Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Оренбургский государственный университет»

О.М. Калиева., А.И. Буреш

ПРИКЛАДНЫЕ ЗАДАЧИ МАТЕМАТИКИ В ЭКОНОМИКЕ И УПРАВЛЕНИИ

Рекомендовано Учёным советом федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Оренбургский государственный университет» в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся по программам высшего профессионального образования по направлению подготовки
080100.62 Экономика, 230700.62 Прикладная информатика,
100800.62 Товароведение

Оренбург

2012

УДК 330.4 (075.8)

ББК 65в631я7

К 17

Рецензент
доктор экономических наук, профессор кафедры математических методов анализа экономики Московского Государственного Открытого Университета Б.А.Лагоша.

Калиева,О.М.

К 17 Прикладные задачи математики в экономике и управлении: учебное пособие /Калиева О.М., Буреш А.И.; Оренбургский гос. ун-т. – Оренбург: ОГУ, 2012. – 109 с.
ISBN

В данном учебном пособии достаточно подробно рассматриваются математические методы и модели основанные на теории дифференциального исчисления и их приложения в экономике и управлении. В качестве успешно реализованных математических методов на базе линейной алгебры предлагаются к рассмотрению линейные балансовые модели, модели межотраслевого баланса, равновесных цен, международной торговли. Приводятся примеры, которые помогают понять теорию изучаемую по курсу «Математика» для студентов обучающихся по экономическим направлениям бакалавриата. По каждой теме предложены задания для самостоятельного выполнения. Тематика предлагаемого материала соответствует государственному образовательному стандарту по направлению подготовки ВПО 080100.62 Экономика, 230700.62 Прикладная информатика, 100800.62 Товароведение дисциплины «Математика», «Математические методы и модели в экономике». Рассмотренные решения типовых задач, отражают специфику экономических расчётов. Учебное пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения по направлению подготовки ВПО 080100.62 Экономика, 230700.62 Прикладная информатика, 100800.62 Товароведение при изучении дисциплины «Математика» и «Математические методы и модели в экономике».

УДК 330.4 (075.8)

ББК 65в631я7

ISBN

Содержание

Введение

Учебное пособие «Прикладные задачи математики в экономике и управлении» включает такие основные разделы математики, изучение которых даёт математический аппарат, наиболее активно применяемый для решения прикладных экономических и управленческих задач.

В системе экономического образования математические методы и модели занимают особое место, способствуя профессиональному формированию современных экономистов.

Цель данного учебного пособия – дать студентам научное представление о математических методах и моделях в экономике и об их практическом применении.

1 Однофакторные производственные функции

Возможности любого производства отражаются характером зависимости между объемом выпускаемой продукции и соответствующими ему затратами сырья, полуфабрикатов, энергии, капиталовложений, труда.

Определение: Всевозможные виды затрат называются факторами производства или ресурсами. Факторы производства имеют различные измерения (тонны, метры, киловатт-часы и др.). Общей единицей измерения всех ресурсов может служить рубль или другая денежная единица. Поэтому удобно иметь дело со стоимостным выражением как факторов производства, так и выпускаемой в результате их использования продукции.[1,4]

Определение: Функцию, выражающую зависимость между стоимостью выпускаемой продукции и стоимостью суммарных затрат на ее производство, называют однофакторной производственной функцией.

Определение: Функция, в которой роль независимой переменной играют затраты, а зависимая переменна определяет уровень выпуска, называется функцией выпуска. В функции затрат, наоборот, независимая переменная - выпуск, а зависимая - затраты.

Пример 1. Если затраты y прямо пропорциональны объему выпуска x, то функция затрат имеет вид

$$y = a_0 + a_1 x,\ (a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0).$$

С помощью однофакторных производственных функций описывается также зависимость объема выпускаемой продукции от затрат некоторого специфического вида ресурса (трудовые ресурсы, основные производственные фонды, объем капиталовложений, различные виды сырья и др.). При этом затраты всех других участвующих в производстве ресурсов считаются постоянными.

Пример 2. С помощью функции вида

$$y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2,\ (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0, x \geq 0)$$

можно охарактеризовать зависимость урожайности y некоторой сельскохозяйственной культуры от количества x внесенных удобрений.

Иначе, при отсутствии удобрений урожайность составляет a_0 единиц. С увеличением объема используемых удобрений урожай сначала возрастает и достигает наибольшего значения при $x = x_0$.

Дальнейшее наращивание затрат удобрений, приводит к снижению урожая и даже полной его потере при $x = x_1$ (рисунок 1).

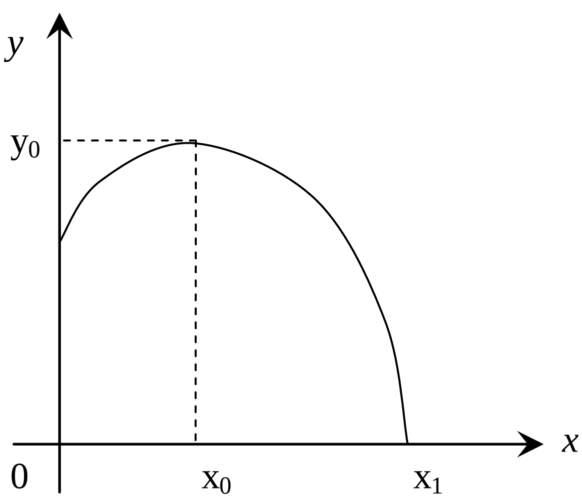


Рисунок 1 - График функции $y = a_0 + a_1 x - a_2 x^2$

Пример 3. Гиперболическая зависимость

$$y = a_0 + \frac{a_1}{x},\ (a_0 > 0, a_1 > 0, x > 0)$$

При помощи её можно моделировать зависимость затрат y на единицу выпускаемой продукции от объема производства x (рисунок 2). Величина $\frac{a_1}{x}$ уменьшается с увеличением x. Это означает, что с увеличением объема производства доля затрат неограниченно убывает. При большом объеме производства ($x \to \infty$) удельные затраты лишь незначительно отличаются от a_0 $(y \to a_0)$.

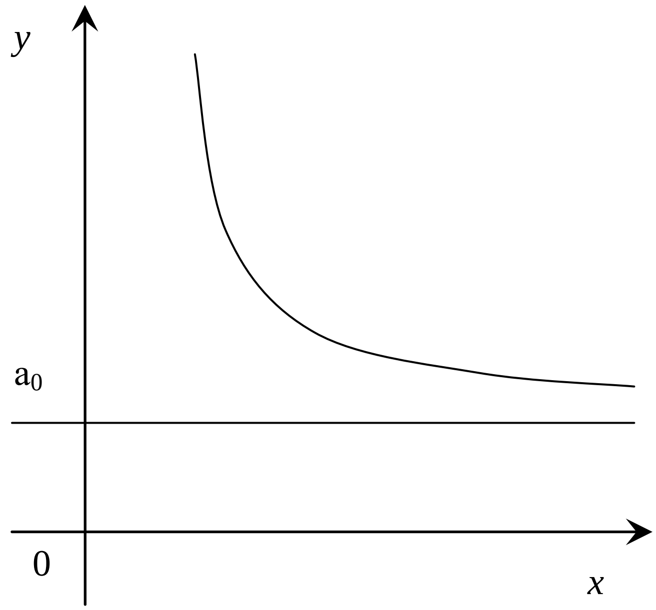


Рисунок 2 - График функции $y = a_0 + \dfrac{a_1}{x}$

Пример 4. Экспоненциальная производственная функция

$$y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}, \ (a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0)$$

возможно использовать, для исследования динамики изменения объема производств y с течением времени x (рисунок 3).

В начальный момент времени $x = 0$ объем производства $y = a_0$. Крутизна кривой на рисунке 3 зависит от коэффициентов a_0, a_1.

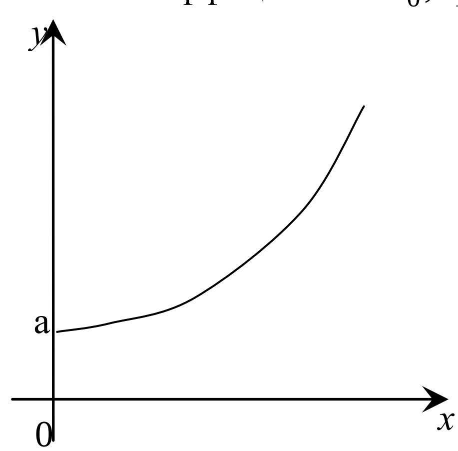


Рисунок 3 - График функции $y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}$

Зависимость $y = a_0 + a_1 e^{a_1 x}$, $(a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0)$ имеет место и в следующей ситуации. Если на банковский счет кладется сумма a_0, то через x лет на счете будет сумма y, если банк выплачивает $a_1\%$ годовых.

Пример 5. Показательная функция

$$y = a_0 - k a_1^{\ x},\ (a_0 > 0, 1 > a_1 > 0, k > 0, x \geq 0)$$

может моделировать влияние затрат переменного ресурса R на выпуск y продукции, если уровень выпуска не может быть больше некоторой предельной величины a_0. Так как $a_1 < 1$, то с ростом $x - a_1^{\ x}$ неограниченно убывает, а y возрастает. Если $x \to \infty$, то $y \to a_0$. При $x = 0$ выпуск равен $a_0 - k$ (рисунок 4).

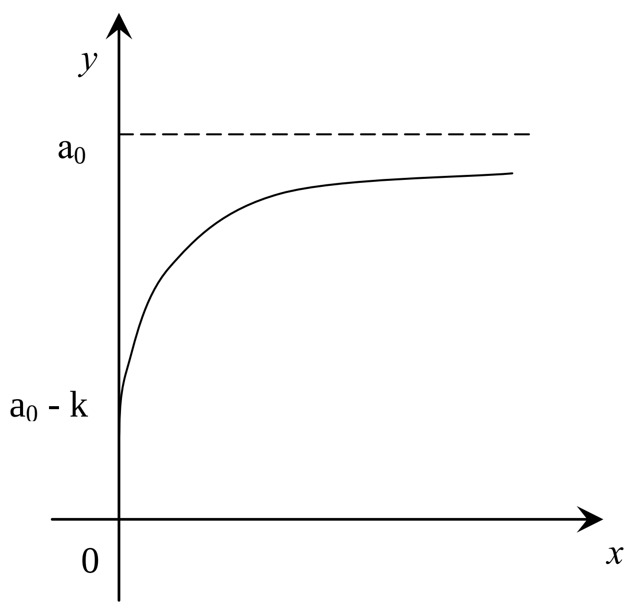


Рисунок 4 - График функции $y = a_0 - k a_1^{\ x}$

Пример 6. Степенная производственная функция

$$y = a_0 x^{a_1},\ (a_0 > 0, a_1 > 0, x \geq 0)$$

обычно описывает ситуации, в которых рост затрат x некоторого ресурса R ведет к неограниченному увеличению выпуска y. Насколько быстро растет y зависит от величины параметров a_0, a_1 (рисунок 5).

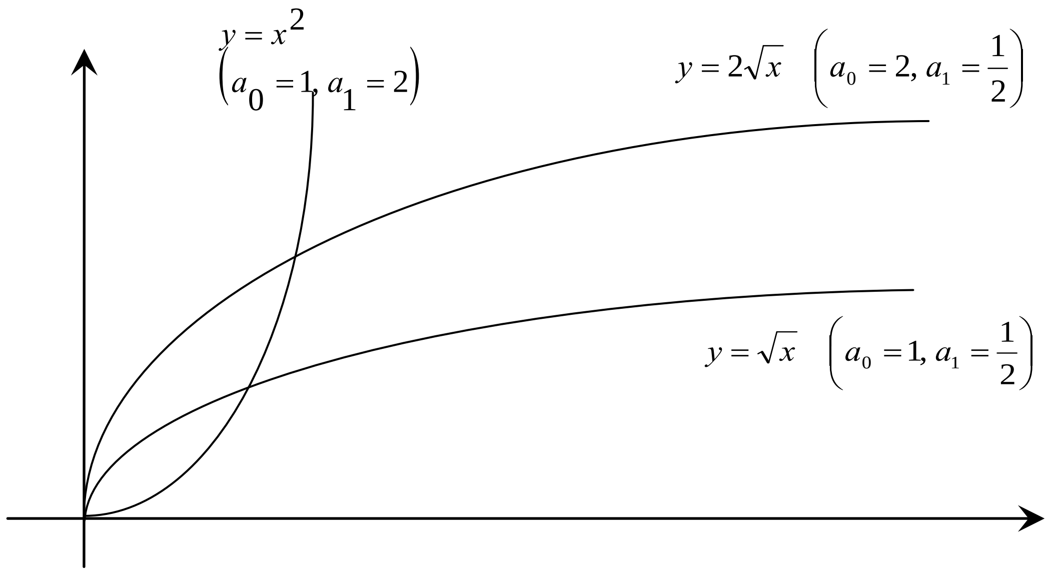


Рисунок 5 - Графики функции $y = a_0 x^{a_1}$

2 Экономический смысл производной и некоторых теорем дифференциального исчисления

Пусть функция $u = u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t. Необходимо найти производительность труда в момент времени t_0.

За период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0 = u(t_0)$ до значения $u_0 + \Delta u = u(t_0 + \Delta t)$. Тогда средняя производительность труда за этот период времени равна $\frac{\Delta u}{\Delta t}$. Очевидно, что **производительность труда в момент времени** t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период времени от t_0 до $t_0 + \Delta t$ при $\Delta t \to 0$, т.е.

$$u' = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t}.$$

Экономический смысл производной: производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Определение: Производная логарифмической функции $(\ln y)' = \dfrac{y'}{y}$ называется логарифмической производной, а так же относительной скоростью изменения функции или темпом изменения функции.[1,6]

Пример 7. Объем продукции u, произведенной бригадой рабочих, может быть описан уравнением $u = -\frac{5}{6}t^3 + \frac{15}{2}t^2 + 100t + 50$, $1 \le t \le 8$, где t - рабочее время в часах. Вычислить производительность труда, скорость и темп ее изменения через час после начала работы и за час до ее окончания.

Решение. Производительность труда выражается производной

$$u'(t) = -\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100 = z(t),$$

а скорость и темп изменения производительности – соответственно производной $z'(t)$ и логарифмической производной $T_z = [\ln z(t)]'$:

$$z'(t) = -5t + 15 \left(\text{ед./ч}^2\right),$$

$$T_z = [\ln z(t)]' = \frac{z'(t)}{z(t)} = \frac{-5t + 15}{-\frac{5}{2}t^2 + 15t + 100} = \frac{2t - 6}{t^2 - 6t - 40} \left(ед./ч\right).$$

В заданные моменты времени $t_1 = 1 \, и \, t_2 = 8$, $t_2 - t_1 = 8 - 1 = 7$. Соответственно получим:

$$z(1) = 112{,}5 \left(ед./ч\right), \; z'(1) = 10 \left(ед./ч^2\right), \; T_z(1) = 0{,}09 \left(ед./ч\right) \, и \; z(7) = 82{,}5 \left(ед./ч\right),$$

$$z'(7) = -20 \left(ед.ч^2\right), \; T_z(7) = -0{,}24 \left(ед.ч\right).$$

Вывод. К концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменение знака $z'(t)$ и логарифмической производной с плюса на минус свидетельствует о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется её снижением в последние часы.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной.

Обозначим через x объем производства некоторой продукции, через K - суммарные затраты или издержки производства. Производственная функция (функция затрат) описывает зависимость издержек производства K от объема x выпускаемой продукции:

$$K = f(x).$$

Если объем производства увеличится на Δx единиц, то затраты возрастут на $\Delta K = f(x+\Delta x) - f(x)$ единиц.

Среднее приращение издержек выражается отношением $\frac{\Delta K}{\Delta x}$.[3,6]

Определение: Под **предельными издержками** производства понимают предел среднего приращения издержек при безграничном уменьшении Δx, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to \infty} \frac{\Delta K}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to \infty} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \qquad (1)$$

Предел (1) выражает дополнительные затраты на производство продукции при увеличении объема производства на малую единицу, если исходный объем производства составляет x единиц.

Экономический смысл производной в данной точке: производная выражает предельные издержки производства при данном объеме и характеризует приблизительно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример 8. Допустим, функция затрат имеет вид:

$$K = 2x + \ln(x+1).$$

Определим предельные издержки производства при данном объеме выпуска $x_1 = 2, x_2 = 9$.

Решение. $K^{'}(x)=2+\dfrac{1}{x+1}$, тогда $K^{'}(2)=2\dfrac{1}{3}, K^{'}(9)=2{,}1$.

Сравним $K^{'}(9) и K^{'}(2)$, $K^{'}(9)<K^{'}(2)$. То есть, $K^{'}(x_2)<K^{'}(x_1)$, если $x_2>x_1$.

Вывод. С увеличением объема производства предельные издержки (дополнительные затраты на следующую за x малую единицу выпуска) убывают. Увеличение выпуска на малую единицу требует все меньших дополнительных затрат.

Пример 9. Пусть зависимость спроса на товар от цены на него выражается формулой $d=\dfrac{100}{p+1}$. Определим скорость изменения спроса, когда цена на товар составляет 1 денежная единица, 4 денежных единиц.

Решение. Скорость изменения любой функции равна ее производной. В данном случае

$$d^{'}(p)=-\frac{100}{(p+1)^2}.$$

Найдём $d^{'}(1)=-25, d^{'}(4)=-4$.

Вывод. Знак “минус” показывает, что с увеличением цены спрос на товар падает.

Пример 10. Функция издержек имеет вид $C(x)=0{,}1^3-0{,}2^2+10x+2000$. Найти предельные издержки и посчитать их значение в точке $x=10$.

Решение.

$$C'(x)=0{,}03x^2-0{,}2x+10$$

$$C'(10)=3-4+10=9.$$

Пользуясь формулой для приближенного значения приращения функции

$$\Delta C\approx dC=C'(x)\Delta x,$$

можно интерпретировать величину $C'(10)$: если произведено 10 изделий, то дополнительные издержки и ΔC по производству одиннадцатого изделия приближенно равны $C'(10)=9$.

Аналогично находятся предельная выручки (доход) $R'(x)$.

Экономический смысл теоремы Ферма

Теорема Ферма. Если дифференцируемая на промежутке X функция $y=f(x)$ достигает наибольшего или наименьшего значения во внутренней точке x_0 этого промежутка, то производная функции в этой точке равна нулю, т.е. $f'(x_0)=0$.[5]

Один из базовых законов теории производства звучит так**:** ***оптимальный для производства уровень пуска товара определяется равенством предельных издержек и предельного дохода.***

Обозначим функцию прибыли за $C(x)$. Тогда $C(x)=D(x)-S(x)$, где $D(x)$ - функция дохода, $S(x)$ - функция издержек. Очевидно, что оптимальным уровнем производства является тот, при котором прибыль максимальна, т.е. такое значение выпуска x_0, при котором функция $C(x)$ имеет экстремум (максимум). По теореме Ферма в этой точке $C'(x)=0$. Но $C'(x)=D'(x)-S'(x)$, поэтому $D'(x_0)=S'(x_0)$, т.е. предельные издержки $S'(x_0)$ и предельный доход $D'(x_0)$ равны при оптимальном выпуске x_0.[5, 7]

Рассмотрим другое важное понятие теории производства - это уровень наиболее экономичного производства, при котором средние издержки по производству минимальны. Соответствующий экономический закон гласит: ***уровень наиболее экономичного производства определяется равенством средних и предельных издержек.***[2, 6]

Получим это условие как следствие теоремы Ферма. Средние издержки определяются как $\frac{S(x)}{x}$, (издержки по производству товара, деленные на произведенное количество товара). Минимум этой величины достигается в критической точке функции $y=\frac{S(x)}{x}$, т.е. при условии $y'=\frac{S'(x)x-S}{x^2}=0$, откуда $S'(x)x-S=0$, т.е. $S'(x)=\frac{S}{x}$.

Экономический смысл теоремы Лагранжа

Теорема Лагранжа. Если функция $y=f(x)$ непрерывна на промежутке $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b), то существует по крайней мере одна точка $c\in(a,b)$, такая, что справедливо неравенство:

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a).$$

Экономический смысл теоремы Лагранжа. Пусть $y=f(x)$ описывает зависимость выпуска y от затрат x некоторого специфического ресурса. Если объем затрат увеличили с a до b единиц, то разность $f(b)-f(a)$ выражает соответствующее изменение выпуска.

Отношение

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \qquad (2)$$

показывает на сколько единиц в среднем изменяется выпуск продукции, если затраты возросли на одну единицу. Другими словами, (2) - средняя производительность ресурса на промежутке $[a,b]$.

Предельная производительность ресурса равна значению производной функции выпуска при данном уровне затрат. Если затраты ресурса r составляют c

единиц, то $f'(c)$ - соответствующая им предельная производительность r.

На основании теоремы Лагранжа можно утверждать, что для процесса производства описываемого функцией выпуска $y = f(x)$, которая непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема в (a,b), существует, по крайней мере, один уровень затрат c, при котором предельная производительность соответствующего ресурса совпадает с его средней производительностью на $[a,b]$.[1,2,4,7]

Экономический смысл выпуклости функции

Теорема (Закон убывающей доходности): С увеличением производства дополнительная продукция, полученная на каждую новую единицу ресурса (трудового, технологического и т.д.), с некоторого момента убывает.

Иначе говоря, величина $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, где Δx - приращение ресурса, а Δy - приращение выпуска продукции, уменьшается при увеличении x. Таким образом, закон убывающей доходности формулируется так: функция $y = f(x)$, выражающая зависимость выпуска продукции от вложенного ресурса, является функцией выпуклой вверх.[2,6]

Теорема (Закон убывающей полезности): С ростом количества товара дополнительная полезность от каждой новой его единицы с некоторого момента убывает.

Вывод. Функция полезности $U = U(x)$, где x - товар, U - полезность, есть величина субъективная для каждого отдельного потребителя, но достаточно объективная для общества в целом. Очевидно, закон убывающей полезности можно переформулировать так: функция полезности является функцией выпуклой вверх.[6,7]

Пример 11. Компании требуются произвести 1000 единиц некоторого товара в год. Издержки подготовки производства одной партии составляют 320 руб. издержки производства товара составляют 8 руб. за единицу продукции, а издержки хранения – 1 руб. за единицу. Найти такое число единиц товара в партии x, при котором совокупные издержки производства и хранения были бы минимальными.

Решение. Издержки производства составляют

$$\frac{1000}{x}\cdot 320+1000\cdot 8$$

где $\frac{1000}{x}$ – число партий товара за год.

Издержки хранения равны $\frac{x}{2}\cdot 1$. Совокупные издержки составляют

$$\frac{320000}{x}+8000+\frac{x}{2}$$

Находим минимальное значение:

$$C'(x)=-\frac{320000}{x}+\frac{1}{2}$$

$$C'(x)=0$$

$$x=800$$

Далее определим

$$C''(x)=\frac{640000}{800^3}$$

$$C''(800)=\frac{640000}{800^3}>0$$

Следовательно, при $x=800$ функция имеет минимум, а в партии должно быть 800 единиц товара.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите предельную производительность ресурса (скорость изменения функции), если функция выпуска имеет вид:

$$x = 20 + 8r - r^2,$$

а затраты ресурса составляют: 1) 2 условных единиц, 2) 5 условных единиц.

Определите, начиная с какого момента увеличение затрат данного ресурса становится экономически невыгодным. Приведите примеры экономических ситуаций, которые могут быть описаны с помощью функций выпуска указанного вида.

2. Определите скорость изменения спроса (предельный спрос) при цене в 1 денежную единицу; 3 денежных единиц; 10 денежных единиц, если зависимость спроса на товар от цены на него выражается формулой

$$d = 200 + \frac{p-1}{p^2+3}.$$

3. Объем продаж видеомагнитофонов задается следующей функцией времени:

$$V(t) = 5000 + 1000t^2 - 100t^2,$$

где t –время, измеряемое в месяцах;

V - количество видеомагнитофонов, проданных за месяц.

Найти скорость изменения объема продаж в момент времени:

a) $t = 0$; b) $t = 3$; c) $t = 6$.

4. Население некоторой страны растет по следующему закону:

$$P(t) = 100000(1+t)^2,$$

где время t измеряется в годах. Найти скорость изменения населения в момент времени:

a) $t = 0$

b) $t=2$

c) $t=5$

5. Эпидемия медленно распространяется среди населения. Число заболевших определяется формулой $A(t)=200\left(t^{\frac{5}{2}}+t^2\right)$, где t – число недель, прошедших с момента начала эпидемии. Найти скорость изменения числа заболевших в момент времени:

a) $t=1$

b) $t=4$

c) $t=9$

6. Предположим, что издержки получения питьевой воды задана формулой $C=\frac{10000}{p}-100$, где p – процентное содержание загрязняющих воду примесей. Найти скорость изменения издержек производства, если примеси составляют 5%.

7. Предположим, что спрос на некоторую продукцию зависит от цены p следующим образом: $D(p)=\frac{25000}{p^2}-\frac{1}{5}$. Найти скорость изменения спроса, если цена равна:

a) 10

b) 25

8. Издержки удаления p процентов загрязнений из использования воды равны $C(p)=\frac{7600p}{105-p}$. Найти скорость изменения издержек в точке $p=52{,}5$.

9. Спрос на некоторый товар зависит от цены p следующим образом: $D(p)=\frac{100}{\sqrt{p}}-\frac{1}{4}$. Найти скорость изменения спроса, если цена равна:

a) 100

b) 16

10. Выручка от оптовой продажи радиоприемников определяется функцией $R(x)=75-0,05x^2$, $0<x<750$, где x- число проданных радиоприемников. Найти предельную выручку, если продано:

a) 100

b) 200

11. Найти предельную выручку для следующих функций $R(x)$:

a) $R(x)=2x-0,01x^2$

b) $R(x)=4x-0,005x^{\frac{3}{2}}$

c) $R(x)=0,2x-10^{-2}x^2-10^{-4}x^{\frac{5}{2}}$

d) $R(x)=50x-2x^3\left(\sqrt{x}+1\right)$

12. Найти предельную выручку, если заданы уравнение спроса и значение цены на некоторую продукцию:

a) $10x+p=100 \quad p=80$

b) $\sqrt{x}+3p=50 \quad p=10$

c) $x^{\frac{3}{2}}+10p=94 \quad p=38,6$

d) $2p+x+0,02x^2=1000 \quad p=494$

13. В задаче 13 дополнительно заданы функция издержек и точка:

a) $C(x)50+3x \quad x=3$

b) $C(x)=40+x \quad x=6$

c) $C(x)=100+x^{\frac{3}{2}} \quad x=4$

d) $C(x)=70+0,1x^2 \quad x=25$

Найти предельную прибыль и вычислить её значение в заданной точке.

14. В задаче 13 (пункты a,b,d) найти максимальное значение прибыли. При какой цене p прибыль принимает свое максимальное значение?

15. Количество произведенной за день продукции $Q(x)$ зависит от числа рабочих в сборочном цехе следующим образом:

$$Q(x) = 100x + 3x^2$$

где x – число рабочих

a) Если в сборочном цехе работали 70 человек, оценить изменение количества произведенной за неделю продукции, вызванное добавлением одного рабочего.

b) Найти точное значение прироста выработки за неделю, вызванного добавлением одного рабочего.

16. Месячное производство некоторого продукта $Q(x)$ зависит от инвестиции следующим образом: $Q(x) = SOCx^{\frac{3}{2}}$

где x - инвестированный капитал в миллионах рублей.

Вычислить точно и приближенно прирост производства, вызванный дополнительным вложением 1 млн. руб., если первоначальные инвестиции составляли 100 млн. руб.

17. Пусть спрос q на некоторый товар зависит от цены p следующим образом:

$$q = \frac{40000}{p^2} - 1, \quad p > 0.$$

Вычислить точно и приближенно изменение спроса, если цена вырастет:

a) с 50 до 51

b) со 100 до 101

18. Издержки производства некоторой продукции имеют вид

$$C(x) = 100 + 3x + x^2$$

где x – число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 20. Найти функцию предельной прибыли и её значение в точке 30. Объяснить экономический смысл значения $P'(30)$. Вычислить и объяснить смысл величины $P(31)-P(30)$.

19. Издержки производства некоторой продукции имеют вид $C(x)=150+10x+0{,}01x^2$ где x – число единиц продукции. Цена на этот товар составляет 36. Найти функцию прибыли и функцию предельной прибыли. Объяснить экономический смысл величины $P'(15)$. Вычислить и объяснить смысл величины $P(16)-P(15)$.

20. Функция издержек производства некоторой продукции определяется следующей формулой:

a) $C(x)=2000+100x+0{,}1x^2$

b) $C(x)=3500+150x+0{,}2x^2$

где x – число единиц произведенной продукции.

Найти функцию предельных издержек, средние издержки производства единиц продукции и скорость изменения средних издержек. При каком уровне производства скорость изменения средних издержек равна нулю?

21. Фотограф заметил, что при цене 110 руб. за набор фотографий на паспорт он делает 45 наборов в день. Если повысить цену до 120 руб., то число клиентов снижается до 40. Считая линейным соотношение между спросом и ценой, найти функцию выручки. При каком значении цены выручка достигает своего максимального значения?

22. Производитель телевизоров продает 100 телевизоров в неделю при цене 1800 руб. за каждый. Если цена повышается до 1900 руб. то объем продаж снижается до 80 телевизоров. Фиксированные издержки производства телевизора составляют 50 тыс. руб. в неделю, а переменные издержки – 800 руб. за один телевизор. Полагая линейным закон спроса, найти функцию прибыли. Какова максимальная прибыль и при какой цене она достигается?

23. В гостинице 60 номеров. При цене 300 руб. за номер в сутки бывает занято 50 номеров. Если цена снижается до 280 руб. за номер, то занято 55 номеров. Найти максимальное значение выручки, предполагая линейным закон спроса. При какой цене достигается это значение?

24. Ресторан рассчитан не более чем на 100 посетителей. При цене 120 руб. за обед бывает 70 посетителей, а при цене 100 руб. за обед число посетителей возрастает до 80. Фиксированные издержки приготовления обеда составляют 900 руб. в день, а переменные – 40 руб. за обед. Найти функцию прибыли, предполагая линейной зависимость между числом посетителей и ценой обеда. Каково максимальное значение прибыли?

25. Цена на некоторый товар составляет 250 руб. Издержки производства этого товара равны $120x + x^2$, где x – число единиц произведенного товара. Найти максимальное значение прибыли.

26. Издержки производства некоторой продукции определяются функцией $5x^2 + 80x$, где x – число единиц произведенной за месяц продукции. Эта продукция продается по цене 280 руб. за изделие. Сколько изделий нужно произвести и продать, чтобы прибыль была максимальна.

27. Пусть известны функции соответственно спроса и предложения на некоторый товар на конкретном рынке:

$p = 2x + 50$

$p = -x + 200$

где x – число единиц товара.

Предположим, что среднее издержки производства одной единицы товара определяются следующей функцией: $\bar{C}(x) = \frac{500}{x} + 70 + 2x.$ Найти максимальное значение прибыли.

28. На монопольном рынке спрос на некоторый товар определяется следующей функцией:

$p = 780 – 2x – 0{,}1x^2$,

где x – число единиц товара.

Найти максимальную прибыль, если среднее издержки производства этого товара составляют:

$$\bar{C}(x) = \frac{1000}{x} + 500 + 2x$$

При каком значении цены прибыль максимальна?

29. Функция потребления некоторой страны имеет вид

$C(y) = 6 + 0{,}36y + 0{,}46\, y^{\frac{4}{5}}$,

где y - совокупный национальный доход.

Найти а) предельную склонность к потреблению и б) предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 243.

30. Найти предельную склонность к сбережению, если национальный доход составляет 15 млрд., а функция потребления имеет следующий вид:

а) $C(y) = 10 + 0{,}47y + 0{,}36\, y^{\frac{4}{5}}$;

b) $C(y) = 11 + 0{,}36y + 0{,}14\, y^{\frac{4}{5}}$.

31. Компании нужно произвести 15 тыс. единиц товара в год. Подготовка к производству одной партии составляет 150 руб. Производство одной единицы товара обходится в 7 руб., а издержки хранения составляют 0,5 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

32. Компания нашла покупателя, согласного покупать у нее 20 тыс. единиц некоторого товара в год. Подготовка к производству одной партии составляет 30 руб. Производство одной единицы товара обходится в 9 руб., а издержки хранения составляют 0,3 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

33. Компания должна произвести 96 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 1500 руб., а издержки производства одной единицы продукции – 10 руб. Хранение обходится в 0,5 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

34. Компания должна произвести 300 тыс. единиц продукции в год. Издержки подготовки к производству одной партии составляют 720 руб., а издержки производства одной единицы продукции – 7 руб. Хранение обходится в 3 руб. за единицу товара в год. Найти число единиц товара в партии, при котором совокупные издержки производства и хранения будут минимальны.

35. Найти эластичность функции спроса:

a) $p + 5x = 100$ в точке $p = 50$

b) $3p + 4x = 120$ в точках $p = 15$ *и* $p = 20$

c) $p^2 + p + 4x = 40$ в точках $p = 2$ *и* $p = 4$

Как увеличение цены повлияет на выручку? При каких значениях p спрос является эластичным?

36. Найти эластичность функции спроса $xp = 5$ в точке $p = 10$. Как увеличение цены повлияет на выручку? Какой это тип эластичности?

37. Для следующих функций спроса найти значения p, при которых спрос является эластичным:

a) $2p + 3x = 12$

b) $x = 50(10 - \sqrt{p})$

c) $p = ax + b \ (a < 0, b > 0)$

38. Функция спроса имеет вид $p = \sqrt{3600 - x^2}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 50$.

б) Посчитать приближенно процентное изменение спроса, если цена выросла на 11%

39. Уравнение спроса имеет вид $p = 20 - 0{,}1\sqrt{x}$.

а) Найти эластичность спроса в точке $p = 18$.

б) Вычислить приближенно процентное изменение спроса если цена уменьшилась на 2%.

40. Уравнение спроса имеет вид $x = 100\sqrt{4-p}$. Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет

а) 150 единиц,

б) 50 единиц.

41. Уравнение спроса имеет вид $(p+1)\sqrt{x+1} = 100$.

Найти эластичность и выяснить, как повлияет увеличение цены на выручку, если спрос составляет:

а) 24 единицы,

б) 15 единиц.

42. Для следующих функций спроса и предложения найти значение налога на единицу товара, максимизирующее доход государства:

а) $p = -3x + 124$, $p = 2x + 14$;

b) $p = 250 - 2x^2$, $p = 700 + 3x$.

43. Найти значение налога, максимизирующее доход государства, если функции спроса и предложения имеют вид:

а) $p = 800 - 0{,}5x$, $p = 700 + 2x$;

b) $p = 8200 - 5x^2$, $p = 700 + 20x^2$

3 Исследование функций в экономике. Предельные производительность, спрос, предложения

На основании экономического смысла производной и аппарата дифференциального исчисления возникает множество экономических задач, связанных с исследованием функций. Особый интерес, представляют экономические понятия и задачи на предельную производительность ресурса, предельный спрос продукции от цены. Приведем определение и примеры таких задач.[2, 7, 8]

Пример 12. Предприятие производит x единиц некоторой однородной продукции в месяц. Исследовать финансовые накопления, если зависимость финансовых накоплений предприятия от объема выпуска выражается формулой

$$F = -0{,}02x^3 + 600x - 1000.$$

Решение.

1. Из экономического смысла независимой переменной (т.е. область определения переменной) следует, что она неотрицательна, т.е. $D_F = [0, \infty)$.
2. $F' = -0{,}06x^2 + 600$. $F' = 0$, при значениях $x = -100$ и $x = 100$. На промежутке $(0{,}100)$ производная положительна, на $(100, \infty)$ - отрицательна. В точке $x = 100$ функция достигает максимума:

$$F_{\max} = F(100) = 39000.$$

Вывод. Финансовые накопления предприятия растут с увеличением объема производства до 100 единиц. При $x = 100$ они достигают максимума, равного 39000 денежных единиц. Дальнейший рост производства приводит к сокращению финансовых накоплений.

Пример 13. Цементный завод производит x тонн цемента в день. По договору он должен ежедневно поставлять строительной фирме не менее 20 т цемента. Производительные мощности завода таковы, что выпуск цемента не может превышать 90 т в день. Определить, при каком объеме производства удельные затраты будут наибольшими (наименьшими), если функция затрат имеет вид:

$$K = -x^3 + 98x^2 + 200x.$$

Решение. Напомним, что удельные затраты - это средние затраты на единицу продукции, данном случае на 1 т цемента. При объеме производства в x т удельные затраты составят:

$$\frac{K}{x} = -x^2 + 98x + 200.$$

Задача сводится к отысканию наибольшего, наименьшего значения функции

$$y = -x^2 + 98x + 200$$

на промежутке $[20,90]$.

1. Из экономического смысла независимой переменной следует, что она неотрицательна, т.е. $Dy = [0, \infty)$.

2. $y' = -2x + 98$. $Y' = 0$, при значении $x = 49$. На промежутке $[20,49]$ производная положительна, на $[49,90]$ - отрицательна. В точке $x = 49$ функция достигает максимума: $Y_{\max} = Y(49) = 2601$. На концах промежутка значения функции соответственно равны $Y(20) = 1760$, $Y(90) = 820$.

Ответ: $\max\limits_{[20,90]} \frac{K}{x} = f(49) = 2601$, $\min\limits_{[20,90]} \frac{K}{x} = f(90) = 820$.

Пример 14. Требуется оградить забором прямоугольный участок земли площадью 294 кв. м. и затем разделить его на две равные части перегородкой. Каковы должны быть размеры участка, чтобы на постройку забора и перегородки было истрачено наименьшее количество материала?

Решение. Обозначим ширину прямоугольного участка через x, а длину через y.

Из условий задачи следует, что $x \in (0, +\infty)$.

Поскольку площадь участка равна 294 кв. м., то

S= $x \cdot y$= 294 (кв.ед.)

Откуда получаем, что

$$y = \frac{294}{x}$$

а общая длина P(x)всего загона:

$$P(x) = 3x + 2y = 3x + 2\frac{294}{x}$$

Таким образом, общая длина ограды представляет собой функцию от одной переменной x, и наша задача свелась к нахождению наименьшего значения этой функции в интервале $(0, +\infty)$.

Ответ: $x = 14\ м, \quad y = 21\ м$.

Изменение предельной производительности ресурса

Пусть в производстве продукции используется несколько видов сырья. Однако затраты всех ресурсов строго регламентированы технологией производства. Только один ресурс (например, затраты труда) может изменяться, оказывая влияние на объем производства. Зависимость выпуска продукции x от затрат этого специфического ресурса r описывается формулой

$$x = f(r).$$

Определение: Скорость изменения этой функции выражается ее производной и называется предельной производительностью ресурса.

Замечание: Если речь идет о затратах труда, то $f'(r)$ - предельная производительность труда. Значение $f'(r)$ меняется в зависимости от r, т.е. речь идет о новой функции аргумента r, а именно о

$$V = f'(r).$$

Естественно, возникает вопрос: какова скорость изменения V ? Скорость изменения любой функции описывается ее производной. Если функция $V = f'(r)$ дифференцируема, то существует

$$V' = (f'(r))'.$$

Определение: Скорость изменения предельной производительности ресурса называется темпом изменения выпуска при изменении затрат этого ресурса.

Аналогично определяется темп изменения спроса от цены $d''(p)$, где d – спрос на продукцию, p – цена продукции.[15, 4,10]

Пример 15. Если формула

$$d = \frac{100}{p+1}$$

выражает зависимость спроса на товар от цены на него, то

$$d' = -\frac{100}{(p+1)^2}$$

- скорость изменения спроса, или предельный спрос.

Спрос является убывающей функцией цены, т.к. $d' < 0$ при любом значении p. Темп изменения спроса

$$d'' = \frac{200}{(p+1)^3} > 0.$$

Вывод. Спрос убывает с нарастающей скоростью. Чем больше цена, тем быстрее уменьшается спрос на товар. Если $p_2 > p_1$, то $d'(p_2) > d'(p_1)$.

Определение: Монотонная функция f возрастает (убывает) на $[a,b]$ все быстрее, если скорость ее изменения является возрастающей функцией. Если же скорость изменения функции f убывает на $[a,b]$, то говорят, что функция f возрастает (убывает) на $[a,b]$ все медленнее.

Теорема. Для того, чтобы функция $y = f(x)$, имеющая на промежутке $[a,b]$ первую и вторую производные, возрастала (убывала) на нем все быстрее, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ для всех $x \in [a,b]$.

Пример 16. Предположим, что на предприятии издержки производства вычисляются по формуле

$$K = \frac{1}{3}x^3 - 5x^2 + 80x + 300.$$

Предельные издержки

$$K' = x^2 - 10x + 80$$

положительны при любом объеме производства x. Это следует из того, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 - 10x + 80$ отрицателен, а старший коэффициент 1 положителен. Такой трехчлен может принимать только положительные значения.

Вычислим $K'' = 2x - 10$. Легко установить, что $K'' > 0$, если $x > 5$, и $K'' < 0$ при $x < 5$.

Вывод. Если выпуск продукции не превышает 5 условных единиц, то издержки производства возрастают все медленнее. Если же $x > 5$, то издержки растут все быстрее.[2,6]

Пример 17. Фиксированные издержки составляют 10 тыс. руб. в месяц, переменные издержки – 30 руб., выручка – 50 руб. за единицу продукции. Составить функцию прибыли и построить её график.

Решение.

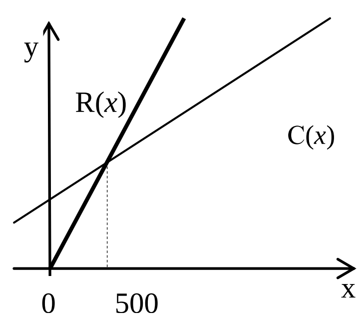


Рисунок 6

C(x) = F+V,

F = 10 000, V = 30x,

C(x) = 10 000 + 30x, R(x) = 50x (рисунок 6).

Таким образом, прибыль P(x) = 50x - 30x - 10 000 = 20x - 10 0000

При малых значениях x прибыль отрицательна, т.е. производство убыточно. При увеличении x прибыль возрастает, в точке x = 500 она обращается в ноль и после этого становится положительной (рисунок 6).

Принцип акселератора

Предположим, что технология процесса производства не меняется, а основные производственные фонды используются полностью.

Введем следующие обозначения:

F - размеры основных производственных фондов в момент времени t,

Q - объем производства предметов потребления с помощью основных производственных фондов F.

Предположим, что масса основных фондов пропорциональна объему производства:

$$F = qQ,$$

где q - постоянный коэффициент пропорциональности $(q > 0)$. Следовательно,

$$\frac{dF}{dt} = q\frac{dQ}{dt}.$$

Это означает, что прирост основных производственных фондов в единицу времени пропорционален приросту выпуска предметов потребления в единицу времени.

Прирост основных фондов в единицу времени есть результат капиталовложений K. Можно, следовательно, записать, что в момент времени t

$$K = q\frac{dQ}{dt}, \tag{3}$$

т.е. капиталовложения пропорциональны приросту объема производства.[1,2,4,6,7,8]

Пример 18. Объем производства предметов потребления в период времени $[0,t_1]$ возрастает все быстрее, а с момента t_1 до t_2 возрастает все медленнее. Дать характеристику зависимости капиталовложений от спроса на предметы потребления.

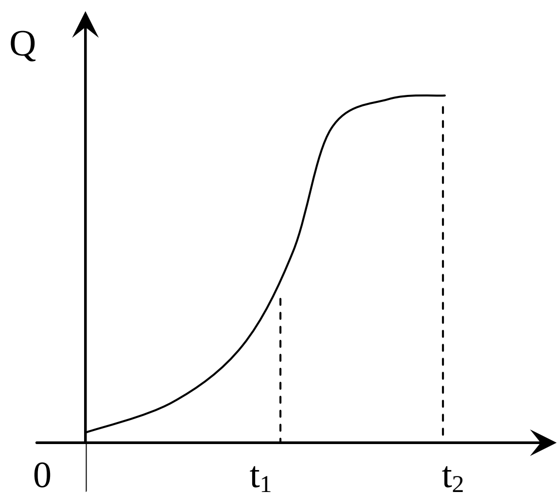


Рисунок 7 - График функции Q

Кривая производства предметов потребления имеет вид, показанный на рисунке 7.

Решение. Для $t \in (0,t_1)$ $Q''(t) > 0$, а для $t \in (t_1,t_2)$ $Q''(t) < 0$. Это означает, что функция $\frac{dQ}{dt}$ возрастает в промежутке $(0,t_1)$ и убывает для $t \in (t_1,t_2)$.

Из (3) и условия $q > 0$ следует, что K имеет такой же характер изменения, что и $\frac{dQ}{dt}$. Поэтому функцию $K = \tilde{K}(t)$ можно изобразить кривой, приведенной на рисунке 8.

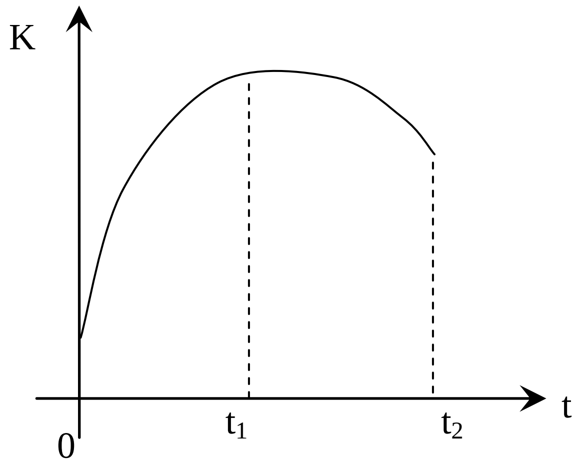


Рисунок 8 - График функции K

Поведение графиков функций $Q = \tilde{Q}(t), K = \tilde{K}(t)$ позволяет сделать следующие **выводы:**

1. Если спрос на предметы потребления (или, то же самое, на производство) возрастает в каком-либо периоде все быстрее (промежуток $(0, t_1)$), то возрастают и капиталовложения. Следовательно, растет спрос на предметы производства, необходимые для увеличения выпуска предметов потребления.

2. Если спрос на предметы потребления (или их производство) с какого-то момента начинает расти все медленнее (промежуток (t_1, t_2)), это вызовет уменьшение размеров капиталовложений, т.е. падение спроса на средства производства.

3. Удержание капиталовложений на уровне, достигнутом в момент времени t_1, возможно лишь в случае, если спрос на предметы потребления возрастает постоянным темпом, достигнутым в момент времени t_1.

Приведенное положение называют **принципом ускорения** или **принципом акселератора**.[2,3,5,6,7]

Пример 19. Зависимость спроса от цены описывается функцией

$$d(p) = e^{-2p^2} \quad (p \geq 0).$$

Исследовать функции спроса и выручки от цены, построить их графики.

Решение. Спрос убывает с возрастанием цены, так как

$$d'(p) = -4pe^{-2p^2} < 0.$$

Темп изменения функции $d''(p) = 4e^{-2p^2}(4p^2 - 1)$ отрицателен, если $p < \frac{1}{2}$, и положителен, когда цена больше $\frac{1}{2}$. График изображен на рисунке 9.

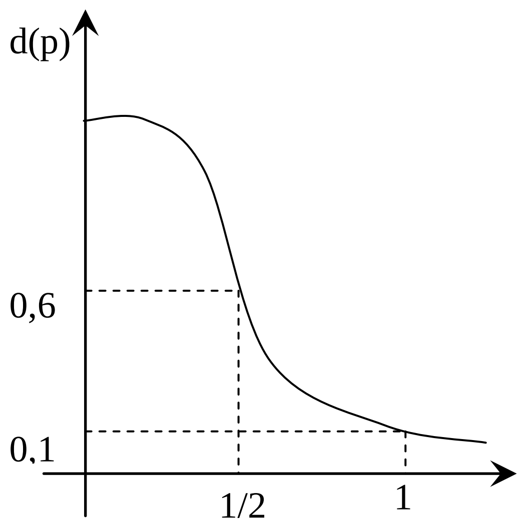


Рисунок 9 - График функции $d(p)$

Выручка от реализации товара по цене p составляет:

$$U(p) = p \cdot d(p) = pe^{-2p^2} \text{ ден.ед.}$$

Производная этой функции

$$U'(p) = e^{-2p^2}(1 - 4p^2)$$

положительна, если $p < \frac{1}{2}$, и отрицательна для $p > \frac{1}{2}$. Это означает, что с ростом цены выручка вначале увеличивается (несмотря на падение спроса) и при $p = \frac{1}{2}$ достигает максимального значения, равного

$$U_{\max} = U(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}3.$$

Дальнейшее увеличение цены не имеет смысла, так как оно ведет к сокращению выручки.

Темп изменения выручки

$$U''(p) = 4pe^{-2p^2}(4p^2 - 3)$$

положительный, если $p > \frac{\sqrt{3}}{2}$, и отрицательный, пока $p < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

На промежутке $(0, \frac{1}{2})$ функция возрастает все медленнее. Соответствующая часть графика выпукла. Как уже отмечалось, дальнейшее повышение цены невыгодно.

Для $p > \frac{\sqrt{3}}{2}$ выручка убывает все быстрее, темп приближается к нулю при неограниченном увеличении цены. На промежутке $(\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty)$ функция $U(p)$ вогнута. В точке $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0.2)$ график перегибается (рисунок 9).

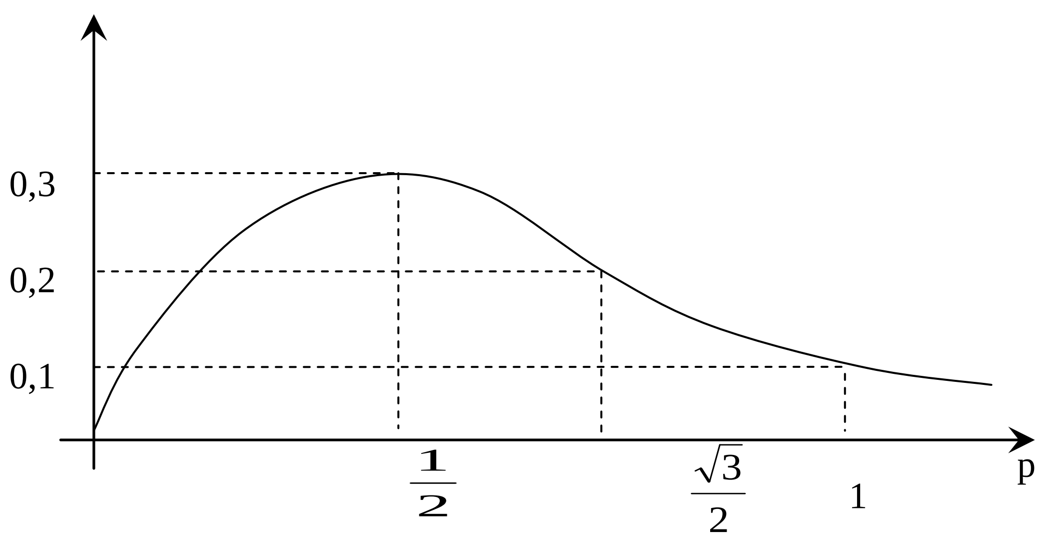


Рисунок 10 - График функции выручки $U(p)$

Пример 20. Законы спроса и предложения на некоторый товар определяются уравнениями

$p = -2x + 12$

$p = x+3$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Найти точку равновесия после введения налога, равного 3. Найти увеличение цены и уменьшение равновесного объема продаж.

в) Какая субсидия приведет к увеличению объема продаж на 2 единицы?

г) Вводится пропорциональный налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия и доход правительства.

д) Правительство установило минимальную цену, равную 7. Сколько денег будет израсходовано на скупку излишка?

Решение.

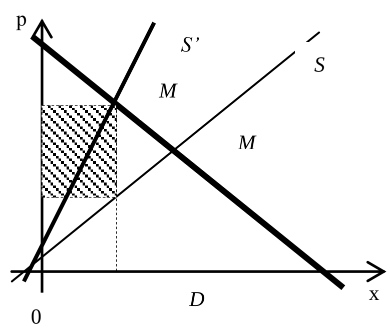


Рисунок 11

а) $x + 3 = -2x + 12$,

$x = 3$, $p = 6$

Точка $M(3,6)$ является точкой равновесия (рисунок 11).

б) если введен налог $t = 3$, то система уравнений для определения новой точки равновесия примет вид

D: $p_c = -2x + 12$,

S: $p_s = x + 3$,

$p_c = p_s + 3$

Используя соотношение между ценой на рынке p_c и ценой p_s, получаемой поставщиками, имеем следующую систему для определения точки рыночного равновесия:

$$\begin{cases} p_c = -2x + 12 \\ p_s = x + 3 \end{cases}$$

Решая эту систему, получаем новую точку равновесия M'(2,8). Следовательно, после введения налога равновесная цена увеличилась на 2 единицы, а равновесный объем уменьшился на 1 единицу.

в) Если предоставлена субсидия, то система уравнений для определения точки равновесия имеет вид

$$\text{D: } p_c = -2x + 12,$$

$$\text{S: } p_s = x + 3,$$

$$p_c = p_s - s.$$

Новый объем продаж равен 5 единицам (3 + 2). Подставляя $x = 5$ в систему, находим:

$$p_c = 2, p_s = 5, s = p_s - p_c = 3.$$

г) Если налог составляет 20%, то вся рыночная цена составляет 120%, из них 100% получают поставщики товара, 20% - государство. Итак, поставщики получают

$$p_s = \frac{100}{120} p_c = \frac{5}{6} p_c.$$

Уравнение спроса остается неизменным, а в уравнение предложения подставляем

$$p_s = \frac{5}{6} p_c:$$

$$\begin{cases} p_c = -2x + 12 \\ \frac{5}{6} p_c = x + 3 \end{cases}$$

Решая эту систему, находим новую точку равновесия M”:

$$-2x + 12 = \frac{6}{5} x + \frac{18}{5}$$

$$x = 2\frac{5}{8}$$

$$p_c = 6\frac{3}{4}$$

$$M''\left(2\frac{5}{8}, 6\frac{3}{4}\right).$$

Очевидно, что доход правительства R равен площади заштрихованного прямоугольника (смотри рисунок 11):

$$R = \frac{1}{6} \cdot 2\frac{5}{8} \cdot 6\frac{3}{4} = 2\frac{61}{64}$$

д) Если установлена минимальная цена, то из уравнений спроса и предложения можно найти объем спроса и предложения. Разницу между ними скупает правительство. Так как $p=7$, то

$$x_s = p - 3 = 7 - 3 = 4$$

$$x_D = \frac{12 - p}{2} = \frac{12 - 7}{2} = 2{,}5$$

Затраты правительства составят

$$\left(x_s - x_D\right)p = (4 - 2{,}5) \cdot 7 = 10{,}5$$

Пример 21. Закон спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -3x + 12,$$

$$p = 2x + 2.$$

Найти величину налога t, при которой доход государства будет максимален.

Решение.

После введения налога имеем систему

$$\begin{cases} p_c = -3x + 12, \\ p_s = 2x + 2, \\ p_c = p_s + t. \end{cases}$$

Выражаем t через x и подставляем в функцию T, определяющую доход государства:

$-3x+12=2x+2+t$

$t=10-5x$

$T=xt=x(10-5x)=10x-5x^2$

Находим максимум функции T:

$T'=10-10x=0$

$x=1$

$T''=-10<0$,

Следовательно, x=1 – точка максимума.

В точке x=1 находим t = 5, T = 5. Следовательно, доход государства максимален при t=5.

Задания для самостоятельной работы

1. Объем выпущенной заводом продукции x и выручка z, полученная от ее реализации, связаны следующей зависимостью:

$$z = 10x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{15}x^3.$$

Найдите предельную выручку и постройте ее график. Пользуясь этим графиком, определите, при каком объеме производства выручка максимальна (минимальна). Чему равна при этом предельная выручка? Что это означает?

Замечание. Предельная выручка определяется аналогично предельным издержкам производства (это скорость изменения выручки при данном объеме продаж).

2. Предприятие производит x единиц продукции в месяц и реализует ее по

цене

$$P = 25 - \frac{1}{30}x.$$

Суммарные издержки производства составляют:

$$K = \frac{1}{25}x^2 + 5x + 300.$$

Определите, при каком объеме производства прибыль предприятия будет максимальной.

3. Из треугольных обрезков фанеры необходимо сделать заготовки, имеющие форму параллелограмма. Как добиться того, чтобы заготовки имели максимально возможную площадь?

4. Имеется запас меда стоимостью в C рублей. Известно, что с течением времени стоимость меда повышается по закону $V = Ce^{\sqrt{t}/2}$, а затраты на хранение настолько меньше V, что ими можно пренебречь. С другой стороны, если мед продать, а деньги положить в банк, то на вырученную сумму непрерывно будут начисляться 10 % годовых. То есть сумма V_0, положенная в банк в момент времени $t = 0$, через t лет станет равной

$$V_1 = V_0 e^{t/10} \quad (10\% = \frac{1}{10}).$$

Определите момент времени t_0, в который наиболее выгодно продать имеющийся запас меда и положить деньги в банк, чтобы через t лет сумма, накапливаемая на счете, была максимальной.

5. Зависимость полных издержек производства K от объема производства x выражается с помощью формулы:

$$K = x^3 - 4x^2 + 9x.$$

Рассчитайте, при каком объеме производства средние издержки минимальны ($K_{cp} = \frac{K}{x}$).

6. Цена бриллианта пропорциональна квадрату его массы. Если бриллиант разбить на две части, в каком случае общая стоимость двух частей будет наименьшей?

7. Предположим, что функция затрат имеет вид:

$$y = 2x + \ln(x+1).$$

Определите предельные издержки производства при объеме выпуска $x_1 = 2, x_2 = 9$. При каких значениях x данная функция возрастает (убывает) все быстрее)?

8. Установлено, что предложение данного товара описывается формулой $s = e^p - 1$, где p - цена. Установите вид зависимости предельного предложения (скорости изменения предложения) и темпа изменения предложения от цены на товар. Как изменение этих параметров характеризует динамику предложения?

9. Функция спроса на товар имеет вид:

$$d = 80 + 16p - p^2.$$

Определите уровни цен, соответствующих максимальному спросу на товар, исчезновению спроса на него. При какой цене предельный спрос (скорость изменения спроса) будет равен нулю, двум, десяти? Чему равен темп изменения спроса? Что это означает? Приведите примеры ситуаций, которые могут быть описаны с помощью функций указанного вида.

10. Зависимость спроса от цены выражается формулой:

а) $d(p) = 10 - 2p$;

б) $d(p) = \frac{100}{p+1}$;

в). $d(p)=15+2p-p^2$

Опишите динамику изменения спроса на товар и выручки от продажи этого товара, нарисуйте графики функций.

11. Формула $s=e^p-1$ задает зависимость предложения s от цены p. Установите характер изменения предельного предложения. Сравните его с характером изменения темпа s. Какую форму имеет график функции предложения?

12. Предприятие купило автомобиль стоимостью 24 тыс. руб. Ежегодная норма амортизации составляет 10% от цены покупки. Написать уравнение, определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t, построить график. Найти стоимость автомобиля: а) через 5 лет; б) через 6 лет и 3 месяца.

13. Фирма купила четыре одинаковых компьютера. Первоначальная стоимость каждого компьютера составляет 3000 руб., остаточная – 200 руб. Срок жизни компьютера по норме – 4 года. Через 2 года компьютеры были проданы по цене 1800 руб. каждый. Построить график функции, определяющей стоимость четырех компьютеров в зависимости от времени t. Какую прибыль получило предприятие после продажи?

14. Цена телевизора 1000 руб., остаточная стоимость равна нулю, а строк службы составляет 5 лет. Построить график функции, определяющей стоимость телевизора в зависимости от времени t. За сколько нужно продать телевизор после трех с половиной лет эксплуатации, чтобы получить прибыль 100 руб.?

15. Станок был куплен за 12 тыс. руб. По нормам его остаточная стоимость равна нулю, а срок службы составляет 8 лет. Написать уравнение, определяющее стоимость станка в зависимости от времени t, построить график. Найти стоимость станка через 7 лет и 3 месяца эксплуатации.

16. Маша купила автомобиль за 60 тыс. руб., чтобы ездить на работу. Норма амортизации составляет 12% от первоначальной стоимости. Написать уравнение,

определяющее стоимость автомобиля в зависимости от времени t. Поскольку транспортное средство используется для поездок на работу, Маше разрешили вычитать его годовую амортизацию из суммы, подлежащей обложению подоходным налогом. Какую сумму Маша будет экономить ежемесячно, если подоходный налог составляет 20%?

17. Газовая плита была куплена за 800 руб. Амортизация начисляется линейно и составляет 15% в год от первоначальной стоимости.

Найти:

а) стоимость газовой плиты через t лет;

б) стоимость газовой плиты через 6 лет после начала эксплуатации;

в) срок службы плиты.

18. Газовая плита была куплена за 800 руб. Амортизация начисляется ежегодно по норме 15% в год от последней стоимости газовой плиты (нелинейная модель). Найти:

а) стоимость газовой плиты через t лет;

б) стоимость газовой плиты через 6 лет после начала эксплуатации;

в) срок службы плиты, если её остаточная стоимость равна 50 руб.

19. Станок был куплен за 10 тыс. Руб., его остаточная стоимость – 300 руб. Определить срок службы станка, если:

а) амортизация начисляется ежегодно из расчета 10% от последней стоимости станка;

б) норма амортизации составляет 10% от первоначальной стоимости.

20. Функция издержек производства шин имеет вид $C(x) = 30x + 2100$. Цена одной шины 60 руб. Найти точку безубыточности. Построить графики.

21. Постоянные издержки при производстве ручных часов составляют 12 тыс. руб. в месяц, а переменные – 300 руб. за один час. Цена часов 500 руб. Написать функции дохода и издержек. Построить графики. Найти точку безубыточности.

22. Мебельная фабрика продает каждый стул по цене 3 тыс. руб. Функция издержек линейная. Издержки составляют 48 тыс. руб. за 10 стульев и 43,2 тыс. руб. за 6 стульев. Составить функцию дохода и функцию издержек. Найти точку безубыточности.

23. Постоянные издержки производства некоторой продукции составляют 125 тыс.руб. в месяц, а переменные – 700 руб. за единицу продукции. Продукция продается по цене 1200 руб. за единицу. Составить функцию прибыли. Определить:

а) точку безубыточности;

б) сколько единиц продукции нужно произвести, чтобы прибыль составила 105 тыс. руб. в месяц.

24. Настольные лампы продаются по цене 1200 руб. каждая. Постоянные издержки составляют 24 тыс. руб. в месяц, а переменные – 800 руб. за лампу.

а) Найти точку безубыточности, построить график.

б) Сколько ламп фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 15% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

25. Обувная фабрика продает туфли по цене 350 руб. за пару. Издержки составляют 63 тыс. руб. за 100 пар туфель и 60,75 тыс.руб. за 85 пар.

а) Найти точку безубыточности.

б) Сколько пар туфель фабрика должна произвести и продать, чтобы получить 10% дохода на деньги, вложенные в фиксированные затраты?

26. Издержки производства x единиц продукции определяются функцией $C(x) = 0{,}1\,x^2 + 2x + 80$. Цена одной единицы равна 8. найти точку безубыточности.

27. Фабрика продает одну единицу продукции по цене 1,2 руб. Постоянные издержки составляют 300 руб. в день, а переменные – 0,9 руб. за штуку.

а) Найти точку безубыточности.

б) Фабрика может купить новый станок. При этом постоянные издержки возрастут до 360 руб. в день, а переменные снизятся до 0,8 руб. за штуку. Выгодно ли это?

28. Найти точку рыночного равновесия для следующих функций спроса и предложения:

а) $p = -\frac{2}{3}x + 6$ б) $p = -x + 4$

$p = \frac{2}{3}x + 2$ $p = 0{,}5x + 1$

Построить графики.

29. Спрос на некоторые товар равен 10 единицам при цене 300 руб. за штуку и 20 единицам при цене 280 руб. поставщик согласен продать 8 единиц товара при цене 84 руб. и 5 единиц при цене 60 руб. Найти точку рыночного равновесия.

30. При цене 100 руб. покупают 30 единиц некоторого товара, а при цене 140 руб. – только 20 единиц. Поставщик продает 8 единиц товара при цене 150 руб. и 15 единиц при цене 255 руб. Найти точку рыночного равновесия и построить график.

31. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = x + 100,$$
$$p = -2x + 250$$

а) Найти точку рыночного равновесия.

б) Был введен налог. Равный 10 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия и доход государства от введения этого налога.

в) Налог был удвоен. Найти доход государства. Может ли государство потерять деньги, увеличивая налог?

г) Правительство предоставило субсидию, равную 5 на единицу продукции. Найти новую точку рыночного равновесия.

32. Пусть предложение и спрос на некоторый товар определяются уравнениями

$$p = 0{,}5x + 5$$
$$p = -0{,}5x + 45$$

a) Найти точку рыночного равновесия.

b) Правительство ввело налог, равный 5. Найти новую точку рыночного равновесия.

c) Была предоставлена субсидия, равная 3 на единицу товара. Найти новую точку рыночного равновесия.

33. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -x + 100$$

$$p = 3x + 20.$$

а) Какой налог на единицу продукции приведет к снижению равновесного объема продаж на 2 единицы?

b) Какой налог приведет к снижению равновесного объема продаж до 15 единиц?

с) Правительство выделило сумму денег, равную 384, для предоставления субсидии. Найти величину субсидии.

34. Законы спроса и предложения имеют следующий вид:

$$p = -2x + 150$$

$$p = 4x + 30.$$

а) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж на 2 единицы?

b) Какая субсидия приведет к увеличению равновесного объема продаж до 25 единиц?

с) Какой налог должно ввести правительство, если хочет получить доход, равный 216?

35. Известны функции предложения и спроса:

а) D: $p = 2x + 8$,

S: $p = x + 7$,

b) D: $10p + x = 8$,

S: $3p - 2x = 7$.

Найти точку рыночного равновесия. Построить графики.

36. Пусть спрос и предложение на некоторый товар определяются уравнениями

$$4p + x = 34$$

$$6p - x = 38$$

а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

б) Правительство ввело налог, равный 20%. Найти новую точку равновесия, доход, полученный правительством, и показать его на графике.

в) Установлена минимальная цена, равная 7,5. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции?

37. Законы спроса и предложения имеют вид:

$$2p + 3x = 36$$

$$5p - 3x = 48$$

а) Найти точку рыночного равновесия и построить графики.

б) Правительство ввело налог, равный 25%. Найти новую точку равновесия, доход правительства и показать его на графике.

в) Введена минимальная цена. Равная 13. Сколько потратит правительство на покупку излишка продукции?

г) Выделена сумма денег. Равная 105, для установления минимальной цены. Найти эту цену.

38. Монопольный поставщик некоторого товара поставляет такое количество товара, чтобы обеспечить постоянный доход, т.е. закон предложения имеет вид $xp = const = \frac{16}{3}$. Спрос на этот товар определяется уравнением $x + 3p = 10$. Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

39. Закон спроса и предложения на некоторый товар имеют следующий вид:

$x + 2p = 8,$

$xp = \frac{7}{2}$

Найти точки рыночного равновесия и исследовать их устойчивость.

40. Исследовать на устойчивость точки рыночного равновесия в задачах 37 и 38.

41. По одному виду вкладов банк выплачивает 15% годовых, а по другому, более рискованному – 20% годовых. Вкладчик хочет вложить 3 тыс. руб. и получать ровно 500 руб. в год. Какие суммы нужно вложить по каждому виду вклада?

42. Петров взял кредит для строительства дома под 10% годовых в одном банке и под 12% в другом банке. Общая сумма займа составляет 10 тыс. руб., а сумма выплат по процентам – 1120 руб. Сколько было взято в кредит в каждом банке?

4 Эластичность и ее свойства

Изучение экономических вопросов, таких, как определение динамики спроса населения на данный товар при изменении его цены или при изменении доходов населения, исследование диапазона взаимозаменяемости ресурсов производства, определение эффективности тех или иных затрат, прогнозирование изменения прибыли предприятия или фирмы под воздействием различных факторов и решение многих других проблем, приводит к необходимости выяснения на сколько процентов изменится одна величина, если другая увеличилась на 1%.

Характеристика, позволяющая дать ответ на поставленный вопрос, называется эластичностью соответствующей функции.[1,2,4,6,7]

Приступим к построению этого показателя. Пусть аргумент x функции $f(x)$ получил приращение Δx. Тогда значение функции изменится на величину

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Приращения $\Delta x, \Delta y$ называют абсолютными приращениями аргумента и функции соответственно. Составим относительные приращения переменных $\dfrac{\Delta x}{x}, \dfrac{\Delta y}{y}$

и выразим их в процентах.

Величина $\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%$ указывает, на сколько процентов изменилось значение аргумента, а $\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%$ дает соответствующее изменение значения функции.

Отношение $\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%\right)$ показывает, на сколько процентов в среднем меняется (увеличивается или уменьшается) значение функции, когда значение аргумента возрастает на 1% (увеличивается от x до $x + 0{,}01x$).

Это отношение будет характеризовать поведение функции $y = f(x)$ в данной точке тем точнее, чем меньше Δx. Пусть Δx неограниченно убывает. Вычислим предел указанного отношения при условии $\Delta x \to 0$.

$$\lim_{\Delta x \to 0}\left(\left(\frac{\Delta y}{y} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta x}{x} \cdot 100\%\right)\right) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (4)$$

Отношение $\frac{y}{x}$ не зависит от изменения Δx. Оно играет роль постоянной и может быть вынесено за знак предела.

Определение: Предел отношения относительного приращения функции $\frac{\Delta y}{y}$ к соответствующему относительному приращению аргумента $\frac{\Delta x}{x}$ при условии, что абсолютное приращение аргумента Δx стремится к нулю, называется эластичностью функции $y = f(x)$ по переменной x и обозначается символом

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0}\left(\frac{\Delta y}{y} : \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{x}{y} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (5)$$

Если функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x, то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

и формула (5) принимает вид

$$E_x(y) = \frac{x}{y} f'(x)$$

или

$$E_x(y) = \frac{x}{y}\frac{dy}{dx}. \qquad (6)$$

Вывод. Из (4) следует, что эластичность $E_x(y)$ показывает, на сколько процентов изменится значение функции при увеличении независимой переменной на 1 % (с x до $x+0{,}01x$).

Формулу (6) можно переписать в виде

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} : \frac{y}{x}.$$

Это означает, что для функции выпуска $y = f(x)$ эластичность равна отношению предельной производительности ресурса к его средней производительности.[2,7,8]

Пример 22. Даны функции 1) $f(x) = 3x+4$, 2) $y = 1+2x-x^2$

Решение. 1) Эластичность данной функции вычисляется по формуле $E_x(f(x)) = \dfrac{x}{f(x)} \cdot f'(x) = \dfrac{x}{3x+4} \cdot 3 = \dfrac{3x}{3x+4}$.

Вывод. При $x=2$ показатель эластичности равен 0.6. Это означает, что при увеличении x с 2 до 2.02 значение функции возрастает примерно на 0.6 %. Если $x=0$, то $E_x(f(x))=0$. Следовательно, увеличение x с 0 до 0.01 практически не меняет значения функции.

2) Здесь $E_x(f(x)) = \dfrac{x}{1+2x-x^2} \cdot (2-2x) = \dfrac{2x(1-x)}{1+2x-x^2}$.

Вывод. При $x=1$ показатель эластичности равен нулю. При увеличении с 1 до 1.01 значении функции практически не меняется. Если $x=2$, то $E_x(y)=-4$.

Увеличение значения x с 2 до 2.02 приводит к уменьшению значения функции на 4 %.[2, 8]

Свойства эластичности

1. Эластичность – безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины y и x. $E_{ax}(by)=E_x(y)$.

$$E_{ax}(by)=\frac{d(by)}{d(ax)}\cdot\frac{ax}{by}=\frac{b(dy)}{a(dx)}\cdot\frac{ax}{by}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=E_x(y).$$

2. Эластичности взаимно обратных функций – взаимно обратные величины:

$$E_x(y)=\frac{1}{E_y(x)}\Leftarrow E_x(y)=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{x}{y}=\frac{1}{\frac{dx}{dy}\cdot\frac{y}{x}}=\frac{1}{E_y(x)}.$$

Например, эластичность величины спроса по цене обратна эластичности цены по величине спроса $\left(E_p(Q)=\dfrac{1}{E_Q(p)}\right)$.

3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, равна сумме эластичностей: $E_x(uv)=E_x(u)+E_x(v)$.

$$E_x(uv)=\frac{d(uv)}{dx}\cdot\frac{x}{uv}=\frac{v\left(\frac{du}{dx}\right)+u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{uv}\cdot x=\frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u}+\frac{dv}{dx}\cdot\frac{x}{v}=E_x(u)+E_x(v).$$

4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента x, равна разности эластичностей

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=\frac{d\frac{u}{v}}{dx}\cdot\frac{x}{\frac{u}{v}}=\frac{vdu-udv}{v^2}\cdot\frac{xv}{u}=\frac{du}{dx}\cdot\frac{x}{u}-\frac{dv}{dx}\cdot\frac{x}{v}=E_x(u)-E_x(v).$$

5. Эластичность суммы двух функций *u(x)* и *v(x)* может быть найдена по формуле:

$$E_x(u+v)=\frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}.$$

$$E_x(u+v)=\frac{d(u+v)}{dx}\cdot\frac{x}{u+v}=\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dx}\right)\cdot\frac{x}{u+v}=\frac{uE_x(u)+vE_x(v)}{u+v}.$$

Эластичности элементарных функций

1. Эластичность степенной функции $y=x^{\alpha}$ постоянна и равна показателю степени α: $E_x(x^{\alpha}) = \alpha$.

$$E_x\left(x^{\alpha}\right)=\frac{dx^{\alpha}}{dx}\cdot\frac{x}{x^{\alpha}}=\frac{\alpha x^{\alpha-1}\cdot x}{x^{\alpha}}=\alpha.$$

2. Эластичность показательной функции $y=a^x$ пропорциональна x:

$$E_x\left(a^x\right)=x\ln(a).$$

$$E_x\left(a^x\right)=\frac{da^x}{dx}\cdot\frac{x}{a^x}=a^x\cdot x\cdot\frac{\ln a}{a^x}=x\cdot\ln a.$$

3. Эластичность линейной функции $y = ax + b$ $E_x(ax+b) = \dfrac{ax}{ax+b}$

$$E_x(ax+b) = \frac{d(ax+b)}{dx} \cdot \frac{x}{ax+b} = \frac{ax}{ax+b}.$$

Если график линейной функции имеет отрицательный наклон (a<0), то эластичность функции меняется от нуля к точке y_m пересечения графиком оси y до минус бесконечности (-∞) в точке пересечения оси x, проходя через значение (-1) в средней точке.

Вывод. Прямая имеет постоянный наклон, её эластичность зависит не только от наклона, но и от того, в какой точке x её находят (рисунок 10).

Определение: Функция с бесконечной эластичностью во всех точках называется совершенно эластичной, с нулевой эластичностью во всех точках – совершенно неэластичной.[1,2,6,7,8]

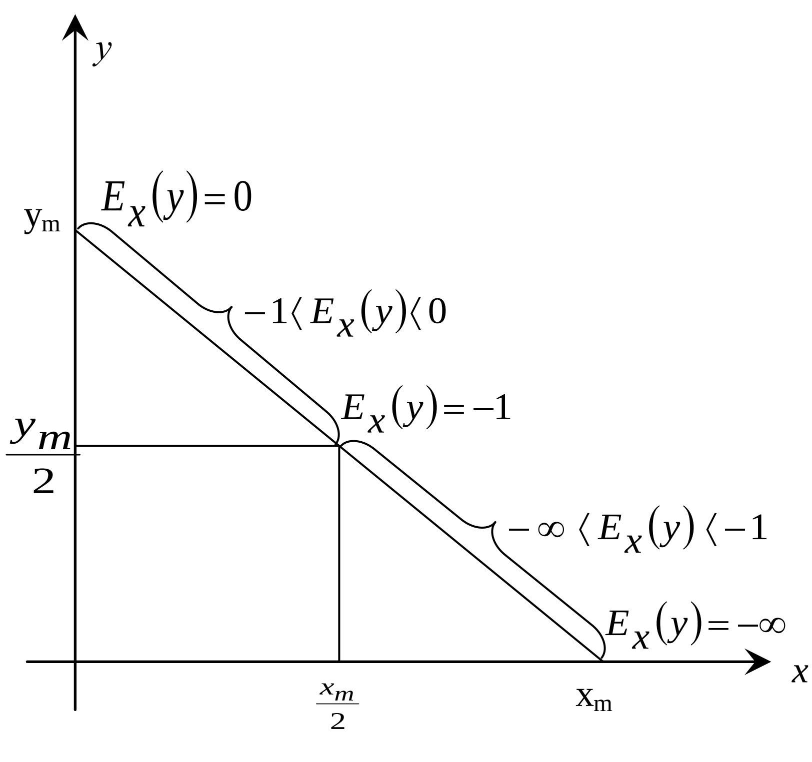


Рисунок 12 - Эластичность линейной функции

Задания для самостоятельной работы

1. Используя свойства эластичности, найдите $E_x(f(x))$, если:

а) $f(x) = x^2 e^x$, б) $f(x) = 3x \ln x$, в) $f(x) = \dfrac{x^4}{5e^x}$,

г) $f(x) = 2 + 3x - x^2$, д) $f(x) = 2^x \ln x$, е) $f(x) = \dfrac{4a^x}{x^5}$.

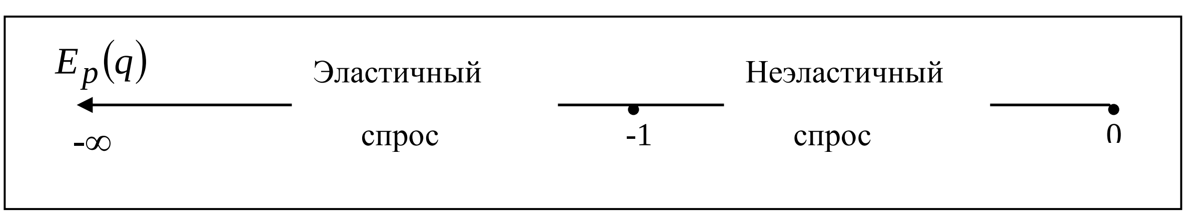
5 Виды эластичностей в экономике

Рассмотрим основные виды эластичностей.

1.Эластичность спроса по цене (прямая)

$$E_p(q) = \left(\frac{dq}{q}\right) \Big/ \left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q},$$

показывающая относительное изменение (выраженное в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию. Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине больше единицы, то спрос называют эластичным (совершенно эластичным при бесконечно большой величине эластичного спроса). Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине меньше единицы, то спрос называют неэластичным (совершенно неэластичным при нулевой эластичности спроса).



И, наконец, если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине равна единице, то говорят о спросе с единичной эластичностью.

2.Эластичность спроса по доходу

$$E_I(q)=\left(\frac{dq}{q}\right)\bigg/\left(\frac{dI}{I}\right)=\frac{dq}{dI}\cdot\frac{I}{q},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении дохода потребителей этого блага на один процент. Положительная эластичность спроса по доходу характеризует нормальные (качественные) товары, а отрицательная величина – малоценные (некачественные) товары

Высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает, что её вклад в экономический рост больше, чем доля в структуре экономики, и она имеет шансы на расширение и процветание в будущем. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли по доходу имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то её может ожидать застой и перспектива сокращения производства.[1,2,6,7,8]

3. Перекрестная эластичность спроса по цене

$$E_{Pj}(q_i)=\left(\frac{dq_i}{q_i}\right)\bigg/\left(\frac{dp_j}{p_j}\right)=\frac{dq_i}{dp_j}\cdot\frac{p_i}{q_j},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на одно благо при изменении цены на другое благо (замещающее или дополняющее его в потреблении) на один процент. Положительный знак перекрестной эластичности спроса по цене свидетельствует о замещаемости благ, а отрицательный – о дополняемости.

4.Ценовая эластичность ресурсов

$$E_{Pi}(R_i)=\left(\frac{dR_i}{R_i}\right)\bigg/\left(\frac{dp_i}{p_i}\right)=\frac{dR_i}{dp_i}\cdot\frac{p_i}{R_i},$$

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-нибудь ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (соответственно, заработной платы) на один процент.[1,6,7]

5.Эластичность замещения одного ресурса другим

$$E_{Rj}(R_i)=\left(\frac{dR_i}{R_i}\right)\Big/\left(\frac{dR_j}{R_j}\right)=\frac{dR_i}{dR_j}\cdot\frac{R_j}{R_i},$$

характеризующая необходимое изменение (в процентах) величины одного ресурса (например, капитала) при изменении количества другого ресурса (например, труда) на один процент с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

Рассмотрим подробнее **эластичность спроса относительно цены**. Изучается зависимость спроса d на товар от цены p на него.

Предположим, что цены на аналогичные товары, доходы потребителей и структура их потребностей – постоянные величины. Тогда зависимость спроса от цены можно описать с помощью функции

$$d=d(p).$$

Во многих экономических исследованиях необходимо установить не величину спроса при каждом конкретном уровне цены, а характер изменения спроса при определенном изменении цены. В этом случае находят эластичность спроса относительно цены. В наших обозначениях

$$E_p(d)=\frac{p}{d(p)}\cdot d'(p).$$

Эластичность спроса относительно цены определяет, на сколько процентов изменится спрос на товар, если цена на него увеличится на 1%. Так как в большинстве случаев спрос является убывающей функцией цены и

$$d'(p) < 0,$$

то, чтобы избежать отрицательных чисел, в этих случаях при изучении эластичности принимают

$$\widetilde{E}_p(d) = -\frac{p}{d(p)} \cdot d'(p).$$

Знак «-» показывает, что спрос уменьшается при увеличении цены.[1,2,3,5,6,7,8]

Пример 23. Если функция спроса линейная:

$$d = 5 - \frac{1}{2}p,$$

то

$$\widetilde{E}_p(d) = -\frac{p}{5 - \frac{1}{2}p} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{p}{10 - p}.$$

Решение. При $p = 2$ имеем $E_p(d) = \frac{1}{4}$. Это означает, что увеличении цены на 1 % спрос падает на $\frac{1}{4}$%. При $p = 5$, показатель эластичности равен 1. Увеличение цены с 5 до 0.05 приводит к уменьшению спроса на 1%. При $p = 9$ спрос уменьшается на 9 %.

Пример 24. Для $d = \frac{c}{p}$ (c - постоянная, $c > 0$) показатель эластичности равен 1 при любом уровне цены.

Решение. Действительно,

$$\widetilde{E}_p(d) = -\frac{p}{\frac{c}{p}} \cdot \left(-\frac{c}{p^2}\right) = 1.$$

Если спрос обратно пропорционален цене, то при любой цене увеличение ее на 1 % влечет за собой уменьшение спроса также на 1 %.

Определение: Спрос **эластичен**, если повышению цены на 1 % соответствует снижение спроса более чем на 1 %, т.е. $\widetilde{E}_p(d) > 1$; спрос нейтрален, если $\widetilde{E}_p(d) = 1$; спрос неэластичен, если $0 < \widetilde{E}_p(d) < 1$.[6]

В примере 18 спрос нейтрален при $p = 5$; при $p = 2$ - неэластичен и для $p = 9$ - эластичен. Для функции $d = \frac{c}{p}$ спрос нейтрален при любой цене.

Вывод. Спрос на товар эластичен, если небольшое изменение цены товара вызывает значительные изменения величины спроса на него. В обратной ситуации, когда изменение цены ведет к сравнительно небольшому изменению величины спроса, последний является неэластичным. Примерами товаров с эластичным спросом могут служить, например, яблоки, помидоры, персики и т.п. При росте цен на них покупательский спрос может переключиться на другие виды овощей и фруктов. При определенном уровне цен покупатели могут полностью отказаться, например, от употребления фруктов или заменить их соками и другими консервами. В то же время спрос на товары первой необходимости (лекарства, обувь, электричество, газ, телефон), на вещи, цена которых малоощутима для семейного бюджета (карандаш, зубная паста, крем для обуви) и труднозаменяемые товары (электрические лампочки, хлеб, бензин) является неэластичным.[1,2,6]

Исследуем динамику *выручки* при различных видах спроса.

Общие расходы населения на данный товар (выручка от его продажи) при цене p составляют

$$u = p \cdot d(p).$$

Предельная выручка равна

$$\frac{du}{dp} = d(p) + p \cdot d'(p),$$

или

$$\frac{du}{dp} = d(p)\left(1 + \frac{p}{d(p)} \cdot d'(p)\right) = d(p)(1 - E_p(d)).$$

а) Если спрос эластичен, т.е. $E_p(d) > 1$, то

$$\frac{du}{dp} < 0$$

и с повышением цены выручка от продажи снижается.

б) При нейтральном спросе ($E_p(d) = 1$)

$$\frac{du}{dp} = 0,$$

и выручка практически не зависит от цены.

В этом случае $u = c$ (c - постоянная) и

$$d(p) = \frac{c}{p}.$$

Следовательно, в случае нейтрального взноса его размер пропорционален цене (пример 19).

в) При неэластичном спросе ($0 < E_p(d) < 1$) выручка увеличивается с ростом цены, так как в этом случае $\frac{du}{dp} > 0$.

Вывод. Знание эластичности спроса на данный товар позволяет прогнозировать направление изменения суммы выручки под влиянием роста или снижения цены. Очевидно, каждой фирме выгодно, чтобы спрос на ее продукцию был как можно более эластичным, ибо в такой ситуации существует возможность назначать сравнительно высокие цены.

Иначе говоря, фирма должна прилагать все усилия к поддержанию спроса на ее товар на достаточно высоком уровне. Достижению этой цели способствуют хорошее качество продукции, четко организованное обслуживание потребителей, высокое качество рекламы.[2,3,6,8,9]

Пример 25. Известно, что эластичность спроса на товар составляет 0.4. Определим, как изменится доход от реализации товара, если цену на него увеличить на 5%.

Решение. При эластичности $E_p(d) = 0.4$ увеличение цены на 1% вызывает уменьшение спроса на 0.4 %. Увеличение цены на 5% способствует уменьшению спроса на $5 \cdot 0.4\% = 2\%$. Цена выросла на 5% и стала равной 1.05 p, где p - старая цена. Если $d(p)$ - спрос, соответствующий цене p, то $0.98\,d(p)$ - величина спроса при цене 1.05 p.

Вывод. Выручка от реализации товара по цене p составляла $p \cdot d(p)$ денежных единиц. После увеличения цены выручка возросла приблизительно на 3%. При неэластичном спросе (0,4<1) увеличение цены приводит к возрастанию выручки.

Эластичность предложения определяется аналогично эластичности спроса:

$$E_p(s) = \lim_{\Delta p \to 0}\left(\left(\frac{\Delta s}{s} \cdot 100\%\right) : \left(\frac{\Delta p}{p} \cdot 100\%\right)\right) = \frac{p}{s} \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta p}. \qquad (7)$$

Для дифференцируемой функции $s = s(p)$ формула (6) принимает вид

$$E_p(s) = \frac{p}{s}\frac{ds}{dp} \qquad (8)$$

или

$$E_p(s) = \frac{ds}{dp} : \frac{s}{p}. \qquad (9)$$

Замечание. В отличие от формулы (6), выражающей эластичность спроса, в (8) и (9) отсутствует знак «-». Это связано с тем, что с ростом рыночной цены на товар предложение этого товара обычно растет. Каждому предпринимателю выгодно реализовать свою продукцию по более высокой цене. Поэтому $s = s(p)$ - возрастающая функция и $\frac{ds}{dp} > 0$.[4,5,6,7,8]

Равенство (9) означает, что эластичность предложения равна отношению предельного предложения к среднему.

Предложение также может быть эластичным и неэластичным.

Определение: Предложение называется эластичным, если $E_p(s) > 1$, неэластичным, если $0 < E_p(s) < 1$, и нейтральным, если $E_p(s) = 1$.

Пример 25а. Фирма решила пригласить на работу дополнительное количество разнорабочих и квалифицированных наладчиков для скорейшего ввода в строй новой автоматической линии. Чтобы увеличить предложение услуг, руководство фирмы объявило об увеличении заработной платы на 1000 рублей в месяц. Если в городе много безработных, студентов, малооплачиваемых трудящихся, то такая надбавка к семейному бюджету может оказаться для них существенной, и предложение услуг в качестве разнорабочего будет эластичным по цене. Однако едва ли много квалифицированных, а следовательно и высокооплачиваемых наладчиков согласиться сменить место работы из-за такой прибавки к зарплате. Транспортные расходы, моральный ущерб, необходимость хотя бы частичной переквалификации для работы с новым для них оборудованием не окупятся дополнительной суммой в 1000 рублей. Здесь предложение услуг едва ли окажется эластичным по цене.[2,6,7,8,9]

Пример 26. Пусть зависимость предложения s от цены p описывается формулой

$$s = 0.05p^2 + p.$$

а) $\dfrac{ds}{dp} = 0.1p + 1 > 0$, т.е. s - возрастающая функция цены.

б) $\dfrac{d^2 s}{dp^2} = 0.1 > 0$ - функция вогнутая, темп изменения предложения постоянный.

в) $E_p(s) = \dfrac{(0.1p+1)p}{0.05p^2 + p} = \dfrac{0.1p+1}{0.05p+1} > 1.$ Предложение эластично по цене.

Решение. Зависимость между спросом на товар и его ценой (а значит, и вид соответствующей кривой) в значительной степени определятся полезностью товара. На вид функции предложения в первую очередь оказывают влияние издержки производства.

Определение: Цена, при которой величина спроса равна величине предложения, называется равновесной **(**или ценой равновесия).[2,6,7]

Пример 27. $d(p) = e^{-p^2}$ - функция спроса, $s(p) = e^{p^2 - 8}$ - функция предложения.

Решение. Из уравнения $d(p) = s(p)$ найдем цену равновесия

$$e^{-p^2} = e^{p^2 - 8},$$

отсюда

$$-p^2 = p^2 - 8$$

или

$$2p^2 = 8 \text{ и } p^2 = 4.$$

Вывод. Цена равновесия $p = 2$.

Задания для самостоятельной работы

1. Спрос d и предложение s изменяются по следующим законам:

$$d = \frac{100}{2p+1}, s = \frac{p^2}{2p+1}.$$

2. Найдите цену, при которой спрос совпадает с предложением (цену равновесия). Рассчитайте эластичность спроса при этой цене. Постройте графики спроса и предложения.
3. Формула

$$d(p) = e^{-p^2}$$

выражает зависимость спроса от цены. Определите, при каких значениях p спрос эластичен, нейтрален, неэластичен. Как зависит выручка от изменения цены? Сопоставьте с критериями эластичности.

4. Функция спроса имеет вид $d = \dfrac{400}{p^2 - 4p + 8}$. Постройте график функции. Определите при каких значениях p спрос эластичен, нейтрален, неэластичен.

5. Определите, на сколько процентов приблизительно изменится выручка от реализации товара. Если эластичность спроса равна α , а цена на товар увеличена на β%:

   а) $\alpha = 0.2, \beta = 20\%$;

   б) $\alpha = 4, \beta = 5\%$;

   в) $\alpha = 1, \beta = 10\%$.

6 Многофакторные производственные функции, эластичности

Определение: Функция n независимых переменных, устанавливающая зависимость между затратами n производственных ресурсов и объемом выпускаемой продукции, называется n**-факторной производственной функцией – ПФ** (функцией выпуска)

$$y = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) . \tag{10}$$

Если (10) выражает зависимость объема выпускаемой данным предприятием продукции от затрат ресурсов $r_1, r_2, \ldots, r_n$, запасы которых ограничены, то, очевидно, допустимыми можно считать значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, удовлетворяющие следующей системе неравенств:

$$0 \le x_1 \le a_1,$$
$$0 \le x_2 \le a_2,$$
$$\ldots$$
$$0 \le x_n \le a_{n,}$$

где $a_i \ (i=1,2,\ldots n)$– запасы i-го ресурса (в стоимостном или натуральном выражении).[1,2,6,7,8]

Не нарушая общности рассуждений, в дальнейшем будем рассматривать лишь функции двух независимых переменных.

При моделировании экономики страны в качестве основных ресурсов используют затраты труда *L* и объём производственных фондов *K*. Национальный доход *Y* выступает в роли результата деятельности экономики:

$$\boldsymbol{Y=F(K,L).}$$

В математических моделях функционирования отдельного предприятия, цеха, участка и т.д. *Y* обозначает объем выпускаемой данным экономическим объектом продукции.[1,2,6]

Формальные свойства производственных функций

Производственная функция $f(x_1, x_2)$ определена при $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. ПФ должна удовлетворять ряду (для каждой конкретной ПФ – своему) *свойств*:

1. $f(0, 0) = 0$;

$f(0, x_2) = f(x_1, 0) = 0$;

Свойство 1 означает, что без ресурсов нет выпуска, что при отсутствии хотя бы одного из ресурсов нет выпуска.

2. $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} > 0 \quad (i = 1, 2), \quad x = (x_1, x_2)$;

Свойство 2 означает, что с ростом затрат хотя бы одного ресурса объем выпуска растет, и что с ростом затрат одного ресурса при неизменном количестве другого ресурса объем выпуска растет.

3. $x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i^2} \le 0 \quad (i = 1, 2), \quad x = (x_1, x_2)$;

$x > 0 \Rightarrow \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_2} \ge 0 \quad x = (x_1, x_2)$;

Свойство 3 означает что с ростом затрат одного (i-го) ресурса при неизменном количестве другого ресурса величина прироста выпуска на каждую дополнительную единицу i-го ресурса не растет (закон убывающей эффективности), при росте одного ресурса предельная эффективность другого ресурса возрастает. Если выполнены условия 3, то график ПФ есть поверхность, расположенная в неотрицательном ортанте $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, y \ge 0$ трехмерного пространства Ox_1x_2y и выпуклая вверх. Вообще геометрический образ ПФ должен прежде всего ассоциироваться с выпуклой горкой, крутизна которой убывает, если точка (x_1, x_2) уходит в плоскости Ox_1x_2 на «северо-восток».

4. $f(tx_1, tx_2) = t^p f(x_1, x_2)$.

Свойство 4 означает, что ПФ является однородной функцией (ОФ) степени $p>0$. При $p>1$ с ростом масштаба производства в t раз (число $t>1$), т.е. с переходом от вектора x к вектору tx, объем выпуска возрастает в t^p ($>t$) раз, т.е. имеет рост эффективности производства от роста масштаба производства. При $p<1$ имеем падение эффективности производства от роста масштаба производства. При $p=1$ имеем постоянную эффективность производства при росте его масштаба (или имеем независимость удельного выпуска от масштаба производства – в английской терминологии constant returns to scale).[1,2,6,7]

Для $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2} (a_1 + a_2 = 1)$ свойства 1-4 выполняются.

Для $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 \ (a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0)$ свойства 1 (при $a_0 = 0$) и свойство 4 не выполняются.

Определение: Множество (линия) l_q уровня $q = f(x_1, x_2)$ ($0<q$ – действительное число) ПФ $y = f(x_1, x_2)$ называется изоквантой ПФ. Иными словами, линия уровня q – это множество точек, в котором ПФ постоянна и равна q.

Различные наборы (v_1, v_2) и (w_1, w_2) затрачиваемых (используемых) ресурсов, принадлежащие одной и той же изокванте l_q (т.е. $q = f(v_1, v_2) = f(w_1, w_2)$), дают один и тот же объем выпуска q.

Замечание. Изокванта есть линия, расположенная в неотрицательном ортанте $\{(x_1, x_2) | x_1 \geq 0, x_2 \geq 0\}$ двумерной плоскости Ox_1x_2.[3,4,5,6,7]

Функция Кобба-Дугласа, функция с постоянными пропорциями

Функция Кобба-Дугласа имеет вид:

$$Y = Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha}, \quad 0 < \alpha < 1.$$

При $K = 0$ результат функционирования экономического объекта

$$Y = Y_0 \cdot 0 \cdot L^{1-\alpha} = 0.$$

К такому же выводу приходим и при $L = 0$, т.е. оба ресурса абсолютно необходимы.

Если K и L увеличить в λ раз, то в такое же количество раз возрастает и Y. [3,4,5]

Действительно,

$$F(\lambda K, \lambda L) = Y_0 (\lambda K)^{\alpha} (\lambda L)^{1-\alpha} = Y_0 \lambda^{\alpha} K^{\alpha} \lambda^{1-\alpha} L^{1-\alpha} =$$

$$= \lambda^{\alpha+1-\alpha} Y_0 K^{\alpha} L^{1-\alpha} = \lambda F(K, L).$$

Эта функция находит широкое применение в моделях долгосрочного прогнозирования.

Функцию с постоянными пропорциями

$$Y = Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\}$$

выбирают тогда, когда один из ресурсов производства резко дефицитен, а второй избыточен.

В этой функции реализуются предположения о свойствах производственных функций, убедимся в этом.

1. Если $K = 0$ или $L = 0$,

$$\min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = 0$$

и

$$Y = Y_0 \cdot 0 = 0 .$$

2. Предположим, что $\frac{K}{K_0} < \frac{L}{L_0}$ и $\lambda > 0$. Тогда

$$\frac{\lambda K}{K_0} < \frac{\lambda L}{L_0}$$

и

$$F(\lambda K, \lambda L) = Y_0 \min\left\{\frac{\lambda K}{K_0}, \frac{\lambda L}{L_0}\right\} = Y_0 \cdot \frac{\lambda K}{K_0} = \lambda \cdot Y_0 \frac{K}{K_0} =$$

$$= \lambda Y_0 \min\left\{\frac{K}{K_0}, \frac{L}{L_0}\right\} = \lambda F(K, L) .$$

К такому же результату придем, если $\frac{\lambda K}{K_0} \geq \frac{\lambda L}{L_0}$.

Вывод. В процессе производства, описываемом функцией вида (10), следует использовать ресурсы в постоянной пропорции. Уровень выпуска возрастает в λ раз лишь при одновременном увеличении затрат обоих ресурсов в такое же число раз. Отношение $\frac{K_0}{L_0}$ задает рациональную пропорцию между K и L.[1,2,3,6,7,8]

Предельные (маржинальные) и средние значения производственной функции

Пусть $y = f(x) = f(x_1, x_2)$ – производственная функция.

Определение: Дробь $\frac{f(x)}{x_i}(i=1,2)$ называется средней производительностью *i*-го ресурса (фактора производства) (СПФ) или средним выпуском по *i*-му ресурсу (фактору производства). Символика: $A_i=\frac{f(x)}{x_i}$.

Напомним, что в случае двухфакторной производственной функции $Y=a_0K^{a_1}L^{a_2}$ для средних производительностей $\frac{Y}{K}$ и $\frac{Y}{L}$ основного капитала и труда были использованы соответственно термины капиталоотдача и производительность труда. Эти термины используют и применительно к любым двухфакторным ПФ, у которых $x_1=K$ и $x_2=L$.[1,6,7,8]

Пусть $y=f(x)=f(x_1,x_2)$ – производственная функция.

Определение: Первая частная производная $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}(i=1,2)$

называется предельной (маржинальной) производительностью *i*-го ресурса (фактора производства) (ППФ) или предельным выпуском по *i*-му ресурсу (фактору производства).

Символика: $M_i=\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$.

Обозначим символами Δx_i и $\Delta_i(f(x))$ $(\Delta_1 f(x_1,x_2)=f(x_1+\Delta x_1,x_2)-f(x_1,x_2)$; $\Delta_2 f(x_1,x_2)=f(x_1,x_2+\Delta x_2)-(f(x_1,x_2))$ соответственно, приращение переменной x_i и соответствующее ей частное приращение ПФ *f(x)*. При малых Δx_i имеем приближенное равенство

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}=\frac{\Delta_i f(x)}{\Delta x_i}(i=1,2).$$

Вывод. Производительность производственной функции (приближенно) показывает, на сколько единиц увеличится объем выпуска *y*, если объем затрат x_i *i*-го ресурса вырастает на одну (достаточно малую) единицу при неизменных объемах другого затрачиваемого ресурса. Здесь предельную величину $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$ целесообразно интерпретировать, используя близкое к ней отношение малых конечных величин, т.е. $\Delta_i f(x)$ и Δx_i. Отмеченное обстоятельство является ключевым для понимания экономического смысла ППФ $\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}$. С другими предельными величинами следует поступать аналогичным образом.

Пример 28. 1) Для $y = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2}$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Решение. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = a_0 x_1^{a_1 - 1} x_2^{a_2};\ A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = a_0 x_1^{a_1} x_2^{a_2 - 1};$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a^1 \cdot A_1;\ M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2 \cdot A_2;$$

$$\frac{M_1}{A_1} = a_1 \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1;\ \frac{M_2}{A_2} = a_2 \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Для ПФ $y = f(x)$ неравенства

$$M_1 \le A_1\ (i = 1, 2),$$

(т.е. предельная производительность i-го ресурса не больше средней производительности этого ресурса) обычно выполняются.

2) Для $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2\ (a_0 > 0, a_1 > 0, a_2 > 0)$ найти в явном виде A_1, A_2, M_1 и M_2.

Решение. Имеем:

$$A_1 = \frac{y}{x_1} = \frac{f(x)}{x_1} = \frac{a_0}{x_1} + a_1 + a_2 \frac{x_2}{x_1};\ A_2 = \frac{y}{x_2} = \frac{f(x)}{x_2} = \frac{a_0}{x_2} + a_1 \frac{x_1}{x_2} + a_2,$$

$$M_1 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = a_1,\ M_2 = \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} = a_2,$$

$$\frac{M_1}{A_1} \le 1 \Rightarrow M_1 \le A_1;\ \frac{M_2}{A_2} \le 1 \Rightarrow M_2 \le A_2.$$

Пусть $y = f(x)$ – производственная функция, $x = (x_1, x_2)$.

Определение: Отношение предельной производительности M_i i-го ресурса к его средней производительности A_i называется (частной) эластичностью выпуска по i-му ресурсу (по фактору производства).

Символика: $E_i = \dfrac{M_i}{A_i} = \dfrac{x_i}{f(x)} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i} (i = 1,2)$.

Определение: Сумма $E_1 + E_2 = E_x$ называется эластичностью производства.

Поскольку при малом приращении Δx_i имеем приближенное равенство

$$E_i = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}\right) \Big/ \left(\frac{f(x)}{x_i}\right) \approx \left(\frac{\Delta_i f(x)}{f(x)}\right) \Big/ \left(\frac{\Delta x_i}{x_i}\right)$$

(крайнее правое выражение есть отношение двух относительных величин $\dfrac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ и $\dfrac{\Delta x_i}{x_i}$), поскольку E_i (приближенно) показывает, на сколько процентов увеличится выпуск y, если затраты i-го ресурса увеличатся на один процент при неизменных объемах другого ресурса. Пояснение выражения E_i, содержащего предельную величину $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}$, с помощью выражения, содержащего конечное приближение $\dfrac{\Delta_i f(x)}{f(x)}$ этой предельной величины, является ключевым в понимании экономической сути частной эластичности выпуска по i-му ресурсу.[2,4,5,6,8]

Пример 29. 1). Выписать в явном виде для $y = a_0 x_1^{a_1} \cdot x_2^{a_2} \left(a_1 + a_2 = 1\right)$ выражения для E_1, E_2 и E_x.

Решение. Имеем:

$E_1 = a_1$, $E_2 = a_2$,

$E_x = E_1 + E_2 = a_1 + a_2$.

2). Для $y = a_1 x_1 + a_2 x_2$ $(a_0 = 0)$ выписать в явном виде выражения для E_1, E_2 и E_x.

Решение. Имеем:

$E_1 = \dfrac{x_1}{f(x)} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \dfrac{a_1 x_1}{a_1 x_1 + a_2 x_2}$; $E_2 = \dfrac{x_2}{f(x)} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_2} = \dfrac{a_2 x_2}{a_1 x_1 + a_2 x_2}$;

$E_x = E_1 + E_2 = 1$.

Пусть $y = f(x)$ – производственная функция, $x = (x_1, x_2)$.

Определение: Предельной нормой замены (замещения) *i*-го ресурса (фактора производства) *j*-м (аббревиатура: ПНЗФ и символика: R_{ij}) называется выражение

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} (i, j = 1, 2) \tag{10}$$

при постоянной *y*.

Обратим внимание на то, что *i* – номер заменяемого ресурса, *j* – номер замещающего ресурса. Используется также термин: предельная технологическая норма замены (замещения) *i*-ого ресурса (фактора производства) *j*-м ресурсом (фактором производства). Так же используют краткий (но не менее точный) термин: (предельная) норма замены (замещения) ресурсов.

Пусть выпуск *y* является постоянным (т.е. все наборы затрачиваемых ресурсов расположены на одной изокванте), тогда первый полный дифференциал *dy* ПФ $y = f(x)$ тождественно равен нулю:

$$0 = dy = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f(x)}{\partial x_2} dx_2$$

(здесь dx_1, dx_2 – дифференциалы переменных x_1, x_2), откуда, выражая первый дифференциал dx_j, получим ($i \neq j$):

$$dx_j = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \ (i, j = 1, 2), \tag{11}$$

откуда, поделив на dx_i, получим

$$\frac{dx_j}{dx_i} = -\frac{\frac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}} dx_i \ (i, j = 1, 2). \tag{12}$$

На основании (10), (11) и (12) имеем:

$$R_{ij} = -\frac{dx_j}{dx_i} = \frac{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_i}}{\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j}} > 0_i \ (i \neq j, i = 1, 2) \qquad (13)$$

Замечание:

1 Строгий вывод формулы (13) опирается в действительности на теорему о неявной функции (формулировка настоящем пособии не приводится).

2 Непосредственно проверяется, что для двухфакторной ПФ справедливо равенство

$$R_{12} = \frac{E_1}{E_2} \frac{x_1}{x_2}.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Найдите значения функций при заданных значениях независимых переменных:

а) $Y = 3K^{\frac{1}{4}}L^{\frac{3}{4}},\ K = 16,\ L = 81$;

б) $Y = 10\min\left\{\frac{K}{4}, \frac{L}{5}\right\},\ K = 12, L = 14$;

в) $Y = 0{,}25x_1 + 0{,}4x_2,\ x_1 = 100, x_2 = 80$;

г) $Y = \ln(x_1^2 + x_2^2 - 1),\ x_1 = 4,\ x_2 = 3$.

Задача 2. Определите, как изменится значение функции

$$Y = 10\min\left\{\frac{K}{4}, \frac{L}{5}\right\},$$

если $K \geq \frac{4}{5}L$ и

а) K увеличить на 3 единицы;

б) L уменьшить на 1 единицу;

в) K увеличить в 2 раза при неизменном значении другой переменной?

Задача 3. Процесс производства описывается с помощью степенной функции выпуска

$$Y = 0{,}5K^{\frac{1}{3}}L^{\frac{2}{3}}:$$

а) как следует изменить затраты K, чтобы компенсировать уменьшение L на 50% (Уровень выпуска при этом сохраняется)

б) на сколько процентов уменьшатся затраты K при увеличении L на 25 %?

в) как изменится выпуск, если затраты обоих ресурсов увеличить в 2 раза (уменьшить в 3 раза)?

г) во сколько раз надо увеличить затраты L, чтобы компенсировать уменьшение K в 4 раза?

7 Применение частных производных: задачи на экстремум

Для вычисления максимумов дохода, прибыли, минимума издержек в зависимости от нескольких переменных: ресурсов, производственных фондов используют задачи на экстремум (примеры 30, 31).

Напомним основные моменты из базового курса математики для нахождения экстремумов функций нескольких переменных.[5,8,9]

Определение: Частная производная функции $z = z(x; y)$ по аргументу, например, x является обыкновенной производной функции одной переменной x при фиксированном значении y.

Определение: Точка $M_0(x_0, y_0)$, в которой для дифференцируемой функции $z(x; y)$ выполняется условие (необходимое условие существования локального экстремума):

$$\begin{cases} z'_x(x_0; y_0) = 0 \\ z'_y(x_0; y_0) = 0 \end{cases},$$

называется критической точкой возможного экстремума или стационарной точкой.

Теорема (достаточное условие локального экстремума). Пусть в точке $M_0(x_0, y_0)$ и в некоторой ее окрестности все вторые частные производные функции $z(x;y)$ непрерывны. Тогда, если

$$\Delta = z''_{xx}(x_0, y_0) z''_{yy}(x_0, y_0) - [z''_{xy}(x_0, y_0)]^2 > 0,$$

то функция $z = z(x;y)$ имеет в точке M_0 локальный экстремум: минимум при $z''_{xx}(x_0; y_0) < 0$ и максимум при $z''_{xx}(x_0; y_0) > 0$. Если $\Delta \le 0$, то данная функция не имеет локального экстремума в точке M_0.

Пример 30. Небольшая фирма производит два вида товаров G_1 и G_2 и продает их по цене 1000 и 800 соответственно. Функция затрат (издержек) имеет вид:

$$C = 2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2,$$

где Q_1 и Q_2 обозначают объёмы выпуска соответственно товаров G_1 и G_2. [1,7]

Решение. Требуется найти такие значения Q_1 и Q_2, при которых прибыль, получаемая фирмой, максимальна.

Поскольку фирма небольшая, она не может монопольно устанавливать цены и вынуждена ориентироваться на рыночные цены, которые не зависят от объёмов производства Q_1 и Q_2 (эти объёмы слишком малы). Поэтому суммарный доход от продажи товаров G_1 и G_2

$$\mathrm{R} = 1000Q_1 + 800Q_2.$$

Прибыль π представляет собой разницу между доходом R и затратами C, поэтому

$$\pi = R - C = (1000Q_1 + 800Q_2) - \left(2Q_1^2 + 2Q_1Q_2 + Q_2^2\right),$$

или

$$\pi(Q_1, Q_2) = 1000Q_1 + 800Q_2 - 2Q_1^2 - 2Q_1Q_2 - Q_2^2.$$

- это функция двух переменных, максимум которой следует найти, т.е. решить задачу оптимизации.

Для того, чтобы найти стационарные точки, вычисляем частные производные первого порядка

$$\pi'_{Q_1}(Q_1, Q_2) = 1000 - 4Q_1 - 2Q_2,$$
$$\pi'_{Q_2}(Q_1, Q_2) = 800 - 2Q_1 - 2Q_2$$

и приравниваем их к нулю, что дает систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 1000 - 4Q_1 - 2Q_2 = 0, \\ 800 - 2Q_1 - 2Q_2 = 0. \end{cases}$$

При решении этой системы получим координаты стационарной точки. Вычитая из первого уравнения почленно второе, получаем

$$200 - 2Q_1 = 0,$$

или

$$Q_1 = 100.$$

Подставляя полученное значение в первое уравнение, находим

$$Q_2 = 300.$$

Таким образом, стационарная точка имеет координаты

$$(Q_1, Q_2) = (100{,}300).$$

Остается выяснить вопрос: имеем ли мы в стационарной точке максимум, минимум или не имеем ни того, ни другого. Для решения вычисляем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2} = -2$$

и оставляем выражение

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1 Q_2} \right)^2 = -4 \cdot (-2) - (-2)^2 = 4 \rangle\, 0.$$

Кроме того,

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_1^2} = -4 \,\langle\, 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial Q_2^2} = -2 \,\langle\, 0.$$

Поэтому в стационарной точке имеет место максимум. Подставляя координаты стационарной точки в функцию прибыли

$$\pi(100,300)=1000\cdot 100+800\cdot 300-2\cdot 100^2-2\cdot 100\cdot 300-300^2=170000.$$

Вывод. Максимальной прибыли, достигается при объёмах производства Q_1=100; Q_2=300.

Пример 31. Фирма реализует часть товара на внутреннем рынке, а другую часть поставляет на экспорт. Связь цены товара q_1 и его количества p_1, проданного на внутреннем рынке, описывается кривой спроса с уравнением:

$$p_1+q_1=500.$$

Аналогично для экспорта цена p_2 и количество q_2, также связаны соотношением (уравнением кривой спроса)

$$2p_2+3q_2=720.$$

Суммарные затраты даются выражением

$$C=50000+20(q_1+q_2).$$

Спрашивается какую ценовую политику должна проводить фирма, чтобы прибыль была максимальна.

Решение. Определим доход фирмы, который складывается из двух частей: продаж на внутреннем рынке

$$R_1=p_1q_1=(500-q_1)q_1=500q_1-q_1^2$$

и экспортных поставок

$$R_2=p_2q_2=(360-1{,}5q_2)q_2=360q_2-1{,}5q_2^2$$

(в обоих случаях цена берется из соответствующих кривых спроса).

Поэтому суммарный доход

$$R=R_1+R_2=500q_1-q_1^3+360q_2-1{,}5q_2^2.$$

Теперь можно легко найти получаемую фирмой прибыль

$$\pi(q_1,q_2)=R-C=\left(500q_1-q_1^2+360q_2-1{,}5q_2^2\right)-$$
$$-(50000+20q_1+20q_2)=480q_1-q_1^2+340q_2-1{,}5q_2^2-50000.$$

Эта функция двух переменных, нахождение максимума которой и решает задачу оптимизации.

Вычисляем частные производные первого порядка

$$\pi'_{q_1}(q_1, q_2) = 480 - 2q_1;\ \pi'_{q_2}(q_1, q_2) = 340 - 3q_2.$$

Приравнивая их к нулю, получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 480 - 2q_1 = 0, \\ 340 - 3q_2 = 0. \end{cases}$$

В данном случае система решается тривиально

$$q_1 = 240; \quad q_2 = 340/3,$$

и мы получили координаты единственной стационарной точки.

Далее вычисляем частные производные второго порядка

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2} = -2 \langle 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} = -3 \langle 0; \qquad \frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 q_2} = 0$$

и проверяем знак выражения

$$\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1^2}\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_2^2} - \left(\frac{\partial^2 \pi}{\partial q_1 q_2}\right)^2 = -2 \cdot (-3) - 0^2 = 6 \rangle 0.$$

Отсюда заключаем, что в стационарной точке (240,340/3) имеет место максимум.

Для того чтобы ответить на вопрос об оптимальной ценовой политике фирмы, подставляем координаты точки максимума в кривые спроса:

$$p_1 = 500 - q_1 = 500 - 240 = 260,$$
$$p_2 = 360 - 1{,}5q_2 = 360 - 1{,}5 \cdot 340/3 = 190.$$

Это и есть оптимальные цены для продажи на внутреннем рынке и по экспорту.

Нам осталось подсчитать максимальную прибыль при оптимальных объёмах продаж на внутреннем и внешнем рынках. Подставляя полученные значения q_1 и q_2 (координаты стационарной точки) в функцию прибыли, легко находим эту прибыль

$$\pi(240{,}340/3) = 480 \cdot 240 - 240^2 + 340(340/3) - 1{,}5(340/3)^2 - 50000 = 26866{,}67\,\mathbf{.}$$

Пример 32. Фирма-монополист производит два вида товаров G_1 и G_2 в количестве q_1 и q_2 соответственно. Функция затрат имеет вид:

$$C = 10q + q_1q_2 + 10q_2,$$

а кривые для спроса для каждого товара:

$$p_1 = 50 - q_1 + q_2,$$

$$p_2 = 30 + 2q_1 - q_2,$$

где p_1 и p_2 – цена единицы соответственно товаров G_1 и G_2. Кроме того, фирма связана ограничением на общий объём производства товаров G_1 и G_2, её квота составляет 15 единиц, т.е.

$$q_1+q_2=15.$$

Требуется найти максимальную прибыль, которая может быть достигнута при этом условии.[5]

Решение. Построим целевую функцию, в данном случае прибыли, которая определяется как разница между доходами и затратами:

$$\pi = R - C.$$

Для дохода от продажи товара G_1 имеем:

$$R_1 = p_1q_1 = (50 - q_1 + q_2)q_1 = 50q_1 - q_1^2 + q_1q_2,$$

где выражение для p_1 берется из кривой спроса товара G_1. Аналогично доход от продажи товара G_2:

$$R_2 = p_2q_2 = (30 + 2q_1 - q_2)q_2 = 30q_2 + 2q_1q_2 - q_2^2.$$

Очевидно, что суммарный доход будет

$$R = R_1 + R_2 = 50q_1 - q_1^2 + 3q_1q_2 + 30q_2 - q_2^2.$$

Поскольку затраты известны из условия задачи, то прибыль (целевая функция) имеет вид:

$$\pi(q_1, q_2) = R - C = (50q_1 - q_1^2 + 3q_1q_2 + 30q_2 - q_2^2) -$$

$$-(10q_1 + q_1q_2 + 10q_2) = 40q_1 - q_1^2 + 2q_1q_2 + 20q_2 - q_2^2.$$

Переписав ограничение в виде

$$g(q_1, q_2) = 15 - q_1 - q_2 = 0,$$

получаем задачу условной оптимизации (поиска условного экстремума). Для её решения применим метод Лагранжа.

Строим вспомогательную функцию

$$F(q_1, q_2, \lambda) = 40q_1 - q_1^2 + 2q_1q_2 + 20q_2 - q_2^2 + \lambda(15 - q_1 - q_2).$$

Вычисляем частные производные и приравниваем их к нулю:

$$F'_{q_1} = 40 - 2q_1 + 2q_2 - \lambda = 0,$$
$$F'_{q_2} = 2q_1 + 20 - 2q_2 - \lambda = 0$$
$$F'_{\lambda} = 15 - q_1 - q_2 = 0$$

Мы получили систему трех уравнений с тремя неизвестными. Представляем её в виде

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 - \lambda = -40, \\ 2q_1 - 2q_2 - \lambda = -20, \\ q_1 + q_2 = 15 \end{cases}$$

и решаем методом исключения. Для этого складываем первое и втрое уравнения, что дает

$$-2\lambda = -60; \qquad \lambda = 30.$$

Подставляя в первое уравнение полученное значение, получаем

$$\begin{cases} -2q_1 + 2q_2 = -10, \\ q_1 + q_2 = 15, \end{cases}$$

т.е. систему двух уравнений с двумя неизвестными. Решая её, легко находим

$$q_1 = 10; \qquad q_2 = 5.$$

Это и есть координаты точки условного экстремума, т.е. тот объём продаж, при котором прибыль максимальна. Соответствующее значение самой прибыли будет

$$\pi(10,5) = 40 \cdot 10 - 10^2 + 2 \cdot 10 \cdot 5 + 20 \cdot 5 - 5^2 = 475.$$

8 Метод наименьших квадратов

Для множества точек наблюдений $(x_i, y_i), i = 1, 2, ..., n$ можно попытаться выбрать различные типы кривых или прямую линию в зависимости от исходных данных. После подбора типа кривой можно проанализировать – какая кривая $y = f(x)$ является «ближайшей» к точкам наблюдений. В качестве критерия «близости» используется минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретически подобранных значений $f\left(a_1,...a_k,x_i\right)$, т.е. $\min\, z(a_1,...,a_k)$, где, $z(a_1,...,a_k)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-f(a_1,...a_k,x_i)\right]^2$, $k\in N$.[1,6]

Из теоремы дифференциального исчисления критическая точка на минимум находится из условий:

$$z'_{a_1}=0,\; z'_{a_2}=0, z'_{a_k}=0.$$

Замечание: Аналогичным образом можно выбрать наилучшую кривую по каждому типу кривой. Наиболее подходящим можно считать тот тип кривой, где будет наименьшее значение $z(a_1,...,a_k)$.

Наиболее часто используется функция вида $y=a_0+a_1x+...+a_nx^n$, при $n=1$ график – прямая, при $n=2$ график – парабола. Иногда рассматриваются функции: $y=ax^b$, $y=ab^x$, $y=a+\frac{b}{x}$, $y=\frac{A}{1+10^{a+bx}}+C$ и т.д.

Рассмотрим подробнее некоторые случаи.

Аппроксимация прямыми, параболами

Пусть имеется множество точек (x_i,y_i), $i=1,2,...,n$ наблюдений, через него всегда можно провести такую прямую $y=ax+b$, которая является «наилучшей» среди всех прямых, т.е. «ближайшей» к точкам наблюдений по их совокупности. [2,5,6] В качестве критерия близости, как было уже сказано, используется минимум суммы квадратов разностей наблюдений зависимой переменной y_i и теоретических, рассчитанных значений $a+bx_i$:

$$z(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(a+bx_i)\right]^2\to\min,$$

Для краткости далее обозначим $\sum\limits_{i=1}^{n}$ через $\sum\limits_{i}$.

Для нахождения минимума функции $z = z(a, b)$ находим:

$$\begin{cases} z'_a = 0 \\ z'_b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum_i (y_i - a - bx_i) = 0 \\ -2\sum_i (y_i - a - bx_i)x_i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_i y_i - na - b\sum_i x_i = 0 \\ \sum_i y_i x_i - a\sum_i x_i - b\sum_i x_i^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \bar{y} = a + b\bar{x},$$

$\bar{x}, \bar{y}$ – среднее арифметическое. Из системы получаем:

$$b = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2}, \ a = \bar{y} - b\bar{x}.$$

В случае необходимости аппроксимации статистических данных (x_i, y_i) квадратичной функцией $y = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x^2$ необходимо находить минимум функции

$$z(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2) \right]^2,$$

решая следующую систему:

$$\begin{cases} z'_{a_0} = 0 \\ z'_{a_1} = 0 \\ z'_{a_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\sum_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2) = 0 \\ -2\sum_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)x_i = 0 \\ -2\sum_i (y_i - a_0 - a_1 x_i - a_2 x_i^2)x_i^2 = 0 \end{cases}.$$

Пример 33. Исследовать характер изменения с течением времени уровня производства мяса и валового сбора зерна в 2000-2004 годов, располагая следующими статистическими данными:

Таблица 1 - **Данные по производству мяса и зерна в России**

Год	2000	2001	2002	2003	2004
Валовой сбор(млн.т.)	191,7	210,1	211,4	195,0	209,0
Производство мяса (млн.т.)	17,1	18,0	18,9	19,7	19,7

Решение. Очевидна тенденция к увеличению производства мяса, а нарастание валового сбора зерна в 2000-2004 гг. сменилось его уменьшением в дальнейшем. Поэтому имеет смысл искать зависимость производства мяса от времени в виде линейной функции, а изменение валового сбора зерна описать с помощью квадратичной функции с отрицательным старшим коэффициентом.

Вычисления значительно упростятся, если 2000 год примем за начало отсчета. Тогда таблица данных производства мяса примет вид:

Таблица 2 - **Приведенные данные производства мяса**

Год (x)	-2	-1	0	1	2
Производство мяса (y)	17,1	18,0	18,9	19,7	19,7

Применим метод наименьших квадратов. Результаты вычислений приведены в следующей таблице:

Таблица 3 - **Данные промежуточных вычислений**

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	-2	17,1	-34,2	2
2	-1	18,0	-18,0	1
3	0	18,9	0	0
4	1	19,7	19,7	1
5	2	19,7	39,4	4
$\sum$	0	93,4	6,9	10

Из системы для нахождения неизвестных коэффициентов, которая в данном случае примет вид

$$\begin{cases} 5a_0 = 93{,}4 \\ 10a_1 = 6{,}9 \end{cases},$$

находим $a_0 = 18{,}68,\ a_1 = 0{,}69$.

Искомая зависимость производства мяса от времени имеет вид

$$y = 18{,}68 + 0{,}69x.$$

Таблица 4 - **Приведенные данные валового сбора зерна**

Год (x)	-2	-1	0	1	2
Валовой сбор (y)	191,7	210,1	211,4	195,0	209,0

Применим метод наименьших квадратов, считая, что в данном случае имеет место зависимость $y = a_0 + a_1x + a_2x^2$.

Таблица 5 - **Результаты промежуточных вычислений**

i	x_i	y_i	x_iy_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i^2y_i$
1	-2	191,7	383,4	4	-8	16	766,8
2	-1	210,1	-210,1	1	-1	1	210,1
3	0	211,4	0	0	0	0	0
4	1	195,0	195,0	1	1	1	195,0
5	2	209,0	418,0	4	8	16	836,0
$\sum$	0	1017,2	19,5	10	0	34	2007,9

Из системы для нахождения неизвестных коэффициентов, которая в данном случае примет вид

$$\begin{cases} 34a_2 + 10a_0 = 2007{,}9 \\ 10a_1 = 19{,}5 \\ 10a_2 + 5a_0 = 1017{,}2 \end{cases},$$

находим $a_0 = 208{,}38,\ a_1 = 9{,}75,\ a_2 = -2{,}47$. Искомая зависимость производства мяса от времени имеет вид $y = 208{,}38 + 9.75x - 2{,}47x^2$.

Аппроксимация гиперболической функцией

В расчетах динамический ряд может быть описан уравнением гиперболы

$$y_x = a + \frac{b}{x}.$$

Для гиперболической зависимости способ наименьших квадратов дает такую систему нормальных уравнений (Σ понимается как $\sum\limits_{i=1}^{n}$):

$$na + b\sum \frac{1}{x} = \sum y$$

$$a\sum \frac{1}{x} + b\sum \frac{1}{x^2} = \sum \frac{y}{x}.$$

Решая это уравнение способом определителей, находим

$$a = \frac{\sum y \cdot \sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{y}{x}}{n\sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{x}};\ b = \frac{n\sum \frac{y}{x} - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum y}{n\sum\left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{x}}.$$

Пример 34. За период 2003-2008гг. известен товарооборот регионального склада (таблица 6). Сделайте прогноз товарооборота регионального склада на 2009-2010гг.[1,2,7]

Таблица 6 - **Товарооборот регионального склада за период 2004-2009гг.,**

млн. усл. ден. ед.

2003	2004	2005	2006	2007	2008
70	100	140	180	200	240

Решение. По данным таблицы 6 строим график изменения товарооборота. Она изменяется по гиперболе. Эта связь между указанными признаками соответствует уравнению гиперболы $y = a + b/x$. В этой формуле необходимо определить параметры a и b.

Для нахождения параметров a и b составим таблицу 7. Определив параметры a и b, мы составим уравнение гиперболы для прогнозирования товарооборота в 2009-2010гг.

Таблица 7 - **Таблица нахождения параметров *a* и *b***

X	$1/X$	$(1/X)^2$	$X = T$	$1/Y$	Y/X
1	1	1	70	0,01428	70,0
2	0,5	0,25	100	0,01000	50,0
3	0,33	0,109	140	0,00714	46,6
4	0,25	0,062	180	0,00055	45,0
5	0,2	0,04	200	0,00500	40,0
6		0,029	240	0,00416	40,0
Σ21	Σ2,45	Σ1,491	Σ930	Σ0,04113	Σ291,6

$$a = \frac{\sum y \cdot \sum \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{y}{x}}{n \sum \left(\frac{1}{x}\right)^2 - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{x}} = \frac{930 \cdot 1491 - 2,45 \cdot 291,6}{6 \cdot 1,491 - 2,45 \cdot 2,45} = 228,6 .$$

$$b = \frac{n \sum \frac{y}{x} - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum y}{n \sum \left(\frac{1}{n}\right)^2 - \sum \frac{1}{x} \cdot \sum \frac{1}{x}} = \frac{6 \cdot 291,6 - 2,45 \cdot 930}{6 \cdot 1,491 - 2,45 \cdot 2,45} = -179,9 .$$

Уравнение гиперболы для прогнозирования товарооборота:

$$T = Y = 228{,}6 - \frac{179{,}9}{x}.$$

Спрогнозируем товарооборот на 2008 и 2009гг.

$$T_{2009} = Y_5 = 228{,}6 - \frac{179{,}9}{x} = 206{,}1;$$

$$T_{2010} = Y_6 = 228{,}6 - \frac{179{,}9}{x} = 208{,}6.$$

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. В результате измерения соответствующих значений аргумента x получены значения y:

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Методом наименьших квадратов найти функциональную зависимость между x и y в виде $y = ax + b$.

Задача 2. Результаты измерения дали следующие результаты:

x	0	1	2	4	5
y	1	1,5	2	1	0

Аппроксимировать эти значения функцией $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ методом наименьших квадратов.

Задача 3. Найти показатель H_p – удельный показатель объема перевозок, отнесенный на 1 млн. руб. товарооборота в 2010г. В таблице 8 она выражается динамическим рядом. Динамика дает нам основание утверждать, что изменение этого показателя по годам имеет вид гиперболы. (Эта тенденция может быть принята за основу для прогнозирования этого показателя по уравнению гиперболы: $H_p = a + b/x$)

Таблица 8 - **Исходные данные для прогнозирования объема перевозок с регионального склада в 2006г.**

Показатель	Ед. изм.	Буквенное обозначение	Годы					
			2003	2004	2005	2006	2007	2008
Удельный показатель объема перевозок, отнесенный на 1 млн. руб. товарооборота	т/млн. руб.	H_p	3000	3800	4400	4700	5000	5200

9 Линейные экономические модели

Модель Леонтьева многоотраслевой экономики

Эффективное ведение народного хозяйства предполагает наличие баланса между отдельными отраслями.

Предположим, что вся производящая сфера народного хозяйства разбита на некоторое число n отраслей, каждая из которых производит свой однородный продукт, причем разные отрасли производят разные продукты. Разумеется, такое представление об отрасли является в значительной мере абстракцией, так как в реальной экономике отрасль определяется не только названием выпускаемого продукта, но и ведомственной принадлежностью своих предприятий (например, данному министерству, тресту и т.п.). Однако представление об отрасли в указанном выше смысле (как «чистой» отрасли) все же полезно, так как оно позволяет провести анализ сложившейся технологической структуры народного хозяйства, изучить функционирование народного хозяйства «в первом приближении».[1,2]

Предположим, что имеется n различных отраслей $O_1,\dots,O_n$, каждая из которых производит свой продукт. В дальнейшем отрасль O_i , будем называть «i-я отрасль». В процессе производства своего продукта каждая отрасль нуждается в продукции других отраслей (производственное потребление). Будем вести речь о некотором определенном промежутки времени $[T_0,\ T_1]$, (обычно таким промежутком служит плановый год) и введем следующие обозначения:

x_i – общий объем продукции отрасли i за данный промежуток времени – так называемый ***валовой выпуск*** отрасли i.

x_{ij} – объем продукции отрасли i, расходуемый отраслью j в процессе производства;

y_i – объем продукции отрасли i, предназначенный к потреблению в непроизводственной сфере – объем ***конечного потребления***. Этот объем составляет обычно более 75% всей производственной продукции. В него входят создаваемые в хозяйстве запасы, личное потребление граждан, обеспечение общественных потребностей (просвещение, наука, здравоохранение, развитие инфраструктуры и т.д.), поставки на экспорт.

Указанные величины можно свести в таблицу.

Таблица 9 - **Показатели работы отраслей**

Производственное потребление	Конечное потребление	Валовой выпуск
x_{11} x_{12} ... x_{1n}	y_1	x_1
x_{21} x_{22} ... x_{2n}	y_2	x_2
... ...	...	...
x_{n1} x_{n2} ... x_{mn}	y_n	x_n

Балансовый характер этой таблицы выражается в том, что при любом i = l, ..., n должно выполняться соотношение

$$x_i = x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in} + y_i, \tag{14}$$

означающее, что валовой выпуск x_i расходуется на производственное потребление, равное $x_{i1} + x_{i2} + ... + x_{in}$, и непроизводственное потребление, равное y_i. Будем называть (14) ***соотношениями баланса***.[4,7]

Единицы измерения всех указанных величин могут быть или натуральными (кубометры, тонны, штуки, киловатт-часы и т.п.), или стоимостными. В зависимости от этого различают ***натуральный*** и ***стоимостной*** межотраслевой балансы. Для определенности в дальнейшем будем иметь в виду (если не оговорено противное) стоимостной баланс.

В. Леонтьев, рассматривая развитие американской экономики в предвоенный период, обратил внимание на важное обстоятельство. А именно, величины $a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}$ остаются постоянными в течение ряда лет. Это обуславливается примерным постоянством используемой технологии.

В соответствии со сказанным сделаем такое допущение: для выпуска любого объема x_j продукции отрасли j необходимо затратить продукцию отрасли i в качестве $a_{ij}x_j$, где a_{ij} – постоянный коэффициент. Иначе говоря, материальные издержки пропорциональны объему производимой продукции. Это допущение постулирует ***линейность*** существующей технологии. Принцип линейности распространяется и на другие виды издержек (например, на оплату труда, а также на нормативную прибыль), согласно гипотезе линейности имеем

$$x_{ij} = a_{ij}\, x_j (i, j = 1, ..., n). \qquad (15)$$

Определение: Коэффициенты a_{ij} называют коэффициентами прямых затрат (коэффициент материалоемкости).

В предположении линейности соотношения (14) принимают вид:

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1$$

$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + y_n,$$

или, в матричной записи,

$$\overline{x} = A\overline{x} + \overline{y}, \qquad (16)$$

где

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, \overline{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Определение: Вектор $\overline{x}$ называется вектором валового выпуска, вектор $\overline{y}$ – вектором конечного потребления, а матрица A – матрицей прямых затрат.

Определение: Соотношение (16) называется уравнением линейного межотраслевого баланса. Вместе с изложенной интерпретацией матрицы A и векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ это соотношение называют также ***моделью Леонтьева***.[6]

Уравнения межотраслевого баланса можно использовать для целей планирования.

Задача: Для предстоящего планового периода $[T_0, T_1]$ задается вектор $\overline{y}$ конечного потребления. Требуется определить вектор $\overline{x}$ валового выпуска, т.е.

сколько следует произвести продукции различных видов, чтобы обеспечить заданный уровень конечного потребления?

Решение. В этом случае необходимо решить систему линейных уравнений (16) с неизвестным вектором $\overline{x}$ при заданных матрице A и вектору $\overline{y}$. При этом нужно иметь в виду следующие особенности системы (16):

1. Все компоненты матрицы A и вектора $\overline{y}$ неотрицательны (это вытекает из экономического смысла A и $\overline{y}$). Для краткости будем говорить о неотрицательности самой матрицы A и вектора $\overline{y}$ и записывать это так: $A \geq 0, \overline{y} \geq 0$.

2. Все компоненты вектора $\overline{x}$ также должны быть неотрицательными: $\overline{x} \geq 0$.

Замечание. Обратим внимание на смысл коэффициентов a_{ij} прямых затрат в случае стоимостного (а не натурального) баланса. В этом случае из (16) видно, что a_{ij} совпадает со значением x_{ij} при $x_j = 1$ (1 руб.).

Таким образом, a_{ij} есть стоимость продукции отрасли i, вложенной в 1 руб. продукции отрасли j. Отсюда видно, что стоимостной подход по сравнению с натуральным обладает более широкими возможностями, при таком подходе уже необязательно рассматривать «чистые», т. е. однопродуктовые отрасли. В случае многопродуктовых отраслей также можно говорить о стоимостном вкладе одной отрасли в выпуск 1 руб. продукции другой отрасли. Скажем, о вкладе промышленной сферы в выпуск 1 руб. сельскохозяйственной продукции или о вкладе промышленной группы А (производство предметов потребления). Вместе с тем надо понимать, что планирование исключительно в стоимостных величинах может легко привести к дисбалансу потоков материально-технического снабжения.

Пример 35. Таблица 10 содержит данные баланса трех отраслей промышленности за некоторый период времени. Требуется найти объем валового выпуска каждого вида продукции, если конечное потребление по отраслям увеличить, соответственно, до 60, 70 и 30 условных денежных единиц.[1,9]

Таблица 10 - **Показатели работы трех отраслей**

п/п	Отрасль	Потребление			Конечный продукт	Валовый выпуск
		1	2	3		
	Добыча и переработка углеводородов	5	35	40	40	100
	Энергетика	10	10	40	60	100
	Машиностроение	20	10	20	10	50

Решение. Выпишем векторы валового выпуска и конечного потребления и матрицу коэффициентов прямых затрат. Согласно формуле (16), имеем:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 100 \\ 100 \\ 50 \end{pmatrix}, \ \bar{y} = \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 10 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0{,}05 & 0{,}35 & 0{,}40 \\ 0{,}10 & 0{,}10 & 0{,}40 \\ 0{,}20 & 0{,}10 & 0{,}20 \end{pmatrix}.$$

Матрица A удовлетворяет обоим критериям продуктивности. В случае заданного увеличения конечного потребления новый вектор конечного продукта будет иметь

$$\bar{y} = \begin{pmatrix} 60 \\ 70 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Требуется найти новый вектор валового выпуска $\bar{x}_*$, удовлетворяющий соотношениям баланса в предположении, что матрица A не изменяется. В таком случае компоненты x_1, x_2, x_3 неизвестного вектора $\bar{x}_*$ находятся из системы уравнений, которая в матричной форме имеет следующий вид:

$$\bar{x}_* = A\bar{x}_* + \bar{y}_*, \text{ или } (E - A)\bar{x}_* = \bar{y}_*.$$

Матрица этой системы

$$(E-A)=\begin{pmatrix} 0,95 & -0,35 & -0,40 \\ -0,10 & 0,90 & -0,40 \\ -0,20 & -0,10 & 0,80 \end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных уравнений при заданном векторе правой части (например, методом Гаусса) дает новый вектор $\bar{x}_*$ как решение уравнений межотраслевого баланса:

$$\bar{x}_* = \begin{pmatrix} 152,6 \\ 135,8 \\ 92,5 \end{pmatrix}.$$

Вывод: Для того чтобы обеспечить заданное увеличение компонент вектора конечного продукта, необходимо увеличить соответствующие валовые выпуски: добычу и переработку углеводородов на 52,2 %, уровень энергетики – на 35,8 % и выпуск машиностроения – на 85 % – по сравнению с исходными величинами, указанными в таблице 10.

Продуктивные модели Леонтьева

Определение: Матрица А $\geq$ 0 называется продуктивной, если для любого вектора $\bar{y} \geq 0$ существует решение $\bar{x} \geq 0$ уравнения (16)

$$\bar{x} = A\bar{x} + \bar{y}.$$

В этом случае модель Леонтьева, определяемая матрицей A, тоже называется **продуктивной**.

Вывод. Модель Леонтьева продуктивна, если любой вектор $\bar{y} \geq 0$ конечного потребления можно получить при валовом выпуске $\bar{x} \geq 0$.

Нижеследующая теорема 1 показывает, что нет необходимости требовать существования решения $\bar{x} \geq 0$ уравнения (16) для ***любого вектора*** $\bar{y} \geq 0$. Достаточно, чтобы такое решение существовало ***хотя бы для одного вектора*** $\bar{y} \geq 0$.

Условимся в дальнейшем писать $\overline{y} \geq 0$ и называть вектор $\overline{y}$ положительным, если все компоненты этого вектора строго положительны.

Теорема (первый критерий продуктивности). Если $A \geq 0$ и для некоторого положительного вектора $\overline{y}^*$ уравнение (16) имеет решение $\overline{x}^* \geq 0$, то матрица A продуктивна.

Заметим, что на самом деле $\overline{x} > 0$, что следует из $\overline{x}^* = A\overline{x}^* + \overline{y}^*$ и $A \geq 0$, $\overline{x}^* \geq 0$, $\overline{y}^* \geq 0$.

Уравнение Леонтьева (16) можно записать следующим образом:

$$(E - A)\,\overline{x} = \overline{y}, \tag{17}$$

где E - единичная матрица.

Возникает, естественно, вопрос об обращении матрицы $E - A$.

Понятно, что если обратная матрица $(E - A)^{-1}$ существует, то из (17) вытекает

$$\overline{x} = (E - A)^{-1}\overline{y} \tag{18}$$

Теорема (второй критерий продуктивности). Матрица $A \geq 0$ продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E – A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

Доказательство. Если $(E – A)^{-1}$ существует и ≥ 0, то из формулы (18) следует продуктивность матрицы A.

Обратно, пусть матрица A продуктивна, Рассмотрим следующие системы уравнений:

$(E - A)\,\overline{x} = \overline{e_1}$, $(E - A)\,\overline{x} = \overline{e_2}$,..., $(E - A)\,\overline{x} = \overline{e_n}$, где e_1, e_2,…, e_n – столбцы единичной матрицы. Каждая из этих систем в силу продуктивности матрицы A имеет неотрицательное решение, т.е. существуют такие векторы (столбцы) $\overline{c_1} \geq 0$, $\overline{c_2} \geq 0$,..., $\overline{c_n} \geq 0$, что

$$(E - A)\,\overline{c_1} = \overline{e_1},\quad (E - A)\overline{c_2} = \overline{e_2},...,\quad (E - A)\,\overline{c_n} = \overline{e_n}. \tag{19}$$

Обозначим через C матрицу, составленную из столбцов $c_1, c_2, ..., c_n$. Тогда вместо n равенств (19) можно написать одно: $(E - A)C = E$.

Следовательно, матрица $(E - A)$ имеет обратную C, причем $C \geq 0$. ч.т.д.

Пример 36. Исследуем на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}6 \\ 0{,}9 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

Решение. В данном случае

$$E - A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -0{,}6 \\ -0{,}9 & 0{,}7 \end{pmatrix}$$

После необходимых вычислений, получаем матрицу $(E - A)^{-1}$, которая существует и равна

$$\begin{pmatrix} 35 & 30 \\ 45 & 40 \end{pmatrix}$$

Вывод. Эта матрица неотрицательна. Следовательно, A продуктивна.

Теорема (третий критерий продуктивности). Матрица А ≥ 0 продуктивна тогда и только тогда, когда сходиться бесконечный ряд.

$$E + A + A^2 + ... \qquad (20)$$

Замечание. Полученный нами критерий продуктивности матрицы A (сходимость ряда (20)) в ряде случаев может быть использован для проверки матрицы A на продуктивность. Покажем, что если сумма элементов любого столбца неотрицательной матрицы $A < 1$, то A продуктивна.[1,6,7] Действительно, пусть q - наибольшая из указанных сумм, $q < 1$. Тогда все элементы матрицы A не превосходят q. Из правила перемножения матриц легко вывести, что любой элемент матрицы A^2 не превосходит q^2:

$$(A^2)_{ij} = a_{i1}a_{jl} + a_{i2}a_{j2} + ... + a_{in}a_{nj} \leq q\ (a_{i1} + ... + a_{nj}) < q^2 < 1.$$

Точно так же получим, что элементы матрицы A^3 не превосходит q^3 и т.д. Отсюда следует сходимость ряда (20), а значит, и продуктивность матрицы A.

Пример 37. Для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0 & 0{,}6 \\ 0{,}2 & 0{,}7 & 0 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0{,}3 \end{pmatrix}$$

сумма элементов каждого столбца меньше единицы. Следовательно, А продуктивна.

Аналогично доказывается, что если в неотрицательной матрице A сумма элементов любой строки меньше 1, то матрица A продуктивна. Впрочем, то же самое можно вывести и из следующего предложения: если продуктивна матрица А, то продуктивна и матрица A^{T}, что следует из теоремы предыдущей теоремы.

Определение: Пусть $A \geq 0$ – продуктивная матрица. Запасом продуктивности матрицы A назовем такое число $\alpha > 0$, что все матрицы λA, где $1 < \lambda < 1 + \alpha$, продуктивны, а матрица $(1+\alpha)A$ – не продуктивна.

Пример 38. Выяснить, какой запас продуктивности имеет матрица A из примера 31.[7,8]

Решение. Будем руководствоваться вторым критерием продуктивности (существование неотрицательной матрицы $(E - A)^{-1}$). В данном случае

$$E - \lambda A = \begin{pmatrix} 1 - 0{,}2\lambda & -0{,}6\lambda \\ -0{,}9\lambda & 1 - 0{,}3\lambda \end{pmatrix}$$

Определитель этой матрицы

$$\Delta = \left|\mathring{A} - \lambda \grave{A}\right| = (1 - 0{,}2\lambda)(1 - 0{,}3\lambda) - 0{,}54\lambda^2 = -0{,}48\lambda^2 - 0{,}5\lambda + 1.$$

Обратной матрицей будет

$$\left(\mathring{A} - \lambda \grave{A}\right)^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1 - 0{,}3\lambda}{\Delta} & \dfrac{0{,}6\lambda}{\Delta} \\ \dfrac{0{,}9\lambda}{\Delta} & \dfrac{1 - 0{,}2\lambda}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Для продуктивности λA нужно, чтобы все элементы обратной матрицы были неотрицательны, т.е. $\Delta > 0$, $1-0{,}2\lambda \geq 0$, $1-0{,}3\lambda \geq 0$. Имеем $\Delta = 0$ при $\lambda_1 \approx -2{,}06$, $\lambda_2 \approx 1{,}015$. Отсюда матрица λA продуктивной при $\lambda < \lambda_2$, т.е. $\lambda < 1{,}015$.

Вывод. Запас продуктивности матрицы A равен 0,015.

Задания для самостоятельной работы

Задача 1. Отрасль состоит из четырех предприятий: вектор выпуска продукции и матрица коэффициентов прямых затрат имеют вид

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 400 \\ 300 \\ 250 \\ 300 \end{pmatrix}, \ A = \begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}10 & 0{,}24 & 0{,}25 \\ 0{,}20 & 0{,}15 & 0{,}36 & 0{,}17 \\ 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}20 & 0{,}15 \\ 0{,}30 & 0{,}15 & 0{,}20 & 0{,}15 \end{pmatrix}.$$

Найти вектор объемов конечного продукта, предназначенного для реализации вне отрасли.

Задача 2. Предприятие выпускает три вида продукции с использованием трех видов сырья, характеристики производства указаны в таблице 11.

Таблица 11 - **Данные по выпуску продукции**

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед./изд.			Запас сырья, вес. ед.
	1	2	3	
1	5	12	7	2350
2	10	6	8	2060
3	9	11	4	2270

Найти объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Задача 3. Исследовать на продуктивность матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{pmatrix}.$$

Найти запас продуктивности.

Линейные экономические модели: модель равновесных цен, модель международной торговли

Модель равновесных цен

Рассмотрим теперь балансовую модель, двойственную к модели Леонтьева – называемую ***модель равновесных цен***. [1,7,8]

Пусть A - матрица прямых затрат, $\overline{x} = (x_1, x_2,...,x_n)$ – вектор валового выпуска. Обозначим через $\overline{p} = (p_1, p_2, \dots p_n$ – вектор цен, i-я координата которого равна цене единицы продукции i-й отрасли; тогда, например, первая отрасль получит доход, равный p_1, x_1.

Часть своего дохода эта отрасль потратит на закупку продукции у других отраслей. Так, для выпуска единицы продукции ей необходима продукция первой отрасли в объеме a_{11}, второй отрасли в объеме a_{21}, n-й отрасли в объеме a_{n1} т. д. На покупку этой продукции будет затрачена сумма - равная $a_{11}\,p_1 + a_{21}\,p_2 + ... + a_{n1}\,p_n$. Следовательно, для выпуска продукции в объеме x_1 первой отрасли необходимо потратить на закупку продукции других отраслей сумму равную $x_1(a_{11}p_1 + a_{21}p_2 + ... + a_{n1}p_n)$. Оставшуюся часть дохода, называемую добавленной стоимостью, мы обозначим V_1 (эта часть дохода идет на выплату зарплаты и налогов, предпринимательскую прибыль и инвестиции).

Имеет место следующее равенство:

$$x_1\,p_1 = x_1\,(a_{11}\,p_1 + a_{21}\,p_2 + \ldots + a_{n1}\,p_n) + V_1.$$

Разделив это равенство на x_1 получаем

$$p_1 = (a_{11}\,p_1 + a_{21}\,p_2 + \ldots + a_{n1}\,p_n) + v_1,$$

где $v_1 = \dfrac{V_1}{x_1}$ – норма добавленной стоимости (величина добавленной стоимости на единицу выпускаемой продукции).

Подобным же образом получаем для остальных отраслей

$$p_2 = a_{12}\, p_1 + a_{22}\, p_2 + \ldots + a_{n2}\, p_n + v_2$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p_n = a_{1n}\, p_1 + a_{2n}\, p_2 + \ldots + a_{nn}\, p_n + v_2$$

Найденные равенства могут быть записаны в матричной форме следующим образом:

$$\overline{p} = A^{\mathrm{T}}\,\overline{p} + \overline{v}, \qquad (21)$$

где $\overline{v} = (v_1, v_2 \ldots, v_n)$ - вектор норм добавленной стоимости.

Замечание. Полученные уравнения очень похожи на уравнения модели Леонтьева с той лишь разницей, что $\overline{x}$ заменен на $\overline{p}$, $\overline{y}$ – на $\overline{v}$, A – на A^{T}.

Модель равновесных цен позволяет, зная величины норм добавленной стоимости, прогнозировать цены на продукцию отраслей. Она также позволяет прогнозировать изменение цен и инфляцию, являющиеся следствием изменения цены в одной из отраслей.

Пример 39. Рассмотрим экономическую систему, состоящую из трех отраслей. Назовем их условно: топливно-энергетическая отрасль, промышленность и сельское хозяйство.[1,7] Пусть

$$A^T = \begin{pmatrix} 0{,}1 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}2 \end{pmatrix}$$

- транспонированная матрица прямых затрат, $\overline{v} = (4;10;4)$
- вектор норм добавленной стоимости.

Определим равновесные цены. Для этого, как и в модели Леонтьева, воспользуемся формулой (21):

$$\overline{p} = C^T\,\overline{v},$$

где $C^T = (E - A^T)^{-1}$ транспонированная матрица полных затрат.

После необходимых вычислений имеем

$$C^T = \frac{1}{0,444}\begin{pmatrix} 0,58 & 0,14 & 0,18 \\ 0,28 & 0,68 & 0,24 \\ 0,25 & 0,29 & 0,69 \end{pmatrix}$$

Отсюда получаем, что $\overline{p} = C^T \overline{v} = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Предположим, что в топливно-энергетической отрасли произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,11. Определим равновесные цены в этом случае. Принимая во внимание, что $\overline{v} =$ (5,11;10;4), находим, что

$$\overline{p} = C^T \overline{v} = \begin{pmatrix} 11,45 \\ 20,7 \\ 15,625 \end{pmatrix}$$

В результате, продукция первой отрасли подорожала на 14,5 %, второй - на 3,5 % третьей отрасли - на 4,17 %. Нетрудно также, зная объемы выпуска, подсчитать вызванную этим повышением инфляцию.

Модель международной торговли.
Собственные векторы и собственные значения матриц

На вопрос, какими должны быть соотношения между государственными бюджетами стран, торгующих между собой, чтобы торговля была взаимовыгодной, т.е. не было значительного дефицита торгового баланса для каждой из стран-участниц, - ответом служит модель международной торговли (кратко: модель обмена).[6,7]

Проблема достаточно важна, так как дефицит в торговле между странами порождает такие явления, как лицензии, квоты, таможенные пошлины и даже торговые войны.

Рассмотрим три страны-участницы торговли с государственными бюджетами (для простоты изложения) X_1, X_2, X_3, которые условно назовем Италия, Германия, и Оман. Будем считать, что весь госбюджет каждой страны тратится на закупки товаров либо внутри страны, либо на импорт из других стран. Пусть, скажем, Италия тратят половину своего бюджета на закупку товаров внутри страны, $1/4$ бюджета – на товары из Германии, оставшуюся $1/4$ бюджета – на товары из Омана. Оман, в свою очередь, тратит $1/2$ бюджета на закупки в Германии и ничего не закупает внутри страны.

Введем структурную матрицу торговли:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} \text{Италия} & \text{Германия} & \text{Оман} \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Пусть a_{ij} – часть госбюджета, которую j-я стана тратит на закупки товаров i-й страны. При этом, заметим, что сумма элементов матрицы A в каждом столбце равна единице.

После подведения итогов торговля за год страна под номером i получит выручку $p_i = a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + a_{i3}X_3$. К примеру, Италия будут иметь выручку

$$p_1 = \frac{1}{2}X_1 + \frac{1}{3}X_2 + \frac{1}{2}X_3$$

доля Италии доля Германии доля Омана

Для того чтобы торговля была сбалансированной, необходимо потребовать бездефицитность торговли для каждой страны:

$$p_i \geq X_i \text{ для всех } i$$

Предложение 1. Условием бездефицитной торговли являются равенства $p = X_i$, $i = 1,2,3$.

В матричной форме утверждение, содержащееся в предложении 1, выглядит следующим образом:

$$AX = X, \tag{22}$$

где

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = (X_1, X_2, X_3)^T$$

Обобщая равенства (22) рассмотрим следующее.

Определение: Ненулевой вектор $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ называется собственным вектором квадратной матрицы A порядка n, если

$$A\bar{x} = \lambda \bar{x} \tag{23}$$

где λ – некоторое число.

Определение: λ называется собственным значением матрицы A. Говорят так: $\bar{x}$ есть собственный вектор матрицы A, принадлежащий ее собственному значению λ.[6]

Пример 40. Найдем собственные векторы и собственные значения следующей матрицы второго порядка:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Решение. Положим $\bar{x} = (x_1, x_2)^T$ – вектор - столбец. Тогда из соотношения (23) следует, что

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

т.е.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = \lambda x_1 \\ -x_1 + 4x_2 = \lambda x_2 \end{cases},$$

или

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + (4-\lambda)x_2 = 0 \end{cases}, \qquad (24)$$

Если вектор $\overline{x}$ – собственный, то это означает, что однородная система уравнений (24) имеет ненулевое решение. Согласно последней теореме это условие эквивалентно тому, что определитель системы (24) равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ -1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$. Таким образом, собственными значениями матрицы A будут числа 2 и 3.

Найдем соответствующие собственные векторы. Подставим λ_1=2 и λ_2=3 в систему (24)

λ_1=2

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$

$x_1 = 2t, x_2 = t,$

$\overline{x} = t(2,1), t \neq 0,$

λ_2=3

$$\begin{cases} -2x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 + x_2 = 0, \end{cases}$$

$x_1 = t, x_2 = t,$

$\overline{x} = t(1,1), t \neq 0,$

Однородная система уравнений $(A - \lambda E)\overline{x} = 0$ тогда и только тогда имеет ненулевое решение, когда ее определитель равен нулю:

$$|A - \lambda E| = 0$$

Если раскрыть данный определитель, то получится многочлен степени n

относительно λ , называемый ***характеристическим многочленом*** матрицы A.

Определение: Уравнение

$$|A - \lambda E| = 0$$

называется характеристическим уравнением матрицы A.

Определение: Собственные значения матрицы А являются корнями ее характеристического уравнения.

Пример 41. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Запишем характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0,$$

или $(3-\lambda)^3 = 0$. Следовательно, $\lambda - 3$ – единственное собственное значение матрицы A. Система уравнений для отыскания собственных векторов сводиться к единственному уравнению:

$$x_1 + x_2 = 0,$$

т.е. собственный вектор x = $(-a,\ a,\ b)$ представляется в виде линейной комбинации

$$\bar{x} = (-1;1;0) + b(0;0;1)$$

двух линейно независимых векторов $\overline{a_1} = (-1;1;0)$ и $\overline{a_2} = (0;0;1)$.

Вернемся к отысканию собственного вектора X в модели международной торговли. Система уравнений для нахождения X примет вид:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Нетрудно найти общее решение этой системы:

$$\begin{cases} X_1 = 2X_3 \\ X_2 = \frac{3}{2} X_3, \end{cases}$$

поэтому в качестве собственного вектора можно взять вектор

$$\overline{X} = (4;\ 3;\ 2)$$

Вывод. Сбалансированность торговли этих трех стран может быть достигнута только в том случае, когда госбюджеты находятся в отношении

$$X_1 : X_2 : X_3 = 4 : 3 : 2$$

Определение: Максимальное по модулю собственное значение неотрицательной матрицы А называется числом Фробениуса матрицы А, а соответствующий ему неотрицательный собственный вектор - вектором Фробениуса для А.

Понятие собственного значения, а также понятие вектора Фробениуса неотрицательной матрицы A позволяют по - новому подойти к вопросу о продуктивности модели Леонтьева.[6,8]

Теорема. Неотрицательная квадратная матрица А продуктивна тогда и только тогда, когда ее число Фробениуса меньше единицы.

Задания для самостоятельной работы

Экономическая система состоит из 3 отраслей: топливно-энергетическая, промышленность, сельское хозяйство. Пусть

$$A^T = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,1 & 0,1 \\ 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,2 & 0,1 & 0,2 \end{pmatrix} -$$

– транспонированная матрица прямых затрат, $\bar{v} = \{3, 8, 4\}$ – вектор норм добавленной стоимости.

1. Определить равновесные цены.

2. Определить равновесные цены, если произойдет увеличение нормы добавленной стоимости на 1,1 в топливно-энергетической отрасли.

Список использованных источников

1 Замков, О.О. Математические методы в экономике / О.О. Замков – М.: МГУ, 2008. –368 с.

2 Математические методы и модели в планировании / А.И. Карасев – М.: Экономика, 2007. – 353 с.

3 Коршунова, Н.И. Математика в экономике / Н.И Коршунова - М.: Вита-Пресс, 2008. –368 с.

4 Красс,М.С. Математика для экономистов / М.С. Красс, Б.П. Чупрынов – СПб.: Питер, 2006. – 464 с.

5 Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов / Н.Ш. Кремер [и др.] – М.: ЮНИТИ, 2009. –471с.

6 Лопатников, Л.И. Краткий экономико-математический словарь / Л.И. Лопатников – М.: Наука, 1987. – 450с.

7 Карасева, А.И. Руководство к решению задач с экономическим содержанием по курсу высшей математики / под ред. А.И. Карасева и Н.Ш. Кремера. – М.: Экономическое образование, 2006. – 210 с.

8 Солодовников, А.С. Математика в экономике в 2-х ч. / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов – М.: Финансы и статистика, 2006, Ч.1. – 276 с.

9 Солодовников, А.С. Математика в экономике / А.С. Солодовников, В.А. Бабайцев, А.В. Браилов – М.: Финансы и статистика, 2009. –224 с.