МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

А. Н. ПАВЛЕНКО

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (ПАРАБОЛИЧЕСКИЙ ТИП)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 517.95(07)
ББК 22.311я7
П 12

Рецензент
кандидат физико-математических наук, доцент С. А. Герасименко.

Павленко А. Н.
П 12 **Уравнения математической физики (параболический тип): методические указания к выполнению расчетно-графического задания / А. Н. Павленко. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 19 с.**

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графического задания по дисциплине «Методы математической физики» для студентов заочного отделения специальности 210106 - «Промышленная электроника».

ББК 22.311я7

© Павленко А. Н., 2009
© ГОУ ОГУ, 2009

Содержание

Введение

Методические указания предназначены студентам заочной формы обучения (специальность: 210106 – «Промышленная электроника») для выполнения расчетно-графического задания (РГЗ) по дисциплине «Методы математической физики» (раздел: параболические уравнения) в 5 семестре. Предполагается, что будут использованы сборники задач [1-2].

Целесообразность написания данных методических указаний обусловлена тем, что предмет «Методы математической физики» относится к дисциплинам, вызывающим у студентов наибольшие трудности, а небольшое число аудиторных занятий, предусмотренных учебным планом заочного обучения, не позволяет подробно рассмотреть все типы задач, предлагаемых в РГЗ.

В настоящей работе приводятся подробные решения задач примерного варианта РГЗ, состоящего из заданий:

1) раздел «Уравнения математической физики» [1, с. 212-220], задания: № 1-3 (смешанные задачи для однородного уравнения теплопроводности и однородных граничных условий), № 4 (смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности и неоднородных граничных условий), № 5; (смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности и однородных начального и граничных условий), № 6; (смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности и неоднородного начального и однородных граничных условий), № 7 (смешанная задача для неоднородного уравнения теплопроводности и неоднородных начального и граничных условий);

2) раздел «Уравнения математической физики» [2, с. 93-96, 98], задания № 12 (смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности и однородных граничных условий), № 13 (первая смешанная задача для однородного уравнения теплопроводности в круге), № 16 (одномерная задача Коши для уравнения теплопроводности).

Следует отметить, что данные методические указания могут быть использованы студентами и других инженерных специальностей всех форм обучения.

1 Решение типового варианта расчетно-графического задания

Задача 1. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = 10u_{xx}$ ($t > 0$, $0 < x < 3$);

НУ: $u(x,0) = 5\sin 3\pi x - 2\sin 7\pi x$ ($0 \le x \le 3$);

ГУ: $u(0,t) = u(3,t) = 0$ ($t \ge 0$).

Решение.

1. Используем, что решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = a^2 u_{xx}$ ($t > 0$, $0 < x < L$);

НУ: $u(x,0) = \varphi(x)$ ($0 \le x \le L$);

ГУ: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ($t \ge 0$).

следует искать в виде [2, с. 76]

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n}{L}x,$$

где A_n являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0, L]$.

2. В данном случае получим:

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\frac{\pi n}{L}x = u(x,0) = 5\sin 3\pi x - 2\sin 7\pi x = 5\sin\frac{\pi\cdot 9}{3}x - 2\sin\frac{\pi\cdot 21}{3}x.$$

Отсюда $A_9 = 5$, $A_{21} = -2$, а все остальные коэффициенты равны 0.

Тогда решением данной задачи является функция

$$u(x,t) = 5e^{-\left(\frac{\pi\cdot 9\cdot\sqrt{10}}{3}\right)^2 t} \sin\frac{\pi\cdot 9}{3}x - 2e^{-\left(\frac{\pi\cdot 21\cdot\sqrt{10}}{3}\right)^2 t} \sin\frac{\pi\cdot 21}{3}x =$$

$$= 5e^{-90\pi^2 t}\sin 3\pi x - 2e^{-490\pi^2 t}\sin 7\pi x.$$

Задача 2. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = 36u_{xx}$ ($t > 0$, $0 < x < 14$);

НУ: $u(x,0) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{7}, & 0 \le x \le 7, \\ 14 - x, & 7 < x \le 14. \end{cases}$ ($0 \le x \le 14$);

ГУ: $u(0,t) = u(14,t) = 0$ ($t \ge 0$).

Решение.

1. Используем, что решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = a^2 u_{xx}$ ($t > 0$, $0 < x < L$);

НУ: $u(x,0) = \varphi(x)$ ($0 \le x \le L$);

ГУ: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ($t \ge 0$).

следует искать в виде [2, с. 76]

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{\pi a n}{L}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{L}x,$$

где $A_n=\frac{2}{L}\int\limits_0^L\varphi(x)\sin\frac{\pi n}{L}xdx$ являются коэффициентами разложения функции $\varphi(x)$ в ряд Фурье по синусам на отрезке $[0,L]$.

2. В данном случае получим:

$$A_n=\frac{2}{14}\int\limits_0^{14}\left(\begin{cases}\frac{x^2}{7}, & 0\le x\le 7,\\ 14-x, & 7<x\le 14.\end{cases}\right)\sin\frac{\pi n}{14}xdx=\frac{1}{7}\int\limits_0^7\frac{x^2}{7}\sin\frac{\pi n}{14}xdx+$$

$$+\frac{1}{7}\int\limits_7^{14}(14-x)\sin\frac{\pi n}{14}xdx=\frac{112}{\pi^3n^3}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+\frac{84}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Замечание. Целесообразно вычислить полученные интегралы в любом компьютерном математическом пакете.

3. Решением данной задачи будет иметь вид:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{\pi 6n}{14}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{14}x=\sum_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\left(\frac{3\pi n}{7}\right)^2 t}\sin\frac{\pi n}{14}x,\ \text{где}$$

$$A_n=\frac{112}{\pi^3n^3}\left(\cos\frac{\pi n}{2}-1\right)+\frac{84}{\pi^2n^2}\sin\frac{\pi n}{2}.$$

Задача 3. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t=10u_{xx}$ ($t>0$, $0<x<3$);

НУ: $u(x,0)=1+5\cos 3\pi x-2\cos 7\pi x$ ($0\le x\le 3$);

ГУ: $u_x(0,t)=u_x(3,t)=0$ ($t\ge 0$).

Решение.

1. Рассмотрим смешанную задачу

УЧП: $u_t=a^2u_{xx}$ ($t>0$, $0<x<L$);

НУ: $u(x,0)=\varphi(x)$ ($0\le x\le L$);

ГУ: $a_1u(0,t)+b_1u_x(0,t)=0$ ($t\ge 0$);

$a_2u(L,t)+b_2u_x(L,t)=0$ ($t\ge 0$),

где $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\ne 0$, $|a_i|+|b_i|>0$ ($i=1,\ 2$).

При ее решении методом Фурье будет получена задача Штурма-Лиувилля

ОДУ: $X''+\lambda X=0$ ($\lambda\ge 0$);

ГУ: $a_1X(0)+b_1X'(0)=0$,

$a_2X(L)+b_2X'(L)=0$.

2. В данном случае получим задачу

ОДУ: $X'' + \lambda X = 0$ ($\lambda \geq 0$);

ГУ: $X'(0) = X'(3) = 0$.

Пусть $\lambda = 0$, тогда ОДУ примет вид $X'' = 0$, и $X(x) = C_1 x + C_2$ - его общее решение.

Используем ГУ. Так как $X'(x) = C_1$ и $X'(0) = X'(3) = 0$, то тогда $C_1 = 0$ и $X(x) = C_2$. Получили, что собственному значению $\lambda_0 = 0$ отвечает собственная функция $X_0(x) = 1$.

Пусть теперь $\lambda > 0$. В этом случае характеристическое уравнение данного ОДУ $k^2 + \lambda = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \cdot i$. Отсюда общим решением ОДУ $X'' + \lambda X = 0$ будет являться $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \cdot x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Найдем C_1, C_2 и λ, используя ГУ.

Так как $X'(0) = 0$, то получим:

$X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \cdot x + C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \cdot x$, $X'(0) = C_2\sqrt{\lambda} = 0$.

Из того, что $\lambda > 0$ следует $C_2 = 0$ и $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Так как $X'(3) = 0$, то получим:

$X'(x) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} \cdot x$, $X'(3) = -C_1\sqrt{\lambda}\sin 3\sqrt{\lambda} = 0$.

Из того, что $\lambda > 0$ следует $C_1 = 0$ или $\sin 3\sqrt{\lambda} = 0$.

Очевидно, что равенство $C_1 = 0$ не возможно, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$.

Таким образом, верно равенство $\sin 3\sqrt{\lambda} = 0$. Отсюда $3\sqrt{\lambda} = \pi n$ ($n = 1,2,3,\ldots$). Тогда $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2$ ($n = 1,2,3,\ldots$) - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля, а $X_n(x) = \cos\frac{\pi n}{3}x$ - ее собственные функции.

С учетом случая $\lambda = 0$ получим:

1) $\lambda_n = \left(\frac{\pi n}{3}\right)^2$ ($n = 0,1,2,\ldots$) - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля;

2) $X_n(x) = \cos\frac{\pi n}{3}x$ ($n = 0,1,2,\ldots$) - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля.

3. При решении смешанной задачи методом Фурье будет получено еще одно ОДУ:

$$T_n' + \lambda_n T_n = 0.$$

Его общее решение $T_n(t)=C_n e^{-a^2\lambda_n t}$ и тогда в данном случае получим $T_n(t)=C_n e^{-10\left(\frac{\pi n}{3}\right)^2 t}=C_n e^{-\frac{10\pi^2 n^2}{9}t}$.

4. Решение исходной задачи будем искать в виде

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)X_n(x)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n e^{-\frac{10\pi^2 n^2}{9}t}\cos\frac{\pi n}{3}x.$$

5. Используем НУ.

$$u(x,0)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\cos\frac{\pi n}{3}x=1+5\cos 3\pi x-2\cos 7\pi x=1+5\cos\frac{\pi\cdot 9}{3}x-$$

$-2\cos\frac{\pi\cdot 21}{3}x$. Отсюда $C_0=1$, $C_9=5$, $C_{21}=-2$, а все остальные коэффициенты равны 0.

6. Решение данной задачи имеет вид

$$u(x,t)=1+5e^{-\frac{10\pi^2 9^2}{9}t}\cos\frac{\pi\cdot 9}{3}x-2e^{-\frac{10\pi^2 21^2}{9}t}\cos\frac{\pi\cdot 21}{3}x=$$

$$=1+5e^{-90\pi^2 t}\cos 3\pi x-2e^{-490\pi^2 t}\cos 7\pi x.$$

Задача 4. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t=10u_{xx}$ ($t>0, 0<x<1{,}5$);

НУ: $u(x,0)=4\sin 7\pi x$ ($0\le x\le 1{,}5$);

ГУ: $u(0,t)=u_x(1{,}5;t)=0$ ($t\ge 0$).

Решение.

1. Рассмотрим смешанную задачу

УЧП: $u_t=a^2u_{xx}$ ($t>0$, $0<x<L$);

НУ: $u(x,0)=\varphi(x)$ ($0\le x\le L$);

ГУ: $a_1u(0,t)+b_1u_x(0,t)=0$ ($t\ge 0$);

$a_2u(L,t)+b_2u_x(L,t)=0$ ($t\ge 0$),

где $\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\ne 0$, $|a_i|+|b_i|>0$ ($i=1,\ 2$).

При ее решении методом Фурье будет получена задача Штурма-Лиувилля

ОДУ: $X''+\lambda X=0$ ($\lambda\ge 0$);

ГУ: $a_1X(0)+b_1X'(0)=0$,

$a_2X(L)+b_2X'(L)=0$.

2. В данном случае получим задачу

ОДУ: $X''+\lambda X=0$ ($\lambda\ge 0$);

ГУ: $X(0)=X'(1{,}5)=0$.

Пусть $\lambda = 0$, тогда ОДУ примет вид $X'' = 0$, и $X(x) = C_1 x + C_2$ - его общее решение.

Используем ГУ:

1) $X(0) = C_2 = 0$, следовательно $X(x) = C_1 x$;

2) $X'(x) = C_1$, $X'(1{,}5) = C_1 = 0$, следовательно $X(x) \equiv 0$.

Получили, что значению $\lambda = 0$ отвечает нулевое решение.

Пусть теперь $\lambda > 0$. В этом случае характеристическое уравнение данного ОДУ $k^2 + \lambda = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \cdot i$. Отсюда общим решением ОДУ $X'' + \lambda X = 0$ будет являться $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \cdot x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Найдем C_1, C_2 и λ, используя ГУ.

Так как $X(0) = 0$, то получим:

$X(0) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \cdot 0 + C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot 0 = C_1 = 0$, $X(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Так как $X'(1{,}5) = 0$, то получим:

$X'(x) = C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \cdot x$, $X'(1{,}5) = C_2\sqrt{\lambda}\cos 1{,}5\sqrt{\lambda}$.

Из того, что $\lambda > 0$ следует $C_2 = 0$ или $\cos 1{,}5\sqrt{\lambda} = 0$.

Очевидно, что равенство $C_2 = 0$ не возможно, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$ и $u(x,t) \equiv 0$.

Таким образом, верно равенство $\cos 1{,}5\sqrt{\lambda} = 0$. Отсюда $1{,}5\sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $1{,}5\sqrt{\lambda} = \frac{\pi + 2\pi n}{2}$, $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi + 2\pi n}{3}$, $\sqrt{\lambda} = \frac{\pi(1+2n)}{3}$ ($n = 0,1,2,\ldots$). Тогда $\lambda_n = \left(\frac{\pi(1+2n)}{3}\right)^2$ ($n = 0,1,2,\ldots$) - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля, а $X_n(x) = \sin\frac{\pi(1+2n)}{3}x$ - ее собственные функции.

3. При решении смешанной задачи методом Фурье будет получено еще одно ОДУ:

$$T_n' + \lambda_n T_n = 0.$$

Его общее решение $T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}$ и тогда в данном случае получим

$$T_n(t) = C_n e^{-10\left(\frac{\pi(1+2n)}{3}\right)^2 t} = C_n e^{-\frac{10\pi^2(1+2n)^2}{9}t}.$$

4. Решение исходной задачи будем искать в виде

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} T_n(t) X_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n e^{-\frac{10\pi^2(1+2n)^2}{9}t} \sin\frac{\pi(1+2n)}{3}x.$$

5. Используем НУ.

$$u(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi(1+2n)}{3}x = 4\sin 7\pi x = 4\sin\frac{\pi(1+2\cdot 10)}{3}x.$$

Отсюда $C_{10} = 4$, а все остальные коэффициенты равны 0.

6. Решение данной задачи имеет вид

$$u(x,t) = 4e^{-\frac{10\pi^2(1+2\cdot 10)^2}{9}t} \sin\frac{\pi\cdot(1+2\cdot 10)}{3}x = 4e^{-490\pi^2 t}\sin 7\pi x.$$

Задача 5. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = 10u_{xx}$ ($t>0$, $0<x<3$);

НУ: $u(x,0) = 5\sin 3\pi x - 2\sin 7\pi x + x - 2$ ($0 \le x \le 3$);

ГУ: $u(0,t) = -2$ ($t \ge 0$);

$u(3,t) = 1$ ($t \ge 0$).

Решение.

1. В задаче заданы неоднородные ГУ:

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(L,t) = \mu_2(t).$$

Сведем их к однородным ГУ с помощью замены

$$v(x,t) = u(x,t) - \mu_1(t) - (\mu_2(t) - \mu_1(t))\frac{x}{L}.$$

В данном случае получим

$$v(x,t) = u(x,t) - (-2) - (1 - (-2))\frac{x}{3} = u(x,t) + 2 - x.$$

2. Подставим функцию $v = u + 2 - x$ в данную задачу.

Так как $v_t = (u + 2 - x)'_t = u_t$, $v_{xx} = (u + 2 - x)''_{xx} = u_{xx}$, то тогда получаем УЧП $v_t = 10v_{xx}$.

Найдем НУ новой задачи.

$v(x,0) = u(x,0) + 2 - x = 5\sin 3\pi x - 2\sin 7\pi x + x - 2 + 2 - x = 5\sin 3\pi x - {}$
${}- 2\sin 7\pi x$.

Таким образом, мы свели данную задачу к задаче с однородными ГУ.

УЧП: $v_t = 10v_{xx}$ ($t>0$, $0<x<3$);

НУ: $v(x,0) = 5\sin 3\pi x - 2\sin 7\pi x$ ($0 \le x \le 3$);

ГУ: $v(0,t) = v(3,t) = 0$ ($t \ge 0$).

Ее решение $v(x,t) = 5e^{-90\pi^2 t}\sin 3\pi x - 2e^{-490\pi^2 t}\sin 7\pi x$ уже нами получено (см. задачу 1).

3. Вернувшись к $u(x,t)$, получим решение исходной задачи

$$u(x,t) = v(x,t) + x - 2 = x - 2 + 5e^{-90\pi^2 t}\sin 3\pi x - 2e^{-490\pi^2 t}\sin 7\pi x.$$

Задача 6. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = 10u_{xx} + 4\sin 3t \sin 5x$ ($t>0$, $0<x<\pi$);

НУ: $u(x,0) = 0$ ($0 \le x \le \pi$);

ГУ: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ($t \ge 0$).

Решение.

1. Используем, что решение задачи для неоднородного УЧП

УЧП: $u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t)$ ($t > 0$, $0 < x < L$);
НУ: $u(x,0) = \varphi(x)$ ($0 \le x \le L$);
ГУ: $u(0,t) = u(L,t) = 0$ ($t \ge 0$)

следует искать в виде $u(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x)$.

Здесь:
1) $X_n(t)$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля
ОДУ: $X'' + \lambda X = 0$ ($\lambda > 0$),
ГУ: $X(0) = X(L) = 0$;
2) $T_n(t)$ - решения задачи Коши
ОДУ: $T_n' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t)$,
НУ: $T_n(0) = \varphi_n$;

3) $f_n(t)$ - коэффициенты разложения $f(x,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x)$;

4) φ_n - коэффициенты разложения $\varphi(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \varphi_n X_n(x)$.

2. В данном случае будем иметь задачу Штурма-Лиувилля
ОДУ: $X'' + \lambda X = 0$ ($\lambda > 0$),
ГУ: $X(0) = X(\pi) = 0$.

Характеристическое уравнение данного ОДУ $k^2 + \lambda = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} \cdot i$. Отсюда общим решением ОДУ $X'' + \lambda X = 0$ будет являться $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \cdot x + C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Найдем C_1, C_2 и λ, используя ГУ.

Так как $X(0) = 0$, то получим:

$X(0) = C_1 \cos\sqrt{\lambda} \cdot 0 + C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot 0 = C_1 = 0$, $X(x) = C_2 \sin\sqrt{\lambda} \cdot x$.

Так как $X(\pi) = 0$, то получим:

$X(3) = C_2 \sin \pi\sqrt{\lambda}$.

Отсюда следует, что $C_2 = 0$ или $\sin \pi\sqrt{\lambda} = 0$.

Очевидно, что равенство $C_2 = 0$ не возможно, так как в противном случае $X(x) \equiv 0$.

Таким образом, верно равенство $\sin \pi\sqrt{\lambda} = 0$. Отсюда $\pi\sqrt{\lambda} = \pi n$ ($n = 1,2,\dots$), $\sqrt{\lambda} = n$. Тогда $\lambda_n = n^2$ ($n = 1,2,\dots$) - собственные значения задачи Штурма-Лиувилля, а $X_n(x) = \sin nx$ - ее собственные функции.

3. Найдем для функции $f(x,t) = 4\sin 3t \sin 5x$ ее коэффициенты разложения $f_n(t)$ в рад по собственным функциям $X_n(x) = \sin nx$:

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x).$$

Получим: $4\sin 3t \sin 5x = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin nx$.

Отсюда следует, что $f_5(t) = 4\sin 3t$, а при $n \neq 5$ выполняется $f_n(t) \equiv 0$.

4. Так как для данной задачи $\varphi(x) \equiv 0$, то тогда все коэффициенты разложения функции $\varphi(x)$ в ряд по собственным функциям $X_n(x) = \sin nx$ равны нулю: $\varphi_n = 0$.

5. Из пунктов 3 и 4 следует, что задачи Коши

ОДУ: $T_n' + a^2 \lambda_n T_n = f_n(t)$,

НУ: $T_n(0) = \varphi_n$

примет вид

ОДУ: $T_5' + 10 \cdot 5^2 T_5 = 4\sin 3t$,

НУ: $T_5(0) = 0$.

Очевидно, что при $n \neq 5$ имеем $T_n(t) \equiv 0$.

Решим полученную задачу Коши

ОДУ: $T_5' + 250 T_5 = 4\sin 3t$,

НУ: $T_5(0) = 0$.

Полученное ОДУ является линейным ОДУ первого порядка. Решим его с помощью подстановки Бернулли $T_5 = uv$. Получим:

$u'v + uv' + 250uv = 4\sin 3t$, $u'v + u(v' + 250v) = 4\sin 3t$.

Найдем любое частное решение уравнения $v' + 250v = 0$. Разделим переменные: $\dfrac{dv}{dt} + 250v = 0$, $\dfrac{dv}{dt} = -250v$, $\dfrac{dv}{v} = -250dt$, $\int \dfrac{dv}{v} = -250 \int dt$, $\ln v = -250t$, $v = e^{-250t}$.

Подставив $v = e^{-250t}$ в уравнение $u'v + u(v' + 250v) = 4\sin 3t$, получим:

$u'e^{-250t} = 4\sin 3t$, $u' = e^{250t} 4\sin 3t$, $u = \int 4e^{250t} \sin 3t dt =$

$= \dfrac{e^{250t}}{62509}(1000\sin 3t - 12\cos 3t) + C$.

$T_5 = uv = \left[\dfrac{e^{250t}}{62509}(1000\sin 3t - 12\cos 3t) + C\right] e^{-250t} = \dfrac{1000\sin 3t - 12\cos 3t}{62509} +$

$+ Ce^{-250t}$.

Найдем C, используя НУ $T_5(0) = 0$.

$T_5(0) = -\dfrac{12}{62509} + C = 0$, $C = \dfrac{12}{62509}$.

$$T_5(t) = \frac{1000\sin 3t - 12\cos 3t}{62509} + \frac{12}{62509} e^{-250t} = \frac{1000\sin 3t + 12\left(e^{-250t} - \cos 3t\right)}{62509}.$$

6. Решение исходной задачи:

$$u(x,t) = T_5(t) X_5(x) = \frac{1000\sin 3t + 12\left(e^{-250t} - \cos 3t\right)}{62509} \cdot \sin 5x.$$

Задача 7. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = 10u_{xx} + 4\sin 3t \sin 5x$ ($t > 0$, $0 < x < \pi$);

НУ: $u(x,0) = 6\sin 11x$ ($0 \le x \le \pi$);

ГУ: $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ ($t \ge 0$).

Решение.

Пункты 1-3 решения данной задачи полностью совпадают с пунктами 1-3 решения задачи 6.

4. Коэффициенты разложения φ_n функции $\varphi(x) = 6\sin 11x$ в ряд по собственным функциям $X_n(x) = \sin nx$ очевидно равны нулю при $n \ne 11$, а $\varphi_{11} = 6$.

5. Из пунктов 3 и 4 следует, что задачи Коши

ОДУ: $T_n' + a^2\lambda_n T_n = f_n(t)$,

НУ: $T_n(0) = \varphi_n$

будут иметь ненулевые решения для задач Коши:

1) ОДУ: $T_5' + 10 \cdot 5^2 T_5 = 4\sin 3t$,
НУ: $T_5(0) = 0$;

2) ОДУ: $T_{11}' + 10 \cdot 11^2 T_{11} = 0$,
НУ: $T_{11}(0) = 6$.

Решение первой задачи Коши $T_5(t) = \dfrac{1000\sin 3t + 12\left(e^{-250t} - \cos 3t\right)}{62509}$ уже получено в задаче 6.

Решим вторую задачу Коши

ОДУ: $T_{11}' + 1210T_{11} = 0$,

НУ: $T_{11}(0) = 6$.

ОДУ является уравнением с разделяющимися переменными.

$$T_{11}' + 1210T_{11} = 0,\ \frac{dT_{11}}{dt} + 1210T_{11} = 0,\ \frac{dT_{11}}{dt} = -1210T_{11},\ \frac{dT_{11}}{T_{11}} = -1210dt,$$

$$\int \frac{dT_{11}}{T_{11}} = -1210\int dt,\ \ln|T_{11}| = -1210t + \ln|C|\ (C \ne 0),\ \ln|T_{11}| - \ln|C| = -1210t,$$

$\ln\left|\dfrac{T_{11}}{C}\right| = -1210t$, $\left|\dfrac{T_{11}}{C}\right| = e^{-1210t}$, $T_{11} = Ce^{-1210t}$. Нулевое решение $T_{11} = 0$ входит в общее решение при $C = 0$.

Найдем C, используя НУ $T_{11}(0) = 6$.

$T_{11}(0) = C = 6$.

Получили, что вторая задача Коши имеет решение $T_{11}(t) = 6e^{-1210t}$.

6. Решение исходной задачи:

$$u(x,t) = T_5(t)X_5(x) + T_{11}(t)X_{11}(x) = \frac{1000\sin 3t + 12\left(e^{-250t} - \cos 3t\right)}{62509} \cdot \sin 5x +$$

$+6e^{-1210t}\sin 11x$.

Задача 8. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t = 10u_{xx} + 4\sin 3t \sin 5x$ ($t > 0$, $0 < x < \pi$);

НУ: $u(x,0) = \pi - 2x + 6\sin 11x$ ($0 \le x \le \pi$);

ГУ: $u(0,t) = \pi$ ($t \ge 0$),

$u(\pi,t) = -\pi$ ($t \ge 0$).

Решение.

1. В задаче заданы неоднородные ГУ:

$$u(0,t) = \mu_1(t),\ u(L,t) = \mu_2(t).$$

Сведем их к однородным ГУ с помощью замены

$$v(x,t) = u(x,t) - \mu_1(t) - (\mu_2(t) - \mu_1(t))\frac{x}{L}.$$

В данном случае получим

$$v(x,t) = u(x,t) - \pi - (-\pi - \pi)\frac{x}{\pi} = u(x,t) - \pi + 2x.$$

2. Подставим функцию $v = u - \pi + 2x$ в данную задачу.

Так как $v_t = (u - \pi + 2x)'_t = u_t$, $v_{xx} = (u - \pi + 2x)''_{xx} = u_{xx}$, то тогда получаем УЧП $v_t = 10v_{xx}$.

Найдем НУ новой задачи.

$v(x,0) = u(x,0) - \pi + 2x = \pi - 2x + 6\sin 11x - \pi + 2x = 6\sin 11x$.

Таким образом, мы свели данную задачу к задаче с однородными ГУ:

УЧП: $v_t = 10v_{xx} + 4\sin 3t \sin 5x$ ($t > 0$, $0 < x < \pi$);

НУ: $v(x,0) = 6\sin 11x$ ($0 \le x \le \pi$);

ГУ: $v(0,t) = v(\pi,t) = 0$ ($t \ge 0$).

3. Получили **задачу 7**. Ее решение

$$v(x,t) = \frac{1000\sin 3t + 12\left(e^{-250t} - \cos 3t\right)}{62509}\cdot \sin 5x + 6e^{-1210t}\sin 11x$$

нами уже было найдено выше.

4. Из того, что $v(x,t) = u(x,t) - \pi + 2x$, имеем $u(x,t) = v(x,t) + \pi - 2x =$

$$= \frac{1000\sin 3t + 12\left(e^{-250t} - \cos 3t\right)}{62509}\cdot \sin 5x + 6e^{-1210t}\sin 11x + \pi - 2x.$$

Задача 9. Найти решение задачи Коши

УЧП: $u_t = 5u_{xx}$ ($t > 0$, $-\infty < x < +\infty$);

НУ: $u(x,0) = e^{-2x^2 + 7x}$ ($-\infty < x < +\infty$);

Решение.

1. Используем, что для решения задачи Коши

УЧП: $u_t = a^2 \Delta u_{xx}$ ($t > 0$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $x \in R^n$);

НУ: $u(x,0) = \varphi(x)$ ($x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $-\infty < x < +\infty$)

используется формула Пуассона [2, с. 76]

$$u(x,t)=\frac{1}{\left(2a\sqrt{\pi t}\right)^n}\int\limits_{R^n}\varphi(\xi)e^{-\frac{|x-\xi|^2}{4a^2t}}d\xi .$$

2. В данном случае имеем $n=1$, $a^2=5$, $\varphi(x)=e^{-2x^2+7x}$. Тогда получим

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\xi^2+7\xi}\cdot e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4\cdot 5t}}d\xi=$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{5\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-2\xi^2+7\xi-\frac{x^2}{20t}+\frac{x\xi}{10t}-\frac{\xi^2}{20t}}d\xi=\frac{1}{2\sqrt{5\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(2+\frac{1}{20t}\right)\xi^2+\left(7+\frac{x}{10t}\right)\xi-\frac{x^2}{20t}}d\xi=$$

►Введем обозначения: $A=2+\dfrac{1}{20t}$, $B=7+\dfrac{x}{10t}$, $C=\dfrac{x^2}{20t}$.◄

$$=\frac{1}{2\sqrt{5\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-A\xi^2+B\xi-C}d\xi=$$

►Выделим из показателя экспоненты полный квадрат:

$$-A\xi^2+B\xi-C=-(A\xi^2-B\xi+C)=-\left[\left(\sqrt{A}\cdot\xi\right)^2-2\sqrt{A}\cdot\xi\cdot\frac{B}{2\sqrt{A}}+\frac{B^2}{4A}+\right.$$

$$\left.+C-\frac{B^2}{4A}\right]=-\left[\left(\sqrt{A}\cdot\xi-\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2+C-\frac{B^2}{4A}\right]=-\left(\sqrt{A}\cdot\xi-\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2+\frac{B^2}{4A}-$$

$-C$.◄

$$=\frac{1}{2\sqrt{5\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{A}\cdot\xi-\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2+\frac{B^2}{4A}-C}d\xi=\frac{e^{\frac{B^2}{4A}-C}}{2\sqrt{5\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\left(\sqrt{A}\cdot\xi-\frac{B}{2\sqrt{A}}\right)^2}d\xi=$$

►Введем замену $\tau=\sqrt{A}\cdot\xi-\dfrac{B}{2\sqrt{A}}$. Тогда $d\tau=\sqrt{A}\cdot d\xi$ и $d\xi=\dfrac{1}{\sqrt{A}}d\tau$.
После замены пределы интегрирования не изменяться.◄

$$=\frac{e^{\frac{B^2}{4A}-C}}{2\sqrt{5\pi t}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}\frac{1}{\sqrt{A}}d\tau=\frac{e^{\frac{B^2}{4A}-C}}{2\sqrt{5\pi At}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau=$$

►Используем, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\tau^2}d\tau=\sqrt{\pi}$ [4, с. 433].◄

$$=\frac{e^{\frac{B^2}{4A}-C}}{2\sqrt{5\pi At}}\sqrt{\pi}=\frac{e^{\frac{B^2}{4A}-C}}{2\sqrt{5At}}=\frac{e^{\frac{\left(7+\frac{x}{10t}\right)^2}{4\left(2+\frac{1}{20t}\right)}-\frac{x^2}{20t}}}{2\sqrt{5\left(2+\frac{1}{20t}\right)t}}=\frac{e^{\frac{-2x^2+7x+245t}{40t+1}}}{\sqrt{40t+1}}.$$

Задача 10. Найти решение смешанной задачи

УЧП: $u_t=0{,}64\Delta u$ ($t>0$, $0\le r<0{,}8$);

НУ: $u(r,0)=0{,}64-r^2$ ($0\le r\le 0{,}8$);

ГУ: $u(0{,}8;t)=0$ ($t\ge 0$),

Решение.

1. Используем, что решение задачи `

УЧП: $u_t=a^2\Delta u$ ($t>0$, $0\le r<R$);

НУ: $u(r,0)=u_0(r)$ ($0\le r\le R$) (**Замечание:** НУ не зависит от φ.);

ГУ: $u(R;t)=0$ ($t\ge 0$),

следует искать в виде $u(r,t)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n e^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)$, где коэффициенты A_n находятся по формуле $A_n=\frac{2}{R^2J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^R ru_0(r)J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)dr$.

Здесь:

1) $J_0(x)$, $J_1(x)$ - функции Бесселя [4, с. 451];

2) μ_n - нули функции Бесселя $J_0(x)$.

2. В данном случае будем иметь:

$$A_n=\frac{2}{0{,}8^2J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^{0{,}8}r\left(0{,}64-r^2\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)dr=$$

$$=\frac{2}{0{,}8^2J_1^2(\mu_n)}\int\limits_0^{0{,}8}\left(0{,}64r-r^3\right)J_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)dr=$$

$$=\frac{2}{0{,}8^2J_1^2(\mu_n)}\left(0{,}64\int\limits_0^{0{,}8}rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)dr-\int\limits_0^{0{,}8}r^3J_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)dr\right).$$

Найдем первый интеграл.

$$\int\limits_0^{0{,}8}rJ_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)dr=$$

►Введем замену $s=\frac{\mu_n}{0{,}8}r$. Тогда $r=\frac{0{,}8}{\mu_n}s$, $dr=\frac{0{,}8}{\mu_n}ds$, новые пределы интегрирования: $s_в=\frac{\mu_n}{0{,}8}0{,}8=\mu_n$ и $s_н=\frac{\mu_n}{0{,}8}0=0$.◄

$$=\int_0^{\mu_m}\frac{0{,}8s}{\mu_n}J_0(s)\frac{0{,}8}{\mu_n}ds=\frac{0{,}8^2}{\mu_n^2}\int_0^{\mu_m}sJ_0(s)ds=$$

►Используем, что [5, с. 83] $\int_0^x sJ_0(s)ds=xJ_1(x)$.◄

$$=\frac{0{,}8^2}{\mu_n^2}\mu_nJ_1(\mu_n)=\frac{0{,}8^2J_1(\mu_n)}{\mu_n}.$$

Найдем второй интеграл.

$$\int_0^{0{,}8}r^3J_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)dr=$$

►Введем замену $s=\frac{\mu_n}{0{,}8}r$. Тогда $r=\frac{0{,}8}{\mu_n}s$, $dr=\frac{0{,}8}{\mu_n}ds$, новые пределы интегрирования: $s_в=\frac{\mu_n}{0{,}8}0{,}8=\mu_n$ и $s_н=\frac{\mu_n}{0{,}8}0=0$.◄

$$=\int_0^{\mu_m}\left(\frac{0{,}8}{\mu_n}\right)^3s^3J_0(s)\frac{0{,}8}{\mu_n}ds=\frac{0{,}8^4}{\mu_n^4}\int_0^{\mu_m}s^3J_0(s)ds=$$

►Используем, что [5, с. 83] $\int_0^x s^3J_0(s)ds=2x^2J_0(x)+(x^3-4x)J_1(x)$.◄

$$=\frac{0{,}8^4}{\mu_n^4}\left[2\mu_n^2J_0(\mu_n)+(\mu_n^3-4\mu_n)J_1(\mu_n)\right]=\frac{0{,}8^4}{\mu_n^4}(\mu_n^3-4\mu_n)J_1(\mu_n)=$$

$$=\frac{0{,}8^4}{\mu_n^3}(\mu_n^2-4)J_1(\mu_n).$$

Тогда получим:

$$A_n=\frac{2}{0{,}8^2J_1^2(\mu_n)}\left(0{,}64\frac{0{,}64J_1(\mu_n)}{\mu_n}-\frac{0{,}8^4}{\mu_n^3}(\mu_n^2-4)J_1(\mu_n)\right)=\frac{2\cdot 0{,}64}{J_1(\mu_n)}\left(\frac{1}{\mu_n}-\right.$$

$$\left.-\frac{\mu_n^2-4}{\mu_n^3}\right)=\frac{2\cdot 0{,}64\cdot 4}{J_1(\mu_n)\cdot\mu_n^3}=\frac{128}{25\mu_n^3J_1(\mu_n)}.$$

3. Решение исходной задачи:

$$u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_ne^{-\frac{a^2\mu_n^2}{R^2}t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{R}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{128}{25\mu_n^3J_1(\mu_n)}e^{-\frac{0{,}64\mu_n^2}{0{,}8^2}t}J_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)=$$

$$=\frac{128}{25}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0\left(\frac{\mu_n r}{0{,}8}\right)e^{-\mu_n^2t}}{\mu_n^3J_1(\mu_n)}.$$

Список использованных источников

1 **Кузнецов Л. А.** Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 240 с.

2 **Чудесенко В. Ф.** Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / В. Ф. Чудесенко. – М.: Высш. школа, 1983. – 112 с.

3 **Боголюбов А. Н.** Задачи по математической физике: учеб. пособие / А. Н. Боголюбов. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.

4 **Универсальный** справочник: высшая математика, физика, теоретическая механика, сопротивление материалов / А. Д. Полянин [и др.] – М.: АСТ: Астрель: Профиздат, 2005. – 480 с.: ил.

5 **Смирнов М. М.** Задачи по уравнениям математической физики / М. М. Смирнов. – М.: Наука, 1975. – 128 с.: ил.

Обозначения и сокращения

1. ГУ – граничное условие;
2. НУ – начальное условие;
3. ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение;
4. РГЗ – расчетно-графическое задание;
5. УЧП – уравнения с частными производными;