Наумов А.А.

ВЫБОР НАЧАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ЭКСПЕРИМЕНТОМ И ПРОБЛЕМА ИНВАРИАНТНОСТИ

В работе проведено исследование классических оптимальных планов экспериментов с позиции их возможного использования в задачах последовательного экспериментирования в рамках так называемой схемы эффективного управления экспериментом. Анализируются основные отличия задач оптимального планирования и эффективного управления. Выясняются условия инвариантности классических планов относительно линейных преобразований области экспериментирования.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим уравнение наблюдения за объектом (или системой) вида:

$$y(x)=\theta^T f(x)+\varepsilon(x),$$

где $E(y(x)|x)=\theta^T f(x)$ – уравнение регрессии (регрессионная модель, функция отклика), $\varepsilon(x)$ – случайная переменная со свойствами $E(\varepsilon(x))=0$ и $E(\varepsilon^2(x))=\sigma^2, \sigma^2>0$, дисперсия σ^2 неизвестна (здесь и далее E – символ математического ожидания), $f^T(x)=(f_1(x), f_2(x),...,f_k(x))$ – базисный вектор модели регрессии (вектор непрерывных на области экспериментирования X функций, $X\subset R^p$), x – вектор размерности p входных контролируемых переменных изучаемого объекта, $y(x)$ – выходная наблюдаемая переменная объекта, θ – вектор неизвестных параметров модели размерности k.

Пусть наблюдения за объектом производятся в точках $x_1, x_2, ..., x_m$ (в точках так называемого спектра плана экспериментов) в количестве $n_1, n_2, ..., n_m$ наблюдений в каждой из точек спектра плана соответственно.

Положим $N=\sum_{i=1}^{m} n_i$,

$$M(\xi)=\sum_{i=1}^{m} n_i f(x_i) f^T(x_i),$$

$$Y=\sum_{i=1}^{m} n_i f(x_i)\bar{y}_i, \quad \bar{y}_i=\frac{1}{n_i}\left(\sum_{j=1}^{n_i} y_{ij}\right),$$

$$y_{ij}=y_j(x_i)=\sum_{l=1}^{k}\theta_l f_l(x_i)+$$
$$+\varepsilon_j(x_i),\ j=1,2,...,n_i;\ i=1,2,...,m.$$

Тогда в соответствии с обычным методом наименьших квадратов, оценки параметров θ можно найти по формуле: $\hat{\theta}=M^{-1}(\xi)Y$.

Планом эксперимента называется набор, состоящий из точек спектра плана и так называемых весов, в соответствии с которыми распределяется общее число экспериментов N по этим точкам. Вид плана эксперимента следующий:

$$\xi=\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & ... & ,x_m \\ n_1, & n_2, & ... & ,n_m \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$$\xi\in\Xi=\left\{\xi=\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & ... & ,x_m \\ n_1, & n_2, & ... & ,n_m \end{pmatrix} \middle|\ x_i\in X,\right.$$

$$\left. n_i\geq 0, n_i - \text{целые}, i=1,2,...,m, \sum_{i=1}^{m} n_i = N \right\}.$$

Суть задачи построения наилучшего (оптимального) плана экспериментов [1] состоит в нахождении на множестве допустимых планов экспериментов Ξ такого, который максимизировал бы (или минимизировал) некоторый функционал от точностной характеристики оценок параметров модели (или от оценок самой модели). Например, если план эксперимента получается в соответствии с решением задачи максимизации некоторого критерия от матрицы $M(\xi)$ (так называемой информационной матрицы Фишера), т. е. максимизируется некоторый критерий от нее $\Phi(M(\xi))$, то соответствующий план называется *Ф*-оптимальным. Более точно, *Ф*-оптимальный план получается как решение следующей оптимизационной задачи (см. [1], [2], [3]):

$$\Phi(M(\xi^*))=\max_{\xi\in\Xi}\Phi(M(\xi)). \qquad (1)$$

Часто на практике вместо задачи (1) решают эквивалентную ей задачу:

$$\Phi(M^{-1}(\xi^*))=\min_{\xi\in\Xi}\Phi(M^{-1}(\xi)). \qquad (2)$$

Если наложено ограничение на общее число экспериментов N (или на общую стоимость экспериментов) и множество Ξ принимает, например, вид

$$\Xi = \left\{ \xi = \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \dots & ,x_m \\ n_1, & n_2, & \dots & ,n_m \end{pmatrix} \middle| x_i \in X, n_i \geq 0, \right.$$

$$\left. n_i \geq 0, n_i - \text{целые}, i = 1,2,..,m, \sum_{i=1}^{m} n_i = N \leq N^* \right\},$$

где N^* – верхняя граница для N, то задачи (1) и (2) можно переписать с учетом того, что достижение желаемого качества в соответствии с критерием $\Phi\left(M^{-1}(\xi)\right)$ может осуществляться при меньшем, чем N^*, числе экспериментов.

Таким образом, если главным критерием для экспериментатора является $\Phi\left(M^{-1}(\xi)\right)$, а общее число экспериментов (или общая их стоимость) – это ограничение, то задачу построения планов экспериментов (стратегий экспериментирования) можно записать, например, в виде:

$$\Delta^+\Phi\left(M^{-1}(\xi)\right) \to \min_{\xi \in \Xi} . \qquad (3)$$

Здесь

$$\Delta^+\Phi\left(M^{-1}(\xi)\right) = \left(\Phi\left(M^{-1}(\xi)\right) - \Phi^*\right)_+ =$$

$$= \begin{cases} \Phi\left(M^{-1}(\xi)\right) - \Phi^*, \text{если}\, \Phi\left(M^{-1}(\xi)\right) > \Phi^*; \\ \qquad 0 \quad , \quad \text{иначе.} \end{cases}$$

Здесь Φ^* – желаемое значение функционала $\Phi\left(M^{-1}(\xi)\right)$. Очевидным образом задача (3) обобщается на случай, когда известны стоимость экспериментов (затраты на экспериментирование) в точках области X.

Как было отмечено в работах [4], [5], более привлекательными и интересными с практической точки зрения методами решения задачи (3) являются последовательные методы эффективного управления экспериментами. В этом случае задача нахождения эффективных стратегий экспериментирования формализуется следующим образом. Если обозначить через $\xi^*_{(i)}$ эффективную стратегию экспериментирования (управления экспериментом) на i-ом шаге, то задача по ее нахождению (синтезу) выглядит следующим образом:

$$\xi^*_{(i)} = Arg \min_{\xi_{(i)}} \Delta^+\Phi\left(M^{-1}(\xi^0_{(i)}, y^0_{(i)}) \right), \quad (4)$$

где $\xi_{(i)} \in \Xi_{(i)}$, $M(\xi_{(i)}, y_{(i)}) = F^T_{1(i)} D^{-1}_{2(i)} F_{1(i)}$;

$\Phi(\bullet)$ – как и выше, выпуклый вниз на множестве матриц $M^{-1}(\xi, y)$ функционал;

$$D_{2(i)} = diag(\hat{\sigma}^2_{\bar{y}(i)}(x_j));$$

$$\hat{\sigma}^2_{\bar{y}(i)}(x_j) = \frac{1}{n^0_{j(i)}(n^0_{j(i)} - 1)} \sum_{l=1}^{n^0_{j(i)}} (\bar{y}_j - y_{jl})^2, \; j = 1,2,...,m^0_{(i)};$$

$$\Xi_{(i)} = \left\{ \xi \middle| \xi = \begin{Bmatrix} x_j \\ n_j \end{Bmatrix}_{j=1,2,...,m_{(i)}} , x_j \in \mathrm{X}, j = 1,2,..,m_{(i)}; \right.$$

$$\left. n_j \geq 0, n_j - \text{целые}, j = 1,2,..,m_{(i)}, \sum_{j=1}^{m_{(i)}} n_j = N_{(i)} \right\},$$

$$y^0_{(i)} = \begin{pmatrix} y^0_{(i-1)} \\ y_{(i)} \end{pmatrix}; \; \xi^0_{(i)} = \xi^{*0}_{(i-1)} \dot{\bigcup} \xi_{(i)}, \; \xi^{*0}_{(i)} = \xi^{*0}_{(i-1)} \dot{\bigcup} \xi^*_{(i)},$$

$$N^0_{(i)} = N^0_{(i-1)} + N_{(i)}, \; N_{(i)} = \sum_{j=1}^{m_{(i)}} n_{j(i)}, \; i = 1,2,....$$

Здесь i – номер шага экспериментирования; $\xi^{*0}_{(0)} = \xi^*_{(0)}$ – известная начальная стратегия экспериментирования, $\xi^*_{(i)}$ – эффективная стратегия экспериментирования на i-ом шаге; $\xi^0_{(i)}$ – «итоговая» (сводная) стратегия управления экспериментом, «накопленная» (составленная) из стратегий $\xi^*_{(0)}, \xi^*_{(1)}, ..., \xi^*_{(i-1)}, \xi_{(i)}$ и «собранная» в единую стратегию $\xi^0_{(i)}$; $y^0_{(i)}$ – вектор всех значений выходной переменной, полученных за i шагов экспериментирования.

Схема управления экспериментом в этом случае имеет вид (см. рис. 1).

⇨ – команды (⇨$_1$ – на поиск очередной эффективной стратегии; ⇨$_2$ – на систему управления экспериментами в соответствии с $\xi^*_{(i)}$; ⇨$_3$ – на объект экспериментирования; ⇨$_4$ – на прекращение экспериментов); → – каналы передачи информации (информационные каналы).

Рисунок 1. Система управления экспериментами.

2. СРАВНИТЕЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДВУХ ПОДХОДОВ К УПРАВЛЕНИЮ ЭКСПЕРИМЕНТАМИ

Проведем сравнение классических оптимальных планов экспериментов (которые строятся до проведения экспериментов в соответствии с решением задач (1) или (2)) и эффективных стратегий (синтезируемых последовательно в соответствии с решением задачи (4)) по нескольким характеристикам.

Критерий оптимальности (эффективности)

Критерий оптимальности в случае классического оптимального планирования экспериментов (КОПЭ) является детерминированным, а для эффективного управления экспериментами (ЭУЭ) – стохастическим функционалом. В соответствии с этим и задача построения эффективных стратегий превращается в стохастическую задачу математического программирования. А это означает, что и эффективное управление – стохастическое управление, а задача по синтезу стратегий имеет не единственное решение (как это было в случае КОПЭ), а бесконечное множество решений.

Характеристическое равенство в теореме эквивалентности

Утверждение теоремы эквивалентности, сформулированной и доказанной для КОПЭ (см. [1], [2]), в общем случае для эффективных стратегий экспериментирования не выполняется. Для классического случая максимальное значение функции дисперсии оценки модели ($\hat{d}(x,\xi)$) достигается в точках спектра оптимально плана ξ^*. Попробуем разобраться в этом свойстве оптимального плана с практической точки зрения. После того, как в соответствии с планом ξ^* будут проведены эксперименты, по полученным данным будут оценены параметры $\hat{\theta}$ модели $y(x)$. При этом наибольшие значения дисперсии $\hat{d}(x,\xi)$ оценки $\hat{y}(x)=f^T(x)\hat{\theta}$ (для D- и G-оптимальных планов), т. е. наименьшая точность построенной модели, будут достигаться в точках, в которых были проведены наблюдения над объектом исследования. Некоторое время тому назад нам трудно было объяснить экспериментатору-исследователю, оставаясь на позициях классического подхода к планированию экспериментов, чем объясняется такая особенность оптимальных планов. Нам часто приходилось выслушивать критику со стороны экспериментаторов относительно подобных свойств классических планов. Тогда мы не могли объяснить им этого феномена. Теперь причина ясна. Оказывается, что в общем случае оптимальных планов экспериментов не существует. А для эффективной стратегии управления экспериментом теорема, аналогичная классической теореме эквивалентности, не выполняется.

Влияние вида области экспериментирования на стратегии управления экспериментом

Хорошо известно, что для задач КОПЭ используется подход, связанный с переводом (преобразованием) исходной области экспериментирования (X) в некоторую стандартную область (X_{cm}). В качестве последней обычно служат единичный гиперкуб, единичная гиперсфера, единичный шар, единичный симплекс и другие. Именно для таких стандартных областей построены таблицы оптимальных (для различных классов моделей и критериев оптимальности) классических планов экспериментов. Предполагается, что если план эксперимента инвариантен относительно преобразований области X в область X_{cm}, то можно воспользоваться оптимальным планом, построенным для X_{cm}, затем пересчитать его на область X и затем, в соответствии с пересчитанным планом, произвести эксперименты на объекте. Это очень конструктивная идея, позволяющая унифицировать процедуру выбора (а самое главное – построения) классических оптимальных планов, поскольку одному оптимальному (на области X_{cm}) плану экспериментов соответствовало бесконечное множество задач с фактическими областями экспериментирования X. Можно сказать, что в классическом случае была создана своеобразная система стандартизации (унификации) оптимальных планов, не привязанная к конкретной задаче экспериментатора. Таким образом, можно объяснить появление многих видов кодировок уровней факторов (+1, -1, 0; a, b, c и т. д.) для классических планов.

3. ИНВАРИАНТНОСТЬ СТРАТЕГИЙ ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ОБЛАСТИ ЭКСПЕРИМЕНТИРОВАНИЯ X

Поскольку в качестве точек спектра эффективных стратегий экспериментирования на начальном этапе могут быть выбраны точки спектра КОПЭ, то представляется логичным проверить КОПЭ на их инвариантность относительно преобразований (например, линейных) области *X*. Если окажется, что КОПЭ будут неинвариантными относительно этих преобразований, то в этом случае использовать таблицы оптимальных планов и пользоваться разработанными программными комплексами нужно с определенной осторожностью. В случае синтеза эффективных стратегий управления экспериментом актуальность этого вопроса (инвариантности стратегии экспериментирования относительно преобразования области *X*) нивелируется, т. к. эффективные стратегии строятся (синтезируются) всегда на области *X*, а преобразование этой области в некоторую стандартную X_{cm} только усложняет задачу и необходимость в нем отпадает. Однако, как было замечено выше, точки спектра КОПЭ могут быть использованы на начальных этапах последовательной процедуры синтеза стратегий экспериментирования, например при формировании стратегий $\xi^*_{(0)}$.

<u>Пример</u>. Пусть для уравнения регрессии $\theta^T f(x), f^T(x)=(1,x), x\in X=[-1;1]$ при выполнении $E(\varepsilon(x))=0, E(\varepsilon^2(x))=\sigma^2$ построен Φ-оптимальный классический план эксперимента ξ^*. Вопрос заключается в следующем: можно ли использовать этот план в качестве оптимального на отрезке *[-a, a]*? Другими словами, изменится ли оптимальность плана ξ^* при использовании оператора растяжения-сжатия: $P_x : X\to X_1=[-a;a]$?

Можно записать, что $\overline{x}=a\cdot x$, где $\overline{x}\in X_1$ $x\in X$. Тогда уравнение регрессии на X_1 имеет вид:

$$y_1=\theta_1^T\cdot f_1(\overline{x}),\ f_1^T(\overline{x})=(1,a\cdot x)=P_f\cdot\begin{pmatrix}1\\x\end{pmatrix},$$

где $P_f=\begin{pmatrix}1&0\\0&a\end{pmatrix}$ – матричное представление линейного оператора преобразования $f(x)\to f_1(\overline{x})$. Здесь θ_1 – вектор параметров преобразованной регрессии. Пусть $\xi_1^*=\begin{Bmatrix}\overline{x}_i\\n_i\end{Bmatrix}$, $i=1,2,..,m$ – пересчитанный с помощью P_x оптимальный план ξ^*, $\overline{x}_i=a\cdot x_i$, *i=1, 2, …, m*. Поскольку

$$\hat\theta=M^{-1}(\xi^*)\cdot Y,\ M(\xi^*)=\sum_{i=1}^m n_i f(x_i)f^T(x_i),$$

$$Y=\sum_{i=1}^m n_i f(x_i)\overline{y}_i \text{ и } \hat\theta_1=M_1^{-1}(\xi_1^*)\cdot Y_1,$$

$$M_1(\xi_1^*)=\sum_{i=1}^m n_i f_1(\overline{x}_i)f_1^T(\overline{x}_i),\ Y_1=\sum_{i=1}^m n_i f_1(\overline{x}_i)\overline{y}_i,$$

то последовательно получаем:

$$f_1^T(\overline{x})=\left[P_f\cdot f(x)\right]^T=f^T(x)P_f,$$

$$f^T(x)=f_1^T(\overline{x})P_f^{-1};$$

$$M(\xi^*)=\sum_{i=1}^m n_i\left[f_1^T(\overline{x}_i)P_f^{-1}\right]^T\left[f_1^T(\overline{x}_i)P_f^{-1}\right]=$$

$$=P_f^{-1}\left(\sum_{i=1}^m n_i f_1(\overline{x}_i)f_1^T(\overline{x}_i)\right)P_f^{-1}=$$

$$=P_f^{-1}M_1(\xi_1^*)P_f^{-1}\neq M_1(\xi_1^*);$$

$$M^{-1}(\xi^*)=P_f M_1^{-1}(\xi_1^*)\,P_f\neq M_1^{-1}(\xi_1^*).$$

Поскольку матрицы $M^{-1}(\xi^*)$ и $M_1^{-1}(\xi_1^*)$ – это с точностью до множителя σ^2 дисперсионные матрицы оценок параметров $\hat\theta$ и $\hat\theta_1$, то справедлив следующий вывод.

<u>Вывод 1</u>. Для линейной модели на отрезке дисперсионная матрица оценок параметров и, следовательно, значение критерия эффективности от нее $\left(\Phi\left(M^{-1}(\xi^*)\right)\right)$ не являются инвариантными относительно преобразования P_x.

Далее можно записать, что

$$\hat\theta=M^1(\xi^*)\cdot Y=$$

$$=P_f M_1^{-1}(\xi_1^*)P_f\cdot\left(\sum_{i=1}^m n_i P_f^{-1}f_1(\overline{x}_i)\overline{y}_i\right)=$$

$$=P_f M_1^{-1}(\xi_1^*)Y_1=P_f\hat\theta_1.$$

Отсюда следует еще один вывод.

<u>Вывод 2</u>. Оценки параметров линейной на отрезке модели не инвариантны относительно преобразования P_x.

Найдем дисперсию оценки модели:

$$\hat d_f(x,\xi^*)=\sigma^2 f^T(x)M^{-1}(\xi^*)f(x)=$$

$$=\sigma^2 f_1^T(\overline{x})P_f^{-1}P_f M_1^{-1}(\xi_1^*)P_f P_f^{-1}f_1(\overline{x})=$$

$$=\sigma^2 f_1^T(\overline{x})M_1^{-1}(\xi_1^*)f_1(\overline{x})=\hat d_{f_1}(x,\xi_1^*),$$

где $\hat d_{f_1}(x,\xi_1^*)$ – дисперсия оценки модели $\hat\theta_1^T\cdot f_1(\overline{x})$.

Естественно, на основании только что полученного соотношения можно сделать еще один вывод.

<u>Вывод 3</u>. Дисперсии оценок линейных на отрезке моделей являются инвариантными относительно преобразования P_x. И, как следствие этого, в соответствии с классической теоремой эквивалентности D-оптимальный план эксперимента ξ^* является инвариантным относительно преобразования P_x. Таким образом, только что отмеченное обстоятельство может быть формально представлено следующим образом: $\xi^* \sim_{P_x} \xi_1^*$.

Продолжим рассуждения относительно инвариантности оценок и их характеристик. Выполняется цепочка равенств:

$$\hat{\theta}_1^T \cdot f_1(\bar{x}) = \left(P_f^{-1}\hat{\theta}\right)^T \left(f^T(x)P_f\right)^T =$$

$$= \hat{\theta}^T P_f^{-1} P_f f(x) = \hat{\theta}^T \cdot f(x),$$

т. е. $\hat{y}_1(\bar{x}) \sim_{P_x} \hat{y}(x)$ или, другими словами, оценки моделей инвариантны относительно преобразования P_x.

Обобщим полученные результаты на случай Φ-оптимального классического планирования экспериментов и сведем полученные результаты в таблицу (см. табл. 1).

Если модель имеет более сложный вид, например, является полиномом некоторой степени (k-1) от одной переменой, т. е.

$$f^T(x) = \left(1, x, x^2, ..., x^{k-1}\right),\ x \in X = [-1;1],$$

$$\bar{x} = a \cdot x, \bar{x} \in X_1.$$

В этом случае оператор P_f принимает вид:

$$P_f = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & a & & 0 & \\ & & a^2 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & a^{k-1} \end{pmatrix} = diag\left(1; a; a^2; ...; a^{k-1}\right).$$

Все свойства оптимальных планов, представленные в табл. 1, остаются в силе и в этом случае. Проиллюстрируем эти свойства классических планов расчетами на компьютере. Модельные вычисления проведем в следующей последовательности.

Таблица 1

№ п.п.	Критерий оптимальности КОПЭ	Вид критерия $\Phi(M^{-1}(\xi))$ и функции $\hat{d}(x,\xi)$	Инвариантность ξ^* относительно P_x
1.	D	$\det(M^{-1}(\xi, y))$; $\sigma^2 f^T(x) M^{-1}(\xi) f(x)$	$\xi^* \sim_{P_x} \xi_1^*$
2.	A	$SpM^{-1}(\xi, y)$; $\sigma^4 f^T(x) M^{-2}(\xi) f(x)$	$\xi^* \sim_{P_x} \xi_1^*$, если $P_f^2 = I$
3.	C	$C^T M^{-1}(\xi, y) C$, $C \in \mathrm{M}_{(1\times k)}$; $\sigma^4 f^T(x) M^{-1}(\xi) \cdot C \cdot C^T \cdot M^{-1}(\xi) f(x)$	$\xi^* \sim_{P_x} \xi_1^*$, если $C = P_f^{-1} C_1$, C_1 – вектор-столбец аналогичный С, пересчитанный в соответствии с преобразованием P_x (например, $C = f(x_0), x_0 \in X_0$)

А. Покажем, что линейное преобразование P_x (растяжения-сжатия) не изменяет оптимальности планов, если базисный вектор модели соответствует «полному полиному» некоторой степени, т. е. в базисном векторе присутствуют все степени переменной x, начиная с 0-ой и заканчивая (k-1)-ой.

Б. Покажем, что свойство инвариантности нарушается, если модель представляет собой «неполный полином», т. е. такой, в котором некоторые промежуточные степени x в векторе $f(x)$ отсутствуют. Примером такого базисного вектора может служить, например, следующий вектор $f^T(x) = \left(1, x^2, x^3\right)$.

В. Проиллюстрируем свойства оптимальных планов при использовании оператора сдвига.

Рассмотрим три критерия эффективности: A, D и C.

1) A-оптимальный план для модели $f^T(x) = (1, x, x^2)$ на $X = [-1.0; 1.0]$ имеет вид $\xi^* = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{Bmatrix}$;

2) D-оптимальный план для модели $f^T(x) = (1, x^2, x^3)$ на $X = [-1.0; 1.0]$ имеет вид $\xi^* = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix}$;

3) C-оптимальный план для модели $f^T(x) = (1, x^2, x^3)$ на $X = [-1.0; 1.0]$ имеет вид $\xi^* = \begin{Bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 6 \end{Bmatrix}$, точка экстраполяции $x_0=2$.

На рис. 2 показан вид функций $\hat{d}(x, \xi)$ для каждого из критериев. На нем хорошо видно, что все они ограничены сверху постоянными величинами в соответствии с теоремой эквивалентности для КОПЭ.

На рис. 3 и рис. 4 показаны эти же функции, но уже на интервалах $X = [-2.0; 2.0]$ и $X = [0; 2.0]$ соответственно. Оптимальные планы были пересчитаны и для интервала $X = [-2.0; 2.0]$ приняли вид:

$\xi^* = \begin{Bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{Bmatrix}$ (A-оптимальный план),

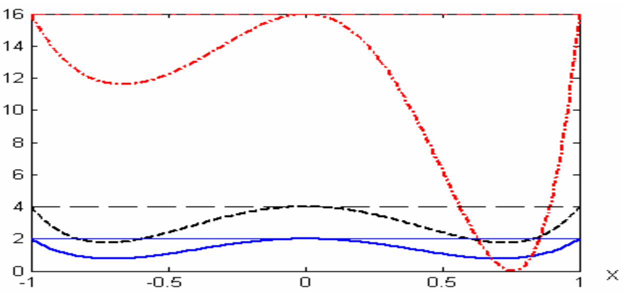

Рисунок 2. Функции $\hat{d}(x,\xi)$ на интервале $[-1;\ 1]$ для А-оптимального плана (непрерывная кривая) , С-оптимального плана (штрих– пунктирная линия), D-оптимального плана (пунктирная линия) при $\sigma = 2$.

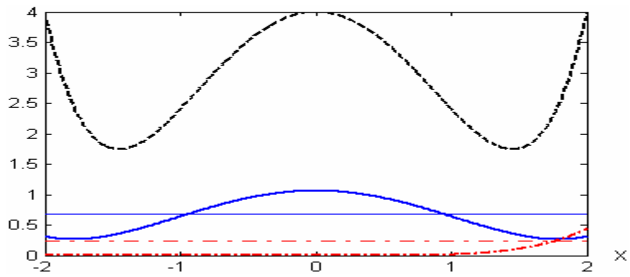

Рисунок 3. Функции $\hat{d}(x,\xi)$ на интервале [–2; 2] для А-оптимального плана (непрерывная кривая), С-оптимального плана (штрих-пунктирная линия), D-оптимального плана (пунктирная линия) при $\sigma = 2$.

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} \ (D\text{-оптимальный}),$$

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} -2 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{Bmatrix} \ (x_0=4)\ (C\text{-оптимальный}).$$

А для интервала $X = [0; 2.0]$ –

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \end{Bmatrix} (A),\ \xi^* = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{Bmatrix} (D),$$

$$\xi^* = \begin{Bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 6 \end{Bmatrix} (x_0=3)\ (C).$$

Можно заметить (см. рис. 3), что при растяжении области экспериментирования условие инвариантности выполняется только для критерия D-оптимальности, а при смещении (см. рис. 4) условие инвариантности не выполнилось ни для одного из критериев.

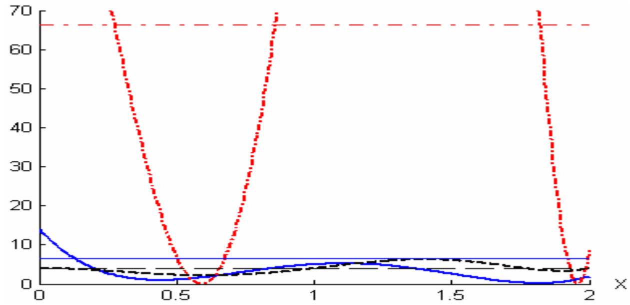

Рисунок 4. Функции $\hat{d}(x,\xi)$ на интервале [0; 2] для А-оптимального плана (непрерывная кривая), С-оптимального плана (штрих-пунктирная линия), D-оптимального плана (пунктирная линия) при $\sigma = 2$.

Инвариантность D-оптимальных планов относительно преобразований области экспериментирования общего вида исследована в работе [2].

Список использованной литературы:

1. Kiefer J. General equivalence theory for optimum designs (approximate theory) // The Annals of Mathematical Statistics. – 1974. – v. 2. – №5. – P. 849-879.
2. Федоров В.В. Теория оптимального эксперимента. – М.: Наука, 1971.
3. Bandemer H. et al. Theorie und Anwendung der optimalen Versuchsplanung I. Handbuch zur Theorie. – Berlin: Akademie-Verlag, 1977.
4. Naumov A. Investigation of Experiment Design Effectiveness and First Steps to Random Experimenting Strategy. I. // Наука и образование в условиях социально-экономической трансформации общества: Материалы V Международной научной конференции, 30-31 мая 2002. – Гродно: Изд-во ГПУ, 2002. – Ч. 2. – С. 217-222.
5. Naumov A. Classical Design of Experiments Approach May Be Non-Effective For Active Identification Problems // Automation, Control, and Information Technology. Proceedings of the IASTED International Conference, June 10– 13, 2002, Novosibirsk. – Anaheim: IASTED, 2002. – P. 262-266.