Министерство образования и науки
Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

А. В. Михайличенко

ДИНАМИКА ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ

Методические указания
к лабораторным работам № 131, № 132, № 133

Рекомендовано к изданию Редакционно-издательским советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве методических указаний для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлениям подготовки: 150700.62 Машиностроение, 020100.62 Химия, 020400.62 Биология, 011200.62 Физика, 210100.62 Электроника и наноэлектроника, 141600.62 Электромеханика, 221700.62 Стандартизация и метрология

Оренбург
ОГУ
2012

УДК 537 (07)
ББК 22.33 я 7
П 27

Рецензент – доктор физико-математических наук, профессор Н.А. Манаков

Михайличенко, А. В.
П 27 Динамика вращательного движения: методические указания к лабораторным работам №131, №132, №133 / А. В. Михайличенко; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 41 с.

Методические указания включают изложение теории динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, методы измерения моментов инерции твердых тел, описание методики проведения эксперимента и обработки результата.

Методические указания предназначены для выполнения лабораторных работ №131, №132, №133 по дисциплине «Физика» для студентов всех специальностей.

УДК 537 (07)
ББК 22.33 я 7

© Михайличенко А. В., 2012
© ОГУ, 2012

Вращение твердого тела вокруг неподвижной оси

Вращательным движением вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором все точки тела, двигаясь в параллельных плоскостях описывают окружности с центрами, лежащими на одной неподвижной прямой, называемой осью вращения. Ось вращения перпендикулярна плоскостям, в которых движутся точки тела.

Кинематика вращательного движения

На рисунке 1 показана траектория некоторой точки твердого тела – окружность радиуса r. За малый промежуток времени Δt радиус - вектор $\vec{r}$,

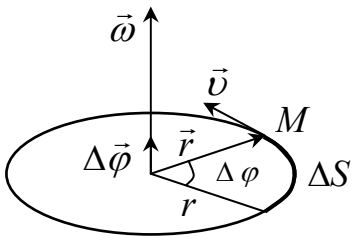


Рисунок 1 - Движение м.т. по окружности. Связь между $\vec{\omega}$ и $\vec{\upsilon}$

определяющий положение точки M, повернулся на малый угол $\Delta\varphi$, а точка прошла путь ΔS. Очевидно

$$\Delta S = r\Delta\varphi. \qquad (1)$$

Малый угол поворота $\Delta\varphi$ можно рассматривать как псевдовектор, модуль которого равен $\Delta\varphi$, а направление определяется *правилом правого винта*: псевдовектор (вектор) $\Delta\vec{\varphi}$ направлен вдоль оси вращения и совпадает с направлением поступательного движения винта, который вращается вместе с телом (материальной точкой).

Угловой скоростью $\vec{\omega}$ называют векторную величину, характеризующую быстроту вращения твердого тела. Она равна пределу отношения угла поворота $\Delta\vec{\varphi}$ за некоторый промежуток времени Δt к величине этого промежутка Δt при его неограниченном уменьшении

$$\vec{\omega} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{\varphi}}{\Delta t} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}. \qquad (2)$$

Очевидно вектор $\vec{\omega}$ сонаправлен с вектором $\Delta\vec{\varphi}$. Угловая скорость $\vec{\omega}$ измеряется в радиан/секунда $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}}\right)$.

Установим связь между линейной скоростью точки M и угловой скоростью вращения. Из определения модуля линейной скорости и формул (1) и (2):

$$\upsilon = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{r\Delta\varphi}{\Delta t} = r\frac{d\varphi}{dt} = r\omega. \qquad (3)$$

Связь между векторами $\vec{\upsilon}$ и $\vec{\omega}$ определяется по формуле Эйлера (рисунок 1):

$$\vec{\upsilon} = \left[\vec{\omega}, \vec{r}\right],$$

то есть вектор линейной скорости определяют как векторное произведение двух векторов $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$.

Численное значение (модуль) векторного произведения

$$\upsilon = \omega r \sin\alpha,$$

где α - угол между векторами $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$. В рассматриваемом случае $\alpha = 90^0$ и $\sin\alpha = 1$.

Направление вектора скорости $\vec{\upsilon}$ определим по правилу правого винта. Сформулируем его в этом случае так: вектор $\vec{\upsilon}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{r}$, и направлен в сторону поступательного движения правого винта, если его вращать от первого сомножителя $(\vec{\omega})$ ко второму $(\vec{r})$.

Если угловая скорость $\vec{\omega}$ не изменяется со временем, то имеем равномерное вращательное движение. Такое движение можно характеризовать периодом вращения T - временем, в течение которого тело поворачивается вокруг оси на угол $\varphi = 2\pi$, а также частотой n - числом оборотов, совершаемым телом за единицу времени. Они связаны с угловой скоростью соотношениями

$$\omega = 2\pi n = \frac{2\pi}{T}. \tag{4}$$

Неравномерное вращение характеризуют ускорением $\vec{\varepsilon}$.

Угловым ускорением $\vec{\varepsilon}$ называют векторную физическую величину равную первой производной угловой скорости $\vec{\omega}$ по времени

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \tag{5}$$

Угловое ускорение измеряется в радианах/секунду^2 $\left(\frac{\text{рад}}{\text{с}^2}\right)$. Так же как и угловая скорость $\vec{\omega}$ угловое ускорение $\vec{\varepsilon}$ направлено вдоль оси вращения. Причем, если движение ускоренное $(d\omega > 0)$, то векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ сонаправлены, а если угловая скорость убывает $(d\omega < 0)$, то векторы $\vec{\omega}$ и $\vec{\varepsilon}$ направлены в противоположные стороны.

Для поступательного движения тангенциальная (касательная) составляющая ускорения $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$. Учитывая формулу (3), получим

$$a_\tau = \frac{d}{dt}(r\omega) = r\frac{d\omega}{dt} = r\varepsilon . \qquad (6)$$

Нормальная составляющая ускорения

$$a_n = \frac{\upsilon^2}{r} = \omega^2 r = \upsilon\omega . \qquad (7)$$

Динамика вращательного движения

Основными физическими величинами динамики вращательного движения являются момент силы, момент импульса, момент инерции.

Моментом импульса материальной точки относительно полюса называют векторную величину $\vec{L}_0$, определяемую из векторного произведения радиус-вектора $\vec{r}$, задающего положение материальной точки относительно полюса (т.0), и импульса этой материальной точки $\vec{p} = \Delta m\vec{\upsilon}$

$$\vec{L}_0 = [\vec{r}, \vec{p}] = \Delta m[\vec{r}, \vec{\upsilon}]. \qquad (8)$$

Очевидно

$$\left|\vec{L}_0\right| = r \cdot p \cdot \sin\alpha ,$$

где α - угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{p}$, а направление вектора $\vec{L}$ определяется по правилу правого винта.

Твердое тело, вращающееся вокруг неподвижной оси, мысленно разобьем на материальные точки. Для произвольной материальной точки массой Δm_i имеем: двигаясь по окружности радиуса r_i (смотри рисунок 2), она имеет момент импульса относительно центра этой окружности (т.0) $\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = \Delta m[\vec{r}_i, \vec{\upsilon}_i]$.

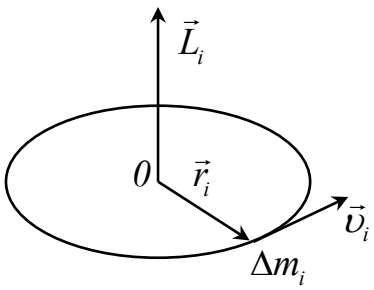


Рисунок 2 - Движение материальной точки по окружности

Но скорость $\vec{\upsilon}_i$ всегда направлена по касательной к окружности в данной точке, поэтому $\vec{r} \perp \vec{\upsilon}$ и модуль момента импульса

$$L_i = r_i \cdot \Delta m_i \cdot \upsilon_i \sin\alpha = r_i \cdot m_i \cdot \upsilon_i .$$

Очевидно, вектор $\vec{L}_i$ направлен в этом случае вдоль оси вращения. Так как $\upsilon_i = r_i\,\omega$ (смотри формулу 3), получим

$$L_i = \Delta m_i r_i^2 \omega . \qquad (9)$$

Причем угловая скорость ω одинакова для всех материальных точек, составляющих тело.

Величину $\Delta m_i r_i^2 = I_i$ *называют моментом инерции материальной точки.*

Совместим ось вращения с координатной осью, например осью OZ. Тогда для твердого тела

$$L_Z = \sum_{i=0}^{n} L_{Zi} = \omega \sum_{i=0}^{n} \Delta m_i r_i^2 = \omega I_Z . \qquad (10)$$

Величина

$$I_Z = \sum_{i=0}^{n} \Delta m_i r_i^2 . \qquad (11)$$

называется *моментом инерции тела относительно оси*. Обратите внимание: сумма $\sum \Delta m_i r_i^2$ зависит от размеров тела, формы и распределения масс в нем, а также и от того, где расположена ось вращения.

Для твердого тела формула (11) не является абсолютно точной. Более строго I_Z определяют следующим образом

$$I_Z = \lim_{\Delta m \to 0} \sum_{i=1}^{n} r_i^2 m_i = \int_m r^2 dm . \qquad (12)$$

Заметим еще, что момент инерции для твердого тела существует независимо от того, вращается тело или покоится. Всякое тело обладает моментом инерции относительно любой оси, подобно тому, как тело обладает массой вне зависимости от того, движется оно или покоится. Но, в отличие от массы, момент инерции тела зависит от выбора оси вращения. Сравнивая момент импульса $L_Z = I_Z \omega$ и импульс тела (поступательное движение $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$), приходим к выводу, что момент инерции I подобно массе m является мерой инертности, но для вращательного движения.

Если известен момент инерции тела относительно оси, проходящей через его центр масс I_c, то момент инерции этого тела для любой другой оси, параллельной первой, определяется по *теореме Штейнера*.

$$I = I_c + ma^2 . \qquad (13)$$

То есть момент инерции I тела относительно любой оси вращения равен сумме его момента инерции I_c относительно оси, проходящей через центр масс и параллельной данной, и произведению массы тела на квадрат расстояния между этими осями (a^2).

Найдем производную по времени для момента импульса материальной точки (смотри формулу (8))

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\vec{r}, \vec{p}\right] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right].$$

Очевидно $\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\upsilon}$, а $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$. Тогда первое слагаемое равно нулю, так как модуль векторного произведения $m\left[\vec{\upsilon}, \vec{\upsilon}\right] = 0$. Во втором слагаемом $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ (второй закон Ньютона). Следовательно,

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \qquad (14)$$

Векторное произведение $\left[\vec{r}, \vec{F}\right]$ называют моментом силы относительно точки О.

Обозначим его символом $\vec{M}_0$

$$\vec{M}_0 = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \qquad (15)$$

Из (14) и (15) следует: скорость изменения момента импульса материальной точки равна действующему на нее моменту силы:

$$\frac{d\vec{L}_0}{dr} = \vec{M}_0. \qquad (16)$$

Принимая для системы материальных точек $\vec{L}_0 = \sum \vec{L}_{0i}$ и $\vec{M}_0 = \sum \vec{M}_{0i}$, приходим к выводу, что формула (16) справедлива и для системы материальных точек (и твердого тела). Формула (16) есть основное уравнение динамики вращательного движения.

Если вращение твердого тела происходит относительно неподвижной оси и на тело действует сила $\vec{F}_0$, то ее можно разложить на две составляющие: $\vec{F}_{//}$ - сила, параллельная оси вращения и $\vec{F}_{\perp}$ - сила, которая лежит в плоскости, перпендикулярной оси вращения. Очевидно, $\vec{F}_{//}$ не может произвести вращения тела, а может только сдвинуть его вдоль оси. В дальнейшем она нас интересовать не будет. Вращение может осуществить только сила $\vec{F}_{\perp}$. Будем в дальнейшем обозначать ее просто $\vec{F}$. Момент силы $\vec{F}$ относительно оси OZ определяют из векторного произведения

$$\vec{M}_Z = \left[\vec{r}, \vec{F}\right]. \tag{17}$$

На рисунке 3 ось OZ, совпадающая с осью вращения тела, направлена вверх и перпендикулярна плоскости рисунка. Вектор $\vec{r}$, определяющий положение точки A – точки приложения силы $\vec{F}$ относительно центра вращения (т.О). Модуль вектора $|\vec{r}|$ - радиус окружности, по которой движется точка A, а сила $\vec{F}$ лежит в плоскости окружности. Очевидно

$$M_Z = \left|\vec{M}_Z\right| = rF\sin\alpha\,. \tag{18}$$

Как видно из рисунка $r\sin\alpha = h$. Тогда $M_Z = Fh$. Здесь h - плечо силы $\vec{F}$ - кратчайшее расстояние между осью вращения и линией действия си-

лы. Направлен вектор $\vec{M}_Z$, согласно правилу правого винта, в приведенном случае, вертикально вверх.

Если на тело действует несколько сил, то результирующий момент сил можно определить как алгебраическую сумму

$$\sum_{i=1}^{n} M_{Zi} = M_Z \,. \tag{19}$$

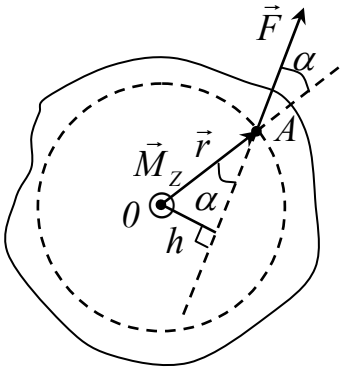


Рисунок 3 - Момент силы относительно оси

Принимая, например, $\vec{M}_{Zi}$ положительным, если $\vec{M}_{Zi}$ сонаправлен с осью OZ и отрицательным, если ось OZ и вектор момента силы направлены в противоположные стороны.

Из (16), в проекциях на ось OZ получим

$$\frac{dL_Z}{dt} = M_Z \,. \tag{20}$$

Но $L_Z = I_Z \omega$ (согласно формуле 10), тогда, с учетом (5)

$$M_Z = \frac{d}{dt}\left(I_Z \omega\right) = I_Z \frac{d\omega}{dt} = I_Z \varepsilon \,. \tag{21}$$

Полученное уравнение называют уравнением динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси. Из сравнения $M_Z = I_Z \varepsilon$ и $F_Z = ma_Z$ - второго закона Ньютона в проекциях на ось OZ, следует вывод: роль массы m при вращательном движении играет момент инерции I, роль ускорения a_Z - угловое ускорение ε, а роль результирующей силы - результирующий момент внешних сил M_Z. В замкнутой системе материальных точек (то есть внешних сил нет, или их результирующая дает момент внешних сил равной нулю) из (16), (20) и (21) следует

$$\vec{L}_0 = const; \quad L_Z = const; \quad I_Z \omega = const. \tag{22}$$

Эти формулы – представленный в разных вариантах ***закон*** *сохранения момента импульса* – один из фундаментальных законов природы: *момент импульса замкнутой системы не изменяется.*

Некоторые физические величины и формулы по кинематике и динамике вращательного движения приведены в Приложении А.

Лабораторная работа № 131. Изучение вращения твердого тела вокруг неподвижной оси

Цели работы:

1 Изучить теорию вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

2 Экспериментально проверить выполнимость уравнения $M_z = I_z \varepsilon$.

Теория вопроса

Проверку справедливости уравнения $M_z = I_z \varepsilon$. можно осуществить различными способами. Один из них заключается в следующем: если момент инерции системы I_z не изменяется, то между моментом силы M_z и угловым ускорением ε должна существовать линейная зависимость. Этот факт и надо проверить в эксперименте.

Работа выполняется на установке “маятник Обербека” (рисунок 1). Он состоит из установленной в подшипниках оси 1, на которой крепится маховик 2. В маховик ввинчены четыре стальные спицы 3. На каждой спице находится цилиндр 4 со стопорным винтом. Массы цилиндров одинаковые. С помощью стопорных винтов цилиндры можно закрепить на любом расстоянии от оси вращения. Передвигая цилиндры по спицам, изменяем момент инерции I_z маятника. Кроме маховика, на оси закреплены два валика 5 разного диаметра. На один из валиков наматывается нить 6. Один конец нити крепится к валику, другой к платформе 7 известной массы. На платформу

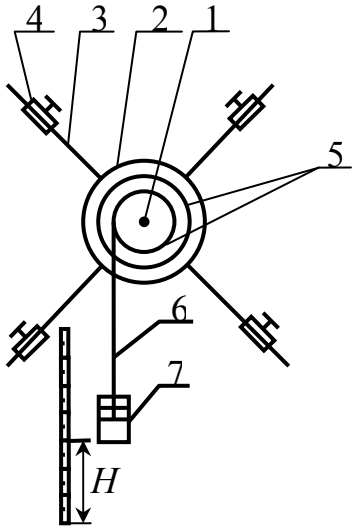


Рисунок 1 – Маятник Обербека

кладется груз, нить натягивается и создает вращающий момент M_z. Выведем формулы, выражающие M_z и ε через измеряемые в эксперименте величины: радиус валика r, массу груза m, время опускания груза t и высоту H.

Груз двигаясь с ускорением a за время t опустится на расстояние H:

$$H = \frac{at^2}{2},$$

следовательно

$$a = \frac{2H}{t^2}. \qquad (1)$$

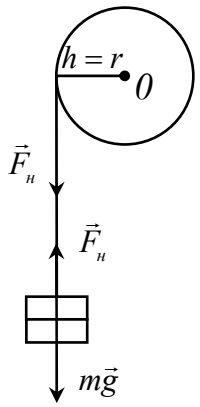


Рисунок 2 - К выводу формулы 2

Момент силы относительно оси $M_z = F_н h$. Здесь плечо силы $h = r$, а силу натяжения нити $F_н$ найдем из второго закона Ньютона:

$$ma = mg - F_н,$$

отсюда $F_н = m(g - a)$.

Тогда $M_z = F_н r = mr(g - a)$ или, учитывая (1)

$$M_z = mr\left(g - \frac{2H}{t^2}\right). \qquad (2)$$

Так как линейное ускорение a связано с угловым ускорением ε формулой $\varepsilon = \frac{a}{r}$ из (1) получим:

$$\varepsilon = \frac{2H}{rt^2}. \qquad (3)$$

Следует иметь в виду что на маятник во время его движениям действует и момент сил трения, препятствующий движению. Поэтому уравнение $M_z = I_z \varepsilon$ следует записать в виде:

$$M_z - M_{TP} = I_z\,\varepsilon\,. \qquad (4)$$

Принимая $M_{TP} = const$, получим что из теории следует прямо пропорциональная зависимость между M_z и ε.

Экспериментальная часть*

1 Сбалансируйте маятник. Для этого при ненатянутой нити расположите его так, чтобы две спицы были горизонтальны, а все четыре цилиндра расположены на концах спиц. Перемещая цилиндры на горизонтальных спицах, добейтесь положения равновесия. Повернув маятник на 90^0, точно также сбалансируйте грузы на второй паре спиц на таком же расстоянии от оси вращения. Так как качество результатов эксперимента зависит от балансировки маятника, эту операцию повторите два - три раза.

2 Установить определенную высоту опускания груза $H_м$.

3 Определить время t, за которое груз m опускается на расстояние H. Измерение времени для каждого груза повторяют три раза, затем находят среднее значение времени движения груза по формуле $\overline{t} = \frac{1}{3}\left(t_1 + t_2 + t_3\right)$.

Оценку погрешности Δt можно сделать по формуле

$$\Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2}\,.$$

Эти измерения провести для шести различных грузов.

4 По полученным данным из (3) и (2) определите M_z и ε.

---

*Примечание: В лаборатории имеется несколько установок «маятник Обербека». Они имеют не принципиальные конструктивные различия. Соответствующая информация имеется на рабочем месте.

5 Измените момент инерции I_z маятника передвинув цилиндры ближе к маховику и повторите пункты 1 - 4 для нового значения I_z.

Рекомендуется результаты эксперимента представить в виде таблицы 1.

Таблица 1- Результаты измерений

Положение цилиндров	Цилиндры на концах спиц						Цилиндры придвинуты к маховику					
m, кг												
$\overline{t}$, с												
Δt, с												
ε, $\frac{рад}{с^2}$												
M_z, Н·м												
H =…, м; r = ….., м; I_1 = …….., кг·м^2; I_2 = …….., кг ·м^2												

6 Полученные экспериментальные точки нанести на координатную плоскость $x = M_z$, $y = \varepsilon$ и по ним построить графики зависимости $\varepsilon = \varepsilon\,(M_z)$. При построении графика принять, что относительные погрешности углового ускорения ε и момента сил M_z примерно равны относительной погрешности измерения времени.

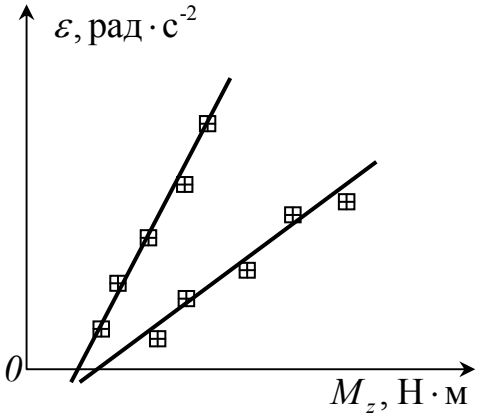


Рисунок 3 – График зависимости ε, рад · с$^{-2}$ от M_z, Н · м

7 Из графика определить моменты инерции I_1, I_2.

8 По полученным результатам сделать выводы.

Контрольные вопросы

1 Какие физические величины используют в кинематике вращательного движения, динамике вращательного движения?

2 Напишите основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, поясните его содержание.

3 Дайте определения величин, входящих в уравнение $M_z = I_z \varepsilon$. Как эти величины определяются в данной работе?

4 Можно ли момент сил трения M_{TP} считать строго постоянным в данной работе?

5 Сформулируйте цель работы. Позволяют ли полученные Вами результаты утверждать, что пункт 2 выполнен?

Лабораторная работа № 132. Определение момента инерции твердого тела

Цели работы:

1 Изучить теорию вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси.

2 Познакомиться с методами определения моментов инерции твердых тел правильной геометрической формы.

3 Определить расчетным и опытным путем момент инерции твердого тела.

Теория вопроса

Одно из основных понятий динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси – момент инерции. Существуют различные методы определения моментов инерции тел. В предлагаемой работе рассматриваются два из них: расчетный (теоретический) и метод крутильных колебаний (экспериментальный).

1 Расчетный метод определения момента инерции однородного твердого тела правильной геометрической формы относительно оси, проходящей через его центр масс, рассмотрим на двух примерах.

а) Найдем момент инерции тонкого кольца относительно оси, совпадающей с его осью симметрии (рисунок 1). Размеры кольца: высота - h; радиус – r; толщина стенки - Δr, причем $\Delta r << r$. По определению момент инерции системы материальных точек I_z равен

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta m_i ,$$

где $r_i^2 \Delta m_i$ - момент инерции i-той материальной точки.

Мысленно разобьем кольцо на материальные точки Δm_i. Одна из них показана на рисунке. Из $\Delta r << r$ следует, что для произвольной i - той материальной точки расстояние до оси вращения $r_i = r$, но тогда $I_z = r^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$. Сумма масс $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = m$ - масса кольца. Получили, что момент инерции тонкого кольца $I_z = mr^2$. Полученную формулу можно преобразовать вводя плотность вещества $\rho = \frac{m}{V}$.

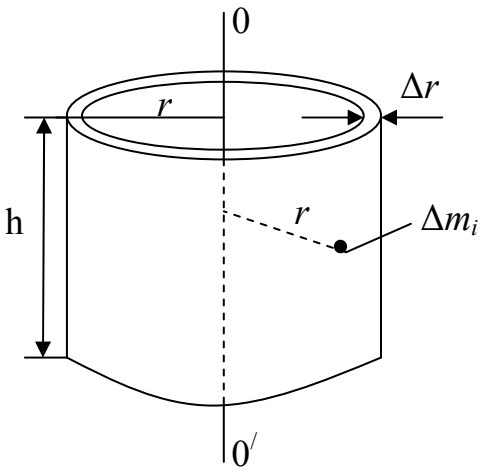


Рисунок 1 - Определение момента инерции кольца

$$I_z = \rho V r^2 = \rho \cdot h \cdot 2\pi r \cdot \Delta r \cdot r^2 = \rho h 2\pi r^3 \Delta r .$$

б) Найдем момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси, совпадающей с его осью симметрии (рисунок 2). Размеры цилиндра: высота - h; радиус – R. Плотность вещества цилиндра - ρ. Разобьем мысленно цилиндр на кольца. Одно из них показано на рисунке 2. Размеры кольца: высота - h; радиус – r; толщина стенки кольца - dr. Используя ранее полученный результат, имеем: момент инерции кольца $dI_z = \rho h 2\pi r^3 dr$.

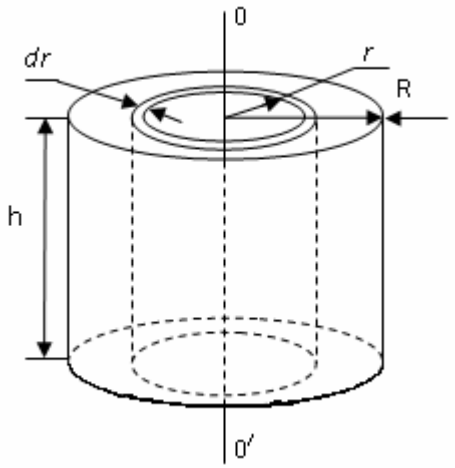


Рисунок 2 - Определение момента инерции цилиндра

$$I_z = \int dI_z = \rho h 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho h \pi R^2 \frac{R^2}{2}.$$

Величина $\pi R^2 h$ – объем диска, значит $\rho \pi R^2 h$ – масса диска m. Следовательно,

$$I = \frac{mR^2}{2}. \qquad (1)$$

Аналогично можно рассчитать моменты инерции толстостенного кольца, тороида, шара и других тел.

2 Идея определения момента инерции тела в данной работе основана на зависимости периода крутильных колебаний от момента инерции колеблющегося тела.

На рисунке 3 (а и б) показаны две разновидности применяемых для этого установок.

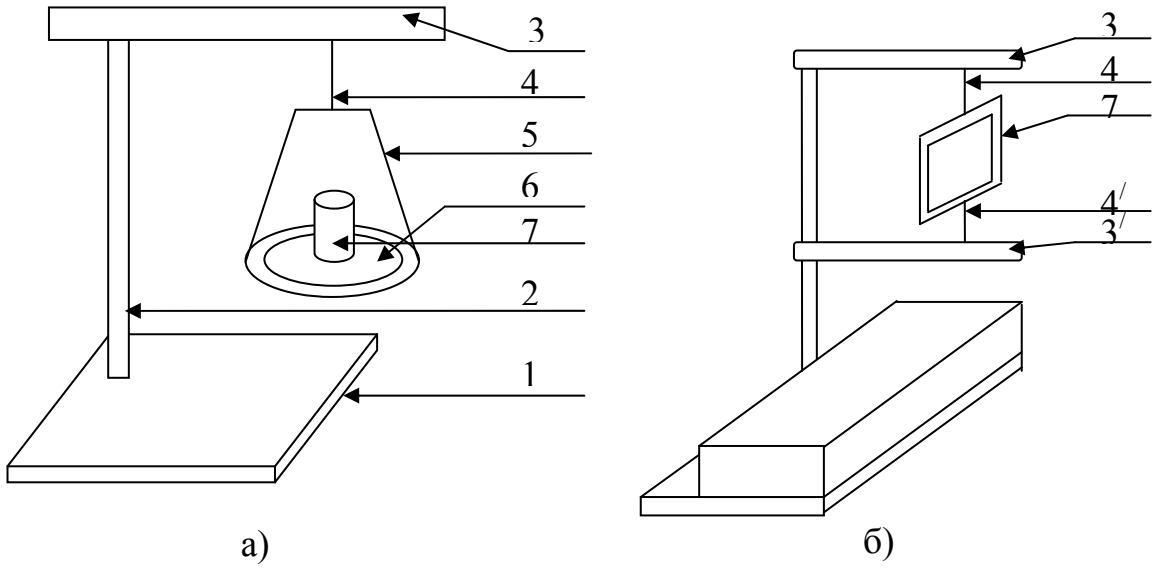


Рисунок 3 – Установка для измерения моментов инерции

Схематически изображенная на рисунке 3а установка представляет собой массивное основание 1. На нем установлена вертикально стойка 2 с кронштейном 3. Отрезок стального упругого провода 4, называемый упругим подвесом, жестко крепится одним концом к кронштейну 3, а другим – к стальной дугообразной пластине 5. Последняя в свою очередь прикреплена к диску 6. На диск можно поместить исследуемое тело (например, как на рисунке, цилиндр 7).

Установка на рисунке 3б отличается тем, что здесь вместо диска с пластиной используется стальная рамка 7, а проволочный подвес состоит из двух отрезков стального упругого провода 4 и 4′. Подвесы 4 крепятся к верхнему кронштейну 3 и рамке 7, а 4′ к нижнему кронштейну 3′ и рамке 7. На рамке имеются специальные винты, не показанные на рис. 3б, с помощью которых исследуемое тело можно закрепить на рамке. Для общности рассуждений будем в дальнейшем диск с пластиной (рисунок 3а) и рамку с крепежным винтами (рисунок 3б) называть общим словом платформа.

Повернем платформу на небольшой угол φ (3 - 5 градусов относительно оси проволочного подвеса) и отпустим ее. Она начнет совершать свободные затухающие колебания. Период этих колебаний обозначим через T_0. Его значение определяется жесткостью подвеса *k*, моментом инерции платформы I_0 относительно оси и определяется формулой

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I_0}{k}}\,. \qquad (2)$$

Поставим теперь на платформу исследуемое тело (цилиндр), момент инерции которого относительно оси симметрии мы желаем определить. Вновь повернем платформу на небольшой угол φ вокруг оси и отпустим. Она

начнем совершить свободные затухающие колебания с периодом T. Очевидно

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I + I_0}{k}}. \qquad (3)$$

Здесь $I + I_0$ суммарный момент инерции тела (цилиндра) и платформы относительно оси колебаний. Простыми преобразованиями – возведением в квадрат и исключением k из формул (2) и (3) можно получить расчетную формулу для момента инерции исследуемого тела:

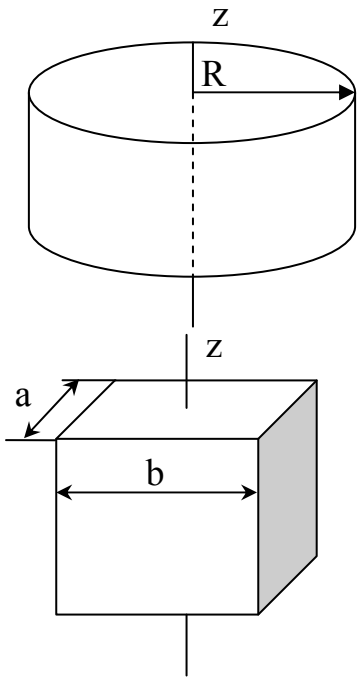
$$I = I_0\left(\frac{T^2}{T_0^2} - 1\right). \qquad (4)$$

Зная значение момента инерции платформы I_0, и определив опытным путем T_0 и T, по формуле (4) вычисляют момент инерции исследуемого тела.

В данной работе методом крутильных колебаний определяется момент инерции одного из тел: цилиндра или прямоугольного параллелепипеда.

В лабораторной работе момент инерции исследуемого тела относительно оси симметрии определяется не только методом крутильных колебаний, но и расчетом по формуле, в которую входят только геометрические размеры тела и его масса. Для тел в виде цилиндра и прямоугольного параллелепипеда, формулы имеют вид (рисунок 4).

Массы исследуемых тел заданы, а геометрические размеры измеряются штангенциркулем.



$$I = \frac{1}{2} m R^2,$$

где m - масса цилиндра, кг;
R - радиус цилиндра, м

$$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2),$$

m - масса параллелепипеда, кг;
a и b - длины ребер, перпендикулярных осей вращения, м

Рисунок 4 – Формы исследуемых тел

Экспериментальная часть*

Определение момента инерции тела методом крутильных колебаний.

1 Определите 7 раз ($n = 7$) время 20 полных колебаний пустой платформы t_{0i}, т.е. без исследуемого тела на платформе. Результаты измерений рекомендуется представить в виде в таблицы 1. Используя алгоритм обработки результатов прямых измерений, содержащих случайную ошибку, найдите $\overline{t_0}$ и Δt_0. Затем найдите $\overline{T}_0$ и ΔT_0. Запишите значение периода крутильных колебаний платформы без груза в виде $T_0 = \overline{T}_0 \pm \Delta T_0$.

Таблица 1- Результаты измерений

i	1	2	3	4	5	6	7
t_{0i}, с							

* Примечание: В лаборатории имеется несколько установок для определения момента инерции тел методом крутильных колебаний. Методика проведения эксперимента имеет некоторые различия. Соответствующая информация имеется на рабочем месте.

$n = 7$

$\overline{t_0} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_7}{7} = ...,$ с $\qquad \overline{T_0} = t_0 / 20 = ...,$ с

$\sigma_{ПР} = 0,01$ с

$\Delta t_0 = \sigma = \sqrt{\sigma_{ПР}^2 + \dfrac{(t_1 - \overline{t})^2 + (t_2 - \overline{t})^2 + ... + (t_n - \overline{t})^2}{n(n-1)}}$; $\Delta T_0 = \dfrac{\Delta t_0}{20} = ...,$ с

$t_0 = \overline{t_0} \pm \Delta t_0 = (... \pm ...),$ с $\qquad T_0 = \overline{T_0} \pm \Delta T_0 = (... \pm ...),$ с

Здесь $\overline{t_0}$ - средняя длительность 20 колебаний пустой платформы (без тела), а $\overline{T_0}$ - средний период колебаний пустой платформы.

2 Установите на платформу исследуемое тело (цилиндр или параллелепипед). Вновь семь раз измеряют время 20 – ти полных колебаний t_i, но теперь уже платформы с исследуемым телом. Полученные результаты измерений вписывают в таблицу 2. Опять используйте алгоритм обработки результатов прямых измерений, содержащих случайную ошибку. Значение периода крутильных колебаний платформы с исследуемым телом представьте в виде $T = \overline{T} \pm \Delta T$.

Таблица 2 - Результаты измерений

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i, с							

$n = 7$

$\overline{t} = \dfrac{t_1 + t_2 + ... + t_7}{7} = ...$ с $\qquad \overline{T} = \overline{t} / 20...,$ с

$\sigma_{ПР} = 0,01$ с

$$\Delta t = \sigma = \sqrt{\sigma_{ПР}^2 + \frac{(t_1 - \overline{t})^2 + (t_2 - \overline{t})^2 + ... + (t_n - \overline{t})^2}{n(n-1)}}$$

$t = \overline{t} \pm \Delta t = (... \pm ...),$ с $\qquad T = \overline{T} \pm \Delta T = (... \pm ...),$ с

3 Пользуясь формулой (4) вычислить момент инерции исследуемого тела I_1:

$$I_1 = \overline{I}_0 \frac{\overline{T}^2 - \overline{T}_0^2}{\overline{T}_0^2} = \overline{I}_0 \left(\frac{\overline{T}^2}{\overline{T}_0^2} - 1 \right).$$

$$\Delta I_1 = \varepsilon \cdot \overline{I}_1 .$$

Относительная ошибка ε вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta I_0}{\overline{I}_0} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Delta \overline{T}}{\overline{T}} \right)^2 + \left(\frac{2 \cdot \Delta \overline{T}_0}{\overline{T}_0} \right)^2} ,$$

где $\Delta I_0 = 0{,}1 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2, $I_0 = 6{,}6 \cdot 10^{-4}$ кг $\cdot$ м^2 (эти данные уточнить на рабочем месте).

Результат представляют в виде : $I_Э = (I_1 \pm \Delta I)$ кг $\cdot$ м^2.

4 В зависимости от формы измеряемого тела выберите соответствующую формулу для расчета его момента инерции. Измерьте входящие в нее геометрические размеры тела и вычислите момент инерции I исследуемого тела (масса тела задана).

Для цилиндра:

$$\overline{I} = \frac{\overline{m}\overline{R}^2}{2} \; ; \quad \varepsilon = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m} \right)^2 + \left(\frac{2\Delta R}{R} \right)^2}$$

$\Delta I = \varepsilon \cdot \overline{I}_2$; $m = (6{,}13 \pm 0{,}01)$ кг; $R = (5{,}00 \pm 0{,}05) \cdot 10^{-2}$ м.

Для прямоугольного параллелепипеда:

$$\overline{I} = \frac{m}{12}(a^2 + b^2),$$

где m – масса параллелепипеда, b и a – длины ребер, перпендикулярных оси вращения.

$$\Delta I_2 = \frac{1}{12}\sqrt{\left[(\overline{a}^2 + \overline{b}^2)\cdot \Delta m\right]^2 + 4m^2\left[(\overline{a}\cdot \Delta a)^2 + (\overline{b}\cdot \Delta b^2)\right]^2}$$

$\overline{m} = (0,96 \pm 0,01)$ кг; $\overline{a} = 0,05$ м; $\overline{b} = 0,05$ м;

$\Delta a = \Delta b = 0,001$ м.

Результат запишите в виде:

$$I_P = \overline{I} \pm \Delta I = (\ldots \pm \ldots) \text{ кг}\cdot\text{м}^2.$$

Сравните значения момента инерции тела, найденные методом крутильных колебаний и расчетным путем. Если доверительные интервалы полученных значений момента инерции перекрываются, то можно сказать, что в пределах ошибки измерения оба метода дали одинаковые значения момента инерции тела. Сделайте вывод.

Контрольные вопросы

1 Что называется моментом инерции материальной точки относительно оси вращения?

2 Как теоретически определить момент инерции твердых тел относительно оси вращения? Каков физический смысл момента инерции?

3 От чего зависит момент инерции тела?

4 Какая связь существует между моментом инерции и периодом крутильных колебаний?

5 В чем суть экспериментального метода определения моментов инерции твердых тел методом крутильных колебаний?

6 Как находится момент инерции системы твердых тел?

7 Поясните цель, порядок выполнения работы и прокомментируйте полученные результаты.

Лабораторная работа № 133*. Исследование вращательного движения твердого тела

Цели работы:

1 Изучить теорию вращения твердого тела вокруг неподвижной оси.

2 Экспериментально проверить уравнение вращательного движения твердого тела, закрепленного на оси $\left(M_z = I_z \varepsilon\right)$.

3 Определить момент инерции твердого тела различными методами.

Введение

Уравнение вращательного движения для твердого тела, закрепленного на оси, имеет вид

$$I_z \varepsilon = M_z, \tag{1}$$

где I_z - момент инерции твердого тела относительно оси вращения;

ε - его угловое ускорение;

M_z - результирующий момент внешних сил, приложенных к телу.

Величина момента инерции тела относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением его массы. В частности, для тела, состоящего из конечного числа элементарных (материальных точек) масс Δm_i:

$$I = \sum \Delta m_i \, r_i^2, \tag{2}$$

где r_i - расстояние от элементарной массы до оси вращения;

$\Delta m_i \, r_i^2 = I_i$ - момент инерции i - ой материальной точки.

---

* Работа № 133 дублирует работы № 131 и № 132 и рассчитана на два занятия.

В общем случае, для сплошных тел, суммирование заменяется интегрированием

$$I = \int r^2 dm = \int dI_z \ . \qquad (3)$$

Для некоторых тел простой геометрической формы возможен прямой расчет момента инерции. Покажем это на двух примерах.

а) Найдем момент инерции тонкого кольца относительно оси,

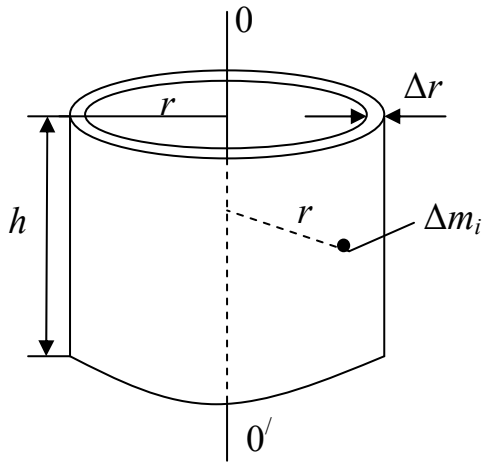


Рисунок 1 – Определение момента инерции кольца

совпадающей с его осью симметрии. Размеры кольца: высота - h; радиус – r; толщина стенки - Δr, причем $\Delta r << r$. Воспользуемся формулой (2)

$$I_z = \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i r_i^2$$

Мысленно разобьем кольцо на материальные точки Δm_i. Одна из них показана на рисунке. Из $\Delta r << r$ следует, что для произвольной i - той материальной точки расстояние до оси вращения $r_i = r$, но тогда $I_z = r^2 \sum_{i=1}^{n} \Delta m_i$.

Сумма масс $\sum_{i=1}^{n} \Delta m_i = m$ - масса кольца. Получили, что момент инерции тон-

кого кольца $I_z = mr^2$. Полученную формулу можно преобразовать вводя плотность вещества $\rho = \frac{m}{V}$.

$$I_z = \rho V r^2 = \rho \cdot h \cdot 2\pi r \cdot \Delta r \cdot r^2 = \rho h 2\pi r^3 \Delta r .$$

б) Найдем момент инерции сплошного однородного цилиндра относительно оси, совпадающей с его осью симметрии. Размеры цилиндра: высота - h; радиус – R. Плотность вещества цилиндра - ρ. Разобьем мысленно цилиндр на кольца. Одно из них показано на рисунке 2. Размеры кольца: высота - h; радиус – r; толщина стенки кольца - dr.

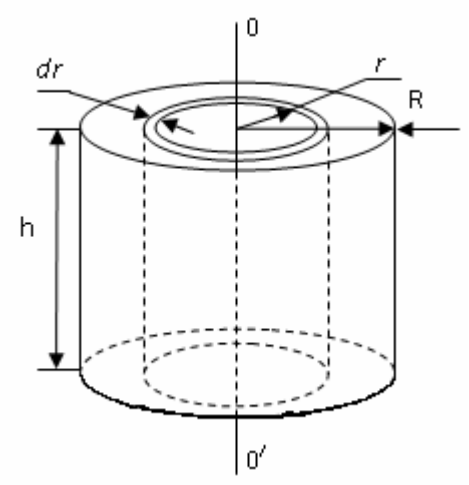


Рисунок 2 - Определение момента инерции цилиндра

Используя ранее полученный результат, имеем: момент инерции кольца $dI_z = \rho h 2\pi r^3 dr$. Воспользуемся формулой (3)

$$I_z = \int dI_z = \rho h 2\pi \int_0^R r^3 dr = \rho h 2\pi \frac{R^4}{4} = \rho h \pi R^2 \frac{R^2}{2} .$$

Величина $\pi R^2 h$ – объем цилиндра, значит $\rho \pi R^2 h$ – масса цилиндра m. Следовательно,

$$I = \frac{mR^2}{2}. \qquad (4)$$

Подобным образом можно рассчитать моменты инерции толстостенного кольца, тороида, шара и других тел.

При сложной форме тела и (или) неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может стать достаточно сложной задачей.

В данной работе применяются два способа определения момента инерции: с помощью изучения динамики вращательного движения исследуемого тела, и с помощью анализа колебаний физического маятника, составной частью которого является исследуемое тело.

Экспериментальная проверка справедливости уравнения $\left(M_z = I_z\varepsilon\right)$ ***и определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения.***

Исследуемое тело 1 произвольной формы (в работе – диск, смотри рисунок 3) закреплено на горизонтальной оси 3, проходящей через центр масс тела. Соосно с телом закреплен цилиндр 2, на который наматывается нить с прикрепленной к ней платформой с грузами 4. Груз, двигаясь под действием силы тяжести, натягивает нить и создает вращающий момент M_z. Выведем формулы, выражающие M_z и ε через ве-

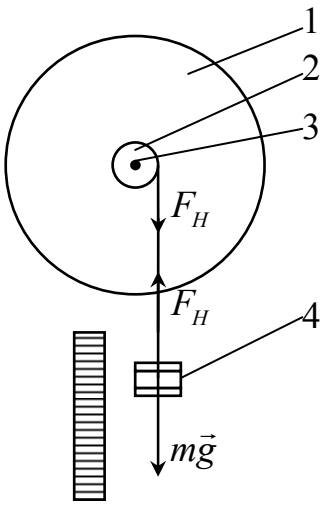


Рисунок 3 – Определение момента инерции из анализа вращательного движения

личины, которые легко измерить: массу груза m, радиус цилиндра r, время опускания груза t с высоты H.

Из уравнения кинематики поступательного движения $H = \frac{at^2}{2}$:

$$a = \frac{2H}{t^2}, \tag{5}$$

но, учитывая связь линейного и углового ускорения $a = \varepsilon r$, получим

$$\varepsilon = \frac{2H}{rt^2}. \tag{6}$$

Момент силы натяжения нити F_H относительно оси

$$M_z = F_H h,$$

где h - плечо силы.

Очевидно, плечо силы h равно радиусу цилиндра r. Силу натяжения нити F_H найдем из второго закона Ньютона:

$$ma = mg - F_H.$$

Следовательно

$$F_H = m(g - a).$$

Тогда

$$M_z = F_H r = mr(g - a)$$

или, учитывая (5),

$$M_z = mr\left(g - \frac{2H}{t^2}\right). \tag{7}$$

Уравнение $M_z = I_z\varepsilon$ с учетом момента сил трения следует записать в виде

$$M_z - M_{TP} = I_z\varepsilon . \qquad (8)$$

Принимая, что момент сил трения и момент инерции твердого тела постоянны, получаем, что из теории следует прямо пропорциональная зависимость между M_z и ε (что и следует проверить в эксперименте), а коэффициент пропорциональности I_z можно определить из графика.

Момент сил трения можно определить исходя из закона сохранения энергии для диссипативной замкнутой системы. Груз m, опустившись с высоты H, поднимается снова на высоту h. Изменение энергии системы $mg(H-h)$ равно работе сил трения $A = M_{TP}\,\varphi$. Но угол $\varphi = 2\pi N$, где N - число оборотов исследуемого тела за время прохождения грузом расстояния $(H+h)$. Очевидно $N = \dfrac{H+h}{2\pi r}$ и $\varphi = 2\pi\dfrac{H+h}{2\pi r} = \dfrac{H+h}{r}$. Тогда из $mg(H-h) = M_{TP}\,\varphi$ получаем

$$M_{TP} = \frac{mg(H-h)\cdot r}{H+h} . \qquad (9)$$

Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его колебаний как физического маятника.

Если закрепить исследуемое тело 1 на горизонтальной оси *0*, проходящей через центр масс (рисунок 4), то момент сил тяжести будет равен нулю, и тело остается в безразличном равновесии.

Если теперь закрепить на исследуемом теле на некотором удалении L от оси малое тело 2 с известной массой m, то равновесие перестанет быть безразличным - при равновесии момент силы тяжести, действующий на тело

2 будет равен нулю. Такую систему можно рассматривать как физический маятник.

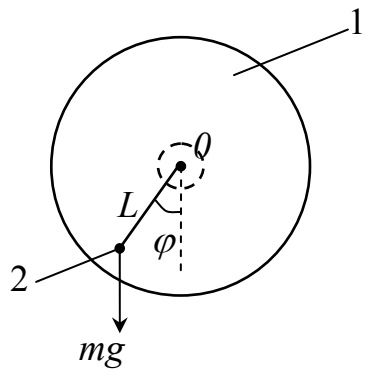


Рисунок 4 – Определение момента из колебательного движения физического маятника

Движение системы проанализируем исходя из уравнения динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси $M_z = I_z \varepsilon$.

Угловое ускорение $\varepsilon = \dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$, а момент инерции системы $I_z = I_1 + I_2$, где I_1 и I_2 соответственно моменты инерции первого и второго тел. Момент силы $m\vec{g}$ равен $M_z = mgL\sin\varphi$ ($L\sin\varphi$ - плечо силы $m\vec{g}$). Для малых углов отклонения маятника ($\varphi < 10^0$) $\sin\varphi \simeq \varphi$, если φ измеряют в радианах. Тогда $M_z = -m\,g\,L\varphi$. Появившийся здесь знак «минус» обусловлен тем, что вектор момента силы $m\vec{g}$ и малый угол $\vec{\varphi}$ антипараллельны, следовательно, их проекции на ось z имеют разные знаки. С учетом изложенного выше, уравнение движения маятника принимает вид

$$\left(I_1 + I_2\right)\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -m\,g\,L\varphi, \text{ или}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{m\,g\,L}{I_1 + I_2}\varphi. \qquad (10)$$

Это уравнение является уравнением собственных (свободных) гармонических колебаний* , его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha), \tag{11}$$

где $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T}$ - собственная циклическая частота;

T - период колебаний;

φ_0 - амплитуда колебаний;

α - начальная фаза колебаний.

Дважды дифференцируя уравнение (11) по времени, получаем

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\omega_0^2 \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \alpha) = -\omega_0^2 \varphi. \tag{12}$$

Сопоставляя (10) и (12), находим что

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{I_1 + I_2}. \tag{13}$$

Если размеры тела 2 во много раз меньше L - расстояния от тела 2 до оси вращения 0, можно считать его материальной точкой и принять $I_2 = mL^2$. Тогда из (13) получим

$$I_1 = mL\left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - L\right). \tag{14}$$

---

*Здесь мы не учитываем влияние момента сил трения (M_{TP}). Это приближение обусловлено тем, что при малом M_{TP} его воздействие приводит к постепенному уменьшению амплитуды колебаний и практически не влияет на их период.

Таким образом, для определения момента инерции твердого тела произвольной формы можно закрепить его на оси, проходящей через центр масс, установить на нем добавочное малое тело с известной массой m, измерить период колебаний и, зная расстояние L, по формуле (14) определить неизвестный момент инерции.

Экспериментальная часть

Задание 1

Экспериментально проверить уравнение вращательного движения твердого тела, закрепленного на оси $M_z = I_z \varepsilon$. *Определить момент инерции диска методом вращения.*

Схематически установка изображена на рисунке 3.

1 Измерить высоту опускания платформы с грузом H.

2 Определить время t, за которое груз проходит расстояние H. Измерение времени для каждого груза повторяют три раза. Затем находят среднее значение $\overline{t} = \frac{1}{3}\left(t_1 + t_2 + t_3\right)$ и заносят в таблицу 1.

Таблица 1 – Результаты эксперимента

N	1	2	3	4	5	6
m, кг						
$\overline{t}$, с						
Δt, с						
$\varepsilon, \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$						
M_z, Н·м						
$H = \ldots$, м; $r = \ldots$, м; $h = \ldots$, м						

Приближенную оценку погрешности Δt рекомендуется сделать по формуле $\Delta t = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{2}$.

3 Повторить пункт 2, добавляя грузы на платформу, для всего предложенного набора грузов.

4 По полученным данным, используя формулы (6) и (7), определить угловые ускорения ε и момент силы M_z.

5 Определить момент сил трения. Для этого платформу с грузом, поднятую на высоту H отпускают и фиксируют высоту h, на которую затем поднимется груз. M_{TP} определяют из формулы (9).

6 По полученным результатам построить график зависимости углового ускорения ε от момента сил M_z. Если работа выполнена правильно, то полученный график – прямая. Выбрав на прямой произвольную точку, определите момент инерции диска по формуле

$$I = \frac{M_z - M_{TP}}{\varepsilon}.$$

7

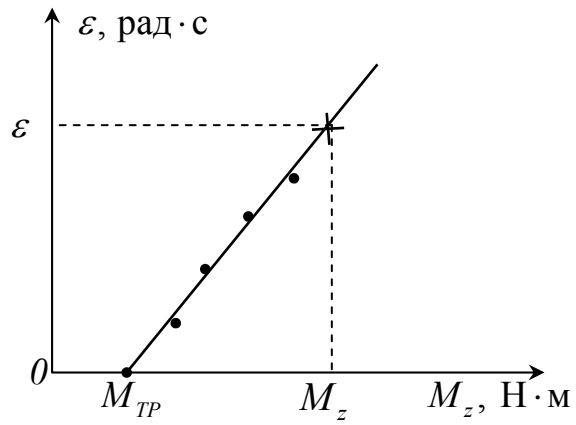


Рисунок 3 – График зависимости ε от M_z

8 Сделайте выводы по работе.

Задание 2

Определение момента инерции диска методом колебаний

1 Закрепить груз (смотри рисунок 4) на диске, вывести его из положения равновесия на угол, не превышающий 10^0. С помощью секундомера определить время t для n полных колебаний ($n = 10 \div 15$). Такие измерения провести $5 \div 7$ раз. Результаты измерений занести в таблицу 2.

Таблица 2 – Результаты эксперимента

i	1	2	3	4	5	6	7
t_i, с							
Δt_i, с							
$(\Delta t_i)^2$, с^2							
$\overline{t} = ...$, с; $t = \overline{t} \pm \Delta t = ... \pm ...$, с							

2 Используя алгоритм обработки результатов прямых измерений, рассчитать $\overline{t}$ и Δt. Определить $\overline{T}$ и ΔT по формулам $\overline{T} = \dfrac{\overline{t}}{n}$ и $\Delta T = \dfrac{\Delta t}{n}$. Результат записать в виде $T = \overline{T} \pm \Delta T$, с.

3 По формуле (14) определить момент инерции диска $\overline{I}$. Значения массы груза m и расстояние до оси вращения L заданы.

4 Оценить относительную погрешность полученного результата по формуле

$$\varepsilon = \frac{\Delta I}{I} = \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta L}{L}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta T}{T}\right)^2}.$$

Результат эксперимента представить в виде

$$I = \overline{I} \pm \Delta I, \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

Сравнить полученный результат с полученным ранее в задании 1. Сделайте выводы.

Задание 3 *(выполняется по указанию преподавателя)*

При выводе формулы (14) предполагали, что размеры тела 2 (смотри рисунок 4) во много раз меньше его расстояния до оси вращения L. Поэтому принимали его за материальную точку с моментом инерции $I_2 = mL^2$. Если это условие не выполняется, то и формула (13) неверна. Вам предлагается самостоятельно вывести более точную формулу для определения момента инерции диска. Предлагаемый груз – цилиндр. При выводе формулы использовать формулу Штейнера.

1 Закрепить на диске груз бóльшего диаметра и выполнить с ним пункты 1 и 2 задания 2.

2 Определить момент инерции диска по полученной Вами формуле и формуле (14).

3 Оценить погрешности полученных результатов и сделать выводы.

Контрольные вопросы

1 Какие физические величины используют в кинематике вращательного движения, динамике вращательного движения?

2 Напишите основное уравнение динамики вращательного движения твердого тела вокруг неподвижной оси, поясните его содержание. Дать определения для величин в него входящих.

3 Как теоретически определить момент инерции однородного твердого тела правильной геометрической формы?

4 Какие Вы знаете методы экспериментального определения моментов инерции тел?

5 Поясните цель, порядок выполнения работы и прокомментируйте полученные Вами результаты.

Список использованных источников

1 Трофимова, Т.И. Курс физики / Т.И. Трофимова.–М.: Высшая школа, 2004.–544 с., 2005, 2006, 2007.

2 Курс общей физики: В 5 кн.: Кн. 1: Механика: Учеб. Пособие для втузов / И.В. Савельев. – М.: ООО «Издательство Астрель»: ООО «Издательство АСТ», 2003. – 336 с.: ил. ISBN 5-271-01034-1 (Кн. 1).

3 Иродов, И.Е. Электромагнетизм. Основные законы / И.Е. Иродов. – М.: Лаборатория Базовых знаний, 2001. – 352 с.

4 Сивухин Д.В. Общий курс физики: Учеб. Пособие для втузов / Д.В. Сивухин. – М.: ФИЗМАТЛИТ МФТИ, 2002. Т.1: Механика. – 560 с.

Приложение А

Некоторые физические величины и формулы

Поступательное движение	Вращательное движение	Связь между величинами поступательного и вращательного движения или пояснения
Путь ΔS	Угол поворота $\Delta\varphi$	$\Delta S = r\Delta\varphi$
Скорость $\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{S}}{dt}$ $\upsilon = \frac{dS}{dt}$	Скорость угловая $\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt}$ $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$	Направления $\vec{\omega}$ и $d\vec{\varphi}$ совпадают и определяются правилом правого винта $\upsilon = \omega r$
Ускорение $\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}$ $a_\tau = \frac{d\upsilon}{dt}$ $a_n = \frac{\upsilon^2}{r}$	Ускорение угловое $\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$ $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$	При $d\omega > 0$ $\vec{\varepsilon} \uparrow\uparrow \vec{\omega}$, При $d\omega < 0$ $\vec{\varepsilon} \uparrow\downarrow \vec{\omega}$ $a_\tau = \varepsilon r$ $a_n = \omega^2 r$
Сила $\vec{F}$ F_X	Момент силы $\vec{M}_0$ (относительно полюса) M_Z (относительно оси)	$\vec{M}_0 = \left[r, \vec{F}\right]$, направление – правило правого винта $M_Z = Fr\sin\alpha = Fh$, где h - плечо силы
Масса m	Момент инерции I	$dI = r^2 dm$; $I = \int r^2 dm$
Импульс $\vec{p} = m\vec{\upsilon}$ $p_X = m\upsilon_X$	Момент импульса $\vec{L}$ (относительно полюса) $L_Z = I_Z\omega$ (относительно оси Z)	$\vec{L}_0 = \left[\vec{r}, \vec{p}\right]$, направление $\vec{L}_0$ - правило правого винта В зависимости от направления L_Z имеет знак "+" или "–"

Динамическое уравнение движения	
$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$ или $m\vec{a} = \vec{F}$ $\frac{dp_X}{dt} = F_X$ или $ma_X = F_X$	$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{M}_0$ $\frac{dL_X}{dt} = M_X$ или $I_X\varepsilon = M_X$

Кинетическая энергия	
$E = \frac{m\upsilon^2}{2}$	$E = \frac{I\omega^2}{2}$

Механическая работа	
$dA = \vec{F}d\vec{S} = FdS\cos\alpha$ $A = \int \vec{F}d\vec{S} = \int FdS\cos\alpha$	$dA = M_Z d\varphi$ $A = \int M_Z d\varphi$