

Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования

«Оренбургский государственный университет»

Л. Б. Усова, Д. У. Шакирова



ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Комплект рабочих тетрадей

Рабочая тетрадь № 1 «Комплексные числа»

$$\sqrt[n]{i-1}$$

Рекомендовано Редакционно-издательским советом Федерального государственного
бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального
образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного
издания для бакалавров инженерно-технических направлений подготовки

$$i^2 = -1$$

Оренбург
2011

УДК 511.14(076)
ББК 22.141 я 7
У 76

Рецензент – доцент, кандидат физико-математических наук Н.Н. Щипкова

Усова, Л.Б.

У76 Линейная алгебра и аналитическая геометрия: комплект рабочих тетрадей. Рабочая тетрадь № 1 «Комплексные числа» /Л.Б. Усова, Д. У. Шакирова. – Оренбург: ООО «НикОс», 2011. – 50 с.

Рабочая тетрадь № 1 содержит разобранные практические задания по теме «Комплексные числа».

Предназначена для обучения бакалавров инженерно-технических направлений подготовки.

Рабочая тетрадь поможет преподавателям организовать самостоятельное усвоение лекционного материала и текущий контроль знаний студентов. Данная тетрадь окажет существенную помощь студентам при выполнении домашних и типовых расчетных заданий, а также поможет подготовиться к контрольной работе, к коллоквиуму, зачету и тестам.

Данная рабочая тетрадь подготовлена в ходе выполнения проекта № 3.1.1/13256 (АВЦП «Развитие научного потенциала высшей школы»).

УДК 511.14(076)
ББК 22.141 я 7

© Усова Л.Б.,
Шакирова Д.У., 2011

Содержание

Введение.....	4
1 Вопросы для самопроверки.....	7
2 Практическое занятие.....	8
3 Домашнее задание.....	37
4 Самостоятельная работа.....	40
5 Тест.....	41
6 Расчетно-графическое задание.....	46
Список использованных источников.....	50

Введение

Комплект рабочих тетрадей включает 6 рабочих тетрадей:

- рабочая тетрадь № 1 «Комплексные числа»;
- рабочая тетрадь № 2 «Матрицы»;
- рабочая тетрадь № 3 «Определители»;
- рабочая тетрадь № 4 «Обратная матрица. Ранг матрицы»;
- рабочая тетрадь № 5 «Системы линейных уравнений»;
- рабочая тетрадь № 6 «Векторная алгебра».

Данный комплект используется для проведения практических занятий, самостоятельной работы и в ходе промежуточной аттестации.

Цель создания комплекта рабочих тетрадей – развитие практических навыков решения задач. Особенностью данных тетрадей являются уровневые задания.

– *Задания первого уровня* зафиксированы как базовый стандарт. Выполняя их, студент овладевает конкретным материалом по дисциплине на уровне его воспроизведения. Работа по первичному усвоению материала на этом уровне имеет свои особенности. Она требует многократного его повторения, умения выделять основные группы, вычленять главное, знание приемов запоминания и т.д. Задания первого уровня должен уметь выполнить каждый студент, прежде чем приступить к работе следующего уровня.

– *Задания второго уровня* расширяют материал первого уровня, обеспечивают овладение студентами общими и специфическими приемами учебной и умственной деятельности, которые необходимы для решения задач на применение. Задания данного уровня увеличивают объем сведений, помогают глубже понять основной материал, делают общую картину более цельной. Выполнение заданий второго уровня поднимает студента на уровень осознанного, творческого применения знаний и предусматривает свободное владение фактическим материалом, приемами учебной работы и умственных действий. Этот уровень позволяет студенту проявить себя в дополнительной самостоятельной работе.

В данных рабочих тетрадях применяется методика свободного выбора заданий второго уровня.

Анализ ФГОС подготовки бакалавра инженерно-технических направлений подготовки показал, что в результате обучения математике выпускник должен демонстрировать:

- владение математической культурой мышления, способность к обобщению, анализу, восприятию информации, постановке цели и выбору путей её достижения;

- умение логически верно аргументировано и ясно строить математическую устную и письменную речь;

- готовность к кооперации с коллегами, работе в коллективе;

- способность самостоятельно приобретать и использовать в практической деятельности математические знания и умения, стремление к саморазвитию

- способность использовать основные законы математических дисциплин в профессиональной деятельности, интегрировать знания из разных разделов курса математики;

- способность применять аналитические, вычислительные методы для решения прикладных задач в области техники;

- способность принимать научно-обоснованные решения на основе математики, осуществлять постановку и выполнять эксперименты по проверке их корректности и эффективности;

- основные положения, законы и методы математики; способность выявить естественнонаучную сущность проблемы, возникающей в ходе профессиональной деятельности, готовность привлечь для их решения соответствующий математический аппарат;

- способность разрабатывать и применять математическую модель соответствующую процессу в ходе профессиональной деятельности.

Структура и содержание разделов рабочей тетради № 1 соответствует стандарту ФГОС и включает практикум по разделу «Комплексные числа».

Рабочая тетрадь №1 «Комплексные числа» состоит из блоков:

- ♦ блок 1 «Вопросы для самопроверки» – содержит вопросы для проверки усвоения теоретического материала;

- ♦ блок 2 «Практическое занятие» - содержит разноуровневые задания, состоящие из двух пунктов. Пункт (а) сопровождается подробным решением примера, а в пункте (б) предоставляется поле для ответов, что позволяет студенту использовать как тетрадь, индивидуального характера;

- ♦ блок 3 «Домашнее задание» - содержит задания с ответами для самостоятельного решения и закрепления пройденного материала;

- ♦ блок 4 «Самостоятельная работа» - содержит трехуровневые задания;

- ♦ блок 5 «Тест» - содержит теоретические и практические задания данного раздела;

- ♦ блок 6 «Расчетно-графические задания» - содержит разнообразные индивидуальные задания для глубокого усвоения данного раздела.

Рабочая тетрадь «Комплексные числа» не содержит теоретических сведений по данной теме. Необходимый лекционный материал можно найти в следующих источниках: А. Г. Курош «Курс высшей алгебры» на страницах 110-130; К. Н. Лунгу «Высшая математика. Руководство к решению задач» на страницах 135-149; К. Н. Лунгу, Д. Т. Письменный, С. Н. Федин, Ю. А. Шевченко «Сборник задач по высшей математике» на страницах 431-447.

1 Вопросы для самопроверки

- 2 Запишите тригонометрическую форму комплексного числа.
- 3 Запишите алгебраическую форму комплексного числа.
- 4 Запишите формулу возведение в степень комплексного числа.
- 5 Вычислите i^7 на множестве комплексных чисел.
- 6 Вычислите $\sqrt[3]{1}$ на множестве комплексных чисел.
- 7 Вычислите $\frac{1}{3+i}$.
- 8 Решите уравнение $z^2 + 2 = 0$ на множестве комплексных чисел.
- 9 Запишите показательную форму комплексного числа $i - 1$.
- 10 Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих равенству $z \cdot \bar{z} = 1$.
- 11 Запишите в тригонометрической форме $-1 - \sqrt{3}i$ комплексное число
- 12 Запишите комплексное число $3e^{\frac{\pi}{2}i}$ в алгебраической форме.
- 13 Изобразите на комплексной плоскости множество точек $\operatorname{Im} z + \operatorname{Re} z = 2$.
- 14 Найдите $|z|$ и $\arg z$, если $z = 1 - \sqrt{3}i$.
- 15 Изобразите на комплексной плоскости множество точек $|z| \leq 2$.
- 16 Вычислите $\sqrt{-4}$ на множестве комплексных чисел.

- 17 Вычислите $\sqrt{i}$ на множестве комплексных чисел.
- 18 Вычислите $\sqrt{16}$ на множестве комплексных чисел.
- 19 Запишите формулу извлечения корня n – ой степени из комплексного числа.
- 20 Изобразите на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих данному равенству $|z + 1| = |z - i|$.
- 21 Вычислите i^{2006} .

2 Практическое занятие

Каждое из следующих заданий состоит из пунктов (а) и (б). В пункте (а) изложено подробное решение данного задания, в которых студентам необходимо разобраться для дальнейшего самостоятельного решения заданий в пункте (б). В заданиях пункта (б) в пустые строки предлагается вписать решения задания и сравнить с ответом.

Задание 1

Выполните действия $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ над комплексными числами в алгебраической форме:

а) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = i - 4$; б) $z_1 = 6 - i$, $z_2 = -2 - 3i$.

Решение.

а) $z_1 = -3 + 5i$, $z_2 = i - 4$;

$$z_1 + z_2 = (-3 + 5i) + (i - 4) = -7 + 6i;$$

$$z_1 - z_2 = (-3 + 5i) - (i - 4) = -3 + 5i - i + 4 = 1 + 4i;$$

$$z_1 \cdot z_2 = (-3 + 5i) \cdot (i - 4) = -3i + 12 + 5i^2 - 20i = 12 - 23i + 5 \cdot (-1) = 7 - 23i;$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(-3+5i)}{(i-4)} = \frac{(-3+5i)(-i-4)}{(i-4)(-i-4)} = \frac{3i+12-5i^2-20i}{-i^2+16} =$$

$$= \frac{12-17i-5 \cdot (-1)}{-(-1)+16} = \frac{17-17i}{17} = 1-i.$$

б) $z_1 = 6-i$, $z_2 = -2-3i$.

$$z_1 + z_2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$z_1 - z_2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \underline{\hspace{10cm}}$$

Ответ. а) $z_1 + z_2 = -7 + 6i$; $z_1 - z_2 = 1 + 4i$; $z_1 \cdot z_2 = 7 - 23i$; $\frac{z_1}{z_2} = 1 - i$

б) $z_1 + z_2 = 4 - 4i$; $z_1 - z_2 = 8 + 2i$; $z_1 \cdot z_2 = -15 - 16i$; $\frac{z_1}{z_2} = \frac{-9 + 20i}{13}$

Задание 2

Вычислите выражения:

а) $\frac{(5+i) \cdot (7-6i)}{3+i}$; б) $\frac{(1+3i) \cdot (8-i)}{(2+i)^2}$.

Решение.

а) Для вычисления данного выражения необходимо раскрыть скобки, привести подобные слагаемые и избавиться от рациональности.

$$\frac{(5+i) \cdot (7-6i)}{3+i} = \frac{35-30i+7i-6i^2}{3+i} = \frac{35-23i-6 \cdot (-1)}{3+i} = \frac{35-23i+6}{3+i} =$$

$$= \frac{41-23i}{3+i} = \frac{(41-23i) \cdot (3-i)}{(3+i) \cdot (3-i)} = \frac{123-41i-69i+23i^2}{9-i^2} = \frac{123-110i-23}{9+1} =$$

$$= \frac{100 - 110i}{10} = 10 - 11i.$$

$$\text{б) } \frac{(1 + 3i) \cdot (8 - i)}{(2 + i)^2} = \underline{\hspace{10cm}}$$

Ответ. а) $10 - 11i$; б) $5 + i$

Задание 3

Вычислите: а) $i^2, i^3, i^4, i^5, i^{24}, i^{102}, i^{2433}, i^{3015}$; б) $i^{44}, i^{54}, i^{113}, i^{539}$.

Решение.

а) Поскольку $i^2 = -1$ и используя свойства степени с целым показателем получим

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i, \quad i^4 = 1, \quad i^5 = i, \quad i^{24} = (i^4)^6 = 1^6 = 1, \quad i^{102} = (i^2)^{51} = (-1)^{51} = -1,$$

$$i^{2433} = i^{2432} \cdot i^1 = (i^2)^{1216} \cdot i = (-1)^{1216} \cdot i = 1 \cdot i = i,$$

$$i^{3015} = i^{3014} \cdot i^1 = (i^2)^{1507} \cdot i = (-1)^{1507} \cdot i = -1 \cdot i = -i.$$

$$\text{б) } i^{44} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$i^{54} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$i^{113} = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$i^{539} = \underline{\hspace{10cm}}$$

Ответ. а) $-1; -i; 1; i; 1; -1; i; -i$; б) $i^{44} = 1, i^{54} = -1, i^{113} = i, i^{539} = -i$

Задание 4

Вычислите значение: а) $\sqrt{-5 - 12i}$; б) $\sqrt{3 - 4i}$.

Решение.

$$\text{а) } \sqrt{-5 - 12i}$$

Чтобы извлечь квадратный корень из комплексного числа, записанного в алгебраической форме, т.е. для числа $z = a + bi$ найти $z_1 = x + yi$ такое, что

$$\sqrt{a + bi} = x + yi, \text{ используем формулы: } x = \pm \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}} \text{ и } y = \frac{b}{2x}.$$

$$\sqrt{-5-12i} = x + yi, \text{ где } a = -5, b = -12. \text{ Тогда } x = \pm \sqrt{\frac{-5 + \sqrt{25+144}}{2}} = \pm \sqrt{4} = \pm 2,$$

$$x_1 = 2 \Rightarrow y_1 = \frac{b}{2x_1} = \frac{-12}{4} = -3 \Rightarrow x_1 + y_1 i = 2 - 3i;$$

$$x_2 = -2 \Rightarrow y_2 = \frac{b}{2x_2} = \frac{-12}{-4} = 3 \Rightarrow x_2 + y_2 i = -2 + 3i.$$

Таким образом, $\sqrt{-5-12i} = \pm(2-3i)$.

$$\text{б) } \sqrt{3-4i}$$

Ответ. а) $2-3i; -2+3i$; б) $2-i; -2+i$

Задание 5

Комплексное число представить в тригонометрической форме:

$$\text{а) } z = 1 + i\sqrt{3}; \text{ б) } z = 1 - i; \text{ в) } z = -1 + \sqrt{3}i.$$

Решение.

$$\text{а) } z = 1 + i\sqrt{3}$$

Так как $z = x + iy$, то $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$. Тогда при $x = 1$, $y = \sqrt{3}$ получим

$$|z| = r = \sqrt{1+3} = 2, \operatorname{tg} \varphi = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}, \varphi = \frac{\pi}{3}. \text{ Тригонометрическая форма комплексного}$$

числа имеет вид: $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, следовательно $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right)$.

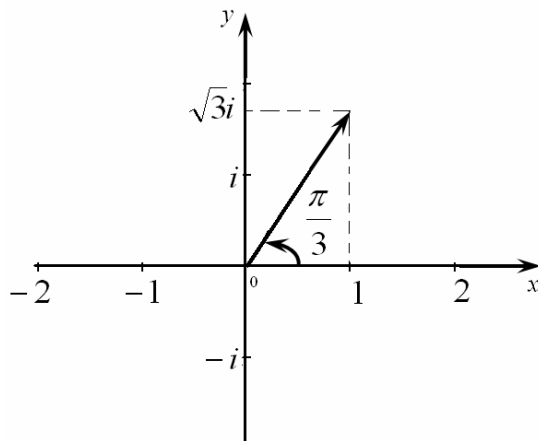


Рисунок 1

б) $z = 1 - i$;

Так как $z = x + iy$, то $x = 1$ и $y = -1$, $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $tg \varphi = \frac{y}{x}$. $|z| = r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$,

$tg \varphi = \frac{-1}{1} = -1$, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Тригонометрическая форма комплексного числа имеет вид:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \text{ тогда } z = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right).$$

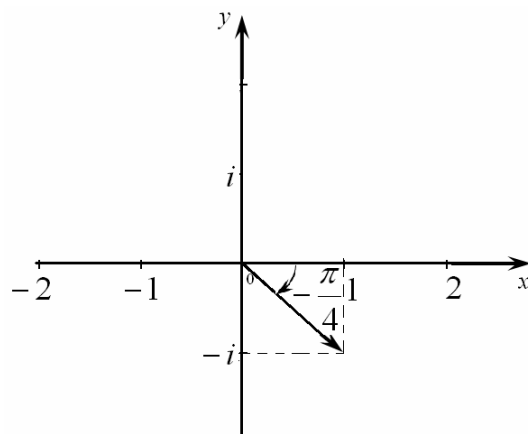


Рисунок 2

в) $z = -1 + \sqrt{3}i$.

Изобразите на комплексной плоскости (на рисунке 3) точку $z = -1 + \sqrt{3}i$.

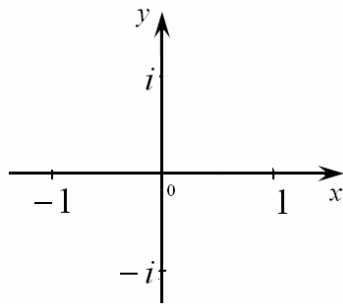


Рисунок 3

Ответ.

$$\text{а) } z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right); \text{ б) } z = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right); \text{ в) } z = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Задание 6

Возведите в степень комплексное число:

$$\text{а) } (-1 - i\sqrt{3})^{15}; \text{ б) } (2 - 2i)^{42}.$$

Решение.

$$\text{а) } (-1 - i\sqrt{3})^{15};$$

Запишем число $z = -1 - i\sqrt{3}$ тригонометрической форме: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Так как $z = x + iy$, $x = -1$ и $y = -\sqrt{3}$, то $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и $\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x}$.

$|z| = r = \sqrt{1 + 3} = 2$, $\operatorname{tg}\varphi = \frac{(-\sqrt{3})}{(-1)} = \sqrt{3}$, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ т.е. тригонометрическая форма имеет

$$\text{вид: } -1 - i\sqrt{3} = 2\left(\cos\left(-\frac{2}{3}\pi\right) + i\sin\left(-\frac{2}{3}\pi\right)\right).$$

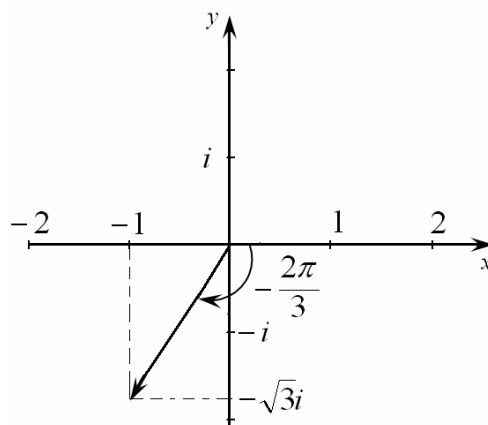


Рисунок 4

По формуле Муавра: $z^n = (r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ возведем в

$$\begin{aligned} \text{степень, тогда } (-1 - i\sqrt{3})^{15} &= \left[2 \left(\cos \left(-\frac{2}{3}\pi \right) + i \sin \left(-\frac{2}{3}\pi \right) \right) \right]^{15} = \\ &= 2^{15} \cdot (\cos(-10\pi) + i \sin(-10\pi)) = 2^{15} (1 + 0i) = 2^{15} = 32768. \end{aligned}$$

$$\text{б) } (2 - 2i)^{42}.$$

Запишем число $z = 2 - 2i$ тригонометрической форме. Так как

$$z = x + iy, \quad \text{то } x = \underline{\hspace{2cm}}, \quad y = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$|z| = r = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \underline{\hspace{2cm}}, \quad \varphi = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$z = 2 - 2i = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2 - 2i)^{42} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Изобразите на комплексной плоскости (на рисунке 5) точку $z = 2 - 2i$.

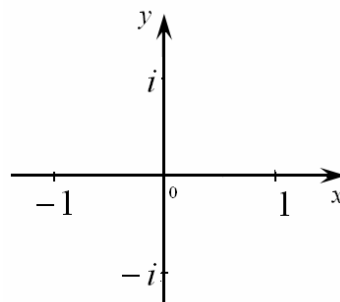


Рисунок 5

Ответ. а) 32768 б) $-i \cdot (8^{21})$

Задание 7

Даны два комплексных числа. Записать комплексные числа в тригонометрической форме, вычислить их произведение и частное:

$$\text{а) } z_1 = 1 + i\sqrt{3} \text{ и } z_2 = \sqrt{3} + i; \text{ б) } z_1 = -1 + i \text{ и } z_2 = -1 - i.$$

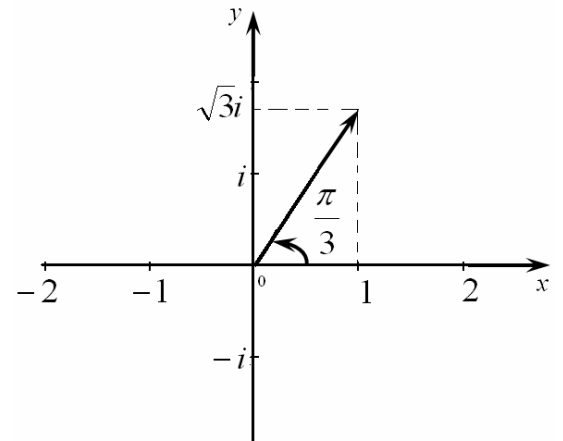
Решение.

$$\text{а) } z_1 = 1 + i\sqrt{3} \text{ и } z_2 = \sqrt{3} + i$$

По известным действительным и мнимым частям строим на плоскости OXY точки, соответствующие этим числам, и определяем их модули и аргументы. Затем по найденным r и φ записываем z_1 и z_2 в тригонометрической форме:

$$z_2 \Rightarrow \begin{cases} r_2 = \sqrt{3+1} = 2, \\ \varphi_2 = \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$z_1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \sqrt{1+3} = 2, \\ \varphi_1 = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}; \end{cases}$$



$$z_1 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right)$$

$$z_2 = 2 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right).$$

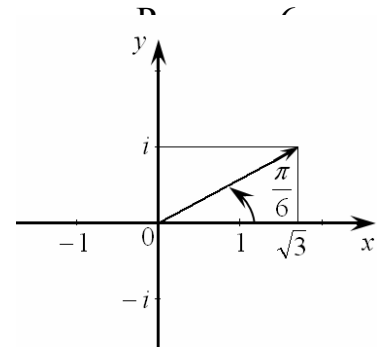


Рисунок 7

Теперь найдем произведение и частное, используя алгебраическую и тригонометрическую формы:

$$z_1 \cdot z_2 = (1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} + i) = \sqrt{3} - \sqrt{3} + i \cdot (3 + 1) = 4 \cdot i,$$

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 \cdot (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) = 4 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} \right) = 4 \cdot i,$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + i \cdot \sqrt{3}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(1 + i \cdot \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i) \cdot (\sqrt{3} - i)} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3} + i \cdot (3 - 1)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \cdot \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) = 1 \cdot \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}.$$

б) $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1 - i$.

По известным действительным и мнимым частям строим на плоскости OXY точки, соответствующие этим числам, и определяем их модули и аргументы. Затем по найденным r и φ записываем z_1 и z_2 в тригонометрической форме:

$$z_1 \Rightarrow \begin{cases} r_1 = \underline{\hspace{2cm}} \\ \varphi_1 = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$z_2 \Rightarrow \begin{cases} r_2 = \underline{\hspace{2cm}} \\ \varphi_2 = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$$

$$z_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Изобразите на комплексной плоскости (на рисунках 8 и 9) точки $z_1 = -1 + i$ и $z_2 = -1 - i$ соответственно.

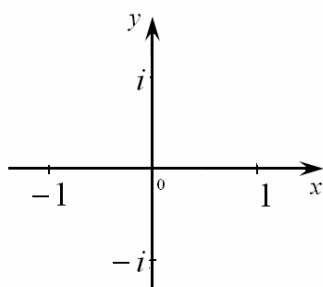


Рисунок 8

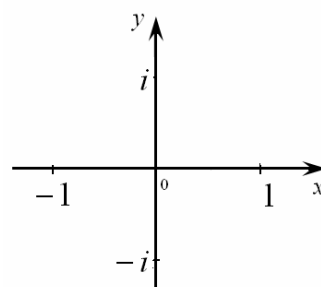


Рисунок 9

Теперь найдем произведение и частное, используя алгебраическую и тригонометрическую формы:

$$z_1 \cdot z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z_1 \cdot z_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ответ. а) $z_1 \cdot z_2 = 4 \cdot i$, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}$; б) $z_1 \cdot z_2 = 2$, $\frac{z_1}{z_2} = -i$.

Задание 8.

Вычислить z^4 и $\sqrt[4]{z}$, если:

а) $z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $z = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение.

$$a) z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Запишем комплексное число z в тригонометрической форме и используя формулы:

$$z^n = (r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}.$$

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1, \text{ получим}$$

$$z = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = r \cdot (\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi) = 1 \cdot \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{2\pi}{3} \right),$$

$$z^4 = r^4 \cdot (\cos 4\varphi + i \cdot \sin 4\varphi) = 1 \cdot \left(\cos \frac{8\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{8\pi}{3} \right) = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{4} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{4} \right) = 1 \cdot \left(\cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{2} \right) \right).$$

Меняя k от 0 до 3, получаем четыре значения w :

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2},$$

$$w_2 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$w_3 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \pi \right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2},$$

$$w_4 = \cos \left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) + i \cdot \sin \left(\frac{\pi}{6} + \frac{3\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

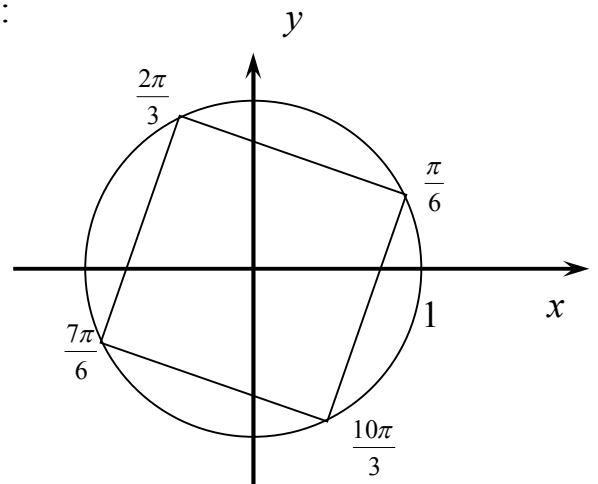


Рисунок 10

Вывод: все точки, соответствующие полученным значениям, располагаются на окружности радиуса $R=1$, причем аргумент первого равен $\frac{\pi}{6}$, а аргументы остальных получаются из первого последовательным увеличением на $\frac{\pi}{2}$ и образуют правильный четырехугольник.

$$б) z = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Запишем комплексное число z в тригонометрической форме

$$x = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$y = \underline{\hspace{2cm}},$$

$$r = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$z = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\hspace{2cm}}$$

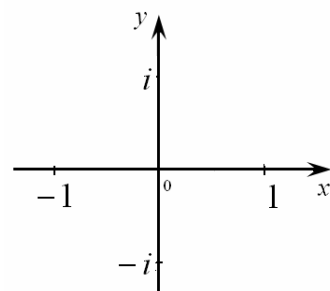


Рисунок 11

используя формулы: $z^n = (r \cdot \cos \varphi + i \cdot r \cdot \sin \varphi)^n = r^n \cdot (\cos n\varphi + i \cdot \sin n\varphi), n \in \mathbb{Z}$.

$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \cdot \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), k = 0, 1, \dots, n-1$, тогда

$$z^4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$w = \sqrt[4]{z} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Меняя k от 0 до 3, получаем четыре значения w :

$$w_1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$w_2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$w_3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$w_4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

Изобразите на комплексной плоскости (на рисунке 12) четыре значения w .

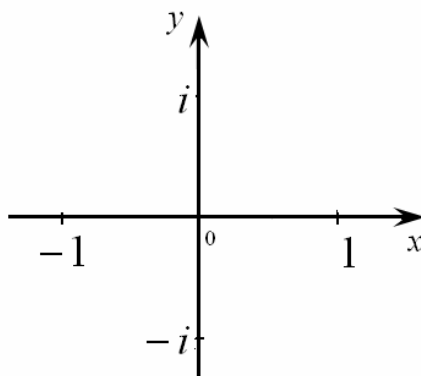


Рисунок 12

Ответ.

$$\text{а) } z^4 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, w_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}, w_2 = -\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, w_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}, w_4 = \frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\text{б) } z^4 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, w_1 = i \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}, w_2 = i \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}, w_3 = -\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, w_4 = \frac{\sqrt{3}}{2} - i \cdot \frac{1}{2}.$$

Задание 9

Решить уравнение на множестве комплексных чисел: а) $z^5 + 32 = 0$; б) $z^3 + i = 0$.

Решение.

$$\text{а) } z^5 + 32 = 0;$$

Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt[5]{-32}$. Число (-32) представим в тригонометрической форме: где, $x = -32$, $y = 0$ (рисунок 13).

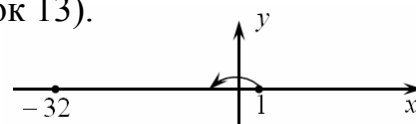


Рисунок 13

Тригонометрическая форма имеет вид: $-32 = 32(\cos \pi + i \sin \pi)$.

$$\text{По формуле } \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$, находим

$$z = \sqrt[5]{32(\cos \pi + i \sin \pi)} = 2 \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{5} \right), \text{ где } k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

Полагая $k = 0, 1, 2, 3, 4$, получим пять различных значений, которые отмечены на комплексной плоскости, на окружности с центром в начале координат и радиусом равным 2, и образуют правильный пятиугольник с вершинами в данных точках:

$$z_0 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \right) \approx 1,6180 + 1,1756 \cdot i,$$

$$z_1 = 2 \left(\cos \frac{3\pi}{5} + i \sin \frac{3\pi}{5} \right) \approx -0,6180 + 1,9021 \cdot i,$$

$$z_2 = 2(\cos \pi + i \sin \pi) = -2,$$

$$z_3 = 2 \left(\cos \frac{7\pi}{5} + i \sin \frac{7\pi}{5} \right) \approx -0,6180 - 1,9021 \cdot i,$$

$$z_4 = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{5} + i \sin \frac{9\pi}{5} \right) \approx 1,6180 - 1,1756 \cdot i$$

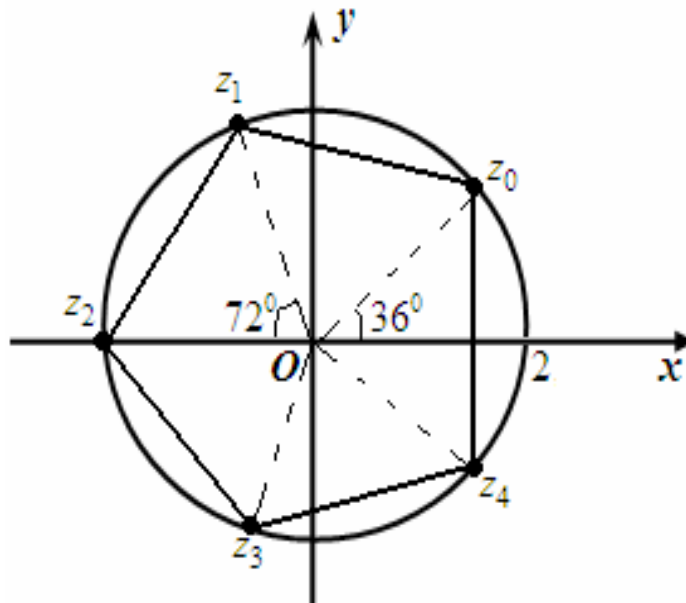


Рисунок 14

б) $z^3 + i = 0$.

Перепишем уравнение в виде

$z =$ _____.

Число (____) представим в тригонометрической форме:

где $x =$ _____, $y =$ _____.

По формуле $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right),$

где $k = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

находим $z =$ _____ где $k = 0, 1, 2$.

Полагая $k = 0, 1, 2$, получим

$z_0 =$ _____

$z_1 =$ _____

$z_2 =$ _____

Изобразите на комплексной плоскости (на рисунке 15) корни уравнения.

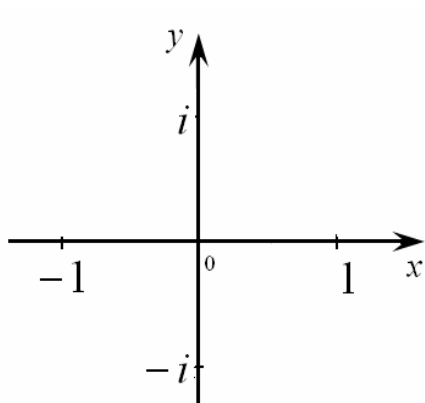


Рисунок 15

Ответ.

а) $z_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{5} + i\sin\frac{\pi}{5}\right)$; $z_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{5} + i\sin\frac{3\pi}{5}\right)$; $z_2 = -2$;

$z_3 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{5} + i\sin\frac{7\pi}{5}\right)$; $z_4 = 2\left(\cos\frac{9\pi}{5} + i\sin\frac{9\pi}{5}\right)$,

б) $z_0 = i$, $z_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$, $z_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

Задание 10

Изобразить на комплексной плоскости C множество точек, удовлетворяющих следующим условиям:

а) $|z| = 3$; б) $|z + 2 - 3i| < 5$; в) $|z - 4 + i| \geq 3$; г) $\arg z = \frac{\pi}{6}$; д) $\arg(z + 1 - 2i) > \frac{5\pi}{6}$;

$$\text{е) } \arg(z - 3 + 4i) \leq \frac{3\pi}{4}; \text{ ж) } -3 \leq \operatorname{Im} z < 4; \text{ з) } -1 < \operatorname{Re} z < 5; \text{ и) } \begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3}{4}\pi; \end{cases}$$

$$\text{к) } \begin{cases} 1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 4, \\ -\sqrt{3} \leq \operatorname{Im} z \leq 0; \end{cases} \quad \text{л) } |z - i| = |z + 2|; \text{ м) } \begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{а) } |z| = 3;$$

Так как $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, то $\sqrt{x^2 + y^2} = 3$ и $x^2 + y^2 = 9$. Мы получили уравнение окружности с радиусом $R = 3$ с центром в начале координат (рисунок 16).

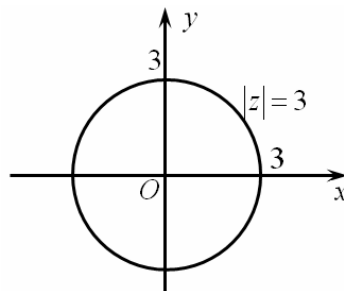


Рисунок 16

$$\text{б) } |z + 2 - 3i| < 5;$$

$$\text{Так как } |z + 2 - 3i| = |x + iy + 2 - 3i| = |(x + 2) + i(y - 3)| = \sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2},$$

то $\sqrt{(x + 2)^2 + (y - 3)^2} < 5$ и $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 < 25$. Решением данного неравенства являются точки лежащие внутри окружности с радиусом $R = 5$ с центром в точке $(-2; 3)$ без точек окружности (рисунок 17).

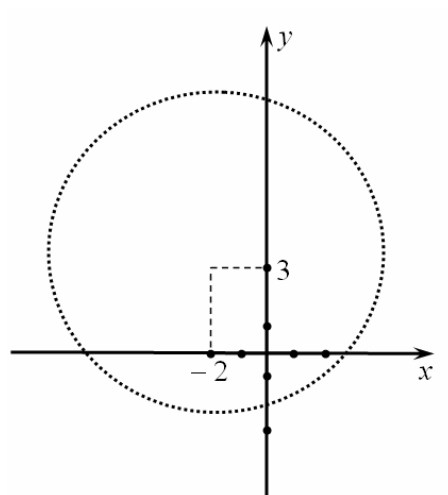


Рисунок 17

в) $|z - 4 + i| \geq 3;$

Изобразите на рисунке 18 множество точек удовлетворяющих данному условию

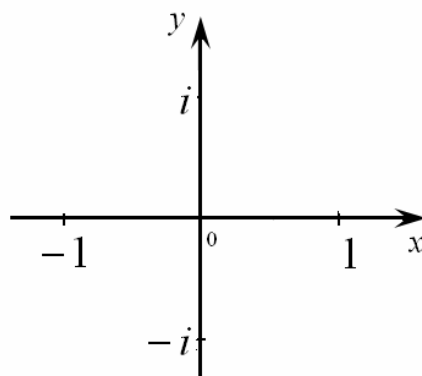


Рисунок 18

г) $\arg z = \frac{\pi}{6};$

$\arg z = \varphi$ - *главное значение аргумента*, заключенное в промежутке $[0; 2\pi)$ или $(-\pi; \pi]$, то есть точки z лежащие на комплексной плоскости, аргумент которых равен $\frac{\pi}{6}$ лежат на луче выходящем из точки $O(0; 0)$ под углом $\frac{\pi}{6}$ к действительной оси (рисунок 19).

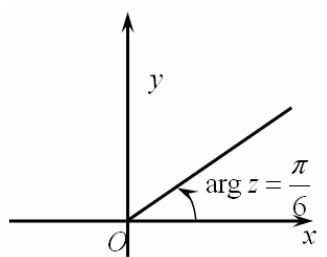


Рисунок 19

д) $\arg(z + 1 - 2i) > \frac{5\pi}{6},$

$\arg(z + 1 - 2i) = \arg(x + yi + 1 - 2i) = \arg((x + 1) + i(y - 2)) > \frac{5\pi}{6}.$ Точки z лежащие на комплексной плоскости, на лучах выходящих из точки $(-1; 2)$ аргументы которых больше чем $\frac{5\pi}{6}$ и меньше чем 2π . Точки лежащие на луче $\frac{5\pi}{6}$ не принадлежат данному множеству, а точки лежащие на луче 2π принадлежат этому множеству. Изобразите на рисунке 20 множество точек удовлетворяющих данному условию.

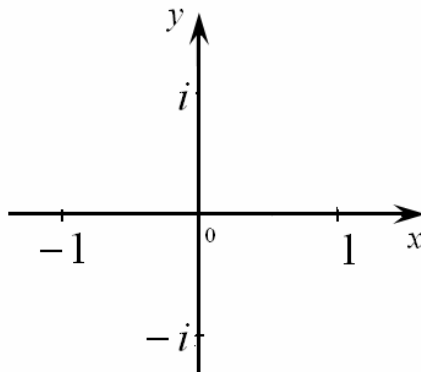


Рисунок 20

е) $\arg(z - 3 + 4i) \leq \frac{3\pi}{4};$

Изобразите на рисунке 21 множество точек удовлетворяющих данному условию.

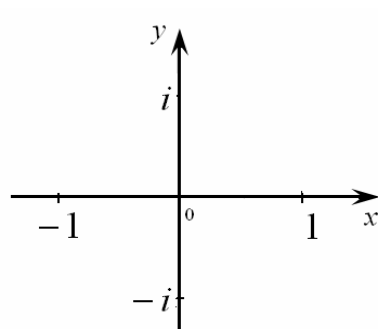


Рисунок 21

ж) $-3 \leq \operatorname{Im} z < 4$;

Так как $\operatorname{Im} z = y$, то $-3 \leq y < 4$. Точки удовлетворяющие данному неравенству будут лежать между двумя горизонтальными прямыми $y = -3$, $y = 4$. Причем точки прямой $y = -3$ удовлетворяют неравенству, а точки прямой $y = 4$ не удовлетворяют.

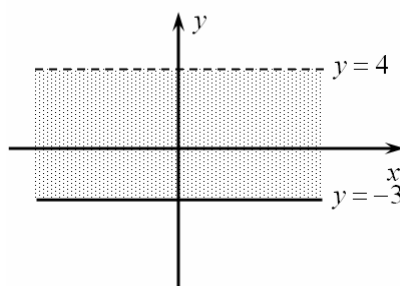


Рисунок 22

з) $-1 < \operatorname{Re} z < 5$;

Изобразите на рисунке 23 множество точек удовлетворяющих данному условию

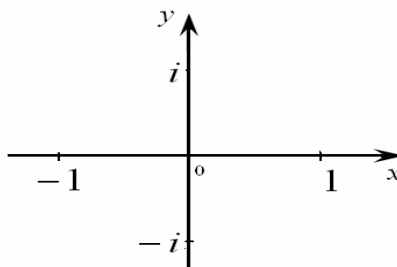


Рисунок 23

и) $\begin{cases} |z| \leq 1, \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{3}{4}\pi; \end{cases}$

Изобразите на рисунке 24 множество точек удовлетворяющих данному условию

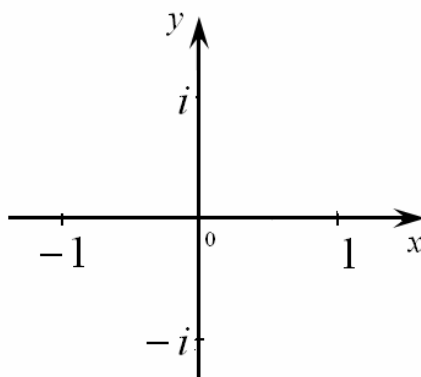


Рисунок 24

$$\text{к) } \begin{cases} 1 \leq z \cdot \bar{z} \leq 4, \\ -\sqrt{3} \leq \text{Im} z \leq 0; \end{cases}$$

Так как $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$, а $\text{Im} z = y$, то данную систему неравенств можно записать в виде: $\begin{cases} 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, \\ -\sqrt{3} \leq y \leq 0. \end{cases}$

Неравенства $1 \leq x^2 + y^2 \leq 4$ задают кольцо между окружностями, включая их границы радиусов $R=1$ и $R=2$ с центром в начале координат. Неравенства $-\sqrt{3} \leq y \leq 0$ определяют горизонтальную полосу между прямыми $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$, включая прямые $y = -\sqrt{3}$ и $y = 0$. Искомое множество точек заштриховано на рисунке 25

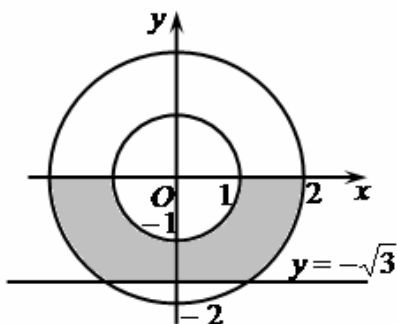


Рисунок 25

$$\text{л) } |z - i| = |z + 2|$$

$$|z - i| = \underline{\hspace{10cm}}$$

$$|z + 2| = \underline{\hspace{10cm}}$$

Изобразите на рисунке 26 множество точек удовлетворяющих данному условию

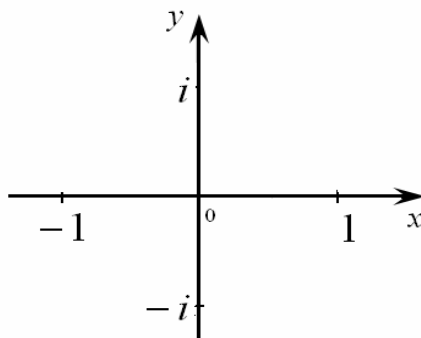


Рисунок 26

Ответ: $y = -2x - \frac{3}{2}$ - прямая

$$\text{м) } \begin{cases} |z - i| < 1, \\ \arg z \geq \frac{\pi}{4}, \\ \arg(z + 1 - i) \leq \frac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Изобразите на рисунке 27 множество точек удовлетворяющих данному условию

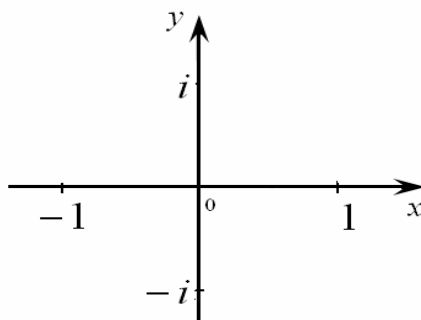


Рисунок 27

Многочлены на множестве комплексных чисел.

Алгебраическое уравнение $P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0$

положительной степени с коэффициентами a_i из множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ имеет хотя бы один корень, принадлежащий данному множеству $\mathbb{C}$.

СЛЕДСТВИЯ

Алгебраическое уравнение n -й степени $P_n(z) = 0$ имеет ровно n корней, в общем случае комплексных и, возможно, кратных.

Корни многочлена $P_n(z) = 0$ в общем случае комплексные и кратные.

Рассмотрим теперь многочлен с действительными коэффициентами:

$$P_n(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0 = 0, a_i \in \mathbb{R}$$

Справедливо утверждение: если комплексное число z_1 является корнем многочлена, то и сопряженное число $\overline{z_1}$ также является его корнем.

Если z_1 является корнем многочлена кратности m , то и сопряженное ему $\overline{z_1}$ также является корнем той же кратности m . Отсюда следует, что в разложении многочлена с действительными коэффициентами наряду с множителями вида $(z - z_1)^m$ обязательно имеются множители вида $(z - \overline{z_1})^m$. Это означает, что многочлен можно представить в виде: $P_n(z) = (z - z_1)^m \cdot (z - \overline{z_1})^m \cdot P_{n-2m}(z)$.

Любой многочлен с действительными коэффициентами можно разложить на множители первой и второй степени относительно z , причем первые соответствуют действительным, а вторые – комплексно сопряженным корням многочлена, и это разложение единственно.

Задание 11

Найдите корни уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $z^2 + 2z + 5 = 0$; б) $z^2 - 6z + 25 = 0$.

Решение.

а) $z^2 + 2z + 5 = 0$. Решим квадратное уравнение относительно переменной z ,

тогда $D = 4 - 4 \cdot 5 = -16 = 16i^2$, $z_{1,2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i$.

б) $z^2 - 6z + 25 = 0$.

Ответ. а) $z_{1,2} = -1 \pm 2i$ б) $z_{1,2} = 3 \pm 4i$.

Задание 12

Решить биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$; б) $z^4 - 16 = 0$.

Решение.

а) $z^4 + 18z^2 + 81 = 0$;

Введем переменную $z^2 = t$, получим квадратное уравнение $t^2 + 18t + 81 = 0 \Rightarrow (t + 9)^2 = 0 \Rightarrow t + 9 = 0 \Rightarrow z^2 + 9 = 0 \Rightarrow z^2 - 9i^2 = 0 \Rightarrow z^2 = 9i^2 \Rightarrow z_{1,2} = \pm 3i$.

б) $z^4 - 16 = 0$.

Ответ. а) $z_{1,2} = \pm 3i$; б) $z_{1,2} = \pm 2$.

Задание 13

Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $|z| - z = 1 + 2i$; б) $|z| - z = 8 + 12i$.

Решение.

а) $|z| - z = 1 + 2i$. $\sqrt{x^2 + y^2} - x - iy = 1 + 2i$.

$$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} - x = 1, \\ -y = 2, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ \sqrt{x^2 + 4} - x = 1, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ \sqrt{x^2 + 4} = 1 + x, \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = -2, \\ x^2 + 4 = 1 + 2x + x^2, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ 2x = 3, \end{cases} \begin{cases} y = -2, \\ x = \frac{3}{2}. \end{cases} \Rightarrow z = \frac{3}{2} - 2i.$$

б) $|z| - z = 8 + 12i$.

Ответ. а) $z = \frac{3}{2} - 2i$; б) $z = 5 - 12i$

Задание 14

Разложить на сумму простейших дробей над полем $\mathbb{C}$:

а) $\frac{(-1+i)z - 11 - 5i}{z^2 + 2z + 5}$; б) $\frac{(1+i)(z+5)}{z^2 - 2z + 5}$.

Решение.

а) $\frac{(-1+i)z - 11 - 5i}{z^2 + 2z + 5}$

Разложим на множители квадратный трехчлен, для этого решим квадратное уравнение: $z^2 + 2z + 5 = 0$. $D = 4 - 4 \cdot 5 = 4 - 20 = -16 = 16i^2 \Rightarrow z_{1,2} = -1 \pm 2i$.

$$\begin{aligned} \frac{(-1+i)z - 11 - 5i}{(z+1-2i)(z+1+2i)} &= \frac{A}{z+1-2i} + \frac{B}{z+1+2i} = \frac{A(z+1+2i) + B(z+1-2i)}{z^2 + 2z + 5} = \\ &= \frac{Az + A + 2Ai + Bz + B - 2Bi}{z^2 + 2z + 5} = \frac{z(A+B) + A + B + 2Ai - 2Bi}{z^2 + 2z + 5}. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} A + B = -1 + i, \\ A + B + 2Ai - 2Bi = -11 - 5i, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 + i - B, \\ A + B + 2Ai - 2Bi = -11 - 5i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 + i - B, \\ (-1 + i - B) + B + 2i(-1 + i - B) - 2Bi = -11 - 5i, \end{cases}$$
$$\begin{cases} A = -1 + i - B, \\ -1 + i - B + B - 2i - 2 - 2Bi - 2Bi = -11 - 5i, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 + i - B, \\ -4Bi = -8 - 4i, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 + i - B, \\ 4B = -8i + 4, \end{cases} \quad \begin{cases} A = -1 + i - B, \\ B = -2i + 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = -1 + i + 2i - 1, \\ B = -2i + 1, \end{cases} \quad \begin{cases} A = 3i - 2, \\ B = -2i + 1. \end{cases}$$

Таким образом, $\frac{(-1+i)z - 11 - 5i}{z^2 + 2z + 5} = \frac{3i - 2}{z + 1 - 2i} + \frac{1 - 2i}{z + 1 + 2i}$.

$$\text{б) } \frac{(1+i)(z+5)}{z^2 - 2z + 5}$$

Ответ: а) $\frac{(-1+i)z - 11 - 5i}{z^2 + 2z + 5} = \frac{3i - 2}{z + 1 - 2i} + \frac{1 - 2i}{z + 1 + 2i};$

б) $\frac{(1+i)(z+5)}{z^2 - 2z + 5} = \frac{-i + 2}{z - 1 - 2i} + \frac{-1 + 2i}{z - 1 + 2i}$

Задание 15

Найти многочлен второй степени $f(z)$, если:

а) $f(0) = 2$, $f(-i) = 4 + i$, $f(2 + i) = 6 + 7i$;

б) $f(0) = 4$, $f(1 + 2i) = -5 - 3i$, $f(2 - i) = 8 + 8i$.

Решение.

а) $f(0) = 2$, $f(-i) = 4 + i$, $f(2 + i) = 6 + 7i$;

$$f(z) = az^2 + bz + c.$$

$$f(0) = c,$$

$$f(-i) = a(-i)^2 + b(-i) + c = ai^2 - bi + c = -a - bi + c,$$

$$\begin{aligned} f(2+i) &= a(2+i)^2 + b(2+i) + c = a(4+4i+i^2) + b(2+i) + c = \\ &= a(4+4i-1) + b(2+i) + c = a(3+4i) + b(2+i) + c. \end{aligned}$$

$$\begin{cases} c = 2, \\ -a - bi + c = 4 + i, \\ a(3+4i) + b(2+i) + c = 6 + 7i, \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2, \\ a = -bi - 2 - i, \\ (-bi - 2 - i)(3+4i) + b(2+i) = 4 + 7i. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = 2, \\ a = -bi - 2 - i, \Rightarrow b = \frac{3(1+3i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{3(3+i+9i-3)}{9-i^2} = \frac{3(10i)}{10} = 3i \Rightarrow \\ b = \frac{3(1+3i)}{3-i} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} c = 2, \\ a = -bi - 2 - i, \\ b = 3i, \end{cases} \quad \begin{cases} c = 2, \\ a = 1 - i, \\ b = 3i. \end{cases}$$

$$6) f(0) = 4, f(1+2i) = -5-3i, f(2-i) = 8+8i$$

$$f(z) = az^2 + bz + c$$

$$f(0) = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$f(1+2i) = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$f(2-i) = \underline{\hspace{15cm}}$$

$$\underline{\hspace{15cm}}$$

$$\underline{\hspace{15cm}}$$

$$\underline{\hspace{15cm}}$$

$$\underline{\hspace{15cm}}$$

$$\text{Ответ: а) } f(z) = (1-i)z^2 + 3iz + 2; \text{ б) } f(z) = iz^2 + (2i-1)z + 4$$

Задание 16

а) Выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$;

б) Выразить $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Решение.

а) Выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$;

Воспользуемся формулой Муавра при $n = 5$:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^5 = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi \Rightarrow \cos^5 \varphi + 5\cos^4 \varphi \cdot i \sin \varphi + 10\cos^3 \varphi \cdot i^2 \cdot \sin^2 \varphi + \\ + 10\cos^2 \varphi \cdot i^3 \cdot \sin^3 \varphi + 5\cos \varphi \cdot i^4 \cdot \sin^4 \varphi + i^5 \cdot \sin^5 \varphi = \cos 5\varphi + i \sin 5\varphi$$

Учитывая, что $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = i^2 \cdot i^2 = 1$, $i^5 = i^3 \cdot i^2 = i$,

последнее соотношение можно переписать в виде:

$$\cos^5 \varphi + i \cdot 5\cos^4 \varphi \cdot \sin \varphi - 10\cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi - i \cdot 10\cos^2 \varphi \cdot \sin^3 \varphi + \\ + 5\cos \varphi \cdot \sin^4 \varphi + i \cdot \sin^5 \varphi = \cos 5\varphi + i \cdot \sin 5\varphi$$

Отделив действительную и мнимую части, окончательно получим:

$$\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10\cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + 5\cos \varphi \cdot \sin^4 \varphi$$

$$\sin 5\varphi = \sin^5 \varphi - 10\sin^3 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + 5\sin \varphi \cdot \cos^4 \varphi$$

б) Выразить $\cos 3\varphi$ и $\sin 3\varphi$ через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$.

Воспользуемся формулой Муавра при $n =$ _____:

$$(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)^3 =$$

Ответ.

а) $\cos 5\varphi = \cos^5 \varphi - 10\cos^3 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + 5\cos \varphi \cdot \sin^4 \varphi,$
 $\sin 5\varphi = \sin^5 \varphi - 10\sin^3 \varphi \cdot \cos^2 \varphi + 5\sin \varphi \cdot \cos^4 \varphi,$

б) $\cos 3\varphi = 4\cos^3 \varphi - 3\cos \varphi; \sin 3\varphi = 3\sin \varphi - 4\sin^3 \varphi$

Задание 17

Найти решение системы линейных уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i. \end{cases}$$

Решение.

$$\text{а) } \begin{cases} (1+i)z_1 + (1-i)z_2 = 1+i \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases}; \begin{cases} z_1 = -\frac{1-i}{1+i}z_2 + 1, \\ (1-i)z_1 + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases};$$

$$\begin{cases} z_1 = -\frac{1-i}{1+i}z_2 + 1, \\ (1-i)(-\frac{1-i}{1+i}z_2 + 1) + (1+i)z_2 = 1+3i. \end{cases}; \begin{cases} z_1 = -\frac{1-i}{1+i}z_2 + 1, \\ (1+i)z_2 = i. \end{cases}; \begin{cases} z_1 = -\frac{1-i}{1+i}z_2 + 1, \\ z_2 = i+1. \end{cases}; \begin{cases} z_1 = i, \\ z_2 = i+1. \end{cases}$$

$$\text{б) } \begin{cases} iz_1 + (1+i)z_2 = 2+2i, \\ 2iz_1 + (3+2i)z_2 = 5+3i. \end{cases}$$

Ответ. а) $z_1 = i, z_2 = 1+i$; б) $z_1 = 2, z_2 = 1-i$.

Задание 18

Найти вещественные числа x, y удовлетворяющие уравнению:

а) $(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i$; б) $(3 + 2i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$.

Решение.

а) $(2 + i)x + (1 + 2i)y = 1 - 4i \Rightarrow 2x + ix + y + 2iy = 1 - 4i \Rightarrow$

$$2x + y + i(x + 2y) = 1 - 4i \Rightarrow \begin{cases} 2x + y = 1 \\ x + 2y = -4 \end{cases}; \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2y = -4 \end{cases}; \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2(1 - 2x) = -4 \end{cases};$$

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ x + 2 - 4x = -4 \end{cases}; \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x = 2 \end{cases}; \begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}.$$

б) $(3 + 2i)x + (1 + 3i)y = 4 - 9i$.

Ответ: а) $\begin{cases} y = -3 \\ x = 2 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y = -5 \\ x = 3 \end{cases}$.

Задание 19

Выполнить действия. Результат представить в алгебраической форме:

а) $(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{2\pi}{9}i})^3$; б) $3 \cdot e^{\frac{\pi}{5}i} \cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i}$.

Решение.

а) $(\sqrt{2} \cdot e^{\frac{2\pi}{9}i})^3 = \sqrt{8} \cdot e^{\frac{2\pi}{3}i} = 2\sqrt{2}(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}) =$

$$2\sqrt{2}(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i) = \sqrt{2}(-1 + \sqrt{3}i) = -\sqrt{2} + i\sqrt{6}.$$

б) $3 \cdot e^{\frac{\pi}{5}i} \cdot 4e^{\frac{4}{5}\pi i} =$ _____

Ответ: а) $-\sqrt{2} + i\sqrt{6}$; б) -12 .

Задание 20

Найдите модуль и аргумент комплексного числа z , если:

$$\text{а) } z = (1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})^2 \cdot (1 - i \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10})^3; \text{ б) } z = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^4}{(\sin \frac{3\pi}{10} + i \cos \frac{7\pi}{10})^2}.$$

Решение.

$$\text{а) } z = (1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})^2 \cdot (1 - i \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10})^3$$

Представим два данных комплексных числа в тригонометрической форме:

$$z_1 = 1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} \Rightarrow x = 1 - \cos \frac{\pi}{5}, y = \sin \frac{\pi}{5}.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(1 - \cos \frac{\pi}{5})^2 + \sin^2 \frac{\pi}{5}} = 2 \sin \frac{\pi}{10}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{1 - \cos \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = \sin \frac{\pi}{10} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \cos \frac{2\pi}{5};$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{\sin \frac{\pi}{5}}{2 \sin \frac{\pi}{10}} = \cos \frac{\pi}{10} = \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{10}) = \sin \frac{2\pi}{5} \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{5}$$

Первое комплексное число в тригонометрической форме имеет вид:

$$z_1 = 1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5} = 2 \sin \frac{\pi}{10} (\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}).$$

$$z_2 = 1 - i \operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10} \Rightarrow x = 1, y = -\operatorname{ctg} \frac{11\pi}{10}.$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{1^2 + \operatorname{ctg}^2 \frac{11\pi}{10}} = \frac{1}{\sin \frac{11\pi}{10}}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \sin \frac{11\pi}{10} = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{11\pi}{10}) = \cos \frac{8\pi}{5}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{-ctg \frac{11\pi}{10}}{1/\sin \frac{11\pi}{10}} = -ctg \frac{11\pi}{10} \cdot \sin \frac{11\pi}{10} = -\cos \frac{11\pi}{10} = \sin(\frac{\pi}{2} + \frac{11\pi}{10}) = \sin \frac{8\pi}{5} \Rightarrow \varphi = \frac{8\pi}{5}$$

Второе комплексное число в тригонометрической форме имеет вид:

$$z_2 = 1 - ictg \frac{11\pi}{10} = \frac{1}{\sin \frac{11\pi}{10}} (\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}).$$

Подставим тригонометрические формы в первоначальное выражения:

$$z = (1 - \cos \frac{\pi}{5} + i \sin \frac{\pi}{5})^2 \cdot (1 - ictg \frac{11\pi}{10})^3 = (2 \sin \frac{\pi}{10} (\cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}))^2 \cdot$$

$$(1/\sin \frac{11\pi}{10} (\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}))^3 = (4 \sin^2 \frac{\pi}{10} (\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5})) \cdot$$

$$(1/\sin^3 \frac{11\pi}{10} (\cos \frac{24\pi}{5} + i \sin \frac{24\pi}{5})) = 4 \sin^2 \frac{\pi}{10} (\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}) \cdot$$

$$\frac{1}{\sin^3 \frac{\pi}{10}} (\cos \frac{24\pi}{5} + i \sin \frac{24\pi}{5}) = \frac{4}{\sin \frac{\pi}{10}} \cdot (\cos \frac{4\pi}{5} + i \sin \frac{4\pi}{5}) \cdot (\cos \frac{24\pi}{5} + i \sin \frac{24\pi}{5}) =$$

$$\frac{4}{\sin \frac{\pi}{10}} \cdot (\cos \frac{28\pi}{5} + i \sin \frac{28\pi}{5}) = \frac{4}{\sin \frac{\pi}{10}} \cdot (\cos \frac{8\pi}{5} + i \sin \frac{8\pi}{5}).$$

$$\text{б) } z = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{6})^4}{(\sin \frac{3\pi}{10} + i \cos \frac{7\pi}{10})^2}$$

$$\text{Ответ. а) } r = \frac{4}{\sin \frac{\pi}{10}}, \varphi = \frac{8\pi}{5}; \text{ б) } r = 64, \varphi = -\frac{4\pi}{15}.$$

3 Домашнее задание

Задание 1

Возведите в степень комплексное число: а) $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)^8$, б) $(1-i)^{12}$.

Ответ. а) $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, б) -64

Задание 2

Выразить через $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$ следующие функции:

а) $\sin 4\varphi$, б) $\cos 4\varphi$

Ответ. а) $4\cos^3 \varphi \cdot \sin \varphi - 4\cos \varphi \cdot \sin^3 \varphi$, б) $\cos^4 \varphi - 6\cos^2 \varphi \cdot \sin^2 \varphi + \sin^4 \varphi$

Задание 3

Вычислите все значения корней и изобразите на комплексной плоскости:

а) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$, б) $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$, в) $\sqrt[4]{-1}$, г) $\sqrt[5]{-1-i}$.

Ответ. а) $z_1 = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_2 = -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$,

б) $z_1 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{2\pi}{9} + i\sin \frac{2\pi}{9}\right), z_2 = \sqrt[3]{2}\left(-\cos \frac{\pi}{9} + i\sin \frac{\pi}{9}\right), z_3 = \sqrt[3]{2}\left(\cos \frac{4\pi}{9} - i\sin \frac{4\pi}{9}\right)$,

в) $z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i, z_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$,

г) $z_1 = \sqrt[5]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right), z_2 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{13\pi}{20} + i\sin \frac{13\pi}{20}\right), z_3 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{21\pi}{20} + i\sin \frac{21\pi}{20}\right)$,

$z_4 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{29\pi}{20} + i\sin \frac{29\pi}{20}\right), z_5 = \sqrt[5]{2}\left(\cos \frac{37\pi}{20} + i\sin \frac{37\pi}{20}\right)$

Задание 4

Решить уравнения:

а) $z^3 + 8 = 0$, б) $z^4 - 1 = 0$, в) $z^4 + z^2 - 2 = 0$.

Ответ. а) $z_1 = 1 + i\sqrt{3}, z_2 = -2, z_3 = 1 - i\sqrt{3}$,

б) $z_1 = 1, z_2 = i, z_3 = -1, z_4 = -i$,

$$\text{в) } z_1 = 1, z_2 = -1, z_3 = i\sqrt{2}, z_4 = -i\sqrt{2}$$

Задание 5

Решить уравнение $4z^4 - 8z^3 + 7z^2 + 2z - 2 = 0$, если известен один его корень $z_1 = 1 - i$.

Ответ. $z_2 = 1 + i, z_3 = 0,5, z_4 = -0,5$

Задание 6

Решить уравнения на множестве комплексных чисел:

а) $z^4 + 16 = 0$,

б) $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$,

в) $z^8 - 17z^4 + 16 = 0$,

г) $z^2 - (4 + i)z + 10 + 2i = 0$

Ответ. а) $z_{1,2} = \sqrt{2} \pm \sqrt{2}i, z_{3,4} = -\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i$;

б) $z_{1,2} = \pm i, z_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$;

в) $z_{1,2} = \pm 1, z_{3,4} = \pm i, z_{5,6} = \pm 2, z_{7,8} = \pm 2i$;

г) $z_1 = 2 + 3i, z_2 = 2 - 2i$.

Задание 7

Указать на комплексной плоскости множество точек, удовлетворяющих указанному соотношению:

а) $|z - 1| = |z - i|$, б) $|z - 1| = |z + 2i|$, в) $|z + 1| + |z - 1| = 3$, г) $\operatorname{Re} z^2 = 1$, д) $\operatorname{Im} z^2 = 1$.

Ответ. а) Прямая $y = x$,

б) Прямая $4y + 2x + 3 = 0$,

в) Эллипс $\frac{x^2}{9/4} + \frac{y^2}{5/4} = 1$,

г) Гипербола $x^2 - y^2 = 1$,

д) Гипербола $2x \cdot y = 1$

Задание 8

Найти вещественные числа x, y удовлетворяющие уравнению:

а) $\frac{x+1+(y-1)i}{5+3i} = 1+i$;

б) $(x+y)^2 i - \frac{6}{i} - x = 1 - y + 5(x+y)i$.

Ответ: а) $\begin{cases} y=9 \\ x=1 \end{cases}$; б) $\begin{cases} y_1=2 \\ x_1=1 \end{cases}, \begin{cases} y_2=\frac{3}{2} \\ x_2=\frac{1}{2} \end{cases}$

Задание 9

Решить уравнение на множестве комплексных чисел:

а) $|z| - 3z = -12i$; б) $z^2 + \bar{z} = 0$.

Ответ. а) $z = \sqrt{2} + 4i$; б) $z_1 = 0, z_2 = -1, z_{3,4} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Задание 10

Дано: $z = \frac{1}{\sqrt{2}(1-i)} - \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{4}i}}$. Найти: $\bar{z}$ и $\frac{1}{z}$.

Ответ. $\bar{z} = -\frac{\sqrt{2}}{2}i$ и $\frac{1}{z} = -\sqrt{2}i$.

4 Самостоятельная работа

УРОВЕНЬ 1

Задание 1

Выполните действия $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$ над комплексными числами,

записанными в алгебраической форме $z_1 = 3i - 2$, $z_2 = 4i + 5$

Задание 2

Вычислите: а) i^{673} ; i^{66} .

Задание 3

Вычислить: а) $(-2 + 2i)^4(-\sqrt{3}i + 1)^5$, б) $\cos 3x$.

Задание 4

Вычислить и отметить на комплексной плоскости $\sqrt[4]{16}$.

Задание 5

Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z , удовлетворяющих условию: $|z| \geq 1 - \operatorname{Re} z$.

УРОВЕНЬ 2

Задание 1

Найти многочлен третьей степени $f(z)$ со старшим коэффициентом равным 1, где число i – его корень, $f(2) = 10 - 5i$, $f(-1) = -4 + 4i$.

Задание 2

Разложить на сумму простейших дробей над полем $\mathbb{C}$ $\frac{-12 + 2i(4 - z)}{z^2 + 4z + 13}$.

Задание 3

Вычислить: а) $\frac{(-1 + i\sqrt{3})^{15}}{(1 - i)^{20}} + \frac{(-1 - i\sqrt{3})^{15}}{(1 + i)^{20}}$, б) $\sin^4 x$.

Задание 4

Вычислить и отметить на комплексной плоскости $\sqrt[4]{\frac{-18}{1 + i\sqrt{3}}}$.

Задание 5

Изобразить на комплексной плоскости множества всех точек z ,
удовлетворяющих условию:

а) $\operatorname{Im}(\overline{z^2 + z}) = 2 - \operatorname{Im} z$, б) $\operatorname{Im} \frac{z-1+i}{z-3i} = 0$.

5 Тест

1 Число i^{13} равно:

- а) 1; б) -1; в) i ; г) $-i$.

2 Число i^{35} равно:

- а) 1; б) -1; в) i ; г) $-i$.

3 Число i^{100} равно:

- а) 1; б) -1; в) i ; г) $-i$.

4 Число i^{2010} равно:

- а) 1; б) -1; в) i ; г) $-i$.

5 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^2 + 1 = 0$ имеет корни:

- а) 1; -1; б) $-i$; i ; в) $i \pm 1$; г) корней нет.

6 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^2 - 4z + 5 = 0$ имеет корни:

- а) $2 \pm i$; б) $i \pm 2$; в) $5 \pm 4i$; г) корней нет.

7 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^3 + 1 = 0$ имеет корни:

- а) -1; б) 1; -1; i ; в) -1; $\frac{1}{2}(1 \pm i\sqrt{3})$; г) корней нет.

8 Уравнение на множестве комплексных чисел $z^4 - 16 = 0$ имеет корни:

- а) 4; -4; б) $2 \pm 2i$; в) 2; -2; $-2i$; $2i$ г) корней нет.

9 Модуль и аргумент комплексного числа $z = \sqrt{3} - i$ равны:

- а) $r = 2, \varphi = \frac{\pi}{6}$; б) $r = \sqrt{3}, \varphi = \pi$; в) $r = 2, \varphi = -\frac{\pi}{6}$; г) $r = 1, \varphi = \frac{2\pi}{3}$.

10 Комплексное число $z = 2 - 3i$ расположено в:

- а) I четверти; б) II четверти; в) III четверти; г) IV четверти.

11 Комплексное число $z = i - 7$ расположено в:

- а) I четверти; **б) II четверти;** в) III четверти; г) IV четверти.

12 Комплексное число $z = -4i$ расположено:

- а) на мнимой оси;** б) на действительной оси; в) в I четверти; г) в IV четверти.

13 Комплексное число $z = 3$ расположено:

- а) на мнимой оси; **б) на действительной оси;** в) в III четверти; г) в I четверти.

14 Комплексному числу $z = 4i - 1$ соответствует точка

- а) $M(4;-1)$; б) $M(-1;-4)$; **в) $M(-1;4)$;** г) $M(-4;-1)$.

15 Расстояние от начала координат до точки М, которая соответствует комплексному числу $z = 3 - 4i$ равно:

- а) 4; б) 3; в) 1; **г) 5.**

16 Угол между вектором $\overrightarrow{OM}$ и положительным направлением оси ox , где точке М соответствует комплексное число $z = -i - 1$ равен:

- а) $\frac{\pi}{4}$; **б) $-\frac{\pi}{4}$;** в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) $\frac{3\pi}{4}$.

17 Сопряженное число к числу $z = 2i - 4$ равно:

- а) $2i + 4$; **б) $-2i - 4$;** в) $-2i + 4$; г) $2i - 4$.

18 Действительная часть комплексного числа $z = 2i + 3$ равна:

- а) 3;** б) 2; в) -2; г) 5.

19 Мнимая часть комплексного числа $z = 5 - 4i$ равна:

- а) 4; **б) -4;** в) 1; г) -5.

20 Число $z \cdot \bar{z}$, если $z = 3i - 1$ равно:

- а) 10;** б) -10; в) $10-6i$; г) $6i-10$.

21 Число $z = i - 1$ в тригонометрической форме имеет вид:

- а) $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$;** б) $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$
в) $z = \sqrt{2} \left(\sin \frac{5\pi}{4} + i \cos \frac{5\pi}{4} \right)$; г) $z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right)$.

22 Комплексное число $z = -2i$ в показательной форме имеет вид:

а) $z = 2e^{\frac{\pi}{2}i}$; б) $z = 2e^{\frac{3\pi}{2}i}$; в) $z = 2e^{2\pi i}$; г) $z = 2e^{\pi i}$.

23 Комплексное число $z = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$ в алгебраической форме имеет вид:

а) $z = -\frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})$; б) $z = -\frac{1}{2}(i - \sqrt{3})$;
в) $z = -\frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3})$; г) $z = -\frac{1}{2}(\sqrt{3} + i)$.

24 Число $(1 + i)^8$ равно:

а) $-16i$; б) 16 ; в) -8 ; г) $8i$.

25 Результатом $\sqrt[3]{i}$ являются комплексные числа:

а) $\pm i, 1$; б) $-i, \pm \left(\frac{1}{2}i - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $-i, \pm \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)$; г) $i, i \pm 1$.

26 Результатом $\sqrt[4]{-1}$ являются комплексные числа:

а) корней нет; б) $\pm i$; в) $\pm i, \pm 1$; г) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i), \pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

27 Функция $f(z) = 2z^2 - 3z + 5$ при $z = 2 - i$ равна:

а) $5 - 5i$; б) $9 - 5i$; в) $5i - 5$; г) $9 + 5i$.

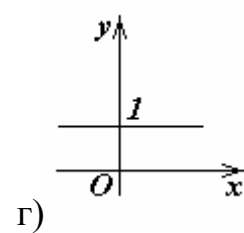
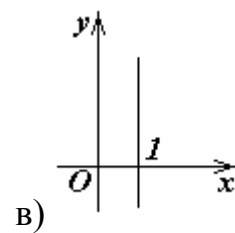
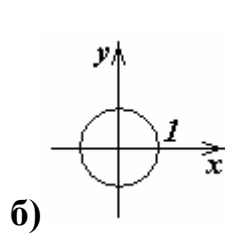
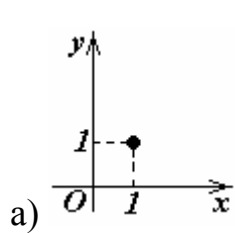
28 Результатом $z_1 \cdot \overline{z_2}$, если $z_1 = 3 + 2i, z_2 = i + 4$ является:

а) $14 + 5i$; б) $10 + 5i$; в) $14 + 11i$; г) $10 + 11i$.

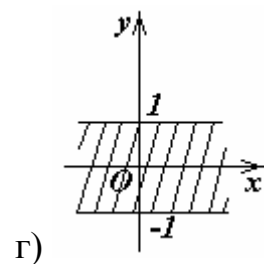
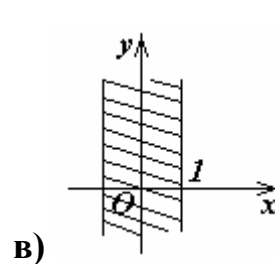
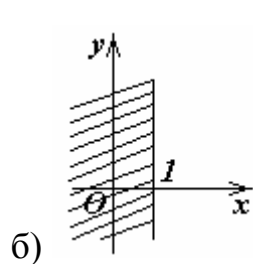
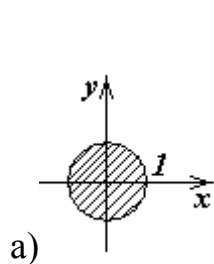
29 Результатом $\frac{z_1 + z_2}{z_1 \cdot z_2}$, если $z_1 = i - 1, z_2 = 2 + i$ является:

а) $-0,1 - 0,7i$; б) $-0,1 + 0,7i$; в) $0,1 + 0,7i$; г) $0,1 - 0,7i$.

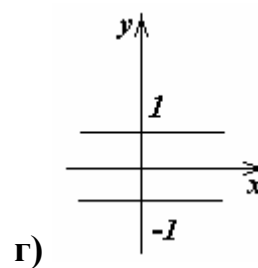
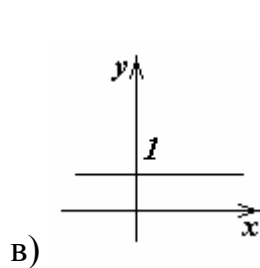
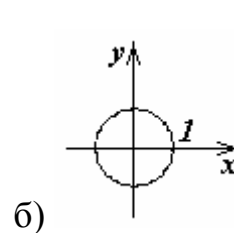
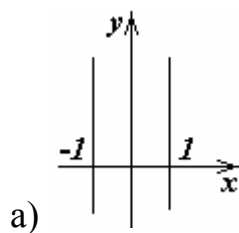
30 Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|z| = 1$, является:



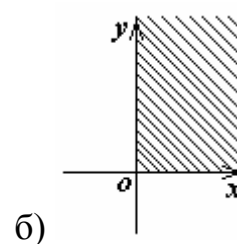
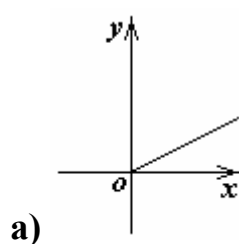
31 Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|\operatorname{Re} z| \leq 1$, является:

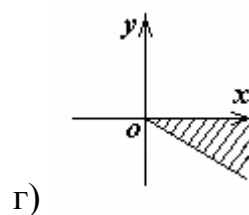
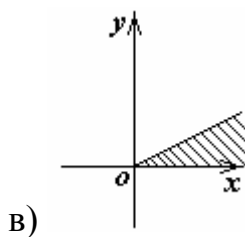


32 Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|\operatorname{Im} z| = 1$, является:

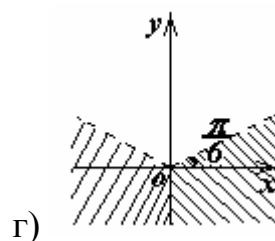
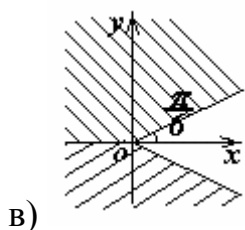
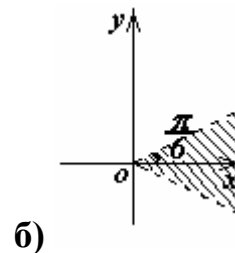
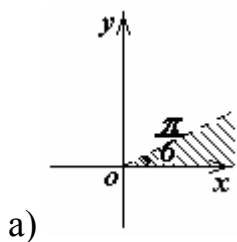


33 Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $\arg z = \frac{\pi}{6}$, является:

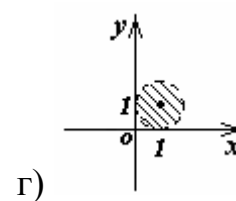
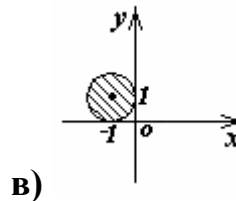
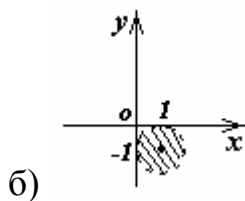
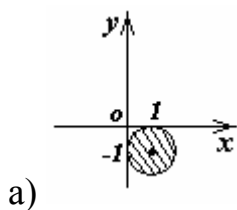




34 Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|\arg z| < \frac{\pi}{6}$, является:



35 Множество точек на комплексной плоскости, удовлетворяющее условию $|z - i + 1| \leq 1$, является:



36 Сопряженное число к числу $z = 2 - i$ имеет вид:

- а) $z = -2 - i$; б) $z = 2 + i$; в) $z = -2 + i$; г) $z = -(2 - i)$.

37 В алгебраической форме число $z = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$ имеет вид:

- а) $1 + i$; б) $1 - i$; в) $-1 + i$; г) $-1 - i$.

38 Уравнение $z^2 = i$ над полем комплексных чисел имеет корни:

- а) $\pm i$; б) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 + i)$; в) $1 \pm i$; г) $\pm \frac{\sqrt{2}}{2}(1 - i)$.

39 Уравнение $z^2 - 5z + 4 + 10i = 0$ над полем комплексных чисел имеет корни:

- а) $5 \pm 2i$; б) $\pm 2i$; в) $5 - 2i, 2i$; г) $2i \pm 5$.

40 Уравнение $|z| + z = 8 + 4i$ над полем комплексных чисел имеет корни:

- а) $3 + 4i$; б) $3 - i$; в) $\pm (3 + 4i)$; г) $4 + 8i$.

6 Расчетно- графические задание

1 Выполнить действия над комплексными числами $z_1 \pm z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, $\frac{z_2}{z_1}$.

1. $z_1 = i + 6$; $z_2 = 6 - i$

16. $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 4 - 7i$

2. $z_1 = 4i - 3$; $z_2 = 5 - 2i$

17. $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 4 - 7i$

3. $z_1 = i + 1$; $z_2 = -3 - i$

18. $z_1 = 4 - i$; $z_2 = 4 + i$

4. $z_1 = 2i + 3$; $z_2 = 6 + i$

19. $z_1 = -1 - 3i$; $z_2 = 4 + 7i$

5. $z_1 = -i + 5$; $z_2 = 2 + i$

20. $z_1 = -4 - 2i$; $z_2 = 4 + 5i$

6. $z_1 = -i + 8$; $z_2 = 1 + 2i$

21. $z_1 = 9 - i$; $z_2 = 5 - 8i$

7. $z_1 = -i + 9$; $z_2 = 7 - i$

22. $z_1 = 4 - 3i$; $z_2 = 2i - 1$

8. $z_1 = i - 3$; $z_2 = -6 - i$

23. $z_1 = i - 4$; $z_2 = 3 + 2i$

9. $z_1 = i + 3$; $z_2 = 6 - 2i$

24. $z_1 = 4 + 5i$; $z_2 = i + 2$

10. $z_1 = i - 4$; $z_2 = 6 + 5i$

25. $z_1 = i + 2$; $z_2 = 3 - 2i$

11. $z_1 = 3i + 4$; $z_2 = -1 - 2i$

26. $z_1 = 2 + i$; $z_2 = i - 5$

12. $z_1 = -i + 2$; $z_2 = 5 - 4i$

27. $z_1 = 4 + 5i$; $z_2 = 2i - 3$

13. $z_1 = i + 6$; $z_2 = -4 + 5i$

28. $z_1 = 2i - 3$; $z_2 = 4 + 3i$

14. $z_1 = 3i - 2$; $z_2 = -9 - i$

29. $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = 4 - 7i$

15. $z_1 = -i + 7$; $z_2 = -9 - 2i$

30. $z_1 = i + 3$; $z_2 = 6 - 2i$.

2. Возвести в степень n комплексное число z .

1. $z = 1 - \sqrt{3}i, n = 120$;

16. $z = 5\sqrt{3} + 5i, n = 66$;

2. $z = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i, n = 240$;

17. $z = -3 - 3\sqrt{3}i, n = 320$;

3. $z = \sqrt{3} + i, n = 80$;

18. $z = 2 + 2i, n = 1000$;

- | | |
|--|---|
| 4. $z = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i, n = 100;$ | 19. $z = 4 - 4i, n = 240;$ |
| 5. $z = -3 - 3i, n = 150;$ | 20. $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, n = 340;$ |
| 6. $z = 5i - 5, n = 200;$ | 21. $z = 2\sqrt{3} - 2i, n = 420;$ |
| 7. $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, n = 160;$ | 22. $z = 2i - 2, n = 100;$ |
| 8. $z = -4 + 4i, n = 280;$ | 23. $z = -4 - 4i, n = 20;$ |
| 9. $z = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}i, n = 300;$ | 24. $z = 2\sqrt{3} - 2i, n = 100;$ |
| 10. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}, n = 140;$ | 25. $z = -\sqrt{3} - i, n = 64;$ |
| 11. $z = 1 - i\sqrt{3}, n = 180;$ | 26. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i, n = 50;$ |
| 12. $z = \sqrt{3} - i, n = 170;$ | 27. $z = i - \sqrt{3}, n = 42;$ |
| 13. $z = 6 + 6i, n = 100;$ | 28. $z = \frac{1}{4} - \frac{i}{4}, n = 44;$ |
| 14. $z = 4\sqrt{3} + 4i, n = 90;$ | 29. $z = -i + 1, n = 36;$ |
| 15. $z = -2 + 2\sqrt{3}i, n = 99;$ | 30. $z = \sqrt{3}i - 1, n = 16.$ |

3. Найдите значения $\sqrt[m]{z}$ и изобразите на комплексной плоскости числа (комплексное число z из задания 2).

- | | | |
|----------|-----------|-----------|
| 1. $m=6$ | 11. $m=4$ | 21. $m=6$ |
| 2. $m=4$ | 12. $m=5$ | 22. $m=4$ |
| 3. $m=3$ | 13. $m=6$ | 23. $m=6$ |
| 4. $m=5$ | 14. $m=3$ | 24. $m=4$ |
| 5. $m=6$ | 15. $m=6$ | 25. $m=6$ |
| 6. $m=4$ | 16. $m=4$ | 26. $m=3$ |
| 7. $m=5$ | 17. $m=6$ | 27. $m=6$ |
| 8. $m=6$ | 18. $m=5$ | 28. $m=5$ |
| 9. $m=4$ | 19. $m=6$ | 29. $m=5$ |

10. $m=6$

20. $m=3$

30. $m=6$

4. Изобразите на плоскости XOY множество точек $z = x + yi$, удовлетворяющих условию.

1. $|z - 2i + 4| \leq 3$;

16. $\frac{\pi}{3} < \arg(z - i) < \frac{\pi}{2}$;

2. $|2z - 3 + i| \leq 1$;

17. $|z - 1| \leq |z - i|$;

3. $4 \leq |z + 2i - 1| \leq 6$;

18. $|z - i| + |z + i| = 4$;

4. $1 + z = |z + 1|$;

19. $1 \leq \operatorname{Re}(2z - 3) \leq 2$;

5. $|z + 2i - 3| = |z|$;

20. $|z - 1| = |z + 2| = |z - i|$;

6. $|z + 2| > |z|$;

21.
$$\begin{cases} 2 < |z + 2i - 3| \leq 6 \\ \frac{\pi}{4} < \arg(z - 1) \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases}$$

7. $|z - 1| = |z + 1| = |z + 1 - 2i|$;

22. $|z - 2i| = |z + 3|$;

8. $2 \leq |2z + 1| \leq 4$;

23. $\operatorname{Im} z - |z| < 0$;

9. $|z - 2 - 3i| > 1$;

24. $1 \leq |z + i - 3| \leq 2$;

10.
$$\begin{cases} |z| \geq 2 \\ \frac{\pi}{6} < \arg z \leq \frac{\pi}{3} \end{cases}$$

25. $|z - 3 + i| \leq |z|$;

11. $|z| > 2 + \operatorname{Im} z$;

26.
$$\begin{cases} 1 \leq |z| \leq 2, \\ \frac{\pi}{4} \leq \arg z \leq \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

12. $-\operatorname{Re} z + |z| \leq 0$;

27.
$$\begin{cases} 1 < |z| < 3, \\ -1 \leq \operatorname{Re} z < 2; \end{cases}$$

13. $\frac{\pi}{4} \leq \arg(z + 1 - i) \leq \frac{3\pi}{4}$;

28.
$$\begin{cases} \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}, \\ \frac{\pi}{6} < \arg(z - 1) < \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

14. $2 \leq |2z + 1| \leq 4$;

29. $|z| \geq \operatorname{Re} z$;

15. $1 \leq |z + 2 + i| \leq 2$;

30. $2 - z = |z - 2|$.

Список использованных источников

1 Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры: учебник для вузов / Д.В. Беклемишев. – 10-е изд., испр. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.

2 Ильин В.А. Линейная алгебра: учебник для вузов / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк, под ред. А.Н. Тихонова, В.А. Ильина, А.Г. Свешникова; Вып. 4). – 5-е изд., стер. – М.: Физматлит, - 2002. – 320 с.-(Курс высшей математики и математической физики)

3 Курош, А. Г. Курс высшей алгебры : учебник для вузов / А. Г. Курош .- 17-е изд., стер. - СПб. : Лань, 2008. - 432 с. : ил.. - (Лучшие классические учебники).- (Классическая учебная литература по математике). - Указ. лит.:

с. 425-426. - Предм. указ.: с. 427-431. - ISBN 978-5-8114-0521-3.

4 Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами: 1 курс: учеб. пособие для вузов / К. Н. Лунгу [и др.] .- 6-е изд. - М. : Айрис-пресс, 2007. - 576 с. : ил.. - (Высшее образование) - ISBN 978-5-8112-2326-8.

5 Лунгу, К. Н. Высшая математика. Руководство к решению задач: учеб. пособие / К. Н. Лунгу, Е. В. Макаров. - М. : Физматлит, 2005. Ч. 1: / под ред. В. Д. Кулиева. - , 2005. - 216 с - ISBN 5-9221-0581-7.

6 Молчанов, В. А. Алгебра и теория чисел: учеб. пособие для вузов / В. А. Молчанов; Мин-во образования и науки РФ; ГОУ ОГУ. - Оренбург : ГОУ ОГУ, 2009. - 194 с. - Библиогр.: с. 189.

7 Фаддеев, Д.К. Задачи по высшей алгебре: учеб. пособие / Д.К. Фаддеев, И.С. Соминский.- 13 изд., стер.- СПб.: Лань, 2004.- 288 с - ISBN 5-8114-0427-1.

8 Шипачев, В. С. Задачник по высшей математике: учеб. пособие для студентов вузов / В. С. Шипачев.- 9-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2009. - 304 с. : ил. - ISBN 978-5-06-006145-1.

9 Шипачев, В. С. Высшая математика: учебник для вузов / В. С. Шипачев.- 8-е изд., стер. - М. : Высш. шк., 2007. - 479 с : ил.. - Библиогр.: с. 455-462. - ISBN 978-5-06-003959-7.