Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

Кафедра теоретической механики

Н.А. Морозов

ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ

Методические указания
к лабораторной работе по дисциплине «Теоретическая механика»

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждение высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет»

Оренбург
2012

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7
М 80

Рецензенты
кандидат технических наук, доцент С.Н. Горелов
кандидат технических наук, доцент Л.И. Кудина

Морозов, Н.А.
М 80 Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки: методические указания к лабораторной работе по дисциплине «Теоретическая механика»/ Н.А. Морозов; Оренбургский гос. ун-т – Оренбург: ОГУ, 2012. - 21 с.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по техническим направлениям подготовки бакалавров. В методических указаниях рассмотрена методика интегрирования дифференциальных уравнений движения материальной точки. Представлен пример выполнения лабораторной работы.

УДК 531.1(07)
ББК 22.213я7

Содержание

Введение

В инженерной деятельности возникает необходимость решать задачи, связанные с определением закона движения тел. Знание данного закона позволяет определять кинематические характеристики движения тела, широко используемые в инженерных расчетах. Как известно, если в условиях задачи размерами тела можно пренебречь, его принимают за материальную точку. Таким образом, в достаточно большом объеме реальных задач мы сталкиваемся с необходимостью определения закона движения материальной точки. Если действующие на точку силы известны, то мы имеем вторую основную задачу динамики материальной точки, решение которой производится с помощью двойного интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

В данных методических указаниях рассмотрена методика решения второй основной задачи динамики точки в случае действия на точку постоянных сил. Методические указания содержат многовариантное задание на лабораторную работу (30 вариантов), каждый вариант которого представляет собой задачу, при решении которой необходимо будет воспользоваться системой Mathcad.

Представлен пример выполнения лабораторной работы, в котором определен закон движения материальной точки, закон изменения ее скорости, построены график изменения скорости точки, траектория движения точки и вектор скорости точки в заданный момент времени.

1 Интегрирование дифференциальных уравнений движения материальной точки

Рассмотрим движение материальной точки в плоскости *xy*. Ограничимся случаем, когда все действующие на точку силы являются постоянными.

Основное уравнение динамики материальной точки в данном случае будет иметь вид:

$$m \cdot \bar{a} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k \;, \tag{1}$$

где m – масса материальной точки, кг;

a - ускорение материальной точки, м/с^2;

$\bar{F}_k$ - действующая на точку k-ая сила, Н;

n – количество сил, действующих на точку.

Проецируя уравнение (1) на ось x, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \;, \tag{2}$$

где $\ddot{x}$ - проекция ускорения точки на ось x, м/с^2.

Разделим каждый член уравнения на m:

$$\ddot{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{kx}}{m} \;. \tag{3}$$

Обозначим $\frac{\sum_{k=1}^{n} F_{kx}}{m} = A$. Величина *A* является постоянной, т.к. силы, их проекции и масса точки постоянны.

Учитывая , что $\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}$, получим:

$$d\dot{x} = A \cdot dt, \tag{4}$$

где *t* – время, с.

Интегрируем уравнение (4):

$$\int d\dot{x} = \int A \cdot dt; \tag{5}$$

$$\dot{x} = A \cdot t + C_1, \tag{6}$$

где C_1 – постоянная интегрирования.

Интегрируем уравнение (6) еще раз, представив его в виде (7):

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot t + C_1; \tag{7}$$

$$\int dx = \int (A \cdot t + C_1) dt; \tag{8}$$

$$x = A \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2, \tag{9}$$

где C_2 – постоянная интегрирования.

Для нахождения постоянных интегрирования необходимо записать начальные условия (н.у.), т.е. определить значения начальной координаты x_0 и проекции начальной скорости v_0 точки на ось x $(\dot{x}_0)$, соответствующие моменту начала движения точки ($t_0=0$), выбираемому в соответствии с условиями задачи:

$$\text{н.у. при } t_0=0 \quad x = x_0,\ \ \dot{x} = \dot{x}_0 \tag{10}$$

Подставляя н.у. в уравнения (6) и (9), выразим C_1, C_2:

$$\dot{x}_0 = A \cdot 0 + C_1 = C_1; \tag{11}$$

$$x_0 = A \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2 \ . \tag{12}$$

Таким образом, учитывая, что $A = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} F_{kx}}{m}$, законы изменения проекции скорости на ось x и координаты x материальной точки будут иметь вид:

$$\dot{x} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{kx}}{m} \cdot t + \dot{x}_0; \tag{13}$$

$$x = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{kx}}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + \dot{x}_0 \cdot t + x_0 \tag{14}$$

Аналогично определим законы изменения проекции скорости на ось y и координаты y материальной точки.

$$m \cdot \ddot{y} = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \, , \tag{15}$$

$$\ddot{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{ky}}{m} \, . \tag{16}$$

Обозначим $\dfrac{\sum_{k=1}^{n} F_{ky}}{m} = B$. Величина B является постоянной.

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = B \, ; \tag{17}$$

$$\int d\dot{y} = \int B \cdot dt \, ; \tag{18}$$

$$\dot{y} = B \cdot t + C_3 \, ; \tag{19}$$

$$\frac{dy}{dt} = B \cdot t + C_3 \, ; \tag{20}$$

$$\int dy = \int (B \cdot t + C_3) dt \, ; \tag{21}$$

$$y = B \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4 \, ; \tag{22}$$

$$\text{н.у. при } t_0=0 \quad y = y_0, \; \dot{y} = \dot{y}_0 \tag{23}$$

Подставляя н.у. в уравнения (19) и (22), выразим C_3, C_4:

$$\dot{y}_0 = B \cdot 0 + C_3 = C_3; \tag{24}$$

$$y_0 = B \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 = C_4; \tag{25}$$

$$\dot{y} = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{ky}}{m} \cdot t + \dot{y}_0; \tag{26}$$

$$y = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_{ky}}{m} \cdot \frac{t^2}{2} + \dot{y}_0 \cdot t + y_0. \tag{27}$$

Закон изменения скорости точки будет иметь вид:

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \tag{28}$$

2 Задание для лабораторной работы

Материальная точка массой m =2 кг движется под действием сил F_1 =10 Н, F_2 =20 Н и F_3 =30 Н, постоянных по модулю и направлению. В начальный момент своего движения точка имеет скорость v_0 = 5 м/с. Начальное положение точки представлено на рисунках 1, 2 и 3.

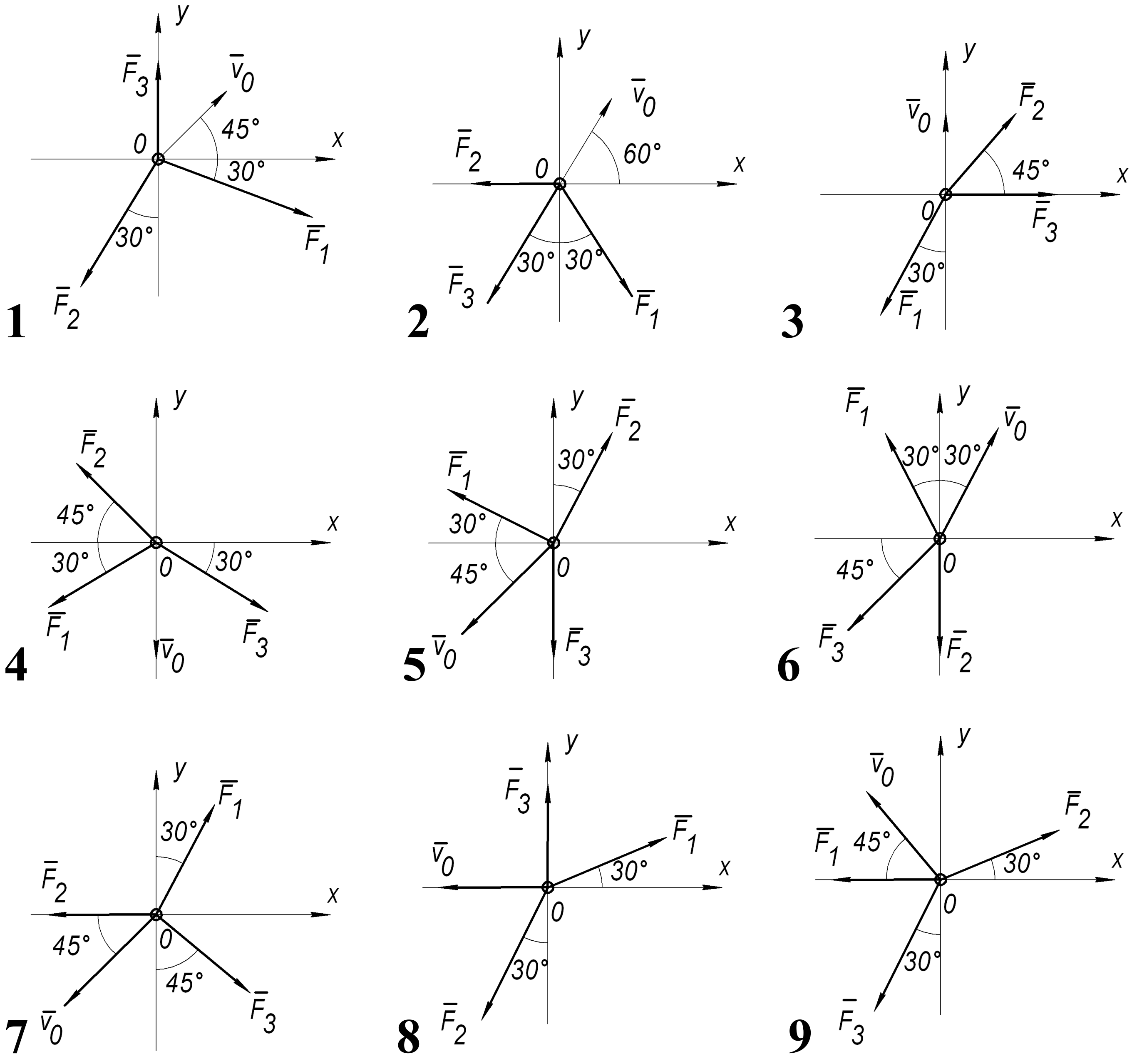

Рисунок 1 – Начальное положение точки

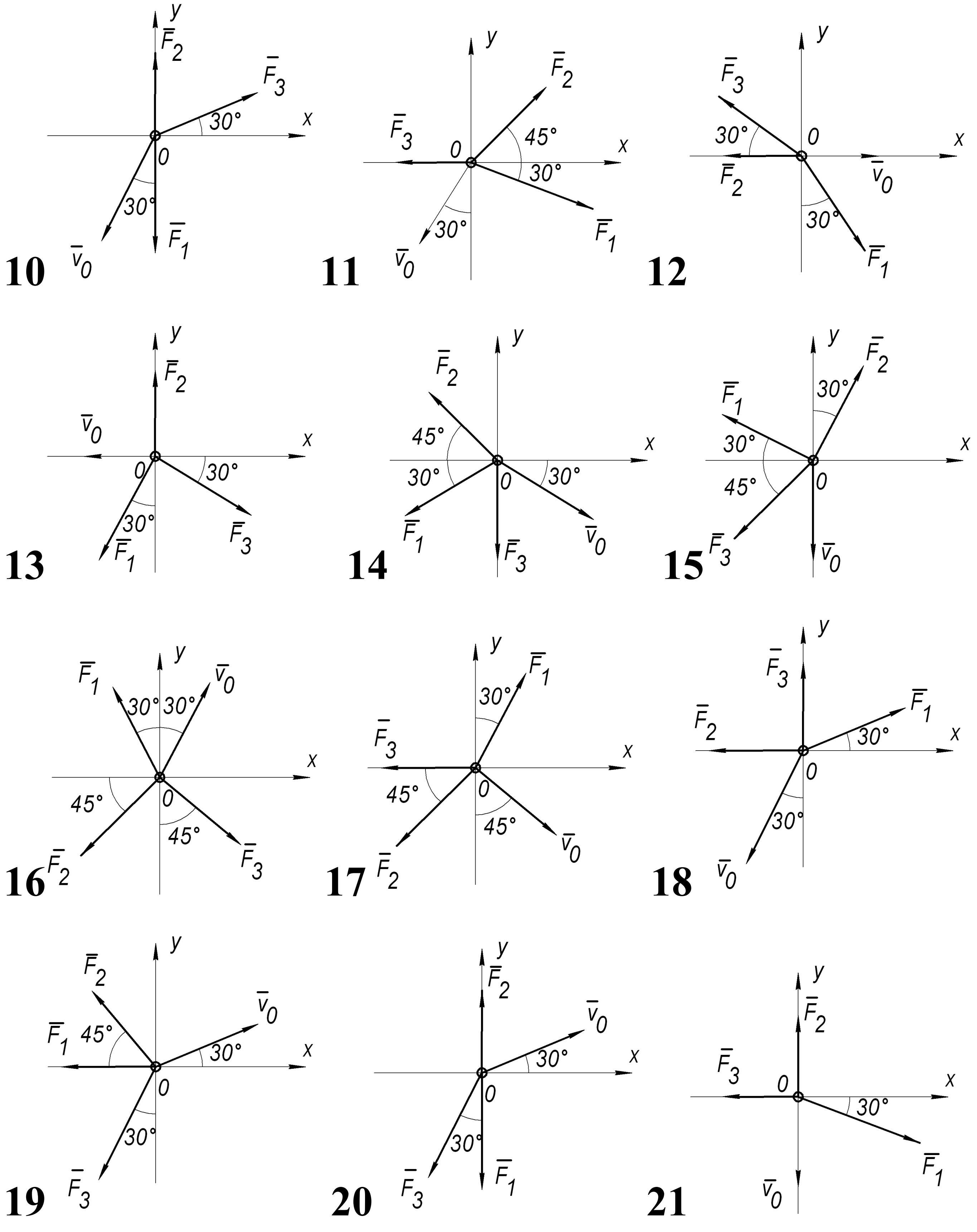

Рисунок 2 – Начальное положение точки

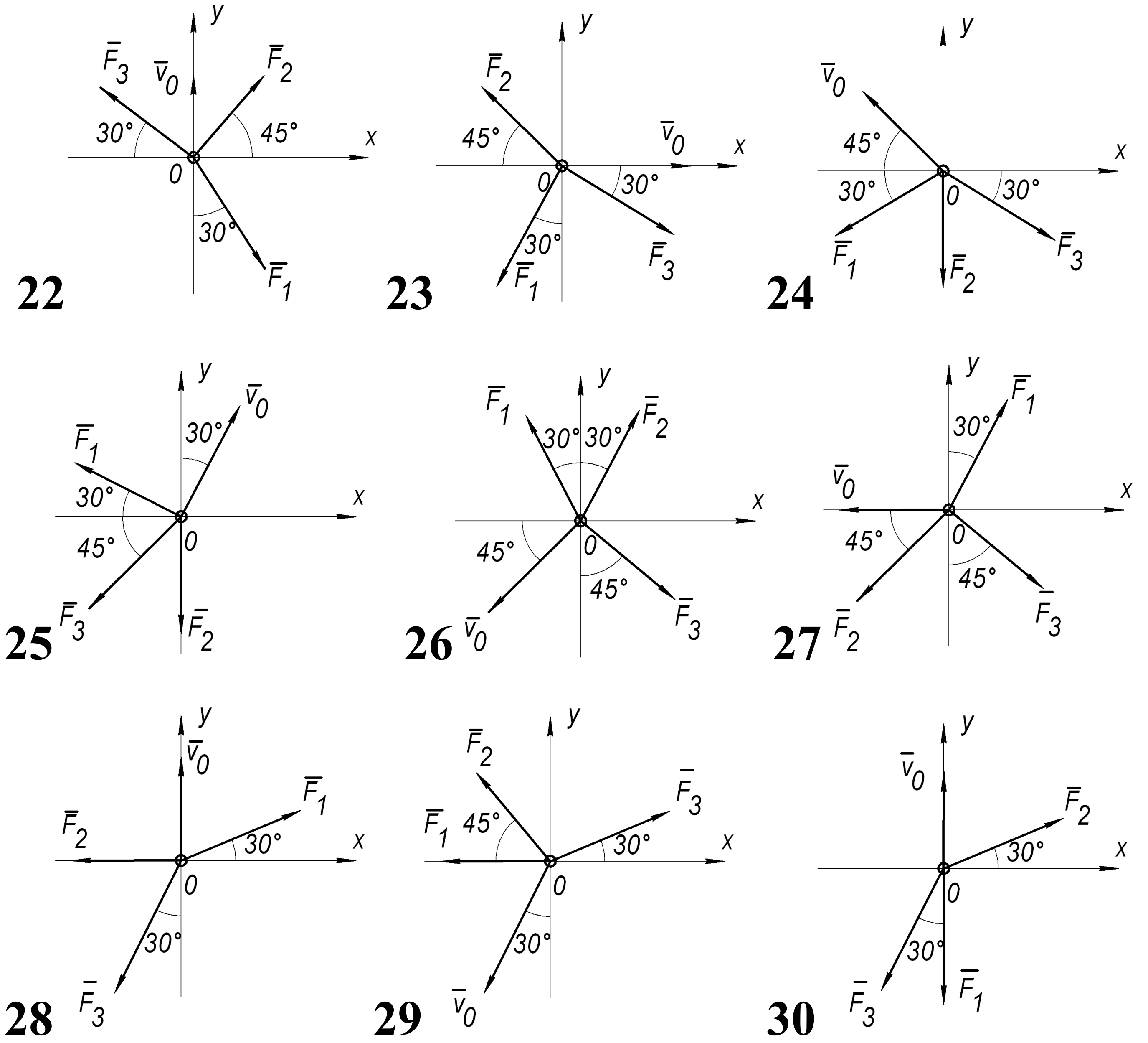

Рисунок 3 – Начальное положение точки

Определить закон движения точки и закон изменения ее скорости. Определить скорость точки в момент времени $t_1 = 1$ с.

С помощью системы Mathcad проверить правильность определения скорости в момент времени t_1. Построить график изменения скорости точки в период времени с начала движения до момента времени $t_2 = 3$ с. Также построить траекторию движения точки в данный период времени и вектор скорости точки в момент времени t_1.

3 Пример выполнения лабораторной работы

Материальная точка массой m =3 кг движется под действием сил F_1 =40 Н, F_2 =5 Н и F_3 =20 Н, постоянных по модулю и направлению. В начальный момент своего движения точка имеет скорость v_0 = 2 м/с. Начальное положение точки представлено на рисунке 4.

Определить закон движения точки и закон изменения ее скорости. Определить скорость точки в момент времени $t_1 = 0,5$ с.

С помощью системы Mathcad проверить правильность определения скорости в момент времени t_1. Построить график изменения скорости точки в период времени с начала движения до момента времени $t_2 = 2$ с. Также построить траекторию движения точки в данный период времени и вектор скорости точки в момент времени t_1.

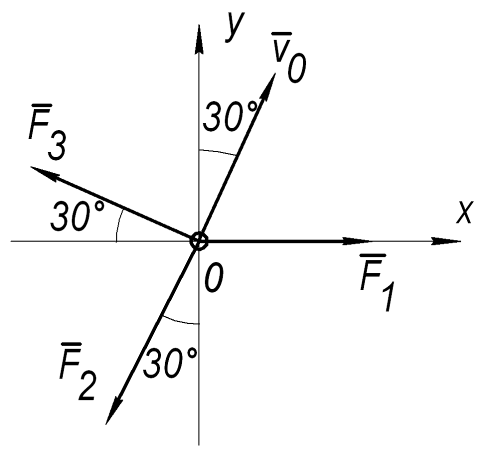

Рисунок 4 – Начальное положение точки

Дано: m =3 кг, F_1 =40 Н, F_2 =20 Н, F_3 =5 Н, v_0 = 2 м/с.

Найти: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$, $v(t)$, $v(t_1)$

Решение:

1 Изобразим материальную точку в произвольном промежуточном положении и приложим действующие на нее силы $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$ и $\overline{F}_3$ (рисунок 5).

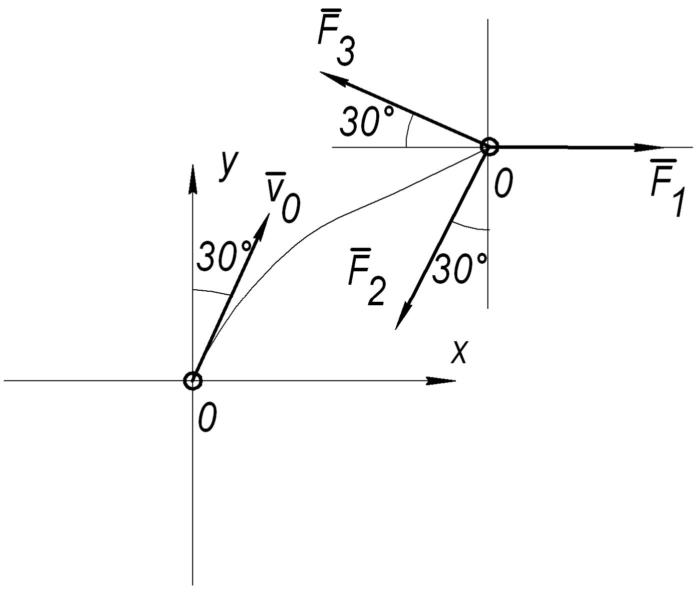

Рисунок 5 – Произвольное положение точки

Запишем основное уравнение динамики материальной точки:

$$m \cdot \overline{a} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3 .$$

2 Проецируя основное уравнение динамики на ось *x*, получим дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m \cdot \ddot{x} = F_1 - F_2 \cdot Sin30^0 - F_3 \cdot Cos30^0 .$$

Дважды интегрируем полученное уравнение в соответствии с главой 1.

$$\ddot{x} = \frac{F_1 - F_2 \cdot Sin30^0 - F_3 \cdot Cos30^0}{m} ,$$

$$\frac{F_1 - F_2 \cdot Sin30^0 - F_3 \cdot Cos30^0}{m} = A = \frac{40 - 5 \cdot Sin30^0 - 20 \cdot Cos30^0}{3} = 6,73,$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt},$$

$$d\dot{x} = A \cdot dt,$$

$$\int d\dot{x} = \int A \cdot dt,$$

$$\dot{x} = A \cdot t + C_1,$$

$$\frac{dx}{dt} = A \cdot t + C_1,$$

$$\int dx = \int (A \cdot t + C_1) dt,$$

$$x = A \cdot \frac{t^2}{2} + C_1 \cdot t + C_2.$$

3 Проецируем основное уравнение динамики на ось y и дважды интегрируем полученное уравнение:

$$m \cdot \ddot{y} = -F_2 \cdot Cos30^0 + F_3 \cdot Sin30^0,$$

$$\ddot{y} = \frac{-F_2 \cdot Cos30^0 + F_3 \cdot Sin30^0}{m}.$$

$$\frac{-F_2 \cdot Cos30^0 + F_3 \cdot Sin30^0}{m} = B = \frac{-5 \cdot Cos30^0 + 20 \cdot Sin30^0}{3} = 1,88.$$

$$\frac{d\dot{y}}{dt} = B;$$

$$\int d\dot{y} = \int B \cdot dt;$$

$$\dot{y} = B \cdot t + C_3;$$

$$\frac{dy}{dt} = B \cdot t + C_3;$$

$$\int dy = \int (B \cdot t + C_3) dt;$$

$$y = B \cdot \frac{t^2}{2} + C_3 \cdot t + C_4;$$

4 Определив постоянные интегрирования, найдем закон движения точки:

н.у. при $t_0=0$ $x_0 = 0,\ \dot{x}_0 = v_0 \cdot Sin30^0 = 1$, $y_0 = 0,\ \dot{y}_0 = v_0 \cdot Cos30^0 = 1,73$,

$$v_0 \cdot Sin30^0 = A \cdot 0 + C_1 = C_1,$$

$$0 = A \cdot \frac{0^2}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 = C_2,$$

$$v_0 \cdot Cos30^0 = B \cdot 0 + C_3 = C_3,$$

$$0 = B \cdot \frac{0^2}{2} + C_3 \cdot 0 + C_4 = C_4.$$

Учитывая, что $A = 6,73$ м/с^2, $B = 1,88$ м/с^2 законы изменения проекции скорости на оси и закон движения материальной точки будут иметь вид:

$$\dot{x} = 6,73 \cdot t + 1,$$

$$\dot{y} = 1,88 \cdot t + 1,73,$$

$$\begin{cases} x = 3,37 \cdot t^2 + t \\ y = 0,94 \cdot t^2 + 1,73 \cdot t \end{cases}.$$

5 Закон изменения скорости точки будет иметь вид:

$$v(t) = \sqrt{(6,73 \cdot t + 1)^2 + (1,88 \cdot t + 1,73)^2}.$$

Скорость точки в момент времени $t_1 = 0,5$ с:

$$v(t_1) = \sqrt{(6,73 \cdot 0,5 + 1)^2 + (1,88 \cdot 0,5 + 1,73)^2} = 5,121 \text{ м/с.}$$

6 С помощью системы Mathcad проверим правильность определения скорости в момент времени t_1 (рисунок 6).

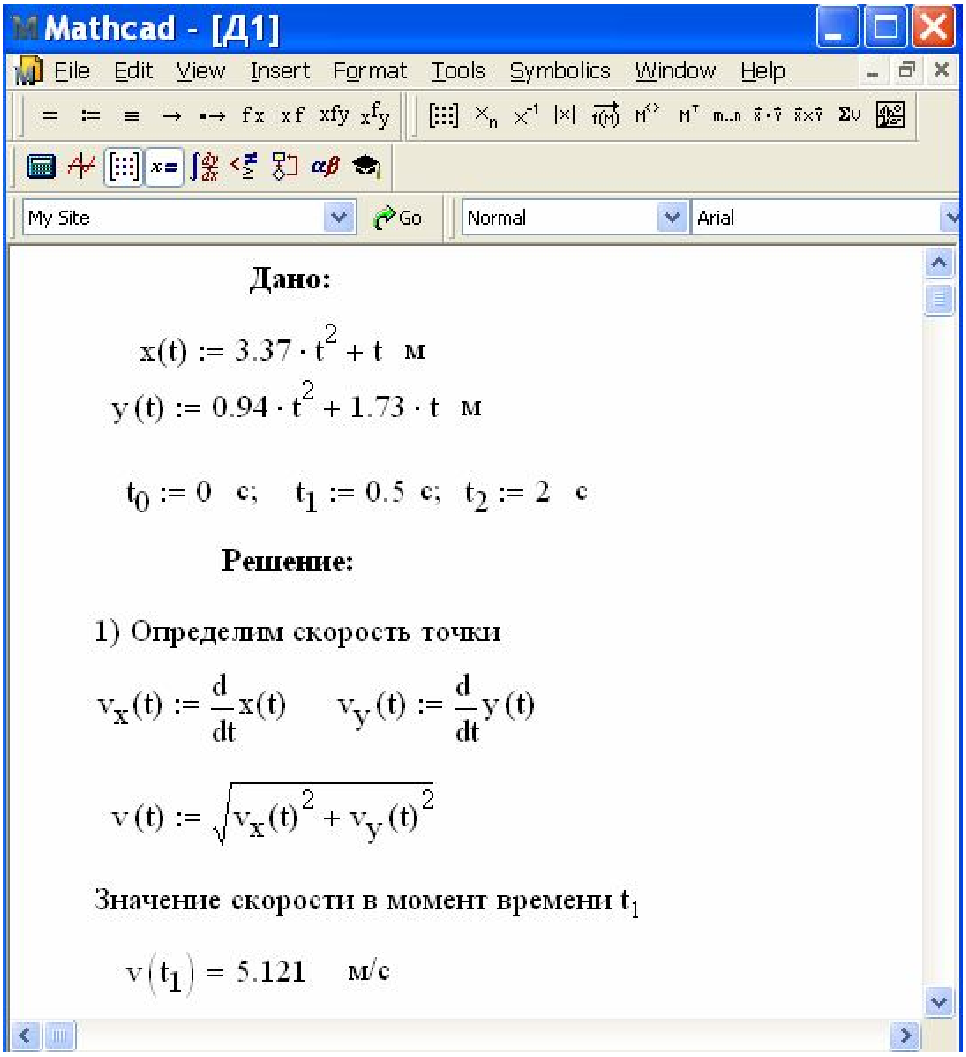

Рисунок 6 – Определение скорости точки

Построим график изменения скорости точки в период времени с начала движения до момента времени $t_2 = 2$ с (рисунок 7).

Построим траекторию движения точки и вектор скорости точки в момент времени t_1 (рисунки 8 и 9).

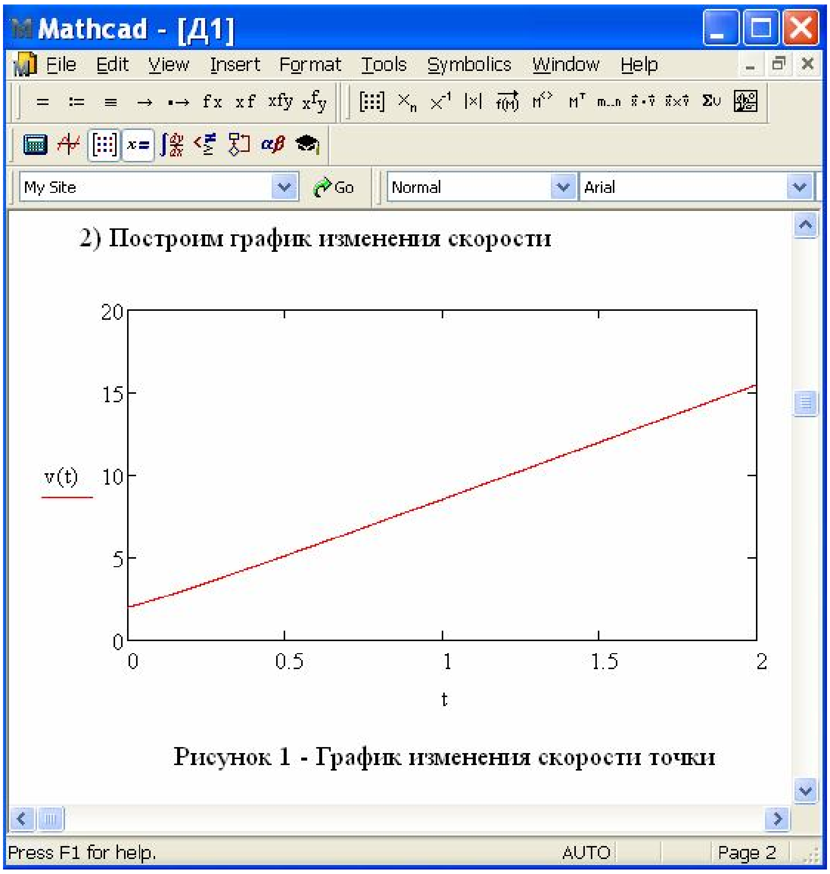

Рисунок 7– График изменения скорости точки

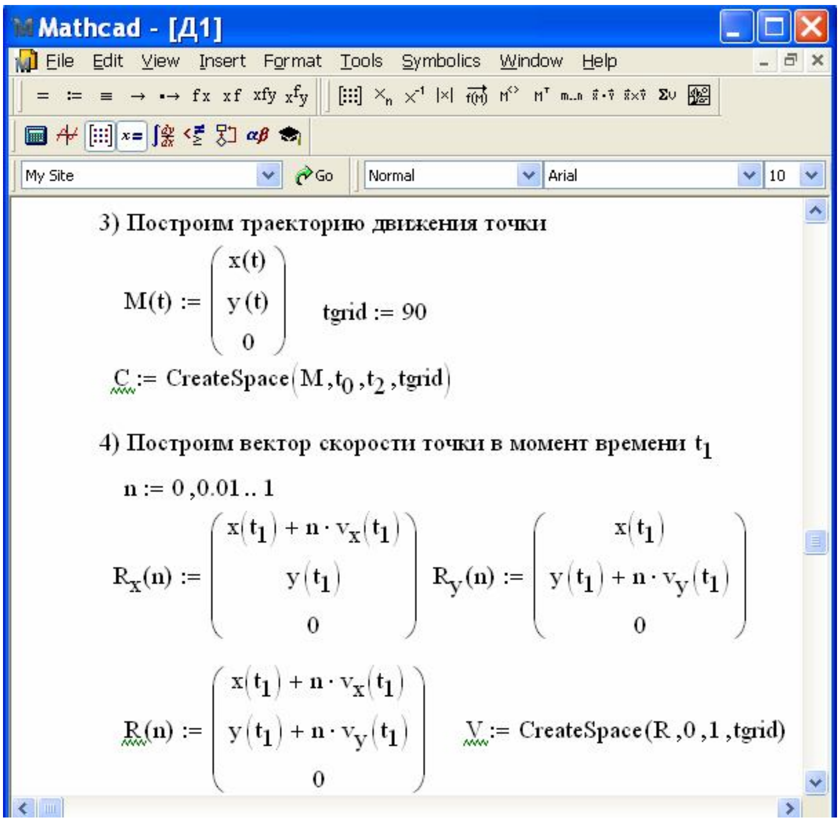

Рисунок 8 – Задание траектории и вектора скорости точки

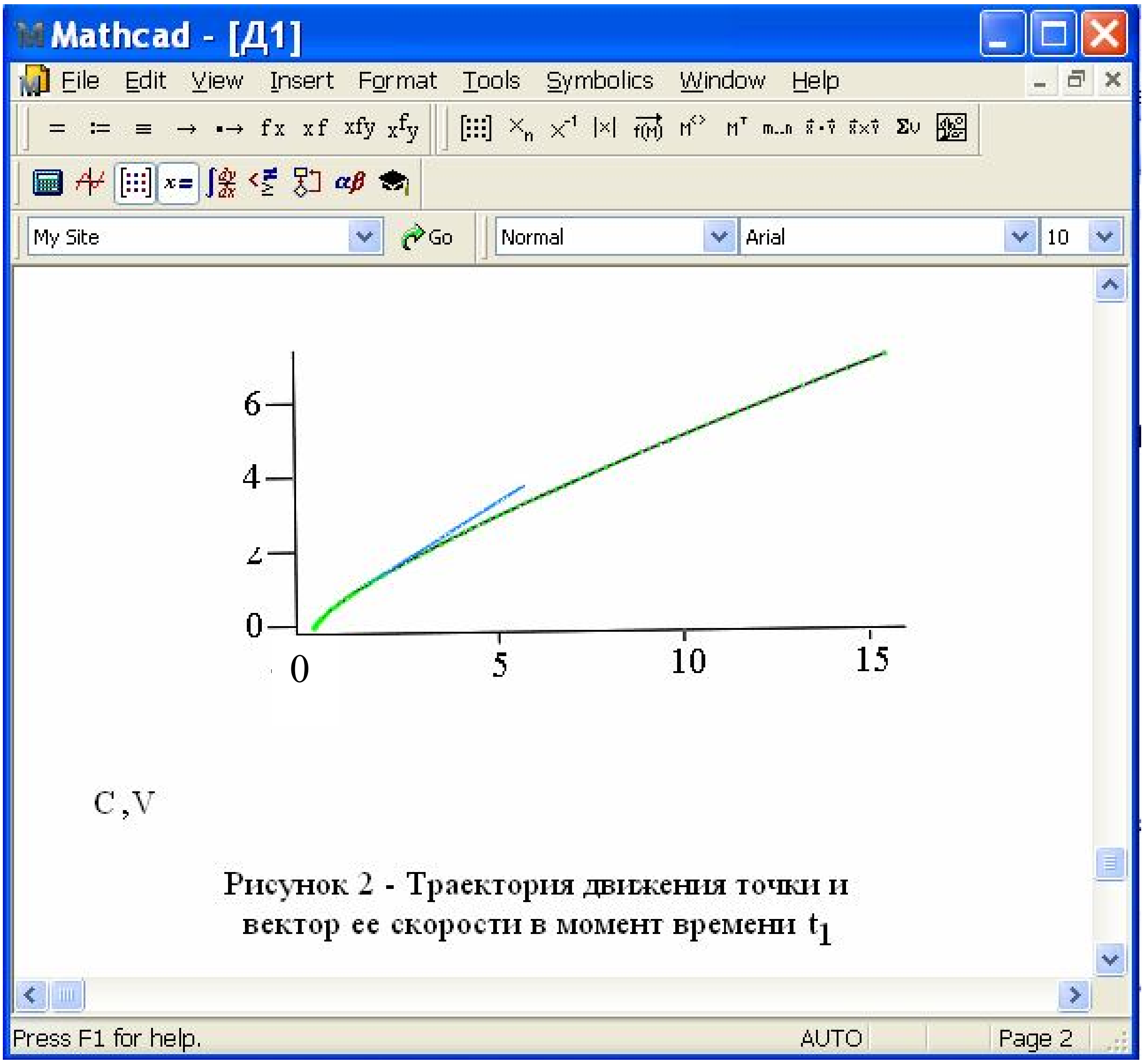

Рисунок 9 – Траектория и вектор скорости точки

Список использованных источников

1 Яблонский, А.А. Курс теоретической механики: учебник для вузов. / А.А. Яблонский, В.М. Никифорова – 11-е изд., стер. – СПб: Лань, 2004. – 768 с.

2 Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: учебное пособие для технических вузов. / А.А. Яблонский [и др.]; под общ. ред. А.А. Яблонского. - 10-е изд., стер. - М.: Интеграл-пресс, 2003. - 384 с.

3 Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов. / С.М. Тарг - 14-е изд., стер. – М.: Высшая школа, 2003 - 416с.

4 Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах: учеб. пособие для втузов в 3-х томах. Т.2. Динамика. / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон - 8-е изд., перераб. - М.: Наука, 1991. - 640с.

5 Дьяконов, В. Mathcad 2000: учебный курс. / В. Дьяконов – СПб: Питер, 2000. – 592 с.: ил.