

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение высшего
профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра математического анализа

А. Н. ПАВЛЕНКО

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ (ЭЛЛИПТИЧЕСКИЙ ТИП)

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ
РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОГО ЗАДАНИЯ

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
Государственного образовательного учреждения
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург 2009

УДК 517.95(07)
ББК 22.311я7
П 12

Рецензент

кандидат физико-математических наук, доцент С. А. Герасименко.

Павленко А. Н.
П 12 **Уравнения математической физики (эллиптический тип):
методические указания к выполнению расчетно-графического
задания / А. Н. Павленко. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2009. – 17 с.**

Методические указания предназначены для выполнения расчетно-графического задания по дисциплине «Методы математической физики» для студентов заочного отделения специальности 210106 - «Промышленная электроника».

ББК 22.311я7

© Павленко А. Н., 2009
© ОГУ, 2009

Содержание

Введение.....	4
1 Решение типового варианта расчетно-графического задания	5
Список использованных источников	16
Обозначения и сокращения.....	17

Введение

Методические указания предназначены студентам заочной формы обучения (специальность: 210106 – «Промышленная электроника») для выполнения расчетно-графического задания (РГЗ) по дисциплине «Методы математической физики» (раздел: эллиптические уравнения) в 6 семестре. Предполагается, что будут использованы сборники задач [1-2].

Целесообразность написания данных методических указаний обусловлена тем, что предмет «Методы математической физики» относится к дисциплинам, вызывающим у студентов наибольшие трудности, а небольшое число аудиторных занятий, предусмотренных учебным планом заочного обучения, не позволяет подробно рассмотреть все типы задач, предлагаемых в РГЗ.

В настоящей работе приводятся подробные решения задач типового варианта РГЗ, состоящего из заданий:

1) раздел «Уравнения математической физики» [1, с. 210-234], задания: № 8 (граничная задача для уравнения Лапласа в круговом секторе), № 9 (задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге);

2) раздел «Уравнения математической физики» [2, с. 69-98], задания: № 4 (задача Дирихле для уравнения Лапласа в круге), № 5 (граничная задача для уравнения Пуассона в кольце), № 6 (граничная задача для уравнения Пуассона в шаровом слое), № 7 (граничная задача для уравнения Гельмгольца в круге), № 8 (граничная задача для уравнения Гельмгольца в шаре).

Следует отметить, что данные методические указания могут быть использованы студентами и других инженерных специальностей всех форм обучения.

1 Решение типового варианта расчетно-графического задания

Задача 1. Найти решение задачи для уравнения Лапласа в круге

УЧП: $\Delta u = 0$ ($0 \leq r < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$);

ГУ: $u|_{r=1} = -3 \cos 5\varphi$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Решение.

Используем, что решение задачи

УЧП: $\Delta u = 0$ ($0 \leq r < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$);

ГУ: $u|_{r=R} = f(\varphi)$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

следует искать в виде [2, с. 78]

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$\text{где } A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Так как числа A_0 , A_n , B_n являются коэффициентами разложения функции $f(\varphi) = -3 \cos 5\varphi$ в ряд Фурье по функциям 1 , $\sin \varphi$, $\cos \varphi$, $\sin 2\varphi$, $\cos 2\varphi$, ..., $\sin n\varphi$, $\cos n\varphi$, то $A_5 = -3$, а все остальные коэффициенты равны 0.

Тогда решением данной задачи является функция

$$u(r, \varphi) = \left(\frac{r}{1}\right)^5 (-3) \cos 5\varphi = -3r^5 \cos 5\varphi.$$

Задача 2. Найти решение задачи для уравнения Лапласа в круге

УЧП: $\Delta u = 0$ ($0 \leq r < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$);

ГУ: $u|_{r=1} = -5\varphi^2 - 7\varphi + 6$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$);.

Решение.

Используем, что решение задачи

УЧП: $\Delta u = 0$ ($0 \leq r < 1$, $0 < \varphi < 2\pi$);

ГУ: $u|_{r=R} = f(\varphi)$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$);.

следует искать в виде [2, с. 78]

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{R}\right)^n (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

$$\text{где } A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) d\varphi, \quad A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \cos n\varphi d\varphi, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi.$$

Значения коэффициентов A_0 , A_n , B_n удобно искать в каком-либо компьютерном математическом пакете («MathCAD», «Derive» и т. п.):

$$A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-5\varphi^2 - 7\varphi + 6) d\varphi = -\frac{40}{3}\pi^2 - 14\pi + 12,$$

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-5\varphi^2 - 7\varphi + 6) \cos n\varphi d\varphi = -\frac{20}{n^2},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (-5\varphi^2 - 7\varphi + 6) \sin n\varphi d\varphi = \frac{20\pi + 14}{n}.$$

Тогда решением данной задачи является функция

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{-\frac{40}{3}\pi^2 - 14\pi + 12}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{1}\right)^n \left(-\frac{20}{n^2} \cos n\varphi + \frac{20\pi + 14}{n} \sin n\varphi\right) = \\ &= -\frac{20}{3}\pi^2 - 7\pi + 6 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \left(-\frac{20}{n^2} \cos n\varphi + \frac{20\pi + 14}{n} \sin n\varphi\right). \end{aligned}$$

Задача 3. Найти решение задачи для уравнения Лапласа в секторе круга

$$\text{УЧП: } \Delta u = 0 \quad (0 \leq r < 1, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{12});$$

$$\text{ГУ: } u(1, \varphi) = -3 \sin 18\varphi \quad (0 < \varphi < \frac{\pi}{12}),$$

$$u(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < 1),$$

$$u_\varphi\left(r, \frac{\pi}{12}\right) = 0 \quad (0 \leq r < 1),$$

Решение.

Используем, что решение задачи

$$\text{УЧП: } \Delta u = 0 \quad (0 \leq r < R, \quad 0 < \varphi < \alpha);$$

$$\text{ГУ: } u(R, \varphi) = f(\varphi) \quad (0 < \varphi < \alpha),$$

$$a_1 u(r, 0) + b_1 u_\varphi(r, 0) = 0 \quad (0 \leq r < R),$$

$$a_2 u(r, \alpha) + b_2 u_\varphi(r, \alpha) = 0 \quad (0 \leq r < R)$$

$$|a_i| + |b_i| \neq 0 \quad (i = 1, 2)$$

следует искать в виде [3, с. 83]

$$u(r, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{R}\right)^{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\varphi).$$

Здесь λ_n - собственные значения, а $\Phi_n(\varphi)$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля

$$\text{ОДУ: } \Phi'' + \lambda \Phi = 0 \quad (\lambda \geq 0, \quad 0 < \varphi < \alpha);$$

$$\text{ГУ: } a_1 \Phi(0) + b_1 \Phi'(0) = 0,$$

$$a_2 \Phi(\alpha) + b_2 \Phi'(\alpha) = 0.$$

В данном случае получим задачу Штурма-Лиувилля

$$\text{ОДУ: } \Phi'' + \lambda \Phi = 0 \quad (\lambda \geq 0, \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{12});$$

$$\text{ГУ: } \Phi(0) = 0, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0.$$

При $\lambda = 0$ имеем ОДУ $\Phi'' = 0$. Очевидно, что его общее решение имеет вид $\Phi(\varphi) = C_1 \varphi + C_2$.

Используя граничное условие $\Phi(0) = 0$, получим, что $\Phi(0) = C_2 = 0$, и тогда $\Phi(\varphi) = C_1 \varphi$.

$$\text{Теперь используем граничное условие } \Phi'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0:$$

$$\Phi'(\varphi) = C_1, \quad \Phi'\left(\frac{\pi}{12}\right) = C_1 = 0.$$

Итак, при $\lambda = 0$ задача Штурма-Лиувилля имеет нулевое решение.

Рассмотрим теперь случай $\lambda > 0$. Так как характеристическое уравнение $k^2 + \lambda = 0$ для ОДУ $\Phi'' + \lambda \Phi = 0$ имеет корни $k_{1,2} = \pm \sqrt{\lambda} \cdot i$, то общим решением рассматриваемого ОДУ будет являться функция $\Phi(\varphi) = C_1 \cos \sqrt{\lambda} \varphi + C_2 \sin \sqrt{\lambda} \varphi$.

Используя граничное условие $\Phi(0) = 0$, получим:

$$\Phi(0) = C_1 = 0. \text{ Тогда } \Phi(\varphi) = C_2 \sin \sqrt{\lambda} \varphi.$$

Используя граничное условие $\Phi'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 0$, получим:

$$\Phi'(\varphi) = C_2 \sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda} \varphi. \text{ Отсюда } C_2 = 0 \text{ или } \lambda = 0 \text{ или } \cos \frac{\pi}{12} \sqrt{\lambda} = 0.$$

Если $C_2 = 0$, то тогда получаем нулевое решение $\Phi(\varphi) \equiv 0$; случай $\lambda = 0$ рассмотрен выше.

Рассмотрим случай $\cos \frac{\pi}{12} \sqrt{\lambda} = 0$:

$$\frac{\pi}{12} \sqrt{\lambda} = \frac{\pi}{2} + \pi n, \quad \sqrt{\lambda} = 6 + 12n, \quad \lambda = (6 + 12n)^2.$$

Таким образом, $\lambda_n = (6 + 12n)^2$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – собственные значения, а $\Phi_n(\varphi) = \sin \sqrt{\lambda_n} \varphi = \sin(6 + 12n)\varphi$ – собственные функции задачи Штурма-Лиувилля.

Решение данной задачи примет вид

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{R}\right)^{\sqrt{\lambda_n}} \Phi_n(\varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(\frac{r}{1}\right)^{6+12n} \sin(6 + 12n)\varphi = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{6+12n} \sin(6 + 12n)\varphi. \end{aligned}$$

Теперь используем граничное условие $u(1, \varphi) = -3 \sin 18\varphi$:

$$u(1, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin(6 + 12n)\varphi = -3 \sin 18\varphi.$$

Отсюда $C_1 = -3$, а все остальные коэффициенты равны 0.

Тогда решением данной задачи является функция

$$u(r, \varphi) = -3r^{18} \sin 18\varphi.$$

Задача 4. Найти решение задачи для уравнения Пуассона в кольце

$$\text{УЧП: } \Delta u = \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1 < r < 2);$$

$$\text{ГУ: } u|_{r=1} = -2, \quad u_r|_{r=2} = 5.$$

Решение.

1. Перейдем в полярную систему координат, используя связь между декартовыми и полярными координатами:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

$$\begin{aligned} \text{Получим } \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{(r \cos \varphi)^2 - (r \sin \varphi)^2}{r} = \frac{r^2(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}{r} = \\ &= r \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

Получили задачу в полярных координатах

$$\text{УЧП: } u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} = r \cos 2\varphi \quad (1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi);$$

$$\text{ГУ: } u(1, \varphi) = -2, \quad u_r(2, \varphi) = 5 \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

2. Сначала найдем любое частное решение уравнения Пуассона. В данном случае удобно частное решение искать в виде

$$v = Ar^3 \cos 2\varphi.$$

Подставив его в уравнение Пуассона, получим

$$A \cdot 3 \cdot 2 \cdot r \cos 2\varphi + \frac{1}{r} \cdot A \cdot 3r^2 \cos 2\varphi + \frac{1}{r^2} (-r^3 \cos 2\varphi) \cdot 4 = r \cos 2\varphi,$$

$$5A \cos 2\varphi = r \cos 2\varphi, \quad A = \frac{1}{5}. \quad \text{Тогда } v = \frac{1}{5} r^3 \cos 2\varphi.$$

$$3. \quad \text{Так как } v(1, \varphi) = \frac{1}{5} \cos 2\varphi \quad \text{и} \quad v_r(r, \varphi) = \frac{3}{5} r^2 \cos 2\varphi, \quad v_r(2, \varphi) = \frac{12}{5} \cos 2\varphi,$$

то решение данной задачи будем искать в виде $u = v + w$, где w - решение задачи для уравнения Лапласа в кольце

$$\text{УЧП: } \Delta w = 0 \quad (1 < r < 2, \quad 0 < \varphi < 2\pi);$$

$$\text{ГУ: } w(1, \varphi) = -2 - \frac{1}{5} \cos 2\varphi, \quad w_r(2, \varphi) = 5 - \frac{12}{5} \cos 2\varphi \quad (0 \leq \varphi < 2\pi).$$

4. Решение последней задачи для уравнения Лапласа в кольце будем искать в виде [2, с. 78]

$$w(r, \varphi) = C_0 + D_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n r^n + \frac{C_n}{r^n} \right) \cos n\varphi + \left(B_n r^n + \frac{D_n}{r^n} \right) \sin n\varphi \right].$$

Используем ГУ $w(1, \varphi) = -2 - \frac{1}{5} \cos 2\varphi$:

$$w(1, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [(A_n + C_n) \cos n\varphi + (B_n + D_n) \sin n\varphi] = -2 - \frac{1}{5} \cos 2\varphi.$$

Отсюда $C_0 = -2$, $A_2 + C_2 = -\frac{1}{5}$, а все остальные суммы коэффициентов равны 0.

Используем ГУ $w_r(2, \varphi) = 5 - \frac{12}{5} \cos 2\varphi$:

$$w_r(r, \varphi) = \frac{D_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(A_n n r^{n-1} - \frac{n C_n}{r^{n+1}} \right) \cos n\varphi + \left(B_n n r^{n-1} - \frac{n D_n}{r^{n+1}} \right) \sin n\varphi \right],$$

$$w_r(2, \varphi) = \frac{D_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(n A_n 2^{n-1} - \frac{n C_n}{2^{n+1}} \right) \cos n\varphi + \left(n B_n 2^{n-1} - \frac{n D_n}{2^{n+1}} \right) \sin n\varphi \right] =$$

$$= 5 - \frac{12}{5} \cos 2\varphi.$$

Отсюда $\frac{D_0}{2} = 5$, $D_0 = 10$ и $2A_2 2^{2-1} - \frac{2C_2}{2^{2+1}} = -\frac{12}{5}$, $4A_2 - \frac{1}{4}C_2 = -\frac{12}{5}$, а соответствующие выражения для остальных коэффициентов равны 0.

Найдем A_2 и C_2 , решив систему уравнений

$$\begin{cases} A_2 + C_2 = -\frac{1}{5} \\ 4A_2 - \frac{1}{4}C_2 = -\frac{12}{5} \end{cases}, \begin{cases} A_2 = -\frac{49}{85} \\ C_2 = \frac{32}{85} \end{cases}$$

Все остальные коэффициенты A_n и C_n , а так же все коэффициенты B_n и D_n равны 0.

Получили решение задачи для уравнения Лапласа в кольце

$$w(r, \varphi) = -2 + 10 \ln r + \left(-\frac{49}{85} r^2 + \frac{32}{85} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi.$$

5. Приведем решение данной задачи

$$u(r, \varphi) = v(u, \varphi) + w(u, \varphi) = \frac{1}{5} r^3 \cos 2\varphi - 2 + 10 \ln r +$$

$$+ \left(-\frac{49}{85} r^2 + \frac{32}{85} \cdot \frac{1}{r^2} \right) \cos 2\varphi = -2 + 10 \ln r + \left(\frac{1}{5} r^3 - \frac{49}{85} r^2 + \frac{32}{85 r^2} \right) \cos 2\varphi.$$

Задача 5. Найти решение задачи для уравнения Пуассона в шаровом слое

УЧП: $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = xz$ ($1 < r < 3$);

ГУ: $u|_{r=1} = -3, u|_{r=3} = 5.$

Решение.

1. Очевидно, что одним из частных решений уравнения Пуассона

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = xz$$

является функция $v = \frac{1}{6} xz^3$.

Перейдем в сферическую систему координат, используя соотношения:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Тогда $v = \frac{1}{6} xz^3 = \frac{1}{6} r \sin \theta \cos \varphi (r \cos \theta)^3 = \frac{1}{6} r^4 \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta.$

2. Так как:

$$1) v(1, \varphi, \theta) = \frac{1}{6} \cdot 1^4 \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta = \frac{1}{6} \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta,$$

$$2) v(3, \varphi, \theta) = \frac{1}{6} \cdot 3^4 \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta = \frac{27}{2} \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta, \text{ то решение}$$

данной задачи будем искать в виде $u = v + w$, где w - решение задачи для уравнения Лапласа в шаровом слое:

УЧП: $\Delta w = 0 \quad (1 < r < 3);$

ГУ: $w|_{r=1} = -3 - \frac{1}{6} \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta,$

$$w|_{r=3} = 5 - \frac{27}{2} \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta.$$

3. Решение задачи для уравнения Лапласа в шаровом слое будем искать в виде [2, с. 79]

$$w(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} r^n [A_{0n} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (A_{kn} \cos k\varphi + B_{kn} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta)] + \sum_{n=0}^{\infty} r^{-n-1} [C_{0n} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (C_{kn} \cos k\varphi + D_{kn} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta)]. \quad (1)$$

Здесь $P_n(\cos \theta)$ - многочлены Лежандра от $\cos \theta$, а $P_n^k(\cos \theta)$ - присоединенные многочлены Лежандра от $\cos \theta$:

0) $P_0(\cos \theta) = 1;$

1) $P_1(\cos \theta) = \cos \theta, P_1^1(\cos \theta) = \sin \theta;$

2) $P_2(\cos \theta) = \frac{3}{2} \cos^2 \theta - \frac{1}{2}, P_2^1(\cos \theta) = 3 \sin \theta \cos \theta, P_2^2(\cos \theta) = 3 \sin^2 \theta;$

3) $P_3(\cos \theta) = \frac{5}{2} \cos^3 \theta - \frac{3}{2} \cos \theta, P_3^1(\cos \theta) = \sin \theta \left(\frac{15}{2} \cos^2 \theta - \frac{9}{2} \right),$

$P_3^2(\cos \theta) = 15 \sin^2 \theta \cos \theta, P_3^3(\cos \theta) = 15 \sin^3 \theta;$

$$4) P_4(\cos \theta) = \frac{35}{8} \cos^4 \theta - \frac{15}{4} \cos^2 \theta + \frac{3}{8}, P_4^1(\cos \theta) = \sin \theta \left(\frac{35}{2} \cos^3 \theta - \frac{15}{2} \cos \theta \right), P_4^2(\cos \theta) = \sin^2 \theta \left(\frac{105}{2} \cos^2 \theta - \frac{15}{2} \right), P_4^3(\cos \theta) = 105 \sin^3 \theta \cos \theta, P_4^4(\cos \theta) = 105 \sin^4 \theta.$$

Так как в выражение $\cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta$ входит множитель $\cos \varphi$, то попытаемся представить $\sin \theta \cos^3 \theta$ в виде линейной комбинации приведенных многочленов Лежандра вида $P_n^1(\cos \theta)$. Получим:

$$\begin{aligned} \sin \theta \cos^3 \theta &= \frac{2}{35} \sin \theta \left(\frac{35}{2} \cos^3 \theta - \frac{15}{2} \cos \theta \right) + \frac{2}{35} \cdot \frac{15}{2} \sin \theta \cos \theta = \\ &= \frac{2}{35} P_4^1(\cos \theta) + \frac{1}{7} \cdot 3 \sin \theta \cos \theta = \frac{2}{35} P_4^1(\cos \theta) + \frac{1}{7} P_2^1(\cos \theta). \end{aligned}$$

Теперь граничные условия можно записать в виде:

$$1) w|_{r=1} = -3 - \frac{1}{6} \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta = -3 \cdot 1 - \frac{1}{6} \cos \varphi \left(\frac{2}{35} P_4^1(\cos \theta) + \frac{1}{7} P_2^1(\cos \theta) \right) = -3 \cdot P_0(\cos \theta) - \frac{1}{105} \cos \varphi \cdot P_4^1(\cos \theta) - \frac{1}{42} \cos \varphi \cdot P_2^1(\cos \theta),$$

$$2) w|_{r=3} = 5 - \frac{27}{2} \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta = 5 \cdot 1 - \frac{27}{2} \cos \varphi \left(\frac{2}{35} P_4^1(\cos \theta) + \frac{1}{7} P_2^1(\cos \theta) \right) = 5 \cdot P_0(\cos \theta) - \frac{27}{35} \cos \varphi \cdot P_4^1(\cos \theta) - \frac{27}{14} \cos \varphi \cdot P_2^1(\cos \theta).$$

При $r = 1$ равенство (1) примет вид

$$\begin{aligned} w(1, \varphi, \theta) &= \sum_{n=0}^{\infty} [A_{0n} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (A_{kn} \cos k\varphi + B_{kn} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta)] + \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} [C_{0n} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (C_{kn} \cos k\varphi + D_{kn} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta)] = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \{ (A_{0n} + C_{0n}) P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n [(A_{kn} + C_{kn}) \cos kn + \\ &+ (B_{kn} + D_{kn}) \sin k\varphi] P_n^k(\cos \theta) \} = -3 \cdot P_0(\cos \theta) - \frac{1}{105} \cos \varphi \cdot P_4^1(\cos \theta) - \\ &- \frac{1}{42} \cos \varphi \cdot P_2^1(\cos \theta). \end{aligned}$$

$$\text{Отсюда } A_{00} + C_{00} = -3, \quad A_{14} + C_{14} = -\frac{1}{105}, \quad A_{12} + C_{12} = -\frac{1}{42}, \quad \text{а все}$$

остальные суммы коэффициентов равны 0.

При $r = 3$ равенство (1) примет вид

$$w(1, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n [A_{0n} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (A_{kn} \cos k\varphi + B_{kn} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta)] +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^{n+1}} [C_{0n} P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n (C_{kn} \cos k\varphi + D_{kn} \sin k\varphi) P_n^k(\cos \theta)] = \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left(3^n A_{0n} + \frac{1}{3^{n+1}} C_{0n} \right) P_n(\cos \theta) + \sum_{k=1}^n \left[\left(3^n A_{kn} + \frac{1}{3^{n+1}} C_{kn} \right) \cos kn + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(3^n B_{kn} + \frac{1}{3^{n+1}} D_{kn} \right) \sin k\varphi \right] P_n^k(\cos \theta) \right\} = 5 \cdot P_0(\cos \theta) - \frac{27}{35} \cos \varphi \cdot P_4^1(\cos \theta) - \\
& - \frac{27}{14} \cos \varphi \cdot P_2^1(\cos \theta).
\end{aligned}$$

Отсюда $3^0 A_{00} + \frac{1}{3^{0+1}} C_{00} = 5$, $3^4 A_{14} + \frac{1}{3^{4+1}} C_{14} = -\frac{27}{35}$, $3^2 A_{12} + \frac{1}{3^{2+1}} C_{12} = -\frac{27}{14}$, а все остальные суммы коэффициентов равны 0.

Найдем коэффициенты A_{00} , C_{00} , A_{12} , C_{12} , A_{14} и C_{14} решив системы уравнений:

$$\begin{aligned}
1) & \begin{cases} A_{00} + C_{00} = -3 \\ A_{00} + C_{00} = 5 \end{cases}, \begin{cases} A_{00} = 9 \\ C_{00} = -12 \end{cases}; \\
2) & \begin{cases} A_{14} + C_{14} = -\frac{1}{105} \\ 81A_{14} + \frac{1}{243} C_{14} = -\frac{27}{35} \end{cases}, \begin{cases} A_{14} = -\frac{1}{105} \\ C_{14} = 0 \end{cases}; \\
3) & \begin{cases} A_{12} + C_{12} = -\frac{1}{42} \\ 9A_{12} + \frac{1}{27} C_{12} = -\frac{27}{14} \end{cases}, \begin{cases} A_{12} = -\frac{1093}{5082} \\ C_{12} = \frac{162}{847} \end{cases}.
\end{aligned}$$

Все остальные коэффициенты равны 0.

Получили решение граничной задачи для уравнения Лапласа в шаровом слое

$$\begin{aligned}
w(r, \varphi, \theta) & = 9P_0(\cos \theta) - \frac{1093}{5082} r^2 \cos \varphi \cdot P_2^1(\cos \theta) - \frac{r^4}{105} \cos \varphi \cdot P_4^1(\cos \theta) - \\
& - \frac{12}{r} P_0(\cos \theta) + \frac{162}{847r^3} \cos \varphi \cdot P_2^1(\cos \theta) = 9 - \frac{1093}{5082} r^2 \cos \varphi \cdot 3 \sin \theta \cos \theta - \\
& - \frac{r^4}{105} \cos \varphi \cdot \sin \theta \cdot \left(\frac{35}{2} \cos^3 \theta - \frac{15}{2} \cos \theta \right) - \frac{12}{r} + \frac{162}{847r^3} \cos \varphi \cdot 3 \sin \theta \cos \theta = \\
& = 9 - \frac{12}{r} - \frac{1093}{1694} r^2 \cos \varphi \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{6} r^4 \cos \varphi \sin \theta \cos^3 \theta + \\
& + \frac{1}{14} r^4 \cos \varphi \sin \theta \cos \theta + \frac{486}{847r^3} \cos \varphi \sin \theta \cos \theta = 9 - \frac{12}{r} + \left(\frac{1}{14} r^4 - \right.
\end{aligned}$$

$$-\frac{1093}{1694}r^2 + \frac{486}{847r^3}\bigg)\cos\varphi\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{6}r^4\cos\varphi\sin\theta\cos^3\theta.$$

4. Получим решение данной задачи

$$\begin{aligned} u(r, \varphi, \theta) = v(r, \varphi, \theta) + w(r, \varphi, \theta) = & \frac{1}{6}r^4\cos\varphi\sin\theta\cos^3\theta + 9 - \frac{12}{r} + \left(\frac{1}{14}r^4 - \right. \\ & \left. - \frac{1093}{1694}r^2 + \frac{486}{847r^3}\right)\cos\varphi\sin\theta\cos\theta - \frac{1}{6}r^4\cos\varphi\sin\theta\cos^3\theta = 9 - \frac{12}{r} + \\ & + \left(\frac{1}{14}r^4 - \frac{1093}{1694}r^2 + \frac{486}{847r^3}\right)\cos\varphi\sin\theta\cos\theta. \end{aligned}$$

Задача 6. Найти решение задачи для уравнения Гельмгольца внутри круга

$$\text{УЧП: } \Delta u + k^2 u = 0 \quad (0 \leq r < 2);$$

$$\text{ГУ: } u|_{r=2} = -7\sin^3\varphi.$$

Решение.

Используем, что решение задачи для уравнения Гельмгольца внутри круга

$$\text{УЧП: } \Delta u + k^2 u = 0 \quad (0 \leq r < R);$$

$$\text{ГУ: } (\alpha u_r + \beta u)|_{r=R} = f(\varphi), \quad |\alpha| + |\beta| > 0$$

следует искать в виде [3, с. 291]

$$u(r, \varphi) = \frac{A_0}{2} J_0(kr) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(kr) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi),$$

где $J_n(x)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) – функции Бесселя, а коэффициенты A_n и B_n определяются граничным условием.

При $r = 2$ получим

$$u(2, \varphi) = \frac{A_0}{2} J_0(2k) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(2k) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -7\sin^3\varphi.$$

Используя формулу $\sin^3\varphi = \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4}$, получим:

$$-7\sin^3\varphi = -7 \cdot \frac{3\sin\varphi - \sin 3\varphi}{4} = -\frac{21}{4}\sin\varphi + \frac{7}{4}\sin 3\varphi.$$

Используя, что

$$\frac{A_0}{2} J_0(2k) + \sum_{n=1}^{\infty} J_n(2k) (A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi) = -\frac{21}{4}\sin\varphi + \frac{7}{4}\sin 3\varphi,$$

получим соотношения: $J_1(2k)B_1 = -\frac{21}{4}$, $J_3(2k)B_3 = \frac{7}{4}$. Из которых

будем иметь, что $B_1 = -\frac{21}{4J_1(2k)}$, $B_3 = \frac{7}{4J_3(2k)}$, а все остальные коэффициенты равны 0.

Теперь приведем решение данной задачи

$$u(r, \varphi) = -\frac{21J_1(kr)}{4J_1(2k)} \sin \varphi + \frac{7J_3(kr)}{4J_3(2k)} \sin 3\varphi.$$

Задача 7. Найти решение задачи для уравнения Гельмгольца внутри шара

УЧП: $\Delta u + 0,25u = 0 \quad (0 \leq r < \pi);$

ГУ: $u_r|_{r=\pi} = \cos \theta.$

Решение.

Используем, что решение задачи для уравнения Гельмгольца внутри шара

УЧП: $\Delta u + k^2 u = 0 \quad (0 \leq r < R);$

ГУ: $(\alpha u_r + \beta u)|_{r=R} = f(\varphi, \theta), \quad |\alpha| + |\beta| > 0$

следует искать в виде [3, с. 303]

$$u(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{r}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) P_n^m(\cos \theta) (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi).$$

Для нахождения неизвестных коэффициентов используем граничное условие.

$$u_r(r, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-0,5r^{-1,5} \cdot J_{n+\frac{1}{2}}(kr) + r^{-0,5} k J'_{n+\frac{1}{2}}(kr) \right) P_n^m(\cos \theta) \times \\ \times (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi).$$

При $r = \pi$ и $k = 0,5$ получим

$$u_r(\pi, \varphi, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(-0,5\pi^{-1,5} J_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) + \pi^{-0,5} 0,5 J'_{n+\frac{1}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right) P_n^m(\cos \theta) \times \\ \times (A_{nm} \cos m\varphi + B_{nm} \sin m\varphi) = \cos \theta. \quad (2)$$

Так как в правой части отсутствует переменная φ , то $m = 0$, а $P_1(\cos \theta) = \cos \theta$, то $n = 1$. Тогда равенство (2) примет вид

$$\left[-0,5\pi^{-1,5} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 0,5\pi^{-0,5} J'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right] \cos \theta \cdot A_{10} = \cos \theta \quad (3).$$

Применив формулу $J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x \right)$, получим:

$$1) J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1}{\pi/2} \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) = \frac{4}{\pi^2};$$

$$\begin{aligned}
2) \quad J'_{\frac{3}{2}}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-0,5)x^{-1,5} \left(\frac{1}{x} \sin x - \cos x \right) + \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(-\frac{1}{x^2} \sin x + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{x} \cos x + \sin x \right), \\
J'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}}(-0,5) \left(\frac{\pi}{2}\right)^{-1,5} \left(\frac{2}{\pi} \sin \frac{\pi}{2} - \cos \frac{\pi}{2} \right) + \sqrt{\frac{2}{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}} \left(-\frac{4}{\pi^2} \sin \frac{\pi}{2} + \right. \\
&\quad \left. + \frac{2}{\pi} \cos \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{12}{\pi^3} + \frac{2}{\pi}.
\end{aligned}$$

Подставив значения $J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ и $J'_{\frac{3}{2}}\left(\frac{\pi}{2}\right)$ в равенство (3), получим:

$$\left[-\frac{1}{2} \pi^{-1,5} \cdot \frac{4}{\pi^2} + 0,5 \pi^{-0,5} \left(-\frac{12}{\pi^3} + \frac{2}{\pi} \right) \right] A_{10} = 1, \quad \frac{\pi^2 - 8}{\pi^{3,5}} A_{10} = 1.$$

Отсюда $A_{10} = \frac{\pi^{3,5}}{\pi^2 - 8}.$

Теперь приведем решение данной задачи

$$u(r, \varphi, \theta) = \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{2}\right) P_1(\cos \theta) \frac{\pi^{3,5}}{\pi^2 - 8} = \frac{\pi^{3,5}}{\pi^2 - 8} \cdot \frac{1}{\sqrt{r}} J_{\frac{3}{2}}\left(\frac{r}{2}\right) \cos \theta.$$

Список использованных источников

- 1 **Кузнецов Л. А.** Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчеты: учеб. пособие / Л. А. Кузнецов. 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2008. – 240 с.
- 2 **Чудесенко В. Ф.** Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчеты): учеб. пособие для втузов / В. Ф. Чудесенко. – М.: Высш. школа, 1983. – 112 с.
- 3 **Боголюбов А. Н.** Задачи по математической физике: учеб. пособие / А. Н. Боголюбов. – М.: Изд-во МГУ, 1998. – 350 с.

Обозначения и сокращения

1. ГУ – граничное условие;
2. ОДУ – обыкновенное дифференциальное уравнение;
3. РГЗ – расчетно-графическое задание;
4. УЧП – уравнения с частными производными;