Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов

РАВНОВЕСИЕ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СИСТЕМЫ СИЛ

Методические указания
к выполнению лабораторной работы
по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом
федерального государственного бюджетного образовательного
учреждения высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Оренбург
2012

УДК 531.259.1
ББК 22.21я73
К 88

Рецензент – доцент, кандидат технических наук С.Н. Горелов

Кудина, Л.И.
К 88 Равновесие произвольной пространственной системы сил: методические указания к выполнению лабораторной работы по дисциплине «Теоретическая механика» / Л.И. Кудина, А.А. Гаврилов; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 31с.

Методические указания содержат краткие теоретические сведения и рекомендации по решению задач на равновесие твердого тела под действием произвольной пространственной системы сил, а также варианты заданий для лабораторной работы и пример ее выполнения.

Предназначены для самостоятельной работы студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по техническим направлениям бакалавриата, при выполнении лабораторной работы по дисциплине «Теоретическая механика».

УДК 531.259.1
ББК 22.21я73

Содержание

1 Краткие теоретические сведения

1.1 Проекция силы на ось и на плоскость. Правило двойного проецирования силы

Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная взятой с соответствующим знаком («плюс» или «минус») длине отрезка, заключенного между проекциями начала и конца силы на эту ось (рисунок 1.1).

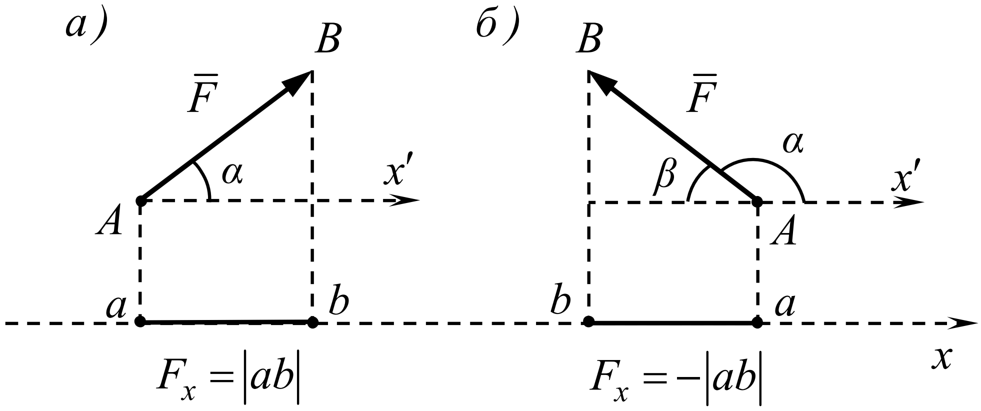


Рисунок 1.1 – Проекция силы на ось

Проекция силы считается положительной, если перемещение от проекции ее начала к проекции ее конца происходит в положительном направлении оси (рисунок 1.1, а) и отрицательной, если наоборот (рисунок 1.1, б).

Обозначив угол между направлением силы и положительным направлением оси α, получим, что ***проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси***

$$F_x = F\,cos\,\alpha. \tag{1.1}$$

В (1.1) знак проекции силы определяется знаком косинуса угла α: если угол $\alpha < \dfrac{\pi}{2}$, проекция силы на ось положительна (рисунок 1.1, а), если угол $\alpha > \dfrac{\pi}{2}$, то отрицательна (рисунок 1.1, б).

Очевидно, что ***проекция силы на ось равна нулю, если сила перпендикулярна оси.***

В некоторых случаях при определении проекции силы на ось удобнее рассматривать острый угол β, образуемый силой с осью (рисунок 1.1, б). Тогда проекция силы на ось определяется соотношением

$$F_x = F\cos\alpha = F\cos(180^\circ - \beta) = -F\cos\beta. \tag{1.2}$$

Проекцией силы на плоскость называется вектор, заключенный между проекциями начала и конца силы на эту плоскость (рисунок 1.2).

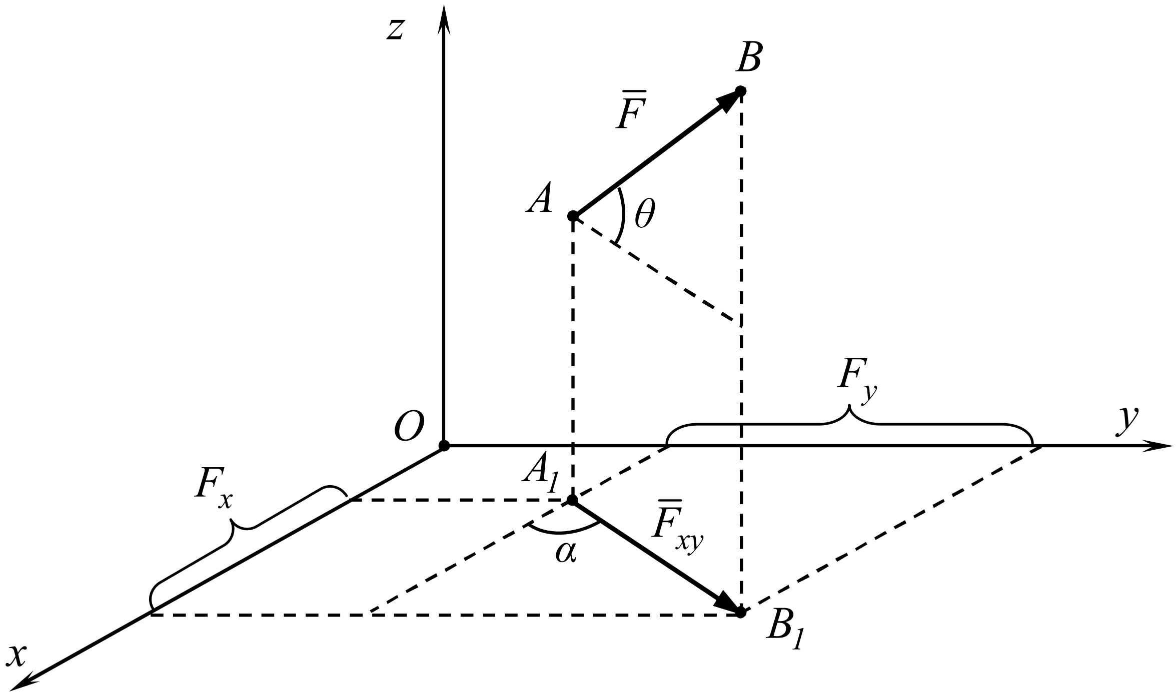


Рисунок 1.2 – Проекция силы на плоскость

Очевидно, что длины векторов связаны соотношением

$$\left|\overline{F}_{xy}\right| = \left|\overline{F}\right|\cos\theta; \tag{1.3}$$

где θ – угол между направлением силы $\overline{F}$ и ее проекцией $\overline{F}_{xy}$ на плоскость Oxy.

При решении задач на равновесие пространственных систем сил для нахождения проекции силы на ось удобно также пользоваться ***правилом двойного проецирования силы.***

Для того чтобы найти проекцию силы на ось, нужно спроецировать силу на плоскость, содержащую эту ось, а затем полученный вектор проекции силы на плоскость спроецировать еще раз, на заданную ось.

Например, для силы $\overline{F}$, изображенной на рисунке 1.2, проекции на оси координат x и y будут равны

$$\begin{aligned} F_x &= F_{xy} \cos\alpha = F \cdot \cos\theta \cdot \cos\alpha; \\ F_y &= F_{xy} \cos(90^\circ - \alpha) = F \cdot \cos\theta \cdot \sin\alpha. \end{aligned} \tag{1.4}$$

1.2 Вектор-момент силы относительно центра. Вектор-момент пары сил. Момент силы относительно оси

Вектором-моментом силы $\overline{F}$ относительно центра O называется вектор, равный по модулю произведению модуля силы $\overline{F}$ на ее плечо h относительно этого центра, приложенный в центре O перпендикулярно плоскости поворота силы OAB, образованной силой и этим центром, и направленный в ту сторону, откуда поворот силы вокруг центра видится происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 1.3).

Плечо h силы $\overline{F}$ относительно центра O находится как длина перпендикуляра, опущенного из центра O на линию действия силы $\overline{F}$.

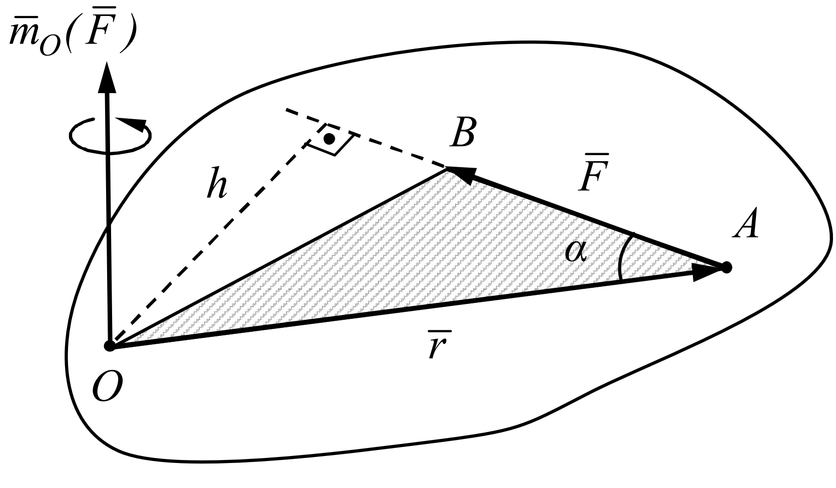


Рисунок 1.3 – Вектор-момент силы относительно центра

Вектор-момент силы относительно центра определяется соотношением

$$\bar{m}_O(\bar{F}) = \bar{r} \times \bar{F}; \tag{1.5}$$

т.е. ***вектор-момент силы $\bar{F}$ относительно центра O равен векторному произведению радиуса-вектора $\bar{r} = \overline{OA}$ точки приложения силы на вектор силы.***

Выражение (1.5) называется ***векторной формулой для определения момента силы относительно центра.***

Очевидно, что модуль вектора-момента силы относительно центра O равен

$$\left|\bar{m}_O(\bar{F})\right| = \left|\bar{r} \times \bar{F}\right| = \left|\bar{F}\right| \cdot \left|\bar{r}\right| \cdot \sin\alpha = F \cdot h. \tag{1.6}$$

Моментом пары сил называется вектор, равный по модулю произведению модуля одной из сил пары на плечо пары и направленный перпендикулярно плоскости действия пары в ту сторону, откуда вращение, производимое парой, видится происходящим против хода часовой стрелки (рисунок 1.4).

Плечо пары d находится как плечо одной из сил пары относительно точки приложения другой силы.

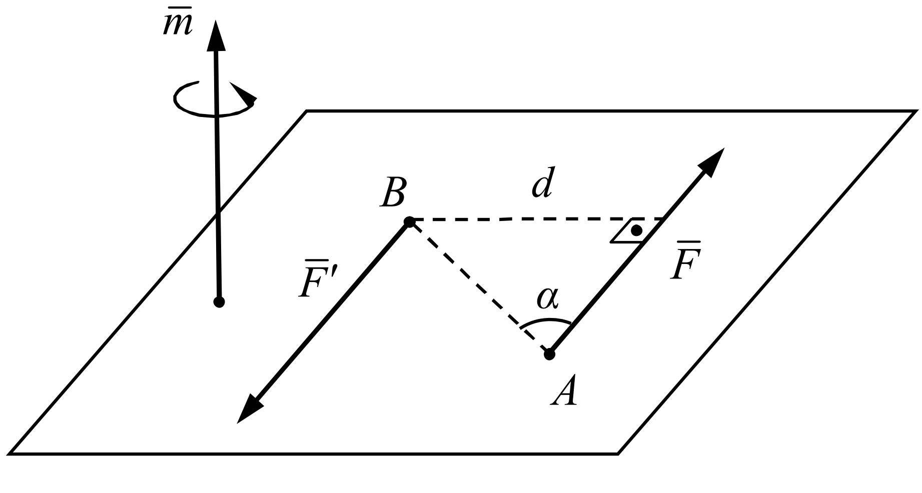


Рисунок 1.4 – Вектор-момент пары сил

В соответствии с (1.5) вектор-момент пары сил определяется соотношением

$$\bar{m} = \overline{BA} \times \bar{F} = \overline{AB} \times \bar{F}'. \tag{1.7}$$

Из (1.7) следует, что модуль вектора-момента пары сил равен

$$\left|\overline{m}\right| = \left|\overline{BA} \times \overline{F}\right| = \left|\overline{F}\right| \cdot \left|\overline{BA}\right| \cdot \sin\alpha = F \cdot d. \tag{1.8}$$

Так как пару можно переносить в любую другую плоскость, параллельную плоскости ее действия, то вектор-момент пары может быть приложен в любой точке пространства, т.е. вектор-момент пары – вектор ***свободный.***

Моментом силы относительно оси называется проекция вектора-момента силы относительно произвольной точки, лежащей на этой оси, на саму эту ось (рисунок 1.5).

Тогда в соответствии с (1.1) имеем

$$m_z(\overline{F}) = \left|\overline{m}_O(\overline{F})\right| \cdot \cos\gamma; \tag{1.9}$$

где γ – угол между направлением вектора-момента силы $\overline{m}_O(\overline{F})$ и положительным направлением оси z.

Заметим, что момент силы относительно оси – величина скалярная.

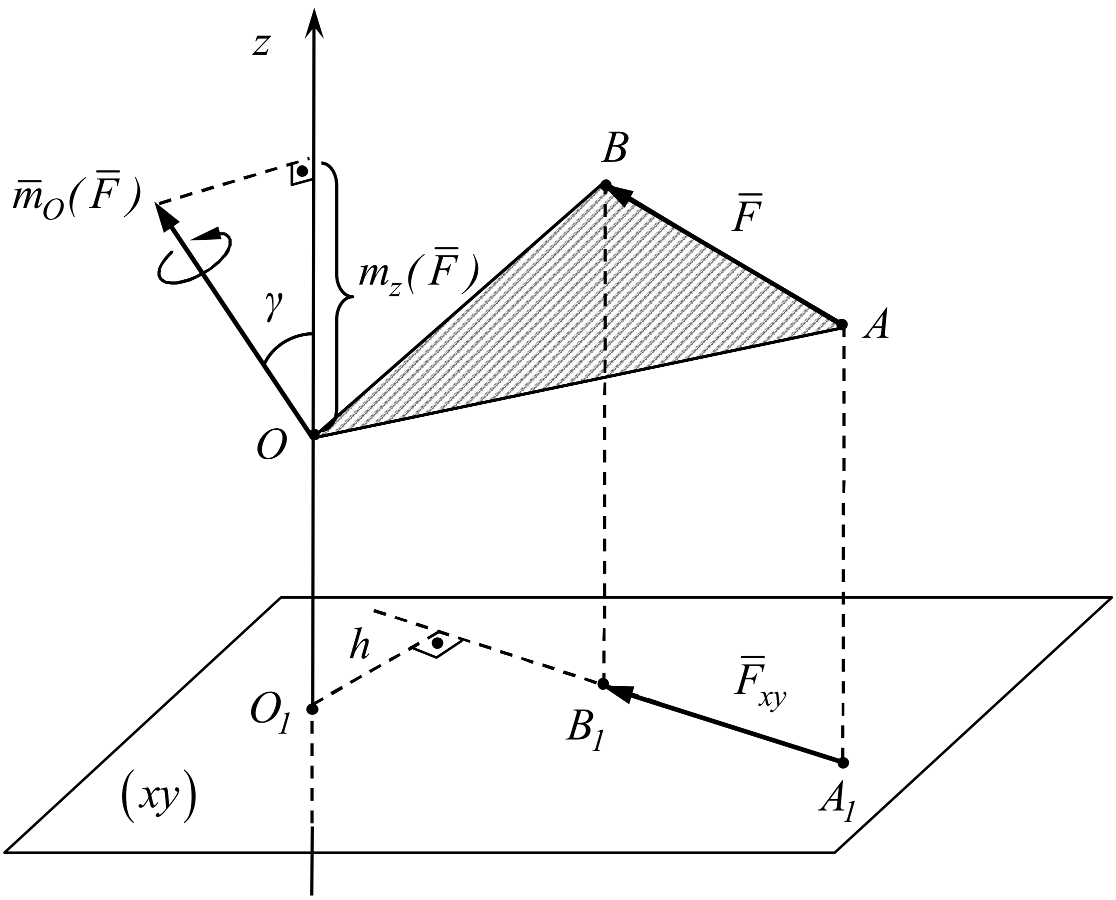


Рисунок 1.5 – Момент силы относительно оси

Соотношение (1.9) выражает зависимость между вектором-моментом силы относительно произвольного центра и моментом силы относительно оси, проходящей через этот центр.

При решении задач для нахождения момента силы относительно оси можно рекомендовать следующую последовательность действий (рисунок 1.5):

1) провести плоскость, перпендикулярную заданной оси (плоскость xy на рисунке;
2) спроецировать силу $\overline{F}$ на плоскость xy и найти модуль проекции $\overline{F}_{xy}$ по формуле (1.3);
3) из точки O_1 пересечения оси и плоскости опустить перпендикуляр на линию действия вектора $\overline{F}_{xy}$, т.е. найти плечо h вектора $\overline{F}_{xy}$ относительно центра O_1;
4) определить алгебраический момент вектора $\overline{F}_{xy}$ относительно центра O_1, как взятое с соответствующим знаком («плюс» или «минус») произведение модуля вектора $\overline{F}_{xy}$ на плечо h. Произведение берется со знаком «плюс», если при взгляде с положительного направления оси поворот вектора $\overline{F}_{xy}$ вокруг центра O_1 видится происходящим против хода часовой стрелки, и со знаком «минус», если – по ходу часовой стрелки.

С учетом вышеизложенного, формула для вычисления момента силы относительно оси примет вид

$$m_z(\overline{F}) = m_{O_1}(\overline{F}_{xy}) = \pm F_{xy} \cdot h; \qquad (1.10)$$

т.е. ***момент силы относительно оси равен алгебраическому моменту проекции этой силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси и плоскости. Момент силы относительно оси положителен, если при взгляде с положительного направления оси поворот силы вокруг оси видится происходящим против хода часовой стрелки и отрицательным, если – по ходу часовой стрелки.***

Так, для силы $\overline{F}$, изображенной на рисунке 1.5, момент относительно оси z положителен.

Из (1.10) следует, что момент силы $\overline{F}$ относительно оси z равен нулю, если:

1) сила $\overline{F}$ параллельна оси z (в этом случае проекция $\overline{F}_{xy} = 0$);

2) линия действия силы $\overline{F}$ пересекает ось z (в этом случае $h = 0$).

Таким образом, ***момент силы относительно оси равен нулю, если сила и ось лежат в одной плоскости.***

1.3 Теорема Вариньона о моменте равнодействующей силы

Пусть $\overline{R}$ - равнодействующая некоторой системы сил. Тогда

$$\overline{R} = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k \qquad (1.11)$$

Зависимость между моментами равнодействующей и моментами составляющих сил устанавливается ***теоремой Вариньона***:

Вектор-момент равнодействующей относительно любого центра равен геометрической сумме векторов-моментов составляющих сил относительного того же центра.

$$\overline{m}_O\left(\overline{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O\left(\overline{F}_k\right). \qquad (1.12)$$

Проецируя (1.12) на какую-либо координатную ось и учитывая зависимость (1.9) между вектором-моментом силы относительно центра и моментом силы относительно оси, проходящей через этот центр, получим формулировку теоремы Вариньона для моментов сил относительно оси:

Момент равнодействующей относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов составляющих сил относительно той же оси.

$$m_z\left(\overline{R}\right) = \sum_{k=1}^{n} m_z\left(\overline{F}_k\right). \qquad (1.13)$$

1.4 Геометрические и аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил

Произвольной пространственной системой сил называется такая система, в которой линии действия сил не лежат в одной плоскости, не пересекаются в одной точке и непараллельны между собой.

Главным вектором системы сил называется вектор $\overline{R}^*$, равный геометрической сумме всех сил системы

$$\overline{R}^* = \sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k. \tag{1.14}$$

Главным вектором-моментом системы сил (главным моментом) относительно некоторого центра O называется вектор, равный геометрической сумме векторов-моментов всех сил системы относительно этого центра

$$\overline{M}_O = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_O(\overline{F}_k). \tag{1.15}$$

Согласно основной теореме статики (теореме Пуансо) ***произвольную пространственную систему сил в общем случае можно заменить одной силой, равной главному вектору системы $\overline{R}^*$ и приложенной в произвольно выбранном центре O, и одной парой сил с вектором-моментом, равным главному моменту системы относительно выбранного центра приведения O.***

Отметим особо, что в общем случае главный вектор $\overline{R}^*$ не является равнодействующей данной системы сил, так как он заменяет исходную систему совместно с парой сил.

Отсюда следует, что ***для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы главный вектор этой системы сил и главный вектор-момент относительно произвольно выбранного центра приведения одновременно равнялись нулю.***

$$\overline{R}^* = 0; \quad \overline{M}_O = 0. \tag{1.16}$$

Равенства (1.16) выражают условия равновесия произвольной пространственной системы сил ***в геометрической форме.***

Спроецировав (1.16) на оси координат, с учетом (1.14), (1.15) получим шесть уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил:

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0; \\ \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0. \end{cases} \qquad (1.17)$$

Таким образом, ***для равновесия произвольной пространственной системы сил необходимо и достаточно, чтобы суммы проекций всех сил на каждую из трех координатных осей и суммы моментов всех сил относительно этих осей равнялись нулю.***

Уравнения (1.17) выражают условия равновесия произвольной пространственной системы сил ***в аналитической форме***.

Отметим особо, что при составлении уравнений (1.17) можно, если это целесообразно, для нахождения проекций сил использовать одну систему осей, а при вычислений моментов сил – другую.

Уравнения равновесия (1.17) произвольной пространственной системы сил, приложенной к свободному твердому телу, строго говоря, не являются уравнениями равновесия этого твердого тела, т.к. при выполнении этих условий тело может двигаться равномерно и прямолинейно вдоль координатных осей или равномерно вращаться вокруг этих осей. Для того, чтобы уравнения (1.17) являлись одновременно и уравнениями равновесия свободного тела, необходимо, чтобы тело находилось в покое относительно выбранной системы координат и до приложения указанной системы сил.

1.5 Общие рекомендации по решению задач на равновесие произвольной пространственной системы сил

При решении задач на равновесие произвольной пространственной системы сил рекомендуется придерживаться следующей последовательности:

1. Выбрать тело, равновесие которого будет рассматриваться.
2. Изобразить на чертеже действующие на тело активные силы.
3. Используя принцип освобождаемости от связей, мысленно отбросить наложенные на тело связи и заменить их действие реакциями этих связей.
4. Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на рассматриваемое тело.
5. Выбрать систему декартовых осей координат. Оси координат рекомендуется выбирать так, чтобы они оказались параллельными либо перпендикулярными к возможно большому числу неизвестных сил, а также, чтобы линии действия этих сил пересекали эти оси.
6. Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил в форме (1.17). При вычислении моментов сил относительно осей следует пользоваться теоремой Вариньона (1.13), предварительно раскладывая силы на взаимно перпендикулярные составляющие, направленные вдоль координатных осей.
7. Убедиться, что данная задача является статически определимой, т.е. число неизвестных равно числу составленных уравнений равновесия.
8. Решив систему составленных уравнений, определить неизвестные величины.
9. Проанализировать полученные результаты.

2 Вопросы для самоконтроля

1. Какая система сил называется произвольной пространственной?
2. Что называется проекцией силы на ось? на плоскость?
3. Как вычисляется проекция силы на ось? на плоскость?
4. В чем состоит правило двойного проецирования силы?
5. В каком случае проекция силы на ось равна нулю?
6. Что называется вектором-моментом силы относительно центра?
7. Как записывается векторная формула для вычисления момента силы относительно центра?
8. Что называется моментом силы относительно оси?
9. Какая зависимость существует между вектором-моментом силы относительно центра и моментом силы относительно оси, проходящей через этот центр?
10. Какое правило знаков принято при определении момента силы относительно оси?
11. В каких случаях момент силы относительно оси равен нулю?
12. Как формулируется теорема Вариньона о моменте равнодействующей относительно центра? относительно оси?
13. Что называется главным вектором системы сил? главным моментом системы сил относительно данного центра?
14. Можно ли главный вектор системы сил считать равнодействующей данной системы сил? Почему?
15. Как формулируются геометрические и аналитические условия равновесия произвольной пространственной системы сил?
16. Можно ли считать условия равновесия произвольной пространственной системы сил (1.17) одновременно и условиями равновесия свободного твердого тела в общем случае? Почему?

3 Лабораторная работа. Равновесие произвольной пространственной системы сил

Цель работы:

Изучить способы составления и решения уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на несвободное твердое тело.

3.1 Содержание лабораторной работы

Две однородные прямоугольные тонкие плиты (рисунок 3.1) жестко соединены (сварены) под прямым углом и закреплены сферическим шарниром, цилиндрическим шарниром (подшипником) и невесомым шарнирным стержнем BB'. Размеры плит указаны на чертеже. Вес большей из плит равен $\bar{G}_1$, меньшей – $\bar{G}_2$. На плиты действуют силы $\bar{F}$ и $\bar{Q} = -\bar{Q}'$.

Для конструкции с выбранными в соответствии с вариантом размерами и нагрузкой требуется:

1) составить аналитические уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на заданное твердое тело;
2) составить уравнения равновесия в геометрической форме;
3) решить полученные системы уравнений и определить неизвестные реакции;
4) проанализировать и сравнить полученные результаты.

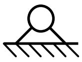
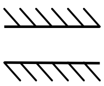
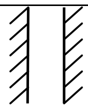
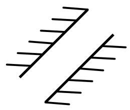
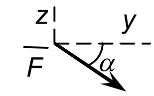
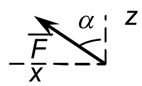
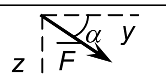
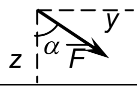
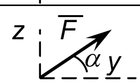
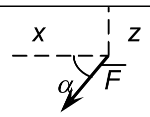
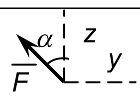
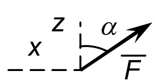
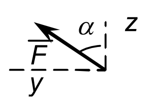
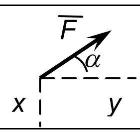
Исходные данные для выполнения работы выбираются студентом в соответствии с трехзначным вариантом по таблицам 1, 2 и рисунку 3.1. **Номер схемы** на рисунке 3.1 соответствует **последней** цифре варианта.

Например, при варианте 407 величина сил и размеры принимаются по строке 4 таблицы 1, расположение опор и точка приложения силы F – по строке 0 таблицы 2. По рисунку 3.1 выбирается схема 7.

Таблица 1

Первая цифра варианта	Силы, кН				Угол α	Размеры, м			
	Q	G_1	G_2	F		a	b	c	d
0	12	20	16	14	0°	4	3	2	3
1	4	10	4	8	30°	7	5	4	3
2	8	36	22	20	60°	8	10	6	4
3	11	12	6	16	45°	6	8	5	2
4	2	24	10	10	90°	4	6	2	3
5	9	26	20	14	45°	5	11	4	4
6	8	18	6	22	60°	12	6	2	1
7	3	30	22	25	30°	10	8	6	5
8	6	16	12	10	0°	6	5	4	2
9	1	20	4	4	90°	3	6	2	4

Таблица 2

Вторая цифра варианта	Точки расположения опор				Сила F	
					Направление	Точка приложе-ния
0	*D*	*C*	-	-		*E*
1	*D*	-	*H*	-		*K*
2	*D*	-	-	*E*		*C*
3	*E*	-	-	*C*		*L*
4	*C*	-	*H*	-		*A*
5	*A*	*C*	-	-		*H*
6	*D*	-	-	*E*		*L*
7	*D*	-	*H*	-		*K*
8	*A*	*C*	-	-		*E*
9	*E*	-	-	*C*		*D*

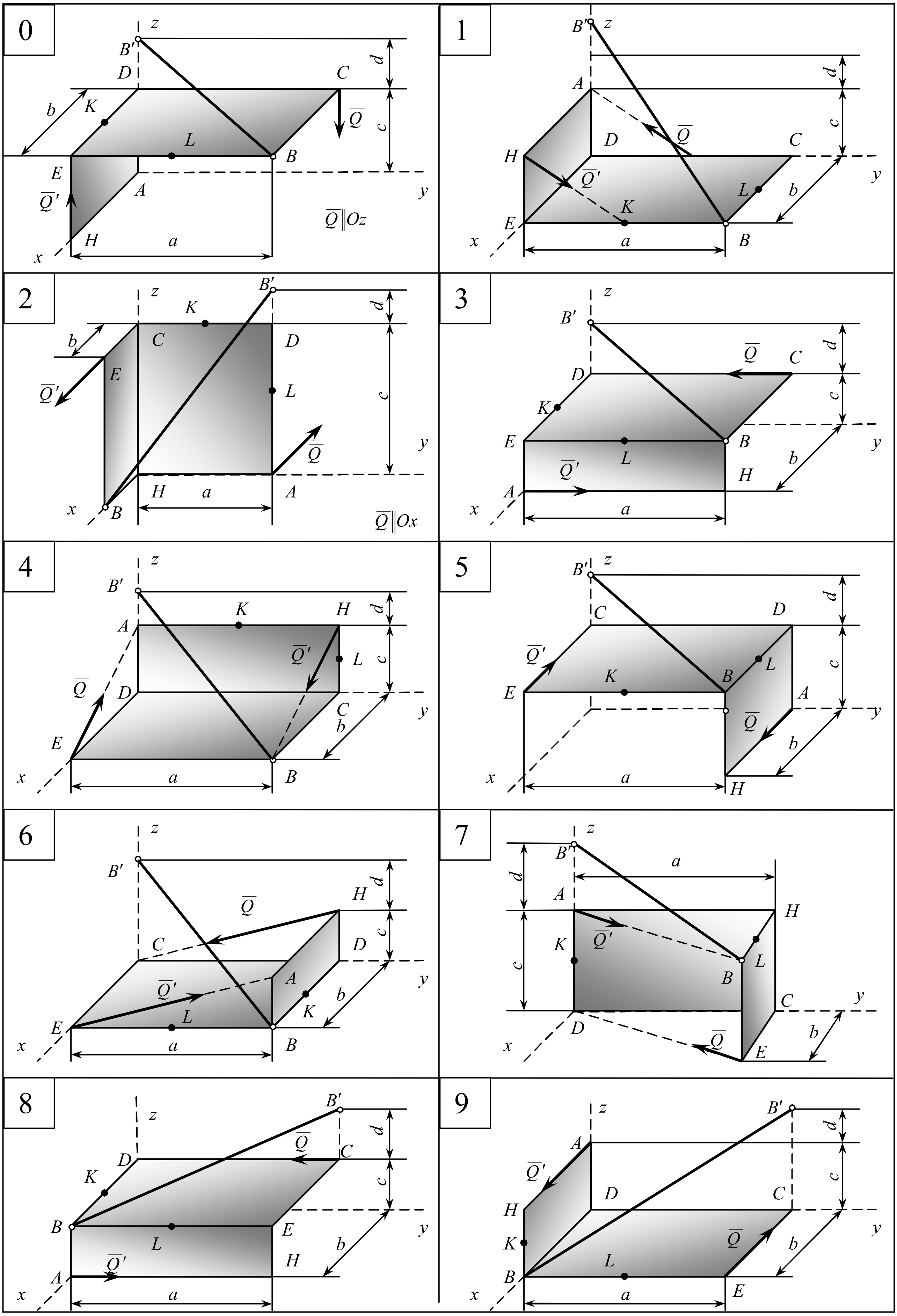


Рисунок 3.1

П р и м е ч а н и я

1. Силы Q и Q' рассматривать как пару и заменять их действие вектором-моментом пары.
2. Точка B' лежит на одной вертикали с D (схемы 0 – 4, 7) или C (схемы 5, 6, 8, 9).
3. Точки K и L находятся посередине соответствующих сторон плит.

3.2 Пример выполнения лабораторной работы

Две однородные прямоугольные тонкие плиты (рисунок 3.2) жестко соединены (сварены) под прямым углом и закреплены сферическим шарниром A, цилиндрическим шарниром (подшипником) в точке K и невесомым шарнирным стержнем BB'. Размеры плит указаны на чертеже, $BL = LC$. Вес плит $ABCD$ и $CDEK$ соответственно равен $\overline{G}_1$ и $\overline{G}_2$. На плиты действуют силы $\overline{F}$ и $\overline{Q} = -\overline{Q}'$. Определить реакции связей в точках A, K и стержня BB'.

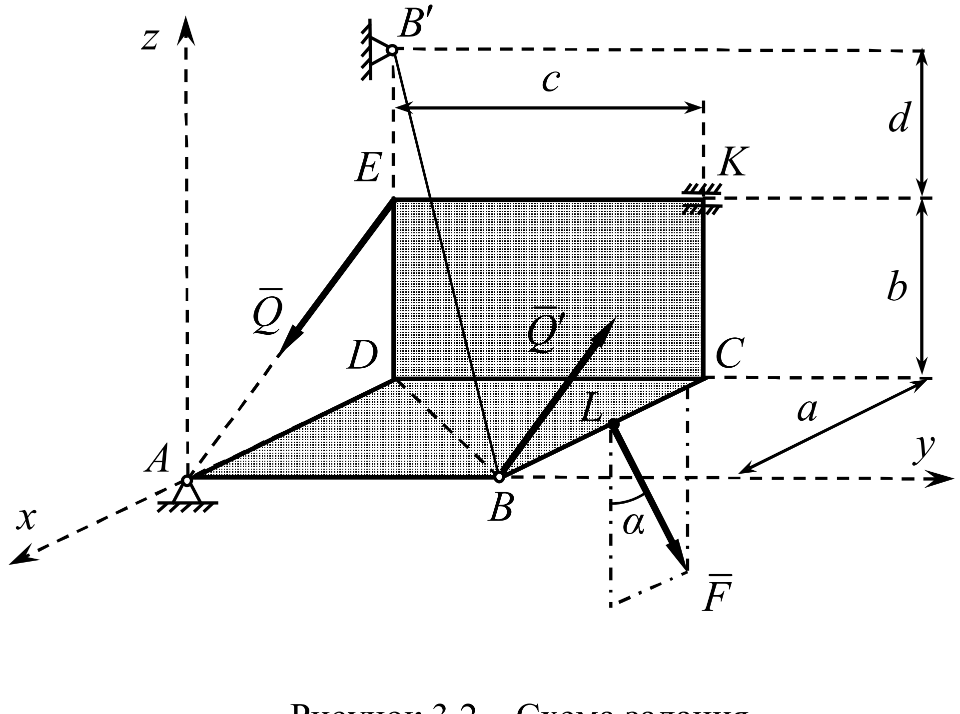


Рисунок 3.2 – Схема задания

Дано: *a = 2 м; b = 3 м; c = 2 м; d = 1 м; $\alpha = 30^o$; $Q = Q'$ = 5 кН; F = 8 кН; G_1=10 кН; G_2 = 12 кН.*

1. Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на конструкцию, в аналитической форме (1.17).

2. Составить уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил, действующей на конструкцию, в геометрической форме (1.16).

3. Решить полученные системы уравнений в Mathcad.

4. Сравнить полученные результаты.

Решение.

Рассмотрим равновесие плит *ABCD* и *CDEK*. Изобразим на чертеже (рисунок 3.3) действующие на конструкцию активные силы и реакции связей.

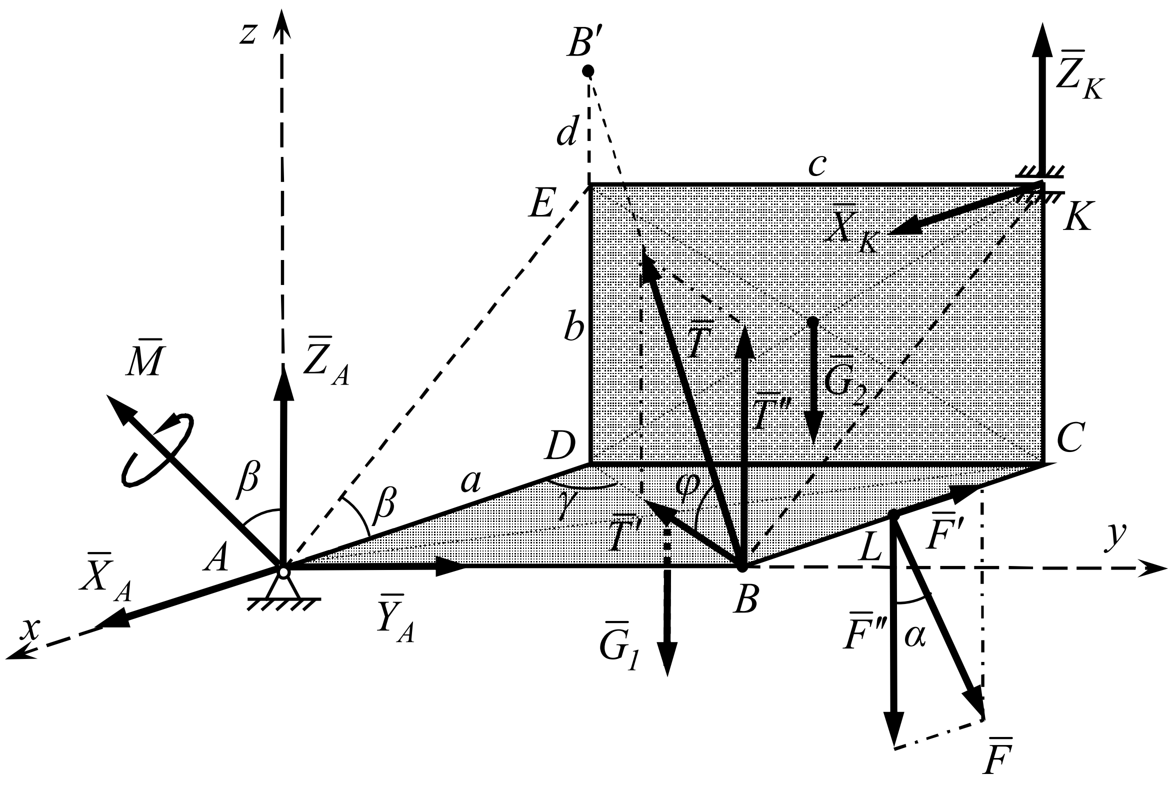


Рисунок 3.3 – Расчетная схема

На плиты действуют заданные силы $\bar{G}_1$, $\bar{G}_2$, $\bar{F}$, пара сил $\left(\bar{Q};\bar{Q}'\right)$ и реакции связей. Пару сил $\left(\bar{Q};\bar{Q}'\right)$ изобразим на чертеже вектором-моментом $\bar{M}$, перпендикулярным плоскости действия пары *ABKE,* модуль вектора-момента равен $M = Q \cdot c$. Реакцию сферического шарнира *A* разложим на три составляющих $\bar{X}_A$, $\bar{Y}_A$ и $\bar{Z}_A$. Реакцию цилиндрического шарнира (подшипника) *K* – на две составляющих $\bar{X}_K$ и $\bar{Z}_K$, расположенных в плоскости, перпендикулярной оси шарнира. Реакцию $\bar{T}$ стержня BB' направим вдоль оси стержня, предполагая его растянутым.

Силу $\bar{F}$ разложим на две составляющие $\bar{F}'$ и $\bar{F}''$, параллельные осям координат *x* и *z* соответственно, причем $F' = F\, sin\alpha$ и $F'' = F\, cos\alpha$. Реакцию стержня $\bar{T}$ – на две составляющие $\bar{T}'$ и $\bar{T}''$, где $T' = T\, cos\varphi$ и $T'' = T sin\varphi$.

Определим необходимые для дальнейших расчетов углы:

$$\begin{aligned} &\beta = arctg\frac{DE}{AD} = arctg\frac{b}{a}; \qquad \gamma = arctg\frac{AB}{AD} = arctg\frac{c}{a};\\ &\varphi = arctg\frac{B'D}{BD} = arctg\frac{b+d}{\sqrt{a^2+c^2}}. \end{aligned} \qquad (3.1)$$

Составим уравнения равновесия произвольной пространственной системы сил (1.17), действующей на конструкцию:

$$\begin{cases} X_A + X_K - T\, cos\varphi\, cos\gamma - F\, sin\alpha = 0; \\ Y_A - T\, cos\varphi\, sin\gamma = 0; \\ Z_A + Z_K + T\, sin\varphi - G_1 - G_2 - F\, cos\alpha = 0; \\ Z_K \cdot c + T\, sin\varphi \cdot c - G_1 \cdot \frac{c}{2} - G_2 \cdot \frac{c}{2} - F\, cos\alpha \cdot c + M \cdot sin\beta = 0; \\ X_K \cdot b + Z_K \cdot a - G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_2 \cdot a - F\, cos\alpha \cdot \frac{a}{2} = 0; \\ -X_K \cdot c + T\, cos\varphi \cdot a \cdot sin\gamma + F\, sin\alpha \cdot c + M \cdot cos\beta = 0. \end{cases} \qquad (3.2)$$

Для решения полученной системы уравнений в системе Mathcad матричным способом представим (3.2) в виде

$$\left\|\mathbf{A}\right\| \cdot \left\{\mathbf{S}\right\} = \left\{\mathbf{P}\right\}; \qquad (3.3)$$

где $\left\|\mathbf{A}\right\|$ – матрица коэффициентов при неизвестных реакциях системы уравнений (3.2),

$\left\{\mathbf{S}\right\}$ – вектор-столбец неизвестных реакций;

$\left\{\mathbf{P}\right\}$ – вектор-столбец свободных членов уравнений.

В Mathcad для решения систем линейных уравнений предусмотрена встроенная функция **lsolve(A,D)**, которая возвращает вектор решения $\left\{\mathbf{S}\right\}$ при заданной матрице коэффициентов $\left\|\mathbf{A}\right\|$ и векторе свободных членов $\left\{\mathbf{P}\right\}$.

Для удобства представим коэффициенты матрицы $\left\|\mathbf{A}\right\|$ в виде таблицы 3:

Таблица 3 –Коэффициенты матрицы $\left\|\mathbf{A}\right\|$

	1	2	3	4	5	6
	X_A	Y_A	Z_A	X_K	Z_K	T
1	***1***	***0***	***0***	***1***	***0***	***-cosφ·cosγ***
2	***0***	***1***	***0***	***0***	***0***	***-cosφ·sinγ***
3	***0***	***0***	***1***	***0***	***1***	***sinφ***
4	***0***	***0***	***0***	***0***	***c***	***c·sinφ***
5	***0***	***0***	***0***	***b***	***a***	***0***
6	***0***	***0***	***0***	***-c***	***0***	***a·cosφ·sinγ***

Ниже приводится текст программы для определения неизвестных реакций системы линейных уравнений (3.2) в системе Mathcad. Необходимые пояснения к тексту программы выделены жирным курсивом.

Определение неизвестных реакций пространственной конструкции (1 способ).

Исходные данные:

$a := 2 \quad b := 3 \quad c := 2 \quad d := 1$

$F := 8 \quad Q := 5 \quad G_1 := 10 \quad G_2 := 12$

$$\alpha := \frac{\pi}{6}$$

$$M := Q \cdot c$$

$$\operatorname{atan}(\beta) := \frac{b}{a} \qquad \operatorname{atan}(\gamma) := \frac{c}{a} \qquad \operatorname{atan}(\varphi) := \frac{b+d}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Коэффициенты матрицы $\|\mathbf{A}\|$ ***:***

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -\cos\varphi \cdot \cos\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -\cos\varphi \cdot \sin\gamma \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & c & c \cdot \sin\varphi \\ 0 & 0 & 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c & 0 & a \cdot \cos\varphi \cdot \sin\gamma \end{pmatrix}$$

Вектор свободных членов $\{\mathbf{P}\}$ ***:***

$$P := (-1) \cdot \begin{pmatrix} -F \cdot \sin\alpha \\ 0 \\ -G_1 - G_2 - F \cdot \cos\alpha \\ -G_1 \cdot \frac{c}{2} - G_2 \cdot \frac{c}{2} - F \cdot \cos\alpha \cdot c + M \cdot \sin\beta \\ -G_1 \cdot \frac{a}{2} - G_2 \cdot a - F \cdot \cos\alpha \cdot \frac{a}{2} \\ F \cdot \sin\alpha \cdot c + M \cdot \cos\beta \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений:

```
S:=lsolve(A,D)
```

Результаты вычисления реакций:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} := S \qquad \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.774 \\ 6.928 \\ 15.16 \\ 13.702 \\ -0.088 \\ 16.971 \end{pmatrix}$$

Решим теперь поставленную задачу, составив уравнения равновесия в векторной форме (1.16).

Каждую из заданных сил и неизвестных реакций опор определим матрицей-столбцом, элементы которой определяют проекции соответствующего вектора силы на декартовы оси.

При определении момента сил относительно центра воспользуемся векторной формулой (1.5). Тогда момент силы относительно оси будет получен на основании (1.9) как проекция вектора-момента силы на соответствующую ось координат. Момент пары сил найдем по формуле (1.8).

Определение неизвестных реакций пространственной конструкции (2 способ).

Исходные данные:

$$a := 2 \quad b := 3 \quad c := 2 \quad d := 1$$

$$F := 8 \quad Q := 5 \quad G_1 := 10 \quad G_2 := 12 \quad \alpha := \frac{\pi}{6}$$

$$\mathrm{atan}(\beta) := \frac{b}{a} \quad \mathrm{atan}(\gamma) := \frac{c}{a} \quad \mathrm{atan}(\varphi) := \frac{b+d}{\sqrt{a^2 + c^2}}$$

Векторы неизвестных реакций и заданных сил:

$$R_A := \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \end{pmatrix} \qquad R_K := \begin{pmatrix} X_K \\ 0 \\ Z_K \end{pmatrix} \qquad R_T := \begin{pmatrix} -T\cos(\varphi)\cos(\gamma) \\ -T\cos(\varphi)\sin(\gamma) \\ T\sin(\varphi) \end{pmatrix}$$

$$R_F := \begin{pmatrix} -F\sin(\alpha) \\ 0 \\ -F\cos(\alpha) \end{pmatrix} \qquad R_{G1} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_1 \end{pmatrix} \qquad R_{G2} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -G_2 \end{pmatrix}$$

$$R_Q := \begin{pmatrix} Q\cos(\beta) \\ 0 \\ -Q\sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Радиусы-векторы точек приложения неизвестных реакций и заданных сил:

$$r_A := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_K := \begin{pmatrix} -a \\ c \\ b \end{pmatrix} \qquad r_T := \begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad BE := \begin{pmatrix} -a \\ -c \\ b \end{pmatrix}$$

$$r_F := \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ c \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{G1} := \begin{pmatrix} -\frac{a}{2} \\ \frac{c}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \qquad r_{G2} := \begin{pmatrix} -a \\ \frac{c}{2} \\ \frac{b}{2} \end{pmatrix}$$

Вычисление главного вектора пространственной системы сил (1.14):

$$R := R_A + R_K + R_T + R_F + R_{G1} + R_{G2}$$

Вычисление главного момента пространственной системы сил (1.15) относительно центра A:

$$M_A := r_A \times R_A + r_K \times R_K + r_T \times R_T + r_F \times R_F + r_{G1} \times R_{G1} + r_{G2} \times R_{G2} + BE \times R_Q$$

Формирование системы шести уравнения равновесия:

Встроенная функция stack объединяет матрицы по вертикали

$$P := \mathrm{stack}(R, M_A)$$

$$P \rightarrow \begin{pmatrix} X_A + X_K - \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{6} - 4 \\ Y_A - \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{6} \\ Z_A + Z_K - 4\cdot\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{3} - 22 \\ 2\cdot Z_K - 8\cdot\sqrt{3} + \dfrac{30\cdot\sqrt{13}}{13} + \dfrac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{3} - 22 \\ 3\cdot X_K + 2\cdot Z_K - 4\cdot\sqrt{3} - 34 \\ \dfrac{20\cdot\sqrt{13}}{13} - 2\cdot X_K + \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{3} + 8 \end{pmatrix}$$

Решение системы линейных уравнений:

Начальное приближение неизвестных реакций. Так как полученная система уравнения является линейной, то начальное приближение можно задавать произвольно, например, нулевое.

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решение полученной системы уравнений с помощью программного блока Given-Find.

Систему уравнений записываем с помощью операций копирования <Ctrl> + <C> и вставки <Ctrl> + <V>. Знак логического равенства (жирный знак равенства) вводим клавишами <Ctrl> + <=>).

Given

$$\begin{pmatrix} X_A + X_K - \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{6} - 4 \\ Y_A - \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{6} \\ Z_A + Z_K - 4\cdot\sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{3} - 22 \\ 2\cdot Z_K - 8\cdot\sqrt{3} + \dfrac{30\cdot\sqrt{13}}{13} + \dfrac{2\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{3} - 22 \\ 3\cdot X_K + 2\cdot Z_K - 4\cdot\sqrt{3} - 34 \\ \dfrac{20\cdot\sqrt{13}}{13} - 2\cdot X_K + \dfrac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}\cdot T}{3} + 8 \end{pmatrix} = 0$$

Результаты вычисления реакций:

$$\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} := \mathrm{Find}\left(\begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix}\right) \qquad \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ Z_A \\ X_K \\ Z_K \\ T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2.774 \\ 6.928 \\ 15.16 \\ 13.702 \\ -0.088 \\ 16.971 \end{pmatrix}$$

Полученные результаты вычисления неизвестных реакций совпадают со значениями, вычисленными первым способом. Знаки «минус» у реакций $\overline{X}_A$ и $\overline{Z}_K$ означают, что истинное направление реакций противоположно показанному на рисунке 3.3.

3.3 Общие рекомендации по оформлению отчета по лабораторной работе

Отчет по лабораторной работе должен быть оформлен в соответствии с требованиями СТО 02069024.101 – 2010 «Работы студенческие. Общие требования и правила оформления».

Отчет обязательно должен содержать:

– исходные данные задания;

– расчетную схему с указанием всех действующих на конструкцию активных сил и реакций связей;

– аналитические уравнения равновесия полученной системы сил;

– матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов получен – ной системы уравнений равновесия;

– результаты вычисления реакций;

– вывод.

По усмотрению преподавателя к отчету могут прилагаться распечатки программ для определения реакций в системе Mathcad.

Пример оформления отчета по лабораторной работе дан в приложении А.

4 Литература, рекомендуемая для изучения темы

1. Яблонский, А. А. Курс теоретической механики: учебник / А. А. Яблонский, В. М. Никифорова. – 11-е изд., стер. – СПб.: Лань, 2004. – 768 с.
2. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики: в 2 т. / Н. В. Бутенин, Я. Л. Лунц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2004. – 736 с.
3. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для втузов / С.М. Тарг. – 20-е изд., стер. – М.: Высш. шк., 2010. – 416 с.
4. Диевский, В.А. Теоретическая механика: учебное пособие / В.А. Диевский. – СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 320 с.
5. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учебное пособие для втузов. В 3 т. Т.I. Статика и кинематика / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. – М.: Наука, 1990. – 672 с.
6. Кирсанов, М.Н. Решебник: Теоретическая механика / М.Н. Кирсанов; под ред. А.И. Кириллова. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 384 с.
7. Бертяев, В.Д. Теоретическая механика на базе MathCAD. Практикум / В.Д.Бертяев. – СПб.: БХВ, 2005. – 752 с.
8. Доев, В.С. Сборник заданий по теоретической механике на базе Mathcad.: учебное пособие. / В.С. Доев, Ф.А. Доронин. – СПб.: «Лань», 2010. – 592 с.

Приложение А
(обязательное)

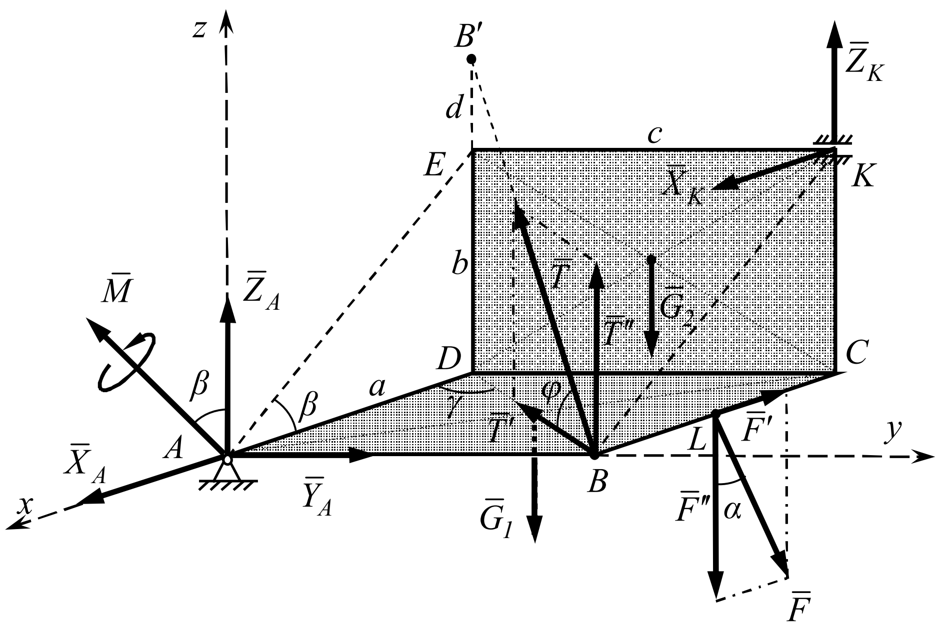
Пример оформления отчета по лабораторной работе

Лабораторная работа № 1
«Равновесие произвольной пространственной системы сил»

Цель работы: Изучить способы составления и решения уравнений равновесия произвольной пространственной системы сил.

Исходные данные: $a = 2$ *м;* $b = 3$ *м;* $c = 2$ *м;* $d = 1$ *м;* $\alpha = 30^o$; $Q = Q' = 5$ *кН;* $F = 8$ *кН;* $G_1 = 10$ *кН;* $G_2 = 12$ *кН.*

Расчетная схема:



Уравнения равновесия:

$$
\begin{cases}
X_A + X_K - T\cos\varphi\cos\gamma - F\sin\alpha = 0; \\
Y_A - T\cos\varphi\sin\gamma = 0; \\
Z_A + Z_K + T\sin\varphi - G_1 - G_2 - F\cos\alpha = 0; \\
Z_K \cdot c + T\sin\varphi \cdot c - G_1 \cdot \dfrac{c}{2} - G_2 \cdot \dfrac{c}{2} - F\cos\alpha \cdot c + M \cdot \sin\beta = 0; \\
X_K \cdot b + Z_K \cdot a - G_1 \cdot \dfrac{a}{2} - G_2 \cdot a - F\cos\alpha \cdot \dfrac{a}{2} = 0; \\
-X_K \cdot c + T\cos\varphi \cdot a \cdot \sin\gamma + F\sin\alpha \cdot c + M \cdot \cos\beta = 0.
\end{cases}
$$

где

$$M = Q \cdot c; \qquad \beta = arctg\frac{DE}{AD} = arctg\frac{b}{a};$$

$$\gamma = arctg\frac{AB}{AD} = arctg\frac{c}{a}; \qquad \varphi = arctg\frac{B'D}{BD} = arctg\frac{b+d}{\sqrt{a^2+c^2}}.$$

Матрицы коэффициентов при неизвестных и свободных членов уравнений равновесия:

A =

X_A	Y_A	Z_A	X_K	Z_K	T
1	***0***	***0***	***1***	***0***	***-cosφ·cosγ***
0	***1***	***0***	***0***	***0***	***-cosφ·sinγ***
0	***0***	***1***	***0***	***1***	***sinφ***
0	***0***	***0***	***0***	***c***	***c·sinφ***
0	***0***	***0***	***b***	***a***	***0***
0	***0***	***0***	***-c***	***0***	***a·cosφ·sinγ***

$$\boldsymbol{P} = (-1)\cdot\left\{\begin{matrix} -F\,sin\alpha \\ 0 \\ -G_1 - G_2 - F\,cos\alpha \\ -G_1\cdot\frac{c}{2} - G_2\cdot\frac{c}{2} - F\,cos\alpha\cdot c + M\cdot sin\beta \\ -G_1\cdot\frac{a}{2} - G_2\cdot a - F\,cos\alpha\cdot\frac{a}{2} \\ F\,sin\alpha\cdot c + M\cdot cos\beta \end{matrix}\right\}.$$

Результаты вычислений:

Значения реакций, кН	X_A	X_A	X_A	X_A	X_A	T
1 способ	-2,774	6,928	15,16	13,702	-0,088	16,971
2 способ	-2,774	6,928	15,16	13,702	-0,088	16,971

Вывод: Результаты вычисления реакций, полученные двумя способами совпадают. Отрицательные знаки у реакций $\bar{X}_A$ и $\bar{Z}_K$ означают, что в истинное направление этих реакций противоположно показанному на расчетной схеме.