следствию, то докажем, что R не есть B_1 . Если также докажем, что R не есть B_i , где $i=1, 2, \dots, n$, то отсюда будет следовать, что R есть B .

Пример 5. Дано: $\varphi \parallel \beta$, $\gamma \cap \varphi = a$, $\gamma \cap \beta = b$.

Доказать: $a \parallel b$.

Доказательство методом исключения:

Для прямых a и b возможны следующие случаи взаимного расположения: а) прямые a и b скрещиваются; б) прямые a и b пересекаются; в) прямые a и b параллельны.

В случае истинности предположения (а) не существует плоскости, содержащей прямые a и b . Но из условия следует, что обе эти прямые лежат в плоскости γ . Значит, предположение (а) – неверно.

Если истинно предположение (б), то существует точка пересечения прямых a и b , причем эта точка лежит и в плоскости φ , и в плоскости β . Из этого следует, что $\varphi \cap \beta$, а это противоречит условию $\varphi \parallel \beta$. Ясно, что предположение (б) – неверно.

Остается принять, что $a \parallel b$.

Метод математической индукции

Для доказательства математических утверждений, в формулировку которых входит произвольное натуральное число n , часто применяют особый метод рассуждений, получивший название *метода математической индукции*. Этот метод доказательства является дедуктивным и основывается на общем принципе, который является одной из аксиом множества натуральных чисел.

Принцип математической индукции

Утверждение, зависящее от натурального числа n , справедливо для любого n , если выполнены два условия:

- 1) утверждение верно для $n=1$;*
- 2) из справедливости утверждения для $n=k$, где k – любое натуральное число, вытекает справедливость утверждения и для следующего натурального числа $n=k+1$.*

Иногда требуется доказать некоторое утверждение не для всех натуральных чисел, а для $n \geq p$. Тогда на первом шаге проверяют справедливость утверждения не для $n=1$, а для $n=p$.

Пример 6

Дано: геометрическая прогрессия $\{b_n\}$: $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$

Доказать: $b_n = b_1 q^{n-1}$ (1), где q – знаменатель прогрессии.

Доказательство методом математической индукции:

1) При $n=1$ формула (1) принимает вид $b_1 = b_1 q^{1-1}$, то есть $b_1 = b_1$, что верно.

2) Предположим, что формула (1) верна для $n=k$, то есть имеет место равенство: $b_k = b_1 q^{k-1}$ (2).

Докажем, что тогда формула (1) верна и для $n=k+1$:
 $b_{k+1} = b_1 q^{k+1-1} = b_1 q^k$ (3).

$$b_{k+1} \underbrace{=}_{\text{по определению}} b_k q \underbrace{=}_{\text{по предположению}} (b_1 q^{k-1}) q = b_1 q^k.$$

Итак, из формулы (2) вытекает формула (3).

Оба условия принципа математической индукции выполнены, значит, формула (1) справедлива для любого натурального числа n .

Методом математической индукции доказываются предложения, которые тем или иным путем (чаще всего индуктивно) уже найдены и сформулированы. Но математическая индукция бессильна как эвристический метод, с ее помощью нельзя «открыть» новые истины.

Обучение доказательству

Обучение доказательству включает в себя:

- 1) анализ и воспроизведение готовых доказательств;
- 2) самостоятельный поиск и конструирование готовых доказательств;
- 3) опровержение предложенных доказательств.

Доказательства в школьных учебниках свернуты. В них зачастую присутствуют интуитивные выводы, иногда делаются ссылки на утверждения, отсутствующие в учебнике, либо на задачи, которые не воспринимаются школьниками как теоремы. В связи с этим необходим анализ доказательств рассматриваемых теорем, который включает:

- выделение логических шагов;
- поиск и устранение логических пробелов;
- развертывание дедуктивных умозаключений в логическую схему;
- выделение идеи доказательства, способствующее осмысленному изучению конкретного доказательства.

Воспроизведение готового доказательства принесет пользу только тогда, когда ученик осознает основную идею доказательства, а следовательно:

- будет различать главное и второстепенное, выделять идею доказательства;
- сможет осуществлять вариации в обозначениях, чертеже, порядке следования силлогизмов;
- сможет применять рассмотренный прием в других доказательствах.

Обучение школьников выделению главного в доказательстве теоремы – это наиболее трудная задача. После развернутого доказательства теоремы полезно давать ученикам задания вида: «Попробуйте сказать одним предложением, в чем сущность доказательства теоремы. Назовите главную мысль доказательства». Для многих школьников это трудная умственная работа. Поэтому учителю следует показывать образцы такого свернутого выражения мысли.

Приведем *примеры* сжатой формулировки сущности доказательства ряда теорем.

1. При доказательстве теоремы о сумме углов треугольника нужно заменить эту сумму суммой внутренних односторонних углов при некоторых, специальным образом построенных параллельных и секущей.

2. При доказательстве признака параллелограмма рассматривают пары равных треугольников, из них следует равенство накрест лежащих углов и параллельность пар противоположных сторон параллелограмма.

3. При доказательстве первого признака параллельности прямых на плоскости следует воспользоваться методом от противного.

Если каждый раз первоначальное ознакомление учащихся с содержанием доказательства начинать с предъявления готового доказательства, для них останется неясным, как додумались образовывать нужные силлогизмы и объединять их так, чтобы они составляли еди-

ное целое, приводящее к цели. Доказательство само по себе не отвечает на эти вопросы. В изложенном доказательстве нам, как правило, предлагается проверить ход мыслей и убедиться, что он правилен.

Поэтому важно показывать процесс отыскания доказательства, в ходе которого выясняется его строение и дается ответ на вопрос: «Почему оно так устроено?».

Работа по отысканию доказательств помогает учащимся приобрести и усвоить те приемы, которые пригодятся им при самостоятельном поиске доказательств. Важное значение при этом выполняют эвристики, основанные на ассоциациях:

а) равенство отрезков – равенство треугольников; равенство сторон в параллелограмме и пр.;

б) равенство углов – равенство треугольников; подобие треугольников; углы при параллельных прямых; вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу окружности и пр.

Обучение поиску доказательства должно быть целенаправленным и основываться на совокупности умений, которыми должен обладать школьник. Поэтому с самого начала курса геометрии важно формировать:

- умение делать чертеж к теореме;
- умение «видеть» то, что изображено на чертеже;
- умение записывать условие и требование теоремы;
- умение выполнять дополнительные построения;
- умение выбирать метод доказательства.

В школьных учебниках отсутствуют упражнения на опровержение предлагаемых утверждений и их доказательств. Поэтому школьники редко сталкиваются с вопросом: «А верно ли...?». Между тем, проверке на истинность могут быть подвергнуты все три составные части доказательства: тезис, аргументы, демонстрация.

Ошибки в тезисе могут быть вызваны:

1) неясной формулировкой (*например*, школьники могут дать такие, явно небрежные, формулировки теорем: через три точки можно провести окружность; равные наклонные имеют равные проекции);

2) подменой тезиса (*например*, при доказательстве теоремы о вписанном угле ограничиться рассмотрением случая, когда стороны углы лежат по разные стороны от центра окружности).

Ошибки в аргументах связаны с нарушением основного правила: «Аргументы доказательства должны быть суждениями, истинность которых не подлежит сомнению». Причинами таких ошибок служат, как правило, неверные чертежи, неполные формулировки теорем и определений, употребляемых в доказательстве, пропуск неявного аргумента, приводящий к «кругу в доказательстве».

Пример 7. «Доказательство» теоремы о сумме углов треугольника.

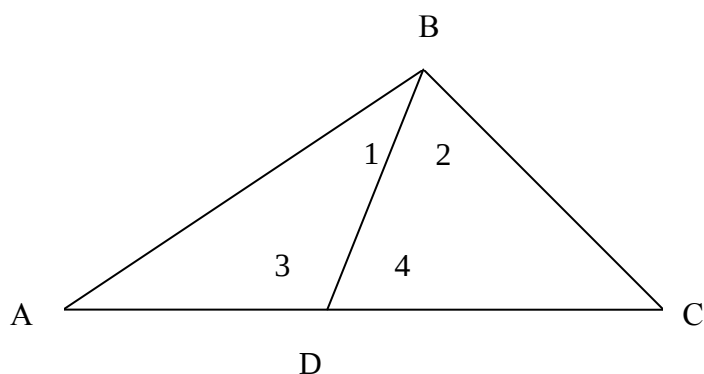


Рис. 12

Пусть дан произвольный треугольник ABC. Разобьем его отрезком BD (D – произвольная точка отрезка AC) на два треугольника.

Обозначив через x неизвестную сумму углов треугольника, будем иметь:

$$\triangle ABD: \angle A + \angle 1 + \angle 3 = x \quad (1).$$

$$\triangle BDC: \angle C + \angle 2 + \angle 4 = x \quad (2).$$

Складывая равенства (1) и (2), получим:

$$(\angle A + \angle C + \angle 1 + \angle 2) + (\angle 3 + \angle 4) = 2x \quad \text{или}$$

$$(\angle A + \angle B + \angle C) + 180^\circ = 2x \quad \text{или} \quad x + 180^\circ = 2x \quad \text{или} \quad x = 180^\circ.$$

Уязвимое место в этом доказательстве – обозначение суммы углов каждого треугольника одной буквой x . Такое обозначение будет

законным, если предварительно доказать, что сумма не меняется при переходе от одного треугольника к другому.

Ошибки в демонстрации проявляются либо в неполноте доказательства, либо в несоблюдении правил вывода. В школе поиск таких ошибок может осуществляться в процессе проверки полноты демонстрации.

Обучение учащихся опровержению готовых доказательств может быть основано на софизмах, формулировки которых уже заставляют искать «подвох».

Контрольные вопросы

1. Что понимают под доказательством?
2. Каковы цели доказательства?
3. Перечислите свойства доказательства.
4. Что понимают под умозаключением?
5. Какое умозаключение называется силлогизмом?
6. Какова структура силлогизма?
7. Что входит в состав доказательства?
8. Какие условия являются необходимыми для перехода к демонстрации?
9. Какие доказательства называются прямыми?
10. Какие доказательства называются косвенными?
11. Перечислите виды прямых доказательств.
12. Укажите виды косвенных доказательств.
13. В чем суть синтетического метода доказательства? Приведите его схему.
14. Перечислите достоинства и недостатки синтеза как метода доказательства.
15. Какие виды анализа как метода доказательства Вам известны? Укажите схему проведения анализа в каждом случае.
16. В чем отличие нисходящего анализа от восходящего? Перечислите достоинства и недостатки обеих разновидностей анализа.

17. В чем суть аналитико-синтетического метода доказательства?
18. Опишите суть метода доказательства от противного? Какой закон логики лежит в основе данного метода доказательства?
19. В чем суть метода исключения?
20. Какое утверждение служит основой метода математической индукции?
21. Укажите критерии применимости метода математической индукции для доказательства математических утверждений.
22. Какой из методов доказательств наиболее эффективен для обучения самостоятельному поиску доказательств?
23. Что составляет основу обучения доказательству?

Список литературы

1. Бродис, В. М. Ошибки в математических рассуждениях / В. М. Бродис, В. Л. Минковский, А. К. Харчева. – М. : Учпедгиз, 1959.
2. Дубнов, Я. С. Ошибки в геометрических доказательствах / Я. С. Дубнов. – М. : Наука, 1969.
3. Лакатос, И. Доказательства и опровержения / И. Лакатос. – М. : Наука, 1967.
4. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – М. : Просвещение, 1980.
5. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. инт-ов / А. Я. Блох, Е. С. Канин и др. ; сост. Р. С Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.
6. Притуло, Ф. Ф. Методика изложения геометрических доказательств / Ф. Ф. Притуло. – М. : Учпедгиз, 1958.

7. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студ. мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2002.

8. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005.

9. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005.

1.1.4. Задачи в обучении математике. Роль задач в обучении математике

В методике до настоящего времени не сложилось однозначной трактовки понятия задачи. Наиболее распространенным является определение задачи как системы «человек – задачная ситуация».

Если субъекту, вступившему в контакт с ситуацией, неизвестен хотя бы один элемент, свойство или отношение и у субъекта есть потребность установить неизвестные ему элементы, свойства или отношения этой ситуации, последняя становится для него *задачей*.

При взаимодействии человека и задачи изменяется как сама задача, так и субъект. Изменения в задачной ситуации могут быть связаны с преобразованием условия, изменением связи между объектами задачной ситуации. Изменения в субъекте проявляются в изменении личности решающего задачу. Таким образом, цель задачи – результат, который характеризует изменения в системе «человек – задачная ситуация».

К понятию задачи тесно примыкает понятие «упражнение». Некоторые методисты обращаются с ними как с синонимами, другие понимают под упражнением задачу, метод решения которой известен. Кроме того, существует традиция использовать термин «упражнение» в курсе алгебры и термин «задача» – в курсе геометрии.

Если же исходить из системного подхода к понятию задачи, упражнением следует считать задание, результатом которого является приобретение знаний, умений и навыков. Таким образом, упраж-

нение является видом задачи. В дальнейшем будем пользоваться общим понятием задачи, не выделяя из него понятие упражнения.

В процессе обучения математике задачи выполняют разное назначение:

- а) являются средством формирования системы математических знаний, умений и навыков;
- б) служат ведущей формой учебной деятельности;
- в) являются средством математического развития у школьников.

Таким образом, задачи в практике преподавания математики – это и цель, и средство обучения.

Недостатки традиционной практики постановки задач в обучении математике

Педагогические основы использования задач в современном школьном обучении – одна из проблем методики. В рамках решения этой проблемы серьёзного совершенствования требует методическая система задач школьного курса математики. Это вызвано следующими причинами:

- 1) система задач, представленная в большей части учебных пособий по математике, не отвечает современным целям обучения, воспитания и развития;
- 2) методика использования задач в обучении математике такова, что воздействие задач и процесса их решения на школьников оказывается весьма ограниченным.

Конкретизируя указанные недостатки в постановке задач, можно выделить следующие характерные особенности.

1. *Стандартизация содержания и методов решения задач*: узкое понимание роли и дидактического назначения математической задачи в процессе обучения; стремление решить со школьниками большее число задач в ущерб их обучающей роли; наличие большого числа задач алгоритмического характера; недостаток внимания поиску решения задачи; традиционный характер форм постановки задач; задачи всегда разрешимы среди исходных данных: нет ни лишних, ни недостающих;

имеют чаще всего одно решение, которое записывают в удобной форме. Подобного рода задачи не соответствуют окружающей действительности. В жизни проблема может быть поставлена неправильно, количество решений часто больше одного и возникает проблема выбора.

2. *Несовершенство методики обучения решению задач и методики обучения математике через задачи*: обучение решению задач производится преимущественно по образцу; отсутствует целенаправленная работа учителя по формированию у школьников способности критически оценивать ход решения задачи и осуществлять проверку решения; в основном используется коллективный способ решения задач на уроке; задачи используются в основном для закрепления готовых знаний.

3. *Несоответствие постановки задач и их решения закономерностям развития математического мышления*: отсутствие в школьном курсе математики задач, решение которых подготовило бы школьников к деятельности творческого характера; недостаток задач, способствующих формированию таких важнейших мыслительных умений, как выделять главное, обобщать, анализировать, моделировать, осуществлять мыслительный и практический эксперименты; использование задач только для контроля фактических математических знаний учащихся, а не уровня их математического развития; однообразная типология школьных задач.

Функции задач

Любая задача, которая рассматривается на том или ином этапе обучения математике, выполняет разнообразные функции. Поскольку основными компонентами школьного математического образования являются обучение, воспитание и развитие учащихся, целесообразно в качестве функций задач выделять обучающую, воспитательную и развивающую. К выделенным функциям следует добавить еще одну – контролирующую.

Обучающие функции задач направлены на формирование у школьников системы математических знаний, умений и навыков на различных этапах их усвоения.

Развивающие функции задач направлены на формирование мыслительных умений учащихся, на обучение их эффективным приемам умственной деятельности.

Воспитательные функции задач направлены на формирование диалектико-материалистического мировоззрения, познавательного интереса, самостоятельности в приобретении знаний, навыков учебного труда, нравственных качеств.

Контролирующие функции направлены на установление уровней обученности и обучаемости, математического развития учащихся, способности к самостоятельному изучению математики и сформированности познавательных интересов.

Этапы деятельности по решению задач

В методике математики общепринято деление процесса решения задачи на четыре основных этапа.

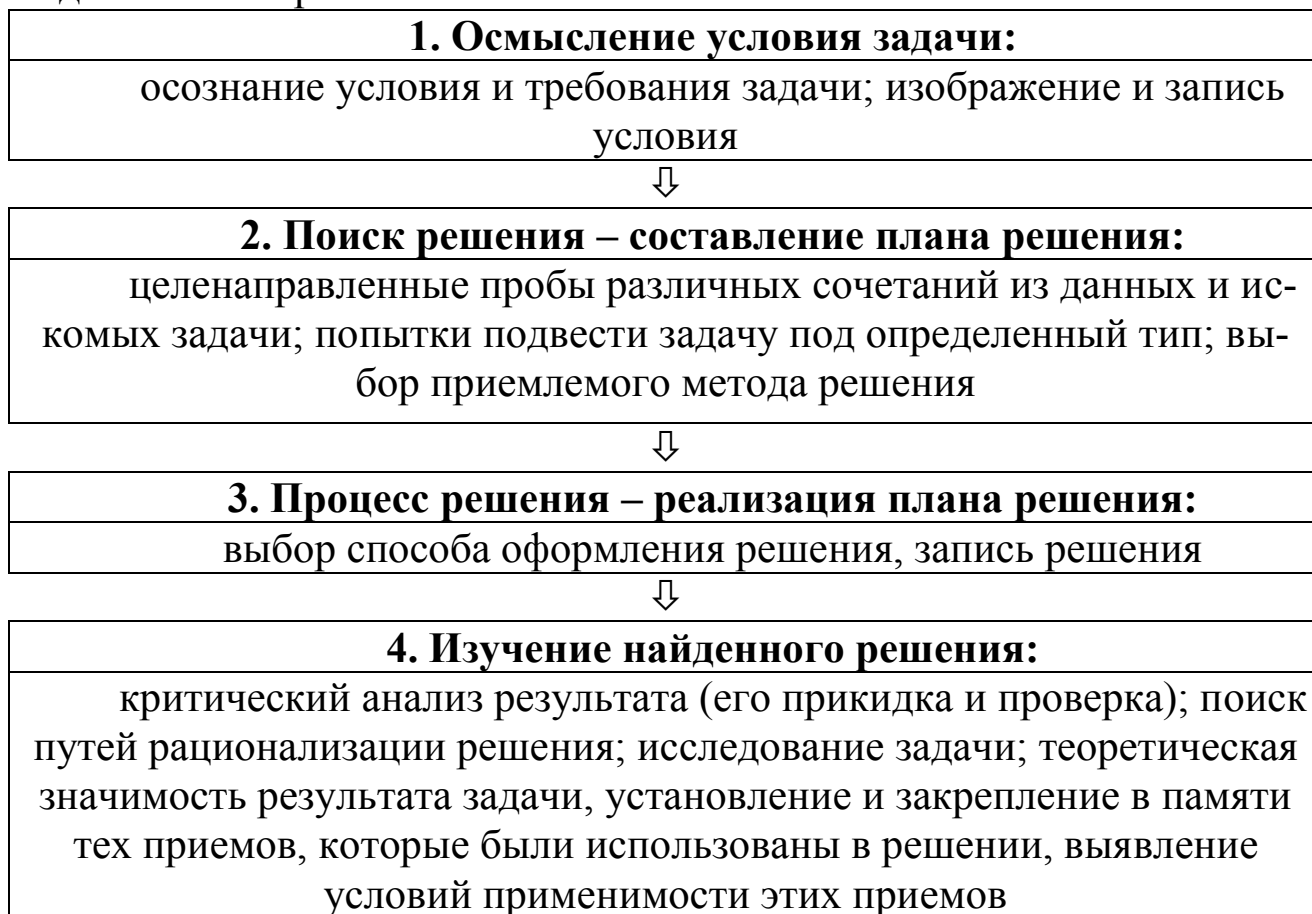


Схема 5

Из указанных этапов первые три являются обязательными, а четвертый в процессе решения многих задач не рассматривается, но учителю следует помнить, что именно этот этап решения превращает задачу в обучающее средство.

Типология задач

В современной учебно-методической и психологической литературе встречаются различные классификации задач.

1) По характеру требования различают:

- задачи на доказательство;
- задачи на построение;
- задачи на преобразование;
- задачи на вычисление.

2) По функции задачи в обучении выделяют:

- задачи с дидактическими (обучающими) функциями;
- задачи с познавательными функциями;
- задачи с развивающими функциями.

3) По величине проблемности различают:

- стандартные (известны все компоненты задачи);
- обучающие (неизвестен один из четырех компонентов задачи);
- поисковые (неизвестны два из четырех компонентов задачи);
- проблемные (неизвестны три из четырех компонентов задачи).

Под компонентами задачи понимают: А – условие, В – заключение, С – решение, D – базис решения задачи.

4) По компонентам учебной деятельности выделяют:

- организационно-действенные;
- стимулирующие;
- контрольно-оценочные.

5) По характеру связей между элементами задачи и соотношению между воспроизводящей и творческой деятельностью учащихся различают:

- алгоритмические задачи;
- полуалгоритмические задачи;
- эвристические задачи.

Из приведённых классификаций рассмотрим подробнее последнюю.

К алгоритмическим задачам относятся те, которые решаются с помощью непосредственного применения определения, формулы,

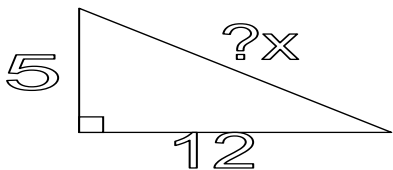
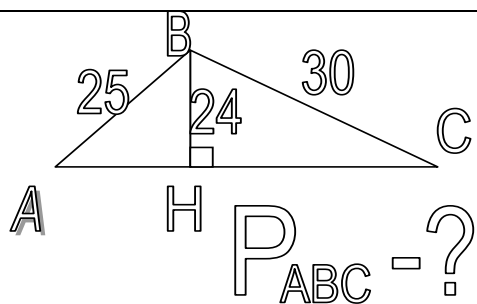
правила или алгоритма. Роль таких задач велика. Ученик, освоивший подобные задачи, может оперировать свёрнутыми знаниями при решении других, более сложных задач.

К *полуалгоритмическим* задачам относятся те, правила решения которых носят обобщающий характер и не могут быть полностью сведены к объединению элементарных шагов. Решая такие задания, школьник учится «сворачивать» знания, фиксируя их в сознании крупными блоками. При этом он начинает применять усвоенные алгоритмы в разных ситуациях.

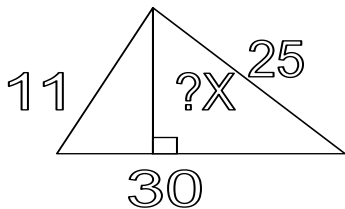
К *эвристическим* задачам относятся те, для решения которых необходимо выявить скрытые связи между элементами условия и требования, или найти способ действий, отличный от известных ученику, или сделать и то и другое. При решении таких задач используются эвристические приёмы:

- переформулировка условий и требований задачи;
- составление вспомогательных задач;
- выполнение дополнительных построений;
- исследование частных и предельных случаев для «прикидки» правильности предположений.

Таблица 6

Теорема Пифагора	Системы нелинейных уравнений
1. Алгоритмические	
	Решить систему уравнений: $\begin{cases} y^2 - xy = 12, \\ 3y - x = 0. \end{cases}$
2. Полуалгоритмические	
	Решить систему уравнений: $\begin{cases} x^2 + 2x + 3y = 0, \\ x^2 + x + 2y = 0. \end{cases}$

Окончание таблицы 6

Теорема Пифагора	Системы нелинейных уравнений
3. Эвристические	
	Решить систему уравнений: $\begin{cases} (x + y)^2 + 2x = 35 - 2y, \\ (x - y)^2 - 2y = 3 - 2x. \end{cases}$

Методические принципы построения системы задач

В учебном процессе задачи могут выполнить своё назначение, если они представлены в определённой системе. Математические знания, подлежащие усвоению, можно разделить на три группы:

- понятия, термины и соответствующие обозначения;
- теоремы;
- приемы решения задач (алгоритмы).

Поэтому система задач должна быть построена так, чтобы организовать усвоение знаний по трем выделенным направлениям.

Основой для разработки систем задач являются соответствующие принципы.

1. Принципы построения системы задач, направленной на формирование понятий

1. Раскрытие практической значимости нового понятия и его значимости для дальнейшего продвижения в обучении математике.

2. Подготовка к формализации, созданию наглядно-интуитивных представлений об объектах, принадлежащих некоторому классу.

3. Выделение существенных признаков понятия, создание представлений об объёме понятия.

4. Организация усвоения терминологии и символики, связанных с понятием.

5. Распознавание формируемого понятия.

6. Обучение применению понятия в простейших, но характерных случаях.

7. Включение понятия в систему содержательных связей с другими понятиями (классификация).

II. Принципы построения системы задач, направленной на организацию усвоения теорем

1. Раскрытие необходимости знания математического факта, сформулированного в теореме.

2. Повторение положений, на которых основывается доказательство теоремы.

3. Создание ситуации для выявления определенной закономерности, выдвижения гипотезы («открытие» теоремы).

4. Моделирование приема доказательства рассматриваемой теоремы, подготавливающее восприятие идеи доказательства.

5. Применение доказанной теоремы в простейших случаях и в ситуациях, позволяющих сопоставить решение с использованием доказанной теоремы и без неё.

III. Принципы построения системы задач, направленной на обучение приемам решения задач (алгоритмам)

1. Усвоение каждого из приемов, входящих в качестве составных частей в формируемый прием.

2. Обучение условиям применимости данного приема, распознаванию возможности того или иного приема в рассматриваемой ситуации.

3. Учет принципа систематичности, постепенного нарастания сложности.

4. Преодоление стереотипности в использовании того или иного приема за счет переключения с одной умственной операции на другую.

5. Использование каждого из формируемых в курсе математики приемов решения задач.

IV. Принципы построения системы контролирующих задач

1. Проверка уровня усвоения основного материала.

2. Применение основных понятий, теорем и следствий из них, правил, алгоритмов в знакомой учащимся ситуации (большая часть задач).

3. Применение знаний в незнакомой ситуации, требующей самостоятельного отыскания пути решения.

Описанные принципы построения системы задач являются избыточными. Соблюдение или несоблюдение отдельных принципов зависит от места обучения, содержания соответствующего учебного материала, а также от методической концепции его изучения.

Методы решения математических задач

Методом решения задач является такая система правил и указаний, пользуясь которыми можно решить те или иные конкретные задачи. Следует различать общие и частные методы.

Общий метод решения – это такой метод, пользуясь которым можно решить очень многие задачи разных видов. *Частный* метод позволяет решить лишь задачи определенного вида.

К *общим* методам решения задач относятся:

1. Метод разбиения задачи на элементарные задачи (анализ в форме расчленения).

2. Нисходящий анализ.

3. Восходящий анализ. Аналитико-синтетический метод.

4. Метод исчерпывающих проб (индуктивный метод).

5. Моделирование.

В практике решения эти методы часто комбинируются.

К *частным* методам решения математических задач относятся: координатный метод, векторный метод, метод геометрических преобразований, алгебраические методы (уравнений, неравенств, тождественных преобразований), тригонометрический метод.

Контрольные вопросы

1. Какова роль задач в обучении математике?

2. Какие трактовки понятия «упражнения» Вам известны?

3. В чем проявляется стандартизация содержания и методов решения задач?
4. В чем проявляется несовершенство методики обучения решению задач и методики обучения математике через задачи?
5. Как проявляется несоответствие постановки задач и их решений закономерностям развивающегося математического мышления?
6. Каковы функции задач?
7. Перечислите этапы деятельности по решению задачи?
8. Какие виды задач выделяют:
 - по характеру требований;
 - по функциям задач в обучении;
 - по величине проблемности;
 - по компонентам учебной деятельности;
 - по характеру связей между элементами задачи и соотношению между воспроизводящей и творческой деятельностью учащихся?
9. Какие задачи являются:
 - алгоритмическими;
 - полуалгоритмическими;
 - эвристическими?
10. Каковы принципы построения системы задач, направленной на формирование понятий?
11. Каковы принципы построения системы задач, направленной на организацию усвоения теорем.
12. Перечислите примеры построения системы заданий, направленной на обучение приемам решения задач.
13. Перечислите общие методы решения задач.
14. Перечислите частные методы решения задач.

Список литературы

1. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1990.

2. Епишева, О. Б. Учить школьников учиться математике: формирование приёмов учебной деятельности / О. Б. Епишева, В. И. Крупич. – М. : Просвещение, 1990.

3. Колягин, Ю. М. Задачи в обучении математике / Ю. М. Колягин. – М. : Просвещение, 1977. – Часть I, II.

4. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – М. : Просвещение, 1980.

5. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студентов пед. инт-ов / А. Я. Блох, Е. С. Канин и др. ; сост. Р. С Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.

6. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа // Квантор. – 1991. – № 1.

7. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005.

8. Суворова, С. Б. Методические принципы построения системы упражнений // Преподавание алгебры в 6-8 классах / С. Б. Суворова. – М. : Просвещение, 1980.

9. Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи / Л. М. Фридман. – М. ; Воронеж : Изд-во НПО МОДЭК, 1999.

10. Фридман, Л. М. Логико-психологический анализ учебных задач / Л. М. Фридман. – М. : Педагогика, 1977.

1.2. Типовые профессиональные задания к практическим занятиям и лабораторным работам для студентов специальности «Математика»

1.2.1. Формирование математических понятий

Цель. Актуализировать знания по понятиям и определениям, раскрыть на конкретных примерах основные этапы изучения математических понятий в школе.

Основные вопросы

1. Существенные и несущественные признаки понятия.
2. Содержание и объем понятия. Связь между ними.
3. Определение понятий. Виды определений.
4. Структура формально-логических определений понятий. Логический анализ структуры определения понятия.
5. Действие подведения под понятие (распознавание).

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1. Выпишите словесное определение понятия (см. варианты заданий) из школьных учебников [1], [2], [3], [4], [6]. Запишите это определение, если возможно, в виде: $A(x) \underset{\text{по определению}}{\Leftrightarrow} B(x)$.

2. Выделите содержание и объем понятия.
3. Укажите несущественные признаки понятия.
4. Проведите логико-математический анализ структуры определения математического понятия, включающего:
 - выделение термина;
 - указание рода и видовых отличий;
 - определение природы связи видовых отличий (конъюнктивная, дизъюнктивная);
 - указание вида определения.
5. Составьте упражнения на распознавание понятия.
6. Составьте всевозможные классификационные схемы для данного понятия.

7. Разработайте фрагмент урока по введению понятия конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным методами.

Задание 2

Найдите ошибки в «определениях» понятий. Укажите вид ошибки. Приведите контрпример, убеждающий школьников в ошибочности каждого «определения». Дайте верное определение каждому понятию.

Таблица 7

Варианты заданий

№ п/п	Задание 1	Задание 2
1	Понятия: «средняя линия трапеции», «квадратное уравнение» [3] [2]	1. Прямоугольником называется четырехугольник с прямым углом. 2. Логарифмом числа b по основанию a называется такое число x , что $a^x = b$.
2	Понятия: «биссектриса угла», «линейная функция» [3], [1]	1. Диаметр круга называется наибольшая хорда, проходящая через центр. 2. Число называется рациональным, если оно является дробным.
3	Понятия: «вписанный угол», «рациональное число» [3], [5]	1. Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, называется ромбом. 2. Ордината точки P_α окружности, полученной при повороте точки $P_0(1; 0)$ на угол α радиан, называется синусом угла α .
4	Понятия: «высота треугольника», «десятичная дробь» [3], [4]	1. Медианой треугольника называется отрезок, делящий его сторону пополам. 2. Числа, произведение которых равно единице, называются взаимно обратными.
5	Понятия: «прямоугольный треугольник», «правильная дробь» [3], [5]	1. Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются параллельными. 2. Число a называется не большим числа b , если $a < b$.

Список литературы

1. Алгебра : учеб. для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев и др. ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2002.

2. Алгебра : учеб. для 8 кл. общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев и др. ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2002.

3. Геометрия : учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2002.

4. Математика : учеб. для 5 кл. общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 2002.

5. Математика : учеб. для 6 кл. общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 2002.

1.2.2. Логико-математический анализ суждений, основные этапы работы над теоремой

Цель. Учиться осуществлять логико-математический анализ утверждений, подбирать средства для раскрытия содержания теоремы и для закрепления теоремы.

Основные вопросы

1. Понятие о суждении в математическом смысле.
2. Аксиомы в школьном курсе математики.
3. Структура теоремы. Классификация теорем по составу и по форме.
4. Образование трех новых утверждений на основе данной теоремы.
5. Необходимое и достаточное условия.
6. Введение теоремы в процессе обучения.
7. Применение теоремы.
8. Закрепление теоремы.

Задания для самостоятельной работы

1. Ознакомьтесь с приёмами мотивации изучения теорем по источнику [1]. Составьте конспект с примерами.
2. Выполните логико-математический анализ предложенных теорем (см. варианты заданий), включающий:

- а) определение формы теоремы (условная или категорическая); в случае категорической формы перестраивание в условную;
- б) выделение разъяснительной части, условия и заключения;
- в) классификацию теоремы по составу (простая или сложная);
- г) запись условия и требования теоремы в условиях школьного обучения.

Результаты анализа оформите в виде таблицы.

Таблица 8

Формулировка теоремы:	
Условная форма: Если, то	
Структура теоремы	Разъяснительная часть:
	Условие:
	Заключение:
Вид теоремы по составу:	
Чертеж:	Дано:
	Доказать:

3. Сформулируйте данные теоремы, используя различные конструкции («свойство», «признак», «достаточное условие», «необходимое условие»).

4. Сформулируйте три новых утверждения к каждой из данных теорем. Укажите, будут ли они теоремами. Если «нет», приведите контрпример.

5. Подберите подходящий прием для мотивации изучения теоремы.

6. Введите предложенные теоремы индуктивным методом, используя один из следующих приемов:

- а) наблюдение наглядного материала (подвижных моделей, готовых чертежей);
- б) выполнение построений;
- в) решение задач на вычисление и доказательство;
- г) выполнение практических и лабораторных работ;

д) решение задач на отыскание зависимостей.

7. Укажите возможности применения каждой теоремы.

8. Разработайте устные упражнения по готовым чертежам на закрепление каждой из теорем.

Таблица 9

Варианты заданий

№ п/п	Формулировки теорем
1	<i>Теорема 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Теорема 2. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.</i>
2	<i>Теорема 1. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны. Теорема 2. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.</i>
3	<i>Теорема 1. Две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются. Теорема 2. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.</i>
4	<i>Теорема 1. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Теорема 2. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.</i>
5	<i>Теорема 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Теорема 2. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.</i>

Список литературы

1. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е. И. Лященко, К. В. Зубкова, Т. Ф. Кириченко и др. ; под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988.

1.2.3. Методика работы с теоремой. Обучение доказательствам

Цель. Актуализировать знания по основным вопросам, связанным с методами доказательств. Учиться организовывать поиск доказательства, выделять логические шаги и идею готовых доказательств, искать и устранять логические пробелы в них.

Основные вопросы

1. Понятие о доказательстве в математике.
2. Структура доказательства.
3. Виды дедуктивных доказательств.
4. Оформление доказательств теорем.
5. Приемы усвоения логики доказательства.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Ознакомьтесь с примерами отыскания доказательства различных теорем по книгам: [1, глава 4, § 2], [2, с. 79, 83-84], [3, с. 134-136]. Составьте конспект по источнику [3] в виде таблицы.

Таблица 10

<i>Теорема</i>	
<i>Чертеж:</i>	<i>Дано:</i>
	<i>Доказать:</i>
	<i>Доказательство:</i>
<i>Основная идея доказательства:</i>	
<i>Поиск доказательства</i>	
<i>Учитель</i>	<i>Учащиеся</i>
.....	

Задание 2

Рассмотрите пример оформления доказательства теоремы о сумме углов треугольника [3, с. 66, 68]. Составьте конспект, отражающий:

- а) поэтапное доказательство теоремы в виде таблицы с выделением утверждений и обоснований;
- б) методику составления карточек-таблиц (с пропусками).

Задание 3

1. Изучите доказательство одной из теорем (см. варианты заданий для предыдущего занятия) по учебному пособию Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия 7-9».

2. Оформите теорему, поиск ее доказательства и само доказательство в виде таблицы.

Таблица 11

Теорема	
Если, то	
Чертеж:	Дано: Доказать:
Отыскание доказательства:	
Учитель	Учащиеся
.....	
Доказательство в виде таблицы:	
Утверждения	Обоснования
.....	
Доказательство в виде краткой записи:	
1.	
2.	
Выводы:	
1. Метод доказательства:	
2. Основная идея доказательства:	
3. Возможности применения теоремы:	
а) зная (на основе), можно найти (доказать)	
б) зная (на основе), можно найти (доказать)	

3. Составьте карточки-таблицы (с пропусками) для доказательства рассмотренной теоремы.

Список литературы

1. Притуло, Ф. Ф. Методика изложения геометрических доказательств / Ф. Ф. Притуло. – М. : Учпедгиз, 1958.

2. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учебное пособие для студ. мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2002.

3. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005.

1.2.4. Методика обучения решению математических задач

Цель. Актуализировать общие сведения о задачах и их решении, выявить специфику каждого из четырех этапов решения задачи, ознакомиться с общими методами поиска решения задачи.

Основные вопросы

1. Осмысление условия задачи:
 - выделение условия и требования задачи;
 - схематическая запись задачи;
 - чертеж к задаче [4, глава 1].
2. Поиск решения задачи и составление плана решения [4, глава 3].
3. Общие методы поиска решения задачи:
 - анализ в форме расчленения (разбиение задачи на подзадачи) [1, с. 83-85], [4, глава 4.1];
 - нисходящий анализ [1, с. 86-91];
 - восходящий анализ, аналитико-синтетический метод [1, с. 92-98];
 - метод исчерпывающих проб (индуктивный метод) [1, с. 103-106], [3, с. 172-173];
 - моделирование [3], [4, глава 4.3].
4. Изучение найденного решения задачи [2].

Задание для самостоятельной работы

Подготовьте сообщения, раскрывающие суть основных вопросов.

Список литературы

1. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1991.
2. Канин, Е. С. Заключительный этап решения учебных задач / Е. С. Канин // Преподавание алгебры и геометрии в школе / Е. С. Канин, Ф. Ф. Нагибин ; сост. О. А. Боковнев. – М., 1982. – С. 131-139.
3. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студ. пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Ка-

нин, Н. Г. Килина и др. ; сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.

4. Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи / Л. М. Фридман. – М. ; Воронеж : Изд-во НПО МОДЭК, 1999.

1.2.5. Основы разработки урока математики

Цель. Ознакомиться с теоретическими основами разработки современного урока математики, изучить специфику деятельности учителя при разработке урока математики.

Основные вопросы

1. Сущность урока математики и основные требования к нему [2, с. 13-15].
2. Структурные элементы урока. Типология уроков [2, с. 15-19].
3. Последовательность действий учителя по постановке целей урока. Приемы формулирования целей урока. Типичные ошибки в постановке целей урока [1, глава III, §1], [2, с. 19-22].
4. Процедура отбора содержания урока [1, глава III, §2].
5. Выбор методов обучения. Различные классификации методов обучения [1, глава III, §3].
6. Различные способы оформления результатов разработки урока: план, конспект в произвольной форме, конспект с выделением деятельности учителя и учащихся [2, с. 26-28, с. 54-85], [1, глава IV, §2].

Задания для самостоятельной работы

1. Подготовьте сообщения, раскрывающие суть основных вопросов.
2. Ознакомьтесь с примером подготовки учителя к серии уроков по теме «Решение квадратных уравнений по формуле» [1, глава III, §1-2]. Составьте конспект, отражающий:
 - последовательность действий учителя по постановке целей урока;
 - процедуру отбора содержания уроков.

Список литературы

1. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: кн. для учителя / С. Г. Манвелов. – М. : Просвещение, 2002.
2. Шабашова, О. В. Содержательные и организационные основы производственной практики будущего учителя математики : учебно-методическое пособие / О. В. Шабашова. – Орск : Издательство ОГТИ, 2004.

1.2.6. Разработка урока математики по теме «Теорема о вписанном угле»

Цель. Учиться проектировать деятельность учителя при разработке современного урока математики.

Основные вопросы

1. Постановка целей урока.
2. Отбор содержания.
3. Выбор методов обучения.
4. Оформление конспекта урока.

Задания для самостоятельной работы

1. Ознакомьтесь с содержанием темы «Теорема о вписанном угле» по учебнику «Геометрия, 7-9» Л. С. Атанасяна и др. [1].
2. Выделите логически завершённые части, отражающие основное содержание урока по ознакомлению с новым материалом.
3. Для понятия «вписанный угол»:
 - выпишите определение;
 - предложите мотивацию введения понятия;
 - разработайте два варианта введения понятия: конкретно-индуктивный и абстрактно-дедуктивный;
 - составьте упражнения на распознавание вписанных углов (в простейших и сложных конфигурациях) [3, с. 183-188].
4. Для теоремы о вписанном угле:
 - предложите мотивацию введения;

- разработайте два варианта введения теоремы: индуктивный и дедуктивный;
- изучите доказательство теоремы и оформите в виде таблицы (табл. 10);
- составьте устные упражнения по готовым чертежам на закрепление теоремы [3, с. 183-188].

5. Ознакомьтесь с методическими рекомендациями и основными требованиями к учащимся по изучению темы «Теорема о вписанном угле» по книге для учителя [2].

6. Сформулируйте образовательную, воспитательную и развивающую цели урока.

7. Продумайте содержание работы по актуализации опорных знаний и умений школьников, необходимых для изучения новой темы [3, с. 183-188].

8. Составьте конспект урока (с выделением деятельности учителя и учащихся) ознакомления с новым материалом по данной теме. В качестве ориентира используйте образцы конспектов в пособии [4, с. 54-64].

Список литературы

1. Геометрия : учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2002.
2. Изучение геометрии в 7-9 классах: / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др. – М. : Просвещение, 1999.
3. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005.
4. Шабашова, О. В. Содержательные и организационные основы производственной практики будущего учителя математики : учебно-методическое пособие / О. В. Шабашова. – Орск : Издательство ОГТИ, 2004.

1.2.7. Методика обучения решению математических задач

Цель. Обобщить знания по теории задач, ознакомиться со спецификой основных этапов деятельности по решению задач, рассмотреть методику работы над математической задачей в курсе геометрии 7-9 классов.

Основные вопросы

1. Основные этапы деятельности по решению задачи.
2. Таблица Д. Пойа «Как решать задачу» и методика ее применения для обучения решению задач.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Ознакомьтесь с основными положениями работы Д. Пойа «Как решать задачу». Составьте конспект, демонстрирующий применение таблицы Д. Пойа. Конспект должен содержать:

- таблицу Д. Пойа [2, с. 210-211];
- описание методики работы с задачей о нахождении диагонали прямоугольного параллелепипеда [2, с. 14-25].

Оформите процесс работы с задачей следующим образом.

1-ый этап: осмысление условия задачи

- Задача.
- Методический комментарий.
- Таблица, иллюстрирующая диалог между учителем и учащимися.

Вопросы учителя	Ответы учащихся
.....	

- Запись условия и требования задачи, чертеж.

2-ой этап: поиск способа решения задачи

- Методический комментарий.
- Таблица, иллюстрирующая диалог между учителем и учащимися.

3-ий этап: оформление решения (выполнить самостоятельно в соответствии с методическими требованиями)

4-ый этап: изучение найденного решения

- Таблица, содержащая ключевые вопросы учителя и методический комментарий к ним.

Ключевые вопросы учителя	Методический комментарий
.....	

Задание 2

Продemonстрируйте методику работы с эвристической задачей в соответствии с рекомендациями Д. Пойа. Задачу выберите согласно варианту. Задание оформите по следующей форме.

1) Формулировка задачи: (... класс).

2) 1-ый этап: осмысление условия задачи:

– диалог между учителем и учащимися (в виде таблицы), цель которого выделить условие и требование задачи, выяснить последовательность построения чертежа;

– краткая запись того, что «Дано», что требуется «Найти» (или доказать), построение чертежа, отвечающего условию задачи.

3) 2-ой этап: поиск способа решения задачи в виде диалога между учителем и учащимися (в форме таблицы).

4) 3-ий этап: оформление решения с выделением отдельных этапов и соответствующими обоснованиями.

5) 4-ый этап: изучение найденного решения в виде диалога между учителем и учащимися (в форме таблицы).

Таблица 12

Варианты заданий

№ п/п	«Геометрия 7-9» Л. С. Атанасян и др.	№ п/п	«Геометрия 7-9» Л. С. Атанасян и др.	№ п/п	«Геометрия 7-9» Л. С. Атанасян и др.
1	Задача № 168	6	Задача № 432	11	Задача № 735
2	Задача № 214	7	Задача № 436	12	Задача № 520
3	Задача № 297	8	Задача № 438	13	Задача № 516
4	Задача № 308	9	Задача № 519	14	Задача № 618
5	Задача № 426	10	Задача № 614	15	Задача № 722

Список литературы

1. Геометрия: учебник для 7-9 классов общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2002.
2. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа // Квантор. – 1991. – № 1.

1.2.8. Организация обучения математике

Цель. Ознакомиться с различными приемами организации обучения математике.

Основные вопросы

1. Организация домашней работы.
2. Устные упражнения.
3. Виды письменного контроля: самостоятельные работы, математические диктанты, тесты, лабораторные работы.

Задания для самостоятельной работы

1. Ознакомьтесь с методикой разработки, постановки и проверки домашних заданий. Составьте конспект, раскрывающий следующие вопросы:

- нормативные требования к объему задания на дом;
- виды домашних заданий;
- формы проверки домашнего задания;
- рекомендации по проверке тетрадей школьников и оцениванию домашних заданий [4], [6].

2. Определите функции устных упражнений в обучении математике и выявите условия эффективности устных упражнений. Составьте конспект по источнику [4].

3. По материалу статьи В. С. Гиршовича [3] составьте конспект, отражающий особенности самостоятельных работ различных видов.

4. По материалу источника [8] опишите методику проведения математического диктанта.

5. Ознакомьтесь со спецификой использования тестов для контроля знаний и умений школьников, составьте конспект с примерами всевозможных тестов [1], [9].

6. Ознакомьтесь с опытом использования лабораторных работ при обучении математике. Составьте конспект, отражающий общую структуру и примерное содержание лабораторной работы по математике [8].

7. По определенной теме школьного курса математики (см. варианты заданий) составьте комплект дидактических материалов, включающий:

- один из видов (указать какой) самостоятельных работ;
- математический диктант;
- комплект тестовых заданий, включающий различные виды тестов.

Используйте как рекомендуемые источники литературы ([1], [2], [7] – для алгебраических тем; [5], [7] – для геометрических), так и дополнительные (укажите какие).

Таблица 13

Варианты заданий

№ п/п	Учебник	Тема
1	2	3
1	<i>Алгебра, 7</i> Мордкович А. Г.	Многочлены. Арифметические операции над многочленами
2	<i>Алгебра, 7</i> Мордкович А. Г.	Разложение многочленов на множители
3	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Соотношения между сторонами и углами треугольника (7 кл.)
4	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Параллельные прямые
5	<i>Алгебра, 8</i> Макарычев Ю. Н. и др.	Числовые неравенства и их свойства. Почленное сложение и умножение числовых неравенств. Применение свойств неравенств к оценке значения выражения

Окончание таблицы 13

1	2	3
6	<i>Алгебра, 8</i> Макарычев Ю. Н. и др.	Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств с одной переменной
7	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Подобные треугольники
8	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Площадь
9	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Соотношения между сторонами и углами треугольника (9 кл.)
10	<i>Алгебра, 8</i> Дорофеев Г. В. и др.	Разложение многочленов на множители
11	<i>Алгебра, 8</i> Дорофеев Г. В. и др.	Системы уравнений
12	<i>Алгебра, 8</i> Дорофеев Г. В. и др.	Квадратные уравнения
13	<i>Алгебра, 9</i> Дорофеев Г. В. и др.	Арифметическая и геометрическая прогрессии
14	<i>Алгебра, 9</i> Дорофеев Г. В. и др.	Уравнения и системы уравнений
15	<i>Алгебра, 8</i> Мордкович А. Г.	Неравенства

Список литературы

1. Алгебра : сб. заданий для подгот. к гос. итоговой аттестации в 9 кл. / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др. – М. : Просвещение, 2010.

2. Алтынов, П. И. Алгебра. Тесты. 7-9 классы : учебно-методическое пособие / П. И. Алтынов. – М. : Дрофа, 1997.

3. Гиршович, В. С. Виды самостоятельных работ / В. С. Гиршович // Математика в школе. – 1998. – № 3. – С. 37-40.

4. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: книга для учителя / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1991.

5. Изучение геометрии в 7-9 классах: книга для учителя / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др. – М : Просвещение, 1999.

6. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: книга для учителя / С. Г. Манвелов. – М. : Просвещение, 2002.

7. Математические диктанты для 5-9 классов: книга для учителя / Е. Б. Арутюнян, М. Б. Волович, Ю. А. Глазков, Г. Г. Левитас. – М. : Просвещение, 1991.

8. Новик, И. А. Формы контроля знаний учащихся по математике // Современные проблемы методики преподавания математики : сб. статей / сост. Н. С. Антонов, В. А. Гусев. – М. : Просвещение, 1985. – С. 157-166.

9. Скобелев, Г. Н. Контроль на уроках математики : пособие для учителя / Г. Н. Скобелев. – Минск : Народная асвета, 1986.

1.2.9. Оценка знаний и умений учащихся по математике

Цель. Ознакомиться с различными подходами к оценке учебных достижений школьников, с требованиями, предъявляемыми к оформлению письменных работ по математике; раскрыть структуру деятельности учителя при подготовке к контрольной работе и при проведении уроков анализа результатов контрольной работы.

Основные вопросы

1. Классификация ошибок: грубые, случайные, недочеты.
2. Различные подходы к оценке знаний и умений школьников: «по ошибкам», «по производительности», комбинированный.
3. Требования, предъявляемые к оформлению письменных работ по математике и к ведению рабочей тетради.
4. Подготовка учителя к контрольной работе.
5. Анализ результатов контрольной работы: количественный и качественный.
6. Методика проведения уроков по анализу контрольной работы. Анализ ошибок.

Задания для самостоятельной работы

1. Ознакомьтесь с видами ошибок, допускаемыми школьниками в письменных работах по математике. Составьте конспект по материалу источника [7].

2. Изучите различные подходы к оценке учебных достижений школьников по математике. Составьте конспект по источнику [7].

3. Ознакомьтесь с требованиями, предъявляемыми к оформлению письменных работ по математике и к ведению рабочей тетради. Составьте конспект по источникам [4], [6], [7, с. 45].

4. Выявите специфику количественного и качественного анализа результатов контрольной работы. Оставьте конспект по источнику [7, с. 48-49].

5. Изучите опыт проведения урока «Анализ контрольной работы» по источникам [1] и [5], опишите его структуру и содержание.

6. Пр продемонстрируйте методику подготовки учителя к контрольной работе по определенной теме (см. варианты заданий к предыдущей лабораторной работе). Для подбора содержания контрольной работы используйте источник [2], журналы «Математика в школе» за последние 5 лет, методические пособия для учителя из фонда читального зала.

Задание оформите в следующей форме.

- 1) Предмет, класс, авторы учебника, тема согласно варианту.
- 2) Цель контрольной работы [3, с. 91].
- 3) Содержание контрольной работы (один из вариантов) с указанием источника.
- 4) Оформление решения заданий в соответствии с методическими требованиями.
- 5) Требования к оформлению решения каждого задания [7, с. 47-48].
- 6) Критерии оценки каждого задания и работы в целом (выделение заданий базового, общеобразовательного и продвинутого уровней).
- 7) Средства контроля [3, с. 91].

Список литературы

1. Барабан, М. А. О проведении уроков «Анализ контрольной работы» / М. А. Барабан // Математика в школе. – 1988. – № 3. – С. 24-25.
2. Жохов, В. И. Примерное планирование учебного материала и контрольные работы по математике, 5-9 классы / В. И. Жохов и др. – М. : Вербум-М, 2000.
3. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988.
4. Нешков, К. И. Оформление записей в тетрадях / К. И. Нешков, А. Д. Семушин, С. И. Шварцбурд // Математика в школе. – 1971. – № 1. – С. 41-45.
5. О проведении уроков «Анализ контрольной работы» // Математика в школе. – 1989. – № 4. – С. 65-66.
6. Садовникова, Н. Н. Рекомендации по оформлению решения задач / Н. Н. Садовникова, А. Н. Чудовский // Математика в школе. – 1982. – № 1. – С. 27-31.
7. Шабашова, О. В. Содержательные и организационные основы производственной практики будущего учителя математики : учебно-методическое пособие / О. В. Шабашова. – Орск : Издательство ОГ-ТИ, 2004.

1.2.10. Непосредственная разработка урока математики

Цель. Учиться разрабатывать урок математики, отвечающий современным требованиям методики.

Основные вопросы

1. Постановка целей урока.
2. Отбор содержания.
3. Выбор методов обучения.
4. Оформление конспекта урока.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Продemonстрируйте методику подготовки к разработке урока по определенной теме школьного курса математики (см. варианты заданий) Для этого:

1) Ознакомьтесь с содержанием темы по учебнику «Геометрия, 7-9» Л. С. Атанасяна и др. [1].

2) Выделите логически завершённые части, отражающие основное содержание урока.

3) Если тема включает введение нового понятия:

- выпишите определение этого понятия;
- предложите мотивацию его введения;
- разработайте два варианта введения понятия: конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным методами;
- составьте упражнения на распознавание введенного понятия (в простейших и сложных конфигурациях).

4) Если тема предполагает изучение теоремы:

- предложите мотивацию ее введения;
- разработайте два варианта введения теоремы: индуктивный и дедуктивный;
- изучите доказательство теоремы и оформите в виде таблицы (табл. 10);
- составьте устные упражнения по готовым чертежам на закрепление теоремы.

5) Ознакомьтесь с методическими рекомендациями и основными требованиями к учащимся по изучению темы по книге для учителя [2].

6) Сформулируйте образовательную, воспитательную и развивающую цели урока.

7) Продумайте содержание работы по актуализации опорных знаний и умений школьников, необходимых для изучения новой темы.

Задание 2

Разработайте конспект урока ознакомления с новым материалом (с выделением деятельности учителя и учащихся) по данной теме.

При составлении конспекта урока обратите внимание на такие его компоненты, как:

- начало урока, его связь с предыдущей темой или с ранее изученным материалом;
- актуализация опорных знаний и умений (используйте всевозможные средства: фронтальный опрос, математический диктант, устную работу и пр.);
- ознакомление с новым материалом (продумайте формулировки вопросов при введении понятия и «отыскании»);
- доказательства и предполагаемые ответы на них учащимися, а также записи на доске; фрагменты записей на доске по ходу объяснения нового материала оформите в виде «фото» классной доски *после* записи конспекта урока);
- концовку урока и постановку домашнего задания;
- решение всех задач домашнего задания (приведите их после «фото» классной доски).

Таблица 14

Варианты заданий

№ п/п	Учебник	Тема
1	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 18. Свойства равнобедренного треугольника
2	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 32. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника (7 кл.)
3	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 57-58. Определение подобных треугольников. Теорема об отношении площадей подобных треугольников
4	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 62. Средняя линия треугольника
5	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 69. Касательная к окружности

Список литературы

1. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2002.

2. Изучение геометрии в 7-9 классах: книга для учителя / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др. – М. : Просвещение, 1999.

1.3. Типовые профессиональные задания к практическим занятиям и лабораторным работам для студентов специальности «Информатика» с дополнительной специальностью «Математика»

1.3.1. Формирование математических понятий

Цель. Актуализировать знания по понятиям и определениям, раскрыть на конкретных примерах основные этапы изучения математических понятий в школе.

Основные вопросы

1. Существенные и несущественные признаки понятия.
2. Содержание и объем понятия. Связь между ними.
3. Определение понятий. Виды определений.
4. Структура формально-логических определений понятий. Логический анализ структуры определения понятия.
5. Действие подведения под понятие (распознавание).

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

1. Выпишите словесное определение понятия (см. варианты заданий) из школьных учебников [1], [2], [3], [4], [6]. Запишите это определение, если возможно, в виде: $A(x) \Leftrightarrow B(x)$.
по определению

2. Выделите содержание и объем понятия.

3. Укажите несущественные признаки понятия.

4. Проведите логико-математический анализ структуры определения математического понятия, включающего:

- выделение термина;
- указание рода и видовых отличий;
- определение природы связи видовых отличий (конъюнктивная, дизъюнктивная);
- указание вида определения.

5. Составьте упражнения на распознавание понятия.

6. Составьте всевозможные классификационные схемы для данного понятия.

7. Разработайте фрагмент урока по введению понятия конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным методами.

Задание 2

Найдите ошибки в «определениях» понятий. Укажите вид ошибки. Приведите контрпример, убеждающий школьников в ошибочности каждого «определения». Дайте верное определение каждому понятию.

Таблица 15

Варианты заданий

№ п/п	Задание 1	Задание 2
1	2	3
1	Понятия: «средняя линия трапеции», «квадратное уравнение» [3], [2]	1. Прямоугольником называется четырехугольник с прямым углом. 2. Логарифмом числа b по основанию a называется такое число x , что $a^x = b$.
2	Понятия: «биссектриса угла», «линейная функция» [3], [1]	1. Диаметр круга называется наибольшая хорда, проходящая через центр. 2. Число называется рациональным, если оно является дробным.

1	2	3
3	Понятия: «вписанный угол», «рациональное число» [3], [5]	1. Четырехугольник, у которого диагонали взаимно перпендикулярны, называется ромбом. 2. Ордината точки P_α окружности, полученной при повороте точки $P_0(1; 0)$ на угол α радиан, называется синусом угла α .
4	Понятия: «высота треугольника», «десятичная дробь» [3], [4]	1. Медианой треугольника называется отрезок, делящий его сторону пополам. 2. Числа, произведение которых равно единице, называются взаимно обратными.
5	Понятия: «прямоугольный треугольник», «правильная дробь» [3], [5]	1. Прямые, лежащие в одной плоскости и не имеющие общей точки, называются параллельными. 2. Число a называется не большим числа b , если $a < b$.

Список литературы

1. Алгебра : учеб. для 7 кл. общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев и др. ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2002.

2. Алгебра : учеб. для 8 кл. общеобразовательных учреждений / Ю. Н. Макарычев и др. ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2002.

3. Геометрия : учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2002.

4. Математика : учеб. для 5 кл. общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 2002.

5. Математика : учеб. для 6 кл. общеобразовательных учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 2002.

1.3.2. Логико-математический анализ суждений. Основные этапы работы над теоремой

Цель. Учиться осуществлять логико-математический анализ утверждений, подбирать средства для раскрытия содержания теоремы и для закрепления теоремы.

Основные вопросы

1. Понятие о суждении в математическом смысле.
2. Аксиомы в школьном курсе математики.
3. Структура теоремы. Классификация теорем по составу и по форме.
4. Образование трех новых утверждений на основе данной теоремы.
5. Необходимое и достаточное условия.
6. Введение теоремы в процессе обучения.
7. Применение теоремы.
8. Закрепление теоремы.

Задания для самостоятельной работы

1. Ознакомьтесь с приёмами мотивации изучения теорем по источнику [1]. Составьте конспект с примерами.
2. Выполните логико-математический анализ предложенных теорем (см. варианты заданий), включающий:
 - а) определение формы теоремы (условная или категорическая); в случае категорической формы перестраивание в условную;
 - б) выделение разъяснительной части, условия и заключения;
 - в) классификацию теоремы по составу (простая или сложная);
 - г) запись условия и требования теоремы в условиях школьного обучения.

Результаты анализа оформите в виде таблицы.

Таблица 16

<i>Формулировка теоремы:</i>	
<i>Условная форма: Если</i>, <i>то</i>	
<i>Структура теоремы</i>	<i>Разъяснительная часть:</i>
	<i>Условие:</i>
	<i>Заключение:</i>
<i>Вид теоремы по составу:</i>	
<i>Чертеж:</i>	<i>Дано:</i>
	<i>Доказать:</i>

3. Сформулируйте данные теоремы, используя различные конструкции («свойство», «признак», «достаточное условие», «необходимое условие»).

4. Сформулируйте три новых утверждения к каждой из данных теорем. Укажите, будут ли они теоремами. Если «нет», приведите контрпример.

5. Подберите подходящий прием для мотивации изучения теоремы.

6. Введите предложенные теоремы индуктивным методом, используя один из следующих приемов:

а) наблюдение наглядного материала (подвижных моделей, готовых чертежей);

б) выполнение построений;

в) решение задач на вычисление и доказательство;

г) выполнение практических и лабораторных работ;

д) решение задач на отыскание зависимостей.

7. Укажите возможности применения каждой теоремы.

8. Разработайте устные упражнения по готовым чертежам на закрепление каждой из теорем.

Таблица 17

Варианты заданий

№ п/п	Формулировки теорем
1	<i>Теорема 1. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны. Теорема 2. В любом описанном четырехугольнике суммы противоположных сторон равны.</i>
2	<i>Теорема 1. Если три стороны одного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны. Теорема 2. Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается.</i>
3	<i>Теорема 1. Две прямые, перпендикулярные третьей, не пересекаются. Теорема 2. Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.</i>
4	<i>Теорема 1. В треугольнике против большей стороны лежит больший угол. Теорема 2. Каждая точка биссектрисы неразвернутого угла равноудалена от его сторон.</i>
5	<i>Теорема 1. Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, не смежных с ним. Теорема 2. Если две хорды окружности пересекаются, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды.</i>

Список литературы

1. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е. И. Лященко, К. В. Зубкова, Т. Ф. Кириченко и др. ; под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988.

1.3.3. Методика работы с теоремой. Обучение доказательствам

Цель. Актуализировать знания по основным вопросам, связанным с методами доказательств. Учиться организовывать поиск доказательства, выделять логические шаги и идею готовых доказательств, искать и устранять логические пробелы в них.

Основные вопросы

1. Понятие о доказательстве в математике.
2. Структура доказательства.
3. Виды дедуктивных доказательств.
4. Оформление доказательств теорем.
5. Приемы усвоения логики доказательства.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Ознакомьтесь с примерами отыскания доказательства различных теорем по книгам: [1, глава 4, § 2], [2, с. 79, 83-84], [3, с. 134-136]. Составьте конспект по источнику [3] в виде таблицы.

Таблица 18

<i>Теорема</i>	
<i>Чертеж:</i>	<i>Дано:</i>
	<i>Доказать:</i>
	<i>Доказательство:</i>
<i>Основная идея доказательства:</i>	
<i>Поиск доказательства</i>	
<i>Учитель</i>	<i>Учащиеся</i>
.....	

Задание 2

Рассмотрите пример оформления доказательства теоремы о сумме углов треугольника [3, с. 66, 68]. Составьте конспект, отражающий:

а) поэтапное доказательство теоремы в виде таблицы с выделением утверждений и обоснований;

б) методику составления карточек-таблиц (с пропусками).

Задание 3

1. Изучите доказательство одной из теорем (см. варианты заданий для предыдущего занятия) по учебному пособию Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия 7-9».

2. Оформите теорему, поиск ее доказательства и само доказательство в виде таблицы.

Таблица 19

Теорема	
Если, то	
Чертеж:	Дано:..... Доказать:
Отыскание доказательства:	
Учитель	Учащиеся
.....	
Доказательство в виде таблицы:	
Утверждения	Обоснования
.....	
Доказательство в виде краткой записи:	
1.	
2.	
Выводы:	
1. Метод доказательства:	
2. Основная идея доказательства:	
3. Возможности применения теоремы:	
а) зная (на основе), можно найти (доказать)	
б) зная (на основе), можно найти (доказать)	

3. Составьте карточки-таблицы (с пропусками) для доказательства рассмотренной теоремы.

Список литературы

1. Притуло, Ф. Ф. Методика изложения геометрических доказательств / Ф. Ф. Притуло. – М. : Учпедгиз, 1958.
2. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе: учебное пособие для студ. мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2002.
3. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005.

1.3.4. Методика обучения решению математических задач

Цель. Актуализировать общие сведения о задачах и их решении, выявить специфику каждого из четырех этапов решения задачи, ознакомиться с общими методами поиска решения задачи.

Основные вопросы

1. Основные этапы деятельности по решению задачи.
2. Общие методы поиска решения задачи.
3. Таблица Д. Пойа «Как решать задачу» и методика ее применения для обучения решению задач.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Ознакомьтесь с общими методами поиска решения задачи. Составьте конспект, иллюстрирующий специфику их применения при решении задач различных видов:

- анализ в форме расчленения (разбиение задачи на подзадачи) [1, с. 83-85], [4, глава 4.1];
- нисходящий анализ [1, с. 86-91];
- восходящий анализ, аналитико-синтетический метод [1, с. 92-98];

- метод исчерпывающих проб (индуктивный метод) [1, с. 103-106], [2, с. 172-173];
- моделирование [2], [4, глава 4.3].

Задание 2

Ознакомьтесь с основными положениями работы Д. Пойа «Как решать задачу». Составьте конспект, демонстрирующий применение таблицы Д. Пойа. Конспект должен содержать:

- таблицу Д. Пойа [3, с. 210-211];
- описание методики работы с задачей о нахождении диагонали прямоугольного параллелепипеда [3, с. 14-25].

Оформите процесс работы с задачей следующим образом.

1-ый этап: осмысление условия задачи.

- Задача.
- Методический комментарий.
- Таблица, иллюстрирующая диалог между учителем и учащимися.

Вопросы учителя	Ответы учащихся
.....	

- Запись условия и требования задачи, чертеж.
- 2-ой этап: поиск способа решения задачи.
- Методический комментарий.
 - Таблица, иллюстрирующая диалог между учителем и учащимися.

3-ий этап: оформление решения (выполнить самостоятельно в соответствии с методическими требованиями).

4-ый этап: изучение найденного решения.

- Таблица, содержащая ключевые вопросы учителя и методический комментарий к ним.

Ключевые вопросы учителя	Методический комментарий
.....	

Задание 3

Продемонстрируйте методику работы с эвристической задачей в соответствии с рекомендациями Д. Пойа. Задачу выберите согласно варианту. Задание оформите по следующей форме.

1) Формулировка задачи:(…класс).

2) 1-ый этап: осмысление условия задачи:

– диалог между учителем и учащимися (в виде таблицы), цель которого выделить условие и требование задачи, выяснить последовательность построения чертежа;

– краткая запись того, что «Дано», что требуется «Найти (или доказать)», построение чертежа, отвечающего условию задачи.

3) 2-ой этап: поиск способа решения задачи в виде диалога между учителем и учащимися (в форме таблицы).

4) 3-ий этап: оформление решения с выделением отдельных этапов и соответствующими обоснованиями.

5) 4-ый этап: изучение найденного решения в виде диалога между учителем и учащимися (в форме таблицы).

Таблица 20

Варианты заданий

№ п/п	Геометрия 7-9 Л. С. Атанасян и др.	№ п/п	Геометрия 7-9 Л. С. Атанасян и др.	№ п/п	Геометрия 7-9 Л. С. Атанасян и др.
1	Задача № 168	6	Задача № 432	11	Задача № 735
2	Задача № 214	7	Задача № 436	12	Задача № 520
3	Задача № 297	8	Задача № 438	13	Задача № 516
4	Задача № 308	9	Задача № 519	14	Задача № 618
5	Задача № 426	10	Задача № 614	15	Задача № 722

Список литературы

1. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1991.

2. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика: учеб. пособие для студ. пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин, Н. Г. Килина и др. ; сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.

3. Пойа, Д. Как решать задачу / Д. Пойа // Квантор. – 1991. – № 1.

4. Фридман, Л. М. Как научиться решать задачи / Л. М. Фридман. – М. – Воронеж : Изд-во НПО МОДЭК, 1999.

1.3.5. Организация обучения математике. Оценка знаний и умений учащихся по математике

Цель. Ознакомиться с различными приемами организации обучения математике, с подходами к оценке учебных достижений школьников, с требованиями, предъявляемыми к оформлению письменных работ по математике; раскрыть структуру деятельности учителя при подготовке к контрольной работе и при проведении уроков анализа результатов контрольной работы.

Основные вопросы

1. Организация домашней работы.
2. Устные упражнения.
3. Виды письменного контроля: самостоятельные работы, математические диктанты, тесты.
4. Классификация ошибок.
5. Различные подходы к оценке знаний и умений школьников.
6. Требования, предъявляемые к оформлению письменных работ по математике и к ведению рабочей тетради.
7. Подготовка учителя к контрольной работе. Анализ результатов контрольной работы.
8. Методика проведения уроков по анализу контрольной работы.

Задания для самостоятельной работы

1. Ознакомьтесь с методикой разработки, постановки и проверки домашних заданий. Составьте конспект, раскрывающий следующие вопросы:

- нормативные требования к объему задания на дом;
- виды домашних заданий;
- формы проверки домашнего задания;
- рекомендации по проверке тетрадей школьников и оцениванию домашних заданий [4], [8], [12, с. 45].

2. Определите функции устных упражнений в обучении математике и выявите условия эффективности устных упражнений. Составьте конспект по источнику [4].

3. По материалу статьи В. С. Гиршовича [3] составьте конспект, отражающий особенности самостоятельных работ различных видов.

4. По материалу источника [9] опишите методику проведения математического диктанта.

5. Изучите специфику использования тестов для контроля знаний и умений школьников, составьте конспект с примерами тестов разных видов [1], [11].

6. Ознакомьтесь с видами ошибок, допускаемых школьниками в письменных работах по математике. Составьте конспект по материалу источника [12].

7. Изучите различные подходы к оценке учебных достижений школьников по математике. Составьте конспект по источнику [13].

8. Выявите специфику количественного и качественного анализа результатов контрольной работы. Составьте конспект по источнику [12, с. 48-49].

9. Изучите опыт проведения урока «Анализ контрольной работы» по источникам [2] и [10], опишите его структуру и содержание.

10. Продемонстрируйте методику подготовки учителя к контрольной работе по определенной теме (см. варианты заданий).

Для подбора содержания контрольной работы используйте источник [6] (или [5] – для геометрических тем), журналы «Математика в школе» за последние 5 лет, методические пособия для учителя из фонда читального зала.

Задание оформите в следующей форме.

- 1) Предмет, класс, авторы учебника, тема согласно варианту.
- 2) Цель контрольной работы [7, с. 91].
- 3) Содержание контрольной работы (один из вариантов) с указанием источника.
- 4) Оформление решения заданий в соответствии с методическими требованиями.
- 5) Требования к оформлению решения каждого задания [12, с. 47-48].
- 6) Критерии оценки каждого задания и работы в целом (выделение заданий базового, общеобразовательного и продвинутого уровней).
- 7) Средства контроля [7, с. 91].

Таблица 21

Варианты заданий

№ п/п	Учебник	Тема
1	2	3
1	<i>Алгебра, 7</i> Мордкович А. Г.	Многочлены. Арифметические операции над многочленами
2	<i>Алгебра, 7</i> Мордкович А. Г.	Разложение многочленов на множители
3	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Соотношения между сторонами и углами треугольника (7 кл.)
4	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Параллельные прямые
5	<i>Алгебра, 8</i> Макарычев Ю. Н. и др.	Числовые неравенства и их свойства. Почленное сложение и умножение числовых неравенств. Применение свойств неравенств к оценке значения выражения

Окончание таблицы 21

1	2	3
6	<i>Алгебра, 8</i> Макарычев Ю. Н. и др.	Линейные неравенства с одной переменной. Системы линейных неравенств с одной переменной
7	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Подобные треугольники
8	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Площадь
9	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	Соотношения между сторонами и углами треугольника (9 кл.)
10	<i>Алгебра, 8</i> Дорофеев Г. В. и др.	Разложение многочленов на множители
11	<i>Алгебра, 8</i> Дорофеев Г. В. и др.	Системы уравнений
12	<i>Алгебра, 8</i> Дорофеев Г. В. и др.	Квадратные уравнения
13	<i>Алгебра, 9</i> Дорофеев Г. В. и др.	Арифметическая и геометрическая прогрессии
14	<i>Алгебра, 9</i> Дорофеев Г. В. и др.	Уравнения и системы уравнений
15	<i>Алгебра, 8</i> Мордкович А. Г.	Неравенства

Список литературы

1. Алгебра: сб. заданий для подгот. к гос. итоговой аттестации в 9 кл. / Л. В. Кузнецова, С. Б. Суворова, Е. А. Бунимович и др. – М. : Просвещение, 2010.
2. Барабан, М. А. О проведении уроков «Анализ контрольной работы» / М. А. Барабан // Математика в школе. – 1988. – № 3. – С. 24-25.
3. Гиршович, В. С. Виды самостоятельных работ / В. С. Гиршович // Математика в школе. – 1998. – № 3. – С. 37-40.
4. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: кн. для учителя / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1991.

5. Изучение геометрии в 7-9 классах / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др. – М : Просвещение, 1999.

6. Жохов, В. И. Примерное планирование учебного материала и контрольные работы по математике, 5-9 классы / В. И. Жохов и др. – М. : Вербум-М, 2000.

7. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988.

8. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: кн. для учителя / С. Г. Манвелов. – М. : Просвещение, 2002.

9. Новик, И. А. Формы контроля знаний учащихся по математике // Современные проблемы методики преподавания математики : сб. статей / сост. Н. С. Антонов, В. А. Гусев. – М. : Просвещение, 1985. – С. 157-166.

10. О проведении уроков «Анализ контрольной работы» // Математика в школе. – 1989. – № 4. – С. 65-66.

11. Скобелев, Г. Н. Контроль на уроках математики: пособие для учителя / Г. Н. Скобелев. – Минск : Народная асвета, 1986.

12. Шабашова, О. В. Содержательные и организационные основы производственной практики будущего учителя математики : учебно-методическое пособие / О. В. Шабашова. – Орск : Издательство ОГТИ, 2004.

1.3.6. Непосредственная разработка урока математики

Цель. Учиться проектировать деятельность учителя при разработке современного урока математики.

Основные вопросы

1. Постановка целей урока.
2. Отбор содержания.
3. Выбор методов обучения.
4. Оформление конспекта урока.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1

Ознакомьтесь с примером подготовки учителя к серии уроков по теме «Решение квадратных уравнений по формуле» [3, глава III, §1-2]. Составьте конспект, отражающий:

- последовательность действий учителя по постановке целей урока;
- процедуру отбора содержания уроков.

Задание 2

Продемонстрируйте методику подготовки к разработке урока по определенной теме школьного курса математики (см. варианты заданий) Для этого:

- 1) ознакомьтесь с содержанием темы по учебнику «Геометрия, 7-9» Л. С. Атанасяна и др. [1];
- 2) выделите логически завершенные части, отражающие основное содержание урока;
- 3) если тема включает введение нового понятия:
 - выпишите определение этого понятия;
 - предложите мотивацию его введения;
 - разработайте два варианта введения понятия: конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным методами;
 - составьте упражнения на распознавание введенного понятия (в простейших и сложных конфигурациях);
- 4) если тема предполагает изучение теоремы:
 - предложите мотивацию ее введения;
 - разработайте два варианта введения теоремы: индуктивный и дедуктивный;
 - изучите доказательство теоремы и оформите в виде таблицы (табл. 19);
 - составьте устные упражнения по готовым чертежам на закрепление теоремы;

5) ознакомьтесь с методическими рекомендациями и основными требованиями к учащимся по изучению темы по книге для учителя [2];

6) сформулируйте образовательную, воспитательную и развивающую цели урока;

7) продумайте содержание работы по актуализации опорных знаний и умений школьников, необходимых для изучения новой темы.

Задание 3

Разработайте конспект урока ознакомления с новым материалом (с выделением деятельности учителя и учащихся) по данной теме. В качестве ориентира используйте образцы конспектов в пособии [4, с. 54-64].

При составлении конспекта урока обратите внимание на такие его компоненты, как:

- начало урока, его связь с предыдущей темой или с ранее изученным материалом;
- актуализацию опорных знаний и умений (используйте всевозможные средства: фронтальный опрос, математический диктант, устную работу и пр.);
- ознакомление с новым материалом (продумайте формулировки вопросов при введении понятия и «отыскании» доказательства и предполагаемые ответы на них учащимися, а также записи на доске; фрагменты записей на доске по ходу объяснения нового материала оформите в виде «фото» классной доски *после* записи конспекта урока);
- концовку урока и постановку домашнего задания;
- решения всех задач домашнего задания (приведите их после «фото» классной доски).

Таблица 22

Варианты заданий

№ п/п	Учебник	Тема
1	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 18. Свойства равнобедренного треугольника
2	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 32. Теорема о соотношениях между сторонами и углами треугольника (7 кл.)
3	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 57-58. Определение подобных треугольников. Теорема об отношении площадей подобных треугольников
4	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 62. Средняя линия треугольника
5	<i>Геометрия, 7-9</i> Атанасян Л. С. и др.	П. 69. Касательная к окружности

Список литературы

1. Геометрия: учеб. для 7-9 кл. общеобразовательных учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2002.

2. Изучение геометрии в 7-9 классах: / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др. – М. : Просвещение, 1999.

3. Манвелов, С. Г. Конструирование современного урока математики: / С. Г. Манвелов. М. : Просвещение, 2002.

4. Шабашова, О. В. Содержательные и организационные основы производственной практики будущего учителя математики: учебно-методическое пособие / О. В. Шабашова. – Орск: Издательство ОГ-ТИ, 2004.

2. ИНДИВИДУАЛЬНАЯ ДОМАШНЯЯ КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА

2.1. Задания индивидуальной домашней контрольной работы по теме «Методика изучения математических понятий и суждений»

Задание 1

Выберите понятие из некоторой темы школьного курса геометрии (см. варианты заданий) и выполните следующие задания.

1. Выпишите словесное определение понятия из школьного учебника. Запишите это определение, если возможно, в виде:

$A(x) \Leftrightarrow B(x)$. Укажите вид определения.
по определению

2. Выделите содержание и объем понятия.

3. Укажите несущественные признаки понятия.

4. Составьте упражнения на распознавание понятия.

5. Разработайте фрагменты урока по введению понятия конкретно-индуктивным и абстрактно-дедуктивным методом.

Задание 2

Проанализируйте систему понятий, встречающихся в данной теме (или разделе), и составьте все возможные классификационные схемы, отражающие их логическую взаимосвязь. Укажите вид каждой из приведённых классификаций.

Задание 3

Выберите теорему из данной темы и раскройте методику работы с ней, выполнив следующие задания.

1. Подберите подходящий прием для мотивации изучения теоремы.

2. Введите теорему индуктивным методом, используя один из следующих приемов:

а) наблюдение наглядного материала (подвижных моделей, готовых чертежей);

б) выполнение построений;

в) решение задач на вычисление и доказательство;

- г) выполнение практических и лабораторных работ;
 д) решение задач на отыскание зависимостей.

3. Изучите теорему, ее структуру, состав, доказательство и заполните таблицу.

Таблица 23

<i>Формулировка теоремы:</i>	
<i>Условная форма:</i> Если, то	
<i>Структура теоремы</i>	<i>Разъяснительная часть:</i>
	<i>Условие:</i>
	<i>Заключение:</i>
<i>Вид теоремы по составу:</i>	
<i>Чертеж:</i>	<i>Дано:</i> <i>Доказать:</i>
<i>Отыскание доказательства:</i>	
<i>Учитель</i>	<i>Учащиеся</i>
.....	
<i>Доказательство в виде таблицы:</i>	
<i>Утверждения</i>	<i>Обоснования</i>
.....	
<i>Доказательство в виде краткой записи:</i>	
1.	
2.	
<i>Выводы:</i>	
1. <i>Метод доказательства:</i>	
2. <i>Основная идея доказательства:</i>	
3. <i>Возможности применения теоремы:</i>	
а) зная (на основе), можно найти (доказать)	
б) зная (на основе), можно найти (доказать)	

4. Разработайте устные упражнения по готовым чертежам на первичное закрепление теоремы.

Таблица 24

Варианты заданий

№ п/п	Тема школьного курса геометрии (учебник «Геометрия, 7-9» Л. С. Атанасян и др.)
1	П. 14-18. Первый признак равенства треугольников. Медианы, биссектрисы и высоты треугольника
2	П. 39-43. Многоугольники. Параллелограмм
3	П. 44. Трапеция. Свойства равнобедренной трапеции
4	П. 45-46. Прямоугольник, ромб, квадрат
5	П. 51-53. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции
6	П. 45-46. Прямоугольник, ромб, квадрат
7	П. 51-53. Площадь параллелограмма, треугольника и трапеции
8	П. 56-58. Определение подобных треугольников
9	П. 62-63. Средняя линия треугольника. Пропорциональные отрезки в прямоугольном треугольнике
10	П. 66-67. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника
11	П. 68-69. Касательная к окружности
12	П. 70-71. Центральные и вписанные углы
13	П. 74-75. Вписанная окружность. Описанная окружность
14	П. 76-78. Понятие вектора
15	П. 85. Средняя линия трапеции
16	П. 86-87. Координаты вектора
17	П. 90-92. Уравнения окружности и прямой
18	П. 101-103. Скалярное произведение векторов
19	П. 105-107. Правильный многоугольник
20	П. 116-117. Параллельный перенос и поворот

2.2. Указания к выполнению индивидуальной домашней контрольной работы

Контрольная работа выполняется в отдельной тетради, на первой странице которой следует указать общие сведения об исполнителе (см. Образец).

Образец

*Индивидуальная домашняя контрольная работа по теме
 «Методика изучения математических понятий и суждений»
 выполнена студентом III курса
 (спец. «Математика» («Информатика»))*

.....
 Фамилия, имя

Вариант № ...

Задание 1					Задание 2	Задание 3			
1.1	1.2	1.3	1.4	1.5		3.1	3.2	3.3	3.4

При выполнении контрольной работы придерживайтесь следующей схемы оформления.

Тема: «.....» (... класс)

Задание 1. Понятие «.....»

1. Определение..... (выписать из учебника [1])
 (термин) $\Leftrightarrow$ (род + видовые отличия)

Вид определения:

2. Содержание понятия: Объем понятия:

3. Несущественные признаки понятия:

4. Упражнения на распознавание понятия.

Задание. (чертежи)

5.

Введение понятия конкретно-индуктивным методом		
	Учитель	Учащиеся
Восприятие и представление ↓ Понятие ↓ Определение		

<i>Введение понятия абстрактно-дедуктивным методом</i>		
	<i>Учитель</i>	<i>Учащиеся</i>
<i>Понятие</i> ↓ <i>Определение</i> ↓ <i>Примеры</i> ↓ <i>Контрпримеры</i>		

Задание 2

Понятия, связанные с рассматриваемым понятием: ..., ..,

Классификационная схема:

Вид классификации:

Задание 3

Теорема.....

1. Мотивация.....

2. Введение теоремы индуктивным путем (оформить либо через диалог учителя и учащихся, либо через описание деятельности учителя и учащихся).

<i>Учитель</i>	<i>Учащиеся</i>
...	...

3. Работа с теоремой (оформить в виде таблицы 23).

4. Устные упражнения по готовым чертежам на первичное закрепление теоремы.

Задание. (чертежи)

Задания 1 и 2 следует выполнять после ознакомления с темой «Методика изучения математических понятий». При составлении упражнений на распознавание понятия используйте источники [4] и [6].

К заданию 3 следует приступать после изучения основных вопросов темы «Методика изучения математических суждений» и темы «Методика обучения доказательствам математических суждений». С дополнительными примерами работы над теоремой можно ознакомиться по источникам [3, с. 47-58] и [5]. При рассмотрении конкретной теоремы следует учесть методические рекомендации, предлагаемые в книге для учителя [2].

Список литературы

1. Геометрия : учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2002.
2. Изучение геометрии в 7-9 классах: / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, Ю. А. Глазков и др. – М. : Просвещение, 1999.
3. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е. И. Лященко, К. В. Зубкова, Т. Ф. Кириченко и др. ; под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988.
4. Руденко, В. Н. Геометрия : учеб. для 7-9 кл. общеобразоват. учреждений / В. Н. Руденко, Г. А. Бахурин ; под. ред А. Я. Цукаря. – М. : Просвещение, 1994.
5. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005.
6. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005.

3. ДИАГНОСТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ КОНТРОЛЯ КАЧЕСТВА МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ МАТЕМАТИКИ

Программа зачета для студентов специальности «математика» (III курс, 6 семестр)

1. Образование математических понятий. Содержание и объем понятия. Определение понятия.
2. Виды определений. Виды ошибок в определениях.
3. Сущность и средства мотивации введения понятия. Введение понятий в процессе обучения. Этапы формирования понятия.
4. Состав суждения. Классификация суждений. Аксиомы в школьном курсе математики.
5. Структура теоремы. Образование трех новых утверждений на основе данной теоремы. Понятие о необходимом и достаточном условии.
6. Введение теоремы в процессе обучения. Этапы изучения теоремы.
7. Состав, цели, свойства доказательства. Виды доказательств. Прямые доказательства: анализ и синтез. Косвенные доказательства: метод от противного, метод исключения. Метод математической индукции.
8. Дидактические принципы обучения математике.
9. Воспитание и развитие учащихся в процессе обучения математике.
10. Применение научных методов в преподавании математики.
11. Методы преподавания математики. Методы изучения математики.
12. Задачи как средство обучения математике. Функции задач.
13. Этапы процесса решения задачи.
14. Общие приемы поиска решения задач.
15. Принципы построения системы задач на усвоение понятия и его определения.
16. Принципы построения системы задач на усвоение теоремы и её доказательства.

17. Принципы построения системы задач на усвоение приемов решения (алгоритмов).

18. Урок как основная форма организации обучения математике. Структура урока. Основные этапы урока. Требования к уроку математики.

19. Различные классификации типов уроков.

20. Методика анализа урока математики.

21. Организация домашней работы при обучении математике.

22. Методика использования устных упражнений в практике преподавания математики.

23. Различные виды письменного контроля качества усвоения математики и методика их использования.

24. Подходы к оценке знаний и умений учащихся по математике.

25. Требования, предъявляемые к оформлению письменных работ по математике.

26. Подготовка учителя к контрольной работе. Количественный и качественный анализ результатов контрольной работы.

27. Уровневая дифференциация при обучении математике.

28. Индивидуальные особенности и способности школьников в контексте изучения курса математики.

29. Содержательно-организационные основы профильного обучения математике в старших классах.

***Программа зачета для студентов специальности
«Информатика» с дополнительной специальностью
«Математика» (III курс, 5 семестр)***

1. Образование математических понятий. Содержание и объем понятия. Определение понятия.

2. Виды определений. Виды ошибок в определениях.

3. Сущность и средства мотивации введения понятия. Введение понятий в процессе обучения. Этапы формирования понятия.

4. Состав суждения. Классификация суждений. Аксиомы в школьном курсе математики.

5. Структура теоремы. Образование трех новых утверждений на основе данной теоремы. Понятие о необходимом и достаточном условии.

6. Введение теоремы в процессе обучения. Этапы изучения теоремы.

7. Состав, цели, свойства доказательства. Виды доказательств. Прямые доказательства: анализ и синтез. Косвенные доказательства: метод от противного, метод исключения. Метод математической индукции.

8. Дидактические принципы обучения математике.

9. Воспитание и развитие учащихся в процессе обучения математике.

10. Применение научных методов в преподавании математики.

11. Методы преподавания математики. Методы изучения математики.

12. Уровневая дифференциация при обучении математике.

13. Индивидуальные особенности и способности школьников в контексте изучения курса математики.

14. Содержательно-организационные основы профильного обучения математике в старших классах.

Список литературы для подготовки к зачету

1. Воспитание учащихся при обучении математике / сост. Л. Ф. Пичурин. – М. : Просвещение, 1987.

2. Груденов, Я. И. Совершенствование методики работы учителя математики: / Я. И. Груденов. – М. : Просвещение, 1991.

3. Дорофеев, Г. В. Дифференциация в обучении математике / Г. В. Дорофеев и др. // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 15-21.

4. Колягин, Ю. М. Профильная дифференциация обучения математике / Ю. М. Колягин и др. // Математика в школе. – 1990. – № 4. – С. 21-27.

5. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики / Е. И. Лященко, К. В. Зубкова, Т. Ф. Кириченко и др. ; под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988.
6. Метельский, Н. В. Дидактика математики: Общая методика ее проблемы / Н. В. Метельский. – Минск : Издательство БГУ, 1982.
7. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студ. пед. ин-тов / А. Я. Блох, Е. С. Канин, Н. Г. Килина и др. ; сост. Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – М. : Просвещение, 1985.
8. Методика преподавания математики в средней школе: Общая методика : учеб. пособие для студ. физ.-мат. фак. пед. ин-тов / В. А. Оганесян, Ю. М. Колягин, Г. Л. Луканкин, В. Я. Саннинский. – М. : Просвещение, 1980.
9. Саранцев, Г. И. Методика обучения математике в средней школе : учебное пособие для студ. мат. спец. пед. вузов и ун-тов / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2002.
10. Саранцев, Г. И. Обучение математическим доказательствам и опровержениям в школе / Г. И. Саранцев. – М. : Гуманитар. изд. центр ВЛАДОС, 2005.
11. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005.
12. Столяр, А. А. Педагогика математики / А. А. Столяр. – Минск : Высшая школа, 1986.
13. Темербекова, А. А. Методика преподавания математики: / А. А. Темербекова. – М. : Гуманит. изд. центр ВЛАДОС, 2003.
14. Унт, И. Э. Индивидуализация и дифференциация обучения / И. Э. Унт. – М. : Педагогика, 1990.
15. Шабашова, О. В. Содержательные и организационные основы производственной практики будущего учителя математики : учебно-методическое пособие / О. В. Шабашова. – Орск : Издательство ОГТИ, 2004.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Содержание дисциплины «Теория и методика обучения математике» по разделу «Общая методика»

I.1. Математика как наука и учебный предмет в школе.

История развития и современное состояние методики преподавания математики как научной дисциплины. Основные проблемы, стоящие перед методикой преподавания математики в настоящее время.

I.2. Цели и задачи обучения математике в школе.

Иерархия в установлении образовательных, воспитательных и развивающих целей учебного процесса.

I.3. Методическая система обучения математике в школе, общая характеристика её основных компонентов.

Содержание школьного курса математики (ШКМ). Основные проблемы построения ШКМ.

Дидактические принципы и особенности их реализации в преподавании математики. Оптимальный выбор принципов обучения с учетом уровня развития учащихся конкретного класса.

Методика формирования математических понятий и суждений (аксиом, теорем). Алгоритмы. Обучение школьников алгоритмам.

Задачи в обучении математике. Функции задач в обучении, обучение через задачи, методические требования к системе задач по теме.

Организация обучения математике. Основные требования к уроку математики, типы уроков. Формы и методы проверки и оценки знаний учащихся по математике.

I.4. Дифференцированное изучение курса математики.

Уровневая и профильная дифференциации при обучении математике. Предпрофильная подготовка. Индивидуальные особенности и способности школьников в контексте изучения курса математики.

Приложение 2

**Тематический план изучения раздела
 «Общая методика» (специальность «Математика»)**

Наименование разделов, тем	Курс, семестр	Количество часов				Итоговая форма контроля
		Всего	Лекции	Практич. занятия	Лаборат. работы	
I. Общая методика						
1.1. Математика как наука и учебный предмет в школе 1.2. Цели и задачи обучения математике в школе 1.3. Методическая система обучения математике в школе, общая характеристика её основных компонентов	III, 5 с.	18	10	8	-	-
(продолжение) 1.3. Методическая система обучения математике в школе, общая характеристика её основных компонентов 1.4. Дифференцированное изучение курса математики	III, 6 с.	28	8	8	12	Зачет

Приложение 3

**Рабочий план изучения раздела «Общая методика»
 (специальность «Математика»)**

№ п/п	Темы лекций, практических и лабораторных занятий	Кол-во часов
III курс, 5-й семестр		
	<i>Лекции (10 часов)</i>	
1	Школьное математическое образование: содержание и структура, тенденции развития. Предмет и метод теории и методики обучения математике	2
2	Методика изучения математических понятий	2
3	Методика изучения математических суждений	3
4	Методика обучения доказательствам математических суждений	3
	<i>Практические занятия (8 часов)</i>	
1	Формирование математических понятий	3
2	Логико-математический анализ суждений. Основные этапы работы над теоремой	2
3	Методика работы с теоремой. Обучение доказательствам	3
III курс, 6-й семестр		
	<i>Лекции (8 часов)</i>	
1	Задачи в обучении математике	3
2	Пропедевтическая математическая подготовка в 5-6 классах	5
	<i>Практические занятия (8 часов)</i>	
1	Методика обучения решению математических задач	3
2	Основы разработки урока математики	2
3	Непосредственная разработка урока математики	3
	<i>Лабораторные работы (12 часов)</i>	
1	Методика обучения решению математических задач	4
2	Организация обучения математике	2
3	Оценка знаний и умений учащихся по математике	2
4	Непосредственная разработка урока математики	4

Приложение 4

**Тематический план изучения раздела «Общая методика»
 (специальность «Информатика» с дополнительной
 специальностью «Математика»)**

Наименование разделов, тем	Курс, семестр	Количество часов				Итоговая форма контроля
		Всего	Лекции	Практич. занятия	Лаборат. работы	
I. Общая методика						
1.1. Математика как наука и учебный предмет в школе 1.2. Цели и задачи обучения математике в школе 1.3. Методическая система обучения математике в школе, общая характеристика её основных компонентов	III, 5 с.	118	110	8	-	Зачет
(продолжение) 1.3. Методическая система обучения математике в школе, общая характеристика её основных компонентов 1.4. Дифференцированное изучение курса математики	III, 6 с.		10	-	6	-

Приложение 5

**Рабочий план изучения раздела «Общая методика»
 (специальность «Информатика»
 с дополнительной специальностью «Математика»)**

№ п/п	Темы лекций, практических и лабораторных занятий	Кол-во часов
III курс, 5-й семестр		
	<i>Лекции (10 часов)</i>	
1	Школьное математическое образование: содержание и структура, тенденции развития. Предмет и метод теории и методики обучения математике	2
2	Методика изучения математических понятий	2
3	Методика изучения математических суждений	3
4	Методика обучения доказательствам математических суждений	3
	<i>Практические занятия (8 часов)</i>	
1	Формирование математических понятий	3
2	Логико-математический анализ суждений. Основные этапы работы над теоремой	2
3	Методика работы с теоремой. Обучение доказательствам	3
III курс, 6-й семестр		
	<i>Лекции (10 часов)</i>	
1	Задачи в обучении математике	4
2	Основы разработки урока математики	2
3	Пропедевтическая математическая подготовка в 5-6 классах	4
	<i>Лабораторные работы (6 часов)</i>	
1	Методика обучения решению математических задач	2
2	Организация обучения математике. Оценка знаний и умений учащихся по математике	2
3	Непосредственная разработка урока математики	2

Приложение 6

**ПРОГРАММА
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

Таблица 1

Специальность 050201.65 – «Математика»

№ п/п	Вид работы	Форма контроля	Курс, семестр
1.	Выполнение типовых заданий по темам практических занятий	Письменное оформление и отчет в течение занятий	III, 5 с.
2.	Выполнение домашней контрольной работы	Письменное оформление и защита на зачете	
3.	Подготовка конспектов по темам для самостоятельного изучения	Письменное оформление и собеседование на зачете	
4.	Выполнение типовых заданий по темам практических занятий	Письменное оформление и отчет в течение занятий	III, 6 с.
5.	Выполнение заданий для самостоятельной работы по темам лабораторных работ	Письменное оформление и отчет в течение занятий	
6.	Выполнение программы педагогической практики	Предъявление дневника практики с выполненными заданиями и отчетом	
7.	Выполнение программы методической практики	Письменное оформление заданий практики и защита на зачете	
8.	Подготовка конспектов по темам для самостоятельного изучения	Письменное оформление и собеседование на зачете	

Таблица 2

***Специальность 050202.65 – Информатика
с дополнительной специальностью 050201.65 – Математика***

№ п/п	Вид работы	Форма контроля	Курс, семестр
1.	Выполнение типовых заданий по темам практических занятий	Письменное оформление и отчет в течение занятий	III, 5 с.
2.	Выполнение домашней контрольной работы	Письменное оформление и защита на зачете	
3.	Подготовка конспектов по темам для самостоятельного изучения	Письменное оформление и собеседование на зачете	
4.	Выполнение заданий для самостоятельной работы по темам лабораторных работ	Письменное оформление и отчет в течение занятий	III, 6 с.
5.	Подготовка конспектов по темам для самостоятельного изучения	Письменное оформление и собеседование на зачете	

Учебное издание

Ольга Владимировна Шабашова

**ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ:
ТИПОВЫЕ ПРОФЕССИОНАЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ**

Часть I

Учебно-методическое пособие

Ведущий редактор
Т. И. Никитина

Старший корректор
Е. А. Феорова

Ведущий инженер
Г. А. Чумак

Подписано в печать 16.10.2010 г.
Формат 60х84 1/16. Усл. печ. 8,0.
Тираж 50 экз. Заказ _____

**Издательство Орского гуманитарно-технологического института
(филиала) государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»**

462403, г. Орск Оренбургской обл., пр. Мира, 15 А